101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 1. Kolik různých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran má obvod 7? Které to jsou?

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 2. V růžovém království se platí mincemi v hodnotě 3 a 7. Určete největší částku, která se nedá pomocí těchto mincí přesně zaplatit.

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 3. V cukrárně prodávají kremrole, věnečky a trubičky. Kolika způsoby si můžeme koupit právě 6 sladkostí, jestliže chceme od každého druhu alespoň jednu, ale nejvýš dva věnečky?

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 4. Máme pět červených karet s čísly $1, 2, 3, 4, 5$ a čtyři modré s čísly $3, 4, 5, 6$. Jak je potřeba všechny karty uspořádat do řady, aby se střídaly barvy a každé číslo na modré kartě bylo dělitelné čísly na sousedních kartách?

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 5. Čtverci o obsahu S_1 je vepsána kružnice k a té je vepsán rovnostranný trojúhelník o obsahu S_2. Určete poměr obsahů $\frac{S_1}{S_2}$.

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 6. Najděte všechna reálná čísla x, která pro libovolné reálné y splňují

$$8xy - 12y + 2x - 3 = 0.$$

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 7. Na strany čtverce $ABCD$ se stranou délky 1 umístíme zvenku rovnostranné trojúhelníky ABK, BCL, CDM a DAN. Spočtěte obsah čtyřúhelníka $KLMN$.

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 8. Najděte největší násobek čísla 8, v jehož desítkovém zápisu jsou každé dvě cifry různé. Poznámka: desítkový zápis je běžně používaný zápis číslicemi 0 až 9.

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 9. U cesty stojí dva sloupy vysoké 4 a 6 metrů. Z vršku každého z nich vede napnuté lano do spodku druhého. V jaké výšce se lana protínají?

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 10. Jaký je ciferný součet čísla $25^{64} \cdot 32^{25}$?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 11. Účastníci Jardáč, Franta a Kenny vyhráli na Náboji hromadu cukru, kterou si mají rozdělit mezi sebou v poměru 1 : 2 : 3. Pro cenu si však každý z nich přišel jindy a vždy si myslel, že dorazil jako první, tedy sebral si pouze část, která mu podle poměru patřila. Kolik cukru organizátorům soutěže po návštěvě všech tří účastníků zůstalo?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 12. Pavel a Rasťo si povídali celý večer. Když už jim ale došly nápady, začal Pavel vyjmenovávat všechny dvouprvkové podmnožiny $\{1, 2, \ldots 10\}$. Rasťo si pokaždé zapsal do notýsku menší ze dvou čísel, která Pavel řekl. Když Pavel s vyjmenováváním skončil, Rasťo všechna čísla v notýsku sečetl. Kolik mu vyšlo?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 13. Rovnice $x^2 + ax + b = 0$ má řešení a a b. Najděte všechny takové dvojice (a, b).

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 14. Součet několika (ale nejméně dvou) po sobě jdoucích přirozených čísel je 1000. Jaké největší číslo mezi nimi může být?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 15. Zuzka s Háňou hrají následující hru. Na začátku mají přirozené číslo n a povolený tah je k němu přičíst 1 nebo odečíst 3. Kdo dosáhne 0, vyhrává; tah do záporného čísla je zakázaný. Pro která n může Zuzka, která začíná, vždy, nezávisle na tazích Háni, vyhrát?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 16. Pavel jednou vzal obdélníkový kus papíru, ustřihl mu roh, čímž získal pětiúhelník a trojúhelník. Pak si všiml, že strany pětiúhelníka mají délku 10, 17, 18, 24 a 39 v nějakém pořadí. Dokážete určit, jaké byly původní rozměry papíru a jak dlouhé strany měl odstřižený trojúhelník?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 17. Žabák Jardáč skáče pouze celočíselné vzdálenosti. Jednou skákal po úsečce AB dlouhé 8^8 z bodu A do bodu B. Vždy nejprve skočil polovinu vzdálenosti zbývající do bodu B, dalším skokem skočil polovinu předchozího skoku zpět. Poté zase polovinu vzdálenosti k bodu B a polovinu zpět, a tak dále. Kolik skoků by udělal, než by poprvé musel skočit neceločíselně?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 18. Nalezněte nejmenší přirozené číslo začínající číslicí 6, které se po odebrání této první číslice zmenší na $\frac{1}{25}$ své původní hodnoty.

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 19. Pro kolik přirozených čísel k platí $\mathrm{nsn}(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$? Poznámka: $\mathrm{nsn}(a, b, c)$ značí nejmenší společný násobek čísel a, b, c.

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 20. Zjednodušte výraz

$$\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+\ldots+n\cdot 2n\cdot 4n}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+\ldots+n\cdot 3n\cdot 9n}}.$$

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 21. Pro přirozená čísla a, b, c platí, že $abc = 78$ a $a^2 + b^2 + c^2 = 206$. Zjistěte součet $a + b + c$.

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 22. Jarda si vybral pět čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a řekl Zuzce jejich součin. Zuzka se snažila zjistit, zda je součet Jardových čísel sudý nebo lichý. Po chvíli usoudila, že se to zjistit nedá. Jaký byl onen součin, který Jarda Zuzce pověděl?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 23. Každá ze tří skříněk má dvě zásuvky, v každé zásuvce je jeden drahokam. V jedné skříňce jsou dva rubíny, v druhé jeden rubín a jeden smaragd a v poslední dva smaragdy. Zvolili jsme si náhodně skříňku a v ní zásuvku. Jestliže jsme v první zásuvce našli rubín, s jakou pravděpodobností bude i ve druhé rubín?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 24. Kolik existuje čtyřciferných čísel $abcd$ takových, že pro jejich cifry platí $0 < a < b < c < d \leq 9$?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 25. V rovnoramenném lichoběžníku mají základny délky 8 a 18. Navíc se lichoběžníku dá vepsat kružnice. Jaký je její poloměr?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 26. Najděte největší podmnožinu množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ takovou, že každé dva její prvky jsou nesoudělné, tedy nemají žádného společného dělitele.

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 27. Pro která všechna přirozená čísla n platí, že $6n$ je dělitelné číslem $6 + n$?

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 28. Mějme kružnici k se středem S o poloměru 1 a bod P takový, že $|PS| = 3$. Tímto bodem veďme tečny ke kružnici k, které se jí dotknou v bodech A, B. Dále si zvolme libovolný bod T kratšího oblouku AB kružnice k a jím veďme tečnu ke kružnici k. Tato tečna protne úsečky AP a BP v bodech X a Y. Určete obvod trojúhelníka PXY.

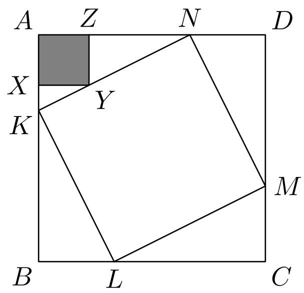
101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 29. V krychli si vyznačme několik bodů: všechny vrcholy, všechny středy hran, všechny středy stěn a střed krychle. Kolik jsme jich vyznačili? Kolik existuje přímek takových, že procházejí právě dvěma vyznačenými body?

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 30. Čtverci $ABCD$ se stranou délky 1 je vepsaný čtverec $KLMN$ tak, že body K, L, M a N leží po řadě na stranách AB, BC, CD a DA. Body X, Y a Z leží po řadě na úsečkách AB, KN a DA tak, že $AXYZ$ je čtverec. Vyjádřete obsah čtverce $AXYZ$, jestliže víte, že obsah čtverce $KLMN$ je S.



---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 31. Jak lze rozdělit kruh na 7 částí se stejným obsahem jenom s pomocí pravítka (bez míry, bez délek, pravítko může být libovolně dlouhé) a kružítka? Není nutné rýsovat, ale je nutné ukázat postup konstrukce.

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 32. V trojúhelníku ABC je těžnice na stranu a kolmá na těžnici na stranu b. Určete délku strany c, víte–li navíc $a = 8$, $b = 6$.

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 33. Nad přeponou DO pravoúhlého trojúhelníku DOM leží zvenku čtverec $DINO$. Určete $|MI|$, víte-li $|MD| = 6$ a $|MO| = 8$.

---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 34. Určete počet řešení rovnice

$$\sin(\pi x) = \frac{x}{100}.$$

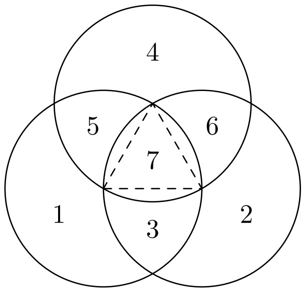
---

101 Střední škola, město *Zadání - Náboj 2008*

Úloha 35. Kenny, Luboš a Monika postupně házejí poctivou mincí (pravděpodobnosti padnutí orla a panny jsou stejné). Všichni tři hrají hru, která vypadá následovně. Nejprve hodí Kenny, pak Luboš, pak Monika, pak zase Kenny, tak pořád dokola, dokud prvnímu z nich nepadne panna, a to je vítěz. S jakou pravděpodobností vyhraje Luboš?

Úloha 36. V rovině leží 8 bodů tak, že žádné tři neleží na jedné přímce. Kolik nejvíc trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech lze vytvořit tak, aby měla každá dvojice trojúhelníků společný nejvýše jeden vrchol? Poznámka: překrývání trojúhelníků je povolené.

Úloha 37. Kuba s Pavlem namalovali na zeď tři kruhy, jejichž středy leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka se stranou délky 1 a poloměry rovnými délce strany. Vzniklo jim sedm částí a každou by chtěli natřít jinou barvou. Kolik je bude celý obrazec stát, jestliže ceny natření jedné čtvereční jednotky jsou jako na obrázku níže?



Úloha 38. Vypočtěte hodnotu $\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ$.

Úloha 39. Funkce $f(x)$ splňuje $f(3x) = 3f(x)$ pro všechna reálná x, dále $f(x) = 1 - |x - 2|$ pro x z intervalu $[1, 3]$. Najděte nejmenší kladné x, pro které platí $f(x) = f(2008)$.

Úloha 40. Kouzelný automat umí vyplatit částku n pomocí mincí v hodnotě od 1 do n. Kolika způsoby to může udělat, jestliže má dostatek každé hodnoty platidla? Při vyplácení záleží na pořadí.

Úloha 41. Najděte největší n takové, že $2^n \mid (3^{1024} - 1)$.

Úloha 42. Nechť x je největší dvojciferné přirozené číslo, pro které existuje celé číslo y a prvočíslo z tak, že platí $x^2 + 2y^2 + 3xy = 5z^2$. Která jsou čísla x, y a z?

Úloha 43. Víme, že pro reálná čísla a, b, c platí $a - 7b + 8c = 4$ a $8a + 4b - c = 7$. Jakých hodnot může nabývat $a^2 - b^2 + c^2$?

Úloha 44. Najděte přirozené číslo n, pro které platí

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Úloha 45. Uvažujme posloupnosti skládající se pouze z písmen A a B takové, že každý souvislý úsek po sobě jdoucích písmen A (který už nejde prodloužit) má sudou délku a úsek písmen B lichou délku. Jsou to například $AABBB$, B, $BAAAABBB$. Najděte počet takových posloupností délky 14.

Úloha 46. V trojúhelníkové tabulce čísel jsou v prvním řádku čísla $1, 3, 5, \ldots, 99$. Každý další řádek má o jedno číslo méně a jeho členy jsou součty čísel nad ním (takže druhý řádek je $4, 8, \ldots, 196$). Kolik čísel z trojúhelníka je dělitelných 67?

Úloha 47. Najděte počet osmic nezáporných celých čísel $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ splňujících $0 \leq a_k \leq k$ pro $k = 1, 2, 3, 4$, a

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 5b_4 = 19.$$