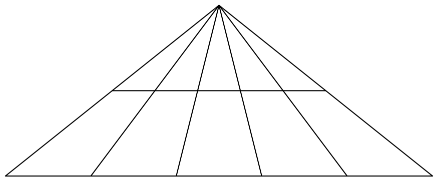
Úloha 1. Před třemi lety bylo Lucienově mamince třikrát tolik let co Lucienovi. Nyní je pro změnu Lucienovu tatínkovi třikrát tolik co Lucienovi. Jaký je věkový rozdíl Lucienových rodičů (udejte v letech)?

Výsledek. 6

Řešení. Je-li současný Lucienův věk x, pak Lucienově mamince je $3(x-3)+3=3x-6$ a Lucienovu tatínkovi $3x$. Věkový rozdíl Lucienových rodičů je tedy 6 let.

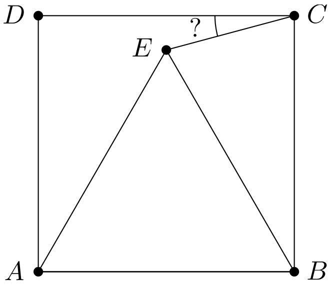
Úloha 2. Kolik trojúhelníků je na obrázku?



Výsledek. 30

Řešení. Všechny trojúhelníky na obrázku mají společný horní vrchol. Protější strana každého z trojúhelníků navíc leží na jedné ze dvou vodorovných úseček. Každý trojúhelník je tedy určen výběrem vodorovné úsečky a dvou různých vrcholů na této úsečce. Jelikož je na každé vodorovné úsečce právě šest vrcholů, dostaneme celkem $2\cdot(5+4+3+2+1)=30$ různých trojúhelníků.

Úloha 3. Uvnitř čtverce $ABCD$ leží bod E tak, že trojúhelník ABE je rovnostranný. Jaká je velikost úhlu DCE ve stupních?



Výsledek. 15

Řešení. Vnitřní úhly v rovnostranném trojúhelníku mají velikost 60°, tudíž $|\sphericalangle CBE| = 90^\circ - |\sphericalangle EBA| = 30^\circ$. Protože platí $|EB|=|AB|=|BC|$, je trojúhelník BCE rovnoramenný a

$$|\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle BEC| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle CBE|) = 75^\circ.$$

Odtud už lehce spočteme $|\sphericalangle DCE| = 90^\circ - |\sphericalangle ECB| = 15^\circ$.

Úloha 4. Malý Honzík vlastní velkou truhlu plnou mincí různých hodnot. Jeho mince však nejsou jen tak ledajaké – konkrétně má právě jednu minci o hodnotě 1, dvě mince o hodnotě 2, …, osmnáct mincí o hodnotě 18 a devatenáct mincí o hodnotě 19. Ze své truhly postupně vytahuje mince jednu po druhé, aniž by se díval na jejich hodnotu. Jaký nejmenší počet mincí musí Honzík vytáhnout, aby měl jistotu, že je mezi nimi deset mincí o stejné hodnotě?

Výsledek. 136

Řešení. Mohlo by se stát, že Honzík vytáhne všechny mince o hodnotě menší než 10 a po devíti mincích od každé hodnoty mezi 10 a 19. To je dohromady $(1+2+\cdots+9)+9\cdot 10=135$. Proto mu ani vyjmutí 135 mincí nezaručuje, že bude mít deset o stejné hodnotě.

Pokud jich však vytáhne 136, bude mít alespoň 91 z nich hodnotu větší než 9. Z Dirichletova principu pak víme, že musí být vytaženo alespoň 10 mincí nějaké hodnoty mezi 10 a 19. Proto je 136 hledaným minimálním počtem mincí, který Honzíkovi zaručí, že mezi vytaženými mincemi bude alespoň deset mincí stejné hodnoty.

Úloha 5. Pan Sladký koupil svým třem dcerám za vysvědčení výtečnou čokoládovou bonboniéru. Sám však neodolal, otevřel ji a snědl polovinu všech bonbonů ještě předtím, než nabídl první dceři. Poté snědl polovinu zbývajících bonbonů a nabídl druhé dceři. Nakonec opět snědl polovinu zbytku a třetí dcera bonboniéru dojedla. Jestliže každá z dcer snědla přesně tři bonbony, kolik bonbonů obsahovala bonboniéra na začátku?

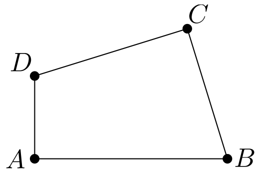
Výsledek. 42

Řešení. Je-li n celkový počet bonbonů v bonboniéře, pak můžeme proces jejich rozdělení mezi pana Sladkého a jeho tři dcery zachytit rovnicí

$$\left(\left(\frac{n}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3\right)\cdot\frac{1}{2}-3=0.$$

Jejím řešením je $n=42$.

Úloha 6. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník s pravými úhly u vrcholů A a C. Je-li $|BC| = 6$, $|CD| = 8$ a $|DA| = 2$, určete obsah čtyřúhelníku $ABCD$.



Výsledek. $24 + 4\sqrt{6}$

Řešení. Z Pythagorovy věty dostáváme $|BD| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ a dále

$$|AB| = \sqrt{|BD|^2 - |AD|^2} = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je tedy

$$\frac{1}{2}(6 \cdot 8 + 2 \cdot 4\sqrt{6}) = 24 + 4\sqrt{6}.$$

Úloha 7. Kancelářská tiskárna umí tisknout jednostranně nebo oboustranně. Při jednostranném tisku se jedna stránka vytiskne za tři sekundy, při oboustranném trvá vytištění jednoho listu devět sekund. Bára potřebuje oboustranně vytisknout článek, který má osmnáct stran. Buď může vytisknout vše oboustranným tiskem, nebo nejprve vytiskne jednostranně liché stránky, poté ručně přesune potištěné listy zpět do zásobníku a následně jednostranně vytiskne sudé stránky. Víme-li, že obě varianty jsou stejně časově náročné, kolik sekund jí trvá ruční přesun všech vytištěných stránek zpět do zásobníku?

Výsledek. 27

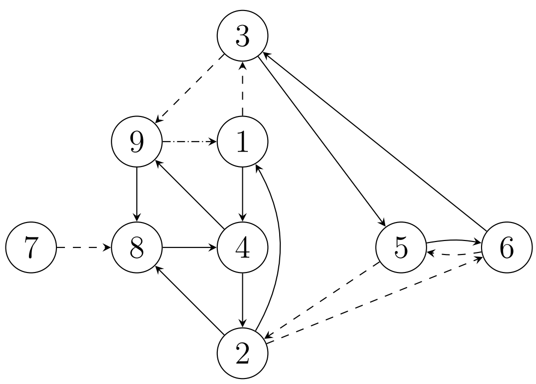
Řešení. Bára potřebuje vytisknout devět listů. Oboustranný tisk jí zabere $9 \cdot 9 = 81$ sekund, jednostranný tisk pak $2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$ sekund čistého času. Přesun stránek zpět do zásobníku jí tedy trvá $81 - 54 = 27$ sekund.

Úloha 8. Najděte všechna devíticiferná čísla A, která splňují následující podmínky:

- Každou z číslic $1, \ldots, 9$ obsahují právě jednou.
- Každé dvojciferné číslo tvořené dvěma sousedními ciframi čísla A (při zachování pořadí) je dělitelné 7 nebo 13.

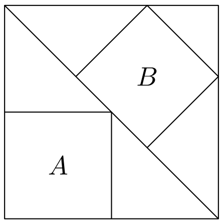
Výsledek. 784 913 526

Řešení. Uspořádejme číslice $1, \ldots, 9$ do diagramu, v němž šipka z x do y znamená, že dvojciferné číslo $\overline{xy}$ je dělitelné 7 nebo 13. Pro přehlednost značí v následujícím diagramu plné šipky dělitelnost 7 a čárkované dělitelnost 13.



Z diagramu vyplývá, že hledané devíticiferné číslo musí začínat trojčíslím 784. Následovat může dvojka nebo devítka. V prvním případě máme dvě možnosti, jak pokračovat (784213 a 78426), ovšem ani jednu z nich evidentně není možné prodloužit na posloupnost obsahující 5 i 9 zároveň. Druhý případ nám dává jediné řešení 784913526.

Úloha 9. Ve velkém čtverci jsou dva menší jako na obrázku, přičemž obsah čtverce B je 48. Jaký je obsah čtverce A?



Výsledek. 54

Řešení. Trojúhelníky přilehlé ke stranám čtverce B jsou rovnoramenné, takže strana čtverce B je třetinová oproti úhlopříčce velkého čtverce. Označíme-li s délku strany velkého čtverce, délku strany B pak vyjádříme jako $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot s$ a délku strany čtverce A jako $\frac{1}{2} \cdot s$. Poměr obsahů čtverců A:B je tedy

$$\frac{s^2}{4} : \frac{2 \cdot s^2}{9} = \frac{9}{8}$$

a obsah čtverce A je $48 \cdot \frac{9}{8} = 54$.

Úloha 10. ET má dvě krychle, jednu o straně délky 9 cm složenou z bílých jednotkových kostek (tj. krychliček o straně délky 1 cm) a jednu o straně délky 10 cm složenou z černých jednotkových kostek. Ze svých jednotkových krychliček chce postavit krychli o straně délky 12 cm. Kolik nejméně cm^2 povrchu této největší krychle musí být černých?

Výsledek. 0

Řešení. ET má $9^3 = 729$ bílých a $10^3 = 1000$ černých jednotkových krychliček. Na povrch krychle o straně 12 potřebuje $12^3 - 10^3 = 1728 - 1000 = 728$ jednotkových kostek. Může tedy sestavit krychli o straně 12, která bude mít všechny stěny zcela bílé. Odpověď je proto 0.[1]

Úloha 11. Během známkování testu z matematiky došel Kuba k nemilému zjištění, a sice, že deset žáků neumí násobit zlomky, čtrnáct žáků je neumí sčítat a sedmnáct žáků je neumí dělit. Ba co hůř, každý z jeho žáků měl potíže s alespoň jednou z těchto operací, a šest jich dokonce bojovalo se všemi třemi. Kolik nejvíce žáků mohlo psát test?

Výsledek. 29

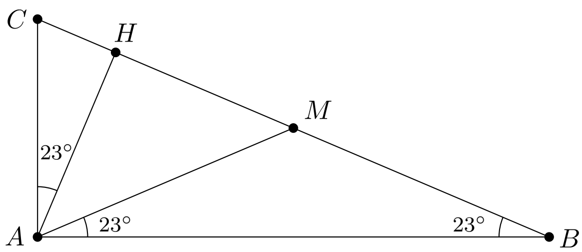
Řešení. Jelikož chceme maximalizovat počet žáků, můžeme předpokládat, že mimo těch šest, kteří neumí se zlomky pracovat vůbec, má každý potíže s právě jednou operací. V takovém případě dostaneme žáků celkem

$$6 + (10 - 6) + (14 - 6) + (17 - 6) = 29.$$

Úloha 12. Nechť velikost jednoho z úhlů pravoúhlého trojúhelníka je 23°. Jaký úhel (ve stupních) svírají těžnice a výška vedené z vrcholu u pravého úhlu?

Výsledek. 44

Řešení. Označme ABC trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu A, tedy $|\sphericalangle BAC| = 90°$. Následně označme M střed strany BC a H patu výšky na stranu BC.



Z Thaletovy věty plyne, že body A, B, C leží na kružnici se středem M. Bez újmy na obecnosti nechť $|\sphericalangle CBA| = 23°$. Protože je trojúhelník AMB rovnoramenný, platí též $|\sphericalangle BAM| = 23°$. Trojúhelník AHC je podobný trojúhelníku BAC, z čehož plyne $|\sphericalangle HAC| = 23°$. Velikost úhlu MAH již dostaneme snadno: $|\sphericalangle MAH| = 90° - 2 \cdot 23° = 44°$.

[1] S užitečným vztahem $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$ je spojená zajímavá historka o geniálním indickém matematiku Ramanujanovi, která se probojovala dokonce i do článku o čísle 1729 na anglické Wikipedii.

Úloha 13. Kladná celá čísla a a b splňují rovnost $20a + 19b = 365$. Najděte hodnotu výrazu $20b + 19a$.

Výsledek. 376

Řešení. Zřejmě $a, b \le 20$. Přičtením b k oběma stranám rovnosti dostaneme $20(a + b) = 365 + b$. Levá strana je dělitelná 20, takže pravá strana musí být rovna 380. To nám dává $b = 15$, a tudíž $a = 4$ a $20b + 19a = 380 - a = 376$.

Úloha 14. Pravidelný 2018úhelník má 2 033 135 úhlopříček. O kolik více úhlopříček má pravidelný 2019úhelník? Strana mnohoúhelníku se nepočítá mezi úhlopříčky.

Výsledek. 2017

Řešení. Pravidelnost mnohoúhelníku zjevně nemá vliv na počet jeho úhlopříček. Zkonstruujeme proto 2019úhelník z 2018úhelníku předělením jedné jeho strany novým vrcholem. Tento vrchol je spojen novou úhlopříčkou s každým z 2016 nesousedních vrcholů a současně vznikne ještě jedna nová úhlopříčka mezi jeho dvěma sousedy. Počet úhlopříček se tedy zvedne o 2017.

Úloha 15. Najděte všechna reálná řešení rovnice $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$.

Výsledek. 2, 5, −6

Řešení. Protože $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$, je umocňované číslo vždy kladné. Požadovaná rovnost tedy bude splněna právě tehdy, když bude základ roven 1 nebo exponent roven 0. První případ dává $x^2 - 4x + 5 = 1$ neboli $(x - 2)^2 = 0$, a tedy řešení $x = 2$. Druhý případ $x^2 + x - 30 = (x - 5)(x + 6) = 0$ má dvě řešení: $x = 5$ a $x = -6$.

Úloha 16. Kolik existuje permutací čísel 1, 2, 3, 4 takových, že kdykoli odstraníme jedno z těchto čísel, pak výsledná posloupnost není rostoucí ani klesající?

Poznámka: *Permutace* je posloupnost obsahující každé z čísel právě jednou.

Výsledek. 4

Řešení. Uvažme posloupnosti začínající číslem 1. Jediná taková posloupnost bez rostoucí podposloupnosti je $(1, 4, 3, 2)$. Vymazáním 1 vznikne klesající posloupnost, takže tato permutace nesplňuje stanovené podmínky. Posloupnost tedy nemůže začínat 1 a ze symetrie nemůže 1 ani končit. Podobně ani 4 nemůže být první ani poslední číslo. Takže 1 a 4 musí být uprostřed. Obě pořadí $(1, 4)$ a $(4, 1)$ dají po dvou platných permutacích:

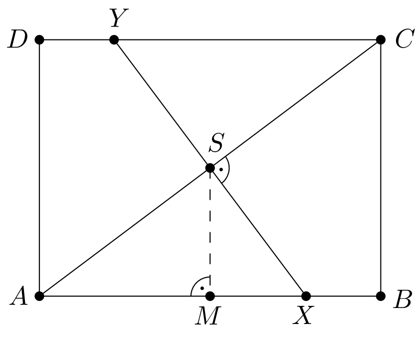
$$(2, 1, 4, 3),\ (3, 1, 4, 2),\ (2, 4, 1, 3),\ (3, 4, 1, 2).$$

Máme tedy čtyři permutace, které splňují podmínky.

Úloha 17. Mějme obdélník $ABCD$, v němž $|AB| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$. Průsečíky osy úsečky AC se stranami AB a CD označme postupně X a Y. Určete délku úsečky XY v centimetrech.

Výsledek. $\frac{15}{2}$

Řešení. Z Pythagorovy věty dostaneme $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Nechť S je střed úsečky AC. Osa úsečky AC zřejmě prochází bodem S a platí $|AS| = 5$.



Trojúhelníky ASX a ABC jsou podobné, protože jsou pravoúhlé a sdílejí úhel při vrcholu A. Z toho plyne $|SX| : |AS| = |BC| : |AB|$ a

$$|SX| = \frac{|BC| \cdot |AS|}{|AB|} = \frac{15}{4}.$$

Konečně $|XY| = 2 \cdot |SX| = \frac{15}{2}$.

Úloha 18. V algebrogramu $FOUR + FIVE = NINE$ reprezentuje každé písmeno právě jednu číslici, přičemž různá písmena reprezentují různé číslice. Dále víme, že

- číslo $FOUR$ je dělitelné čtyřmi,
- číslo $FIVE$ je dělitelné pěti,
- číslo $NINE$ je dělitelné třemi.

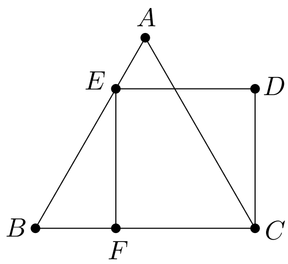
Najděte všechny možné hodnoty čísla $NINE$.

Výsledek. 3435

Řešení. Pohledem na cifry na místě jednotek zjistíme, že nutně $R = 0$. Protože $FIVE$ je dělitelné 5 a 0 už je zabraná, musí být $E = 5$. Situace na místě stovek nám ze stejného důvodu dává jedinou možnost $O = 9$. V tom případě však $U + V > 10$ a N musí být liché a větší než 1 (na místě tisíců totiž dostáváme $N = 2 \cdot F + 1$). Na druhé straně máme $U + V \leq 7 + 8 = 15$, protože číslici 9 už jsme také použili. To znamená, že $N = 3$. Tedy $U = 6$ (dělitelnost 4), $V = 7$ a $F = 1$.

Jelikož číslo $NINE$ je dělitelné 3, musí být i jeho ciferný součet $N + I + N + E = 3 + I + 3 + 5 = 11 + I$ dělitelný 3. Pro I tedy připadají v úvahu hodnoty 1, 4, 7, z nichž pouze $I = 4$ je přípustná vzhledem k předchozímu. To znamená, že $NINE = 3435$ a (jediné) řešení algebrogramu je $1960 + 1475 = 3435$.

Úloha 19. Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a čtverec $CDEF$ takový, že bod E leží na úsečce AB a bod F leží na úsečce BC. Je-li obvod čtverce 4, jaký je obvod trojúhelníka ABC?



Výsledek. $3 + \sqrt{3}$

Řešení. Označme G průsečík AC a DE. Všimněme si, že trojúhelníky BEF a GCD jsou shodné – mají vnitřní úhly 30°, 60° a 90° a delší odvěsnu délky 1. Jejich kratší odvěsna má navíc poloviční délku než jejich přepona (tyto trojúhelníky jsou totiž polovinou rovnostranného trojúhelníka). Položíme-li $|BF| = x$, dostaneme z Pythagorovy věty rovnost $(2x)^2 = x^2 + 1^2$ neboli $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Délka strany trojúhelníka ABC je proto $1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a jeho obvod je $3 + \sqrt{3}$.

Úloha 20. Nechť a a b jsou reálná čísla. Pokud má rovnice $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ trojnásobný reálný kořen, jakých hodnot může nabývat a?

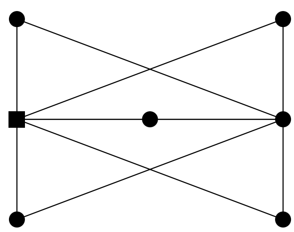
Výsledek. 42, −42

Řešení. Pokud je r trojnásobný kořen, pak

$$(x - r)^3 = x^3 - 3rx^2 + 3r^2x - r^3 = x^3 - ax^2 + 588x - b.$$

Protože dva polynomy jsou si rovny pouze tehdy, když se rovnají jejich koeficienty u příslušných stupňů, dostaneme $3r^2 = 588$ neboli $r = \pm 14$. Takže $a = \pm 42$.

Úloha 21. Anička si vyrazila na výlet na skupinu ostrovů, které jsou propojeny mosty jako na obrázku. Procházka po každém jednotlivém mostě skýtá jedinečný výhled. Protože se ale na mostech platí mýtné a Anička je škudlil, rozhodla se každý most přejít právě jednou. Kolika způsoby může naplánovat svou cestu, pokud chce začínat na ostrově označeném čtverečkem? Anička nemůže přeskočit z jednoho mostu na druhý – na most se může dostat pouze z ostrova. Jednotlivé ostrovy smí navštívit i vícekrát.



Výsledek. 120

Řešení. Všimněme si, že ostrov označený čtverečkem a prostřední z ostrovů úplně vpravo jsou ostrovy speciální – všechny mosty začínají na nějakém z nich a ze všech ostatních ostrovů vedou mosty na oba z nich. Celý výlet se proto dá rozdělit na několik částí, kdy Anička vždy vyrazí z jednoho speciálního ostrova na druhý skrz některý obyčejný. Počet možných cest je tedy roven počtu uspořádání obyčejných ostrovů, a ten činí $5! = 120$.

Úloha 22. Jirka má rád dvojice. Jana se mu rozhodla dát k narozeninám speciální dárek – všechny uspořádané dvojice kladných celých čísel (m, n), jejichž nejmenší společný násobek je 2000. Kolik dvojic Jirka dostane?

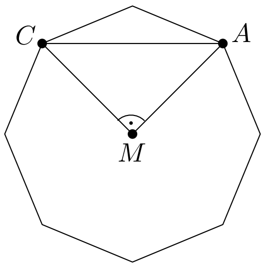
Výsledek. 63

Řešení. Rozdělme úlohu na dva případy. Nejprve předpokládejme, že m ani n není rovno $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Poté je jedno z čísel $2^4 \cdot 5^k$ pro nějaké $k \in \{0, 1, 2\}$ a druhé $2^l \cdot 5^3$ pro nějaké $l \in \{0, 1, 2, 3\}$, a tudíž máme $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ takových uspořádaných dvojic. Pokud je nyní jedno z čísel rovno 2000, musí to druhé být dělitelem 2000. Číslo 2000 má $(4 + 1) \cdot (3 + 1) = 20$ dělitelů, takže dostáváme $2 \cdot 20 - 1 = 39$ dvojic (odečetli jsme jedničku, abychom dvojici $(2000, 2000)$ nepočítali dvakrát). Dohromady tedy Jirka dostane $24 + 39 = 63$ dvojic.

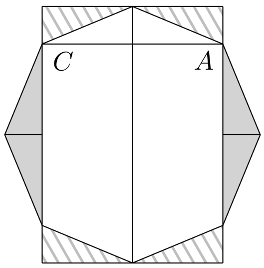
Úloha 23. V pravidelném osmiúhelníku $ABCDEFGH$ je $|AC| = 7\sqrt{2}$. Určete jeho obsah.

Výsledek. $98\sqrt{2}$

Řešení. Buď M střed kružnice opsané osmiúhelníku. Protože $|\sphericalangle AMC| = \frac{2}{8} \cdot 360° = 90°$, je poloměr této kružnice roven 7.



Osmiúhelník můžeme rozstříhat a přeskládat na obdélník jako na obrázku níže. Kratší strana tohoto obdélníku má délku $|AC|$, delší strana má délku rovnou průměru naší opsané kružnice. Hledaný obsah je tedy $14 \cdot 7\sqrt{2} = 98\sqrt{2}$.



Úloha 24. Čtyři kamarádi se rozhodli, že se začnou učit cizí jazyky. Místní jazyková škola nabízí kurzy arabštiny, bengálštiny, čínštiny a dánštiny. Každý z chlapců by se chtěl naučit právě tři nové jazyky. Kolika způsoby si mohou z uvedených kurzů vybrat, pokud chtějí alespoň jeden kurz navštěvovat všichni společně?

Výsledek. 232

Řešení. Každý chlapec má právě čtyři možnosti, které tři kurzy si vybere. Pro čtyři chlapce tedy máme celkem $4^4 = 256$ způsobů, pokud netrváme na podmínce, že alespoň jeden kurz musí být společný. Nyní spočítáme ty způsoby, při nichž nemá čtveřice kamarádů společný žádný kurz. Jinými slovy existuje pro každý kurz člověk, který si jej nezapíše, což nám dává $4! = 24$ možností. Celkem tak dostáváme $256 - 24 = 232$ možností výběru splňujících danou podmínku.

Úloha 25. Marta má kladné celé číslo n s nenulovými ciframi. Všimla si, že pokud jej zapíše pozpátku a získané číslo následně vynásobí číslem n, dostane výsledek o tisíc větší, než když mezi sebou vynásobí všechny cifry čísla n. Najděte všechny možné hodnoty n.

Výsledek. 24, 42

Řešení. Číslo n má zřejmě alespoň dvě cifry. Pokud má právě dvě cifry a a b ($a \neq 0$, $b \neq 0$), lze zadání úlohy přepsat pomocí rovnice

$$(10a + b)(10b + a) = 1000 + ab,$$

a tedy

$$a^2 + b^2 = 10(10 - ab).$$

Jelikož pravá strana musí být větší než 0, dostáváme podmínku $ab < 10$. Probráním několika možností dojdeme k závěru, že a a b musí být 2 a 4 (v nějakém pořadí).

Předpokládejme nyní, že číslo n má $k \geq 3$ cifer. Pak je však levá strana rovnice rovna alespoň $(10^{k-1})^2$, zatímco pravá strana je nanejvýš $1000 + 10^k$, takže tato možnost nepřipadá v úvahu.

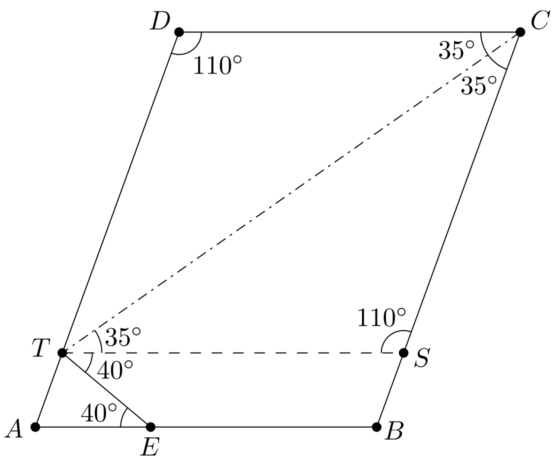
Úloha 26. V rovnoběžníku $ABCD$ je T takový vnitřní bod strany AD, že přímka CT tvoří osu úhlu BCD. Dále označme E bod na straně AB, pro který platí $|\sphericalangle AET| = 40°$. Pokud je $|\sphericalangle CTE| = 75°$, kolik je $|\sphericalangle CDA|$ (ve stupních)?

Výsledek. 110

Řešení. Veďme bodem T přímku rovnoběžnou s AB a označme S její průsečík s BC. Pak platí $|\sphericalangle ETS| = 40°$ a

$$|\sphericalangle DCT| = |\sphericalangle STC| = |\sphericalangle CTE| - |\sphericalangle STE| = 35°.$$

Protože CT je osou úhlu DCB, trojúhelník CTS je rovnoramenný, a tedy $|\sphericalangle DCT| = |\sphericalangle TCS|$ a $|\sphericalangle DCB| = 2 \cdot 35° = 70°$. Proto platí $|\sphericalangle CDA| = 180° - |\sphericalangle DCB| = 110°$.



Úloha 27. Dva šlechtické rody se setkaly na hostině. Každý byl zastoupen alespoň jedním mužem a alespoň jednou ženou. Každý člen jednoho rodu pozdravil každého člena druhého rodu: když se zdravili dva muži, potřásli si rukama; když dvě ženy nebo žena a muž, vzájemně se poklonili. Dohromady proběhlo 85 potřesení rukou a 162 vzájemných poklon. Kolik žen bylo na hostině?

Výsledek. 10

Řešení. Označme m_1, m_2, z_1, z_2 počty mužů a žen v prvním a druhém rodě. Jelikož $m_1 \cdot m_2 = 85 = 5 \cdot 17$, dostaneme po případném přečíslování rodů $m_1 = 5$ and $m_2 = 17$ (možnost, že je jedno z těchto čísel 1, snadno vyloučíme). Navíc proběhlo dohromady $85 + 162 = 247$ pozdravů a z rovnice

$$(m_1 + z_1)(m_2 + z_2) = 247 = 13 \cdot 19$$

dostaneme $m_1 + z_1 = 13$, $m_2 + z_2 = 19$ (ostatní možnosti roznásobení opět snadno vyloučíme), takže $z_1 = 8$, $z_2 = 2$ a hostiny se zúčastnilo $8 + 2 = 10$ žen.

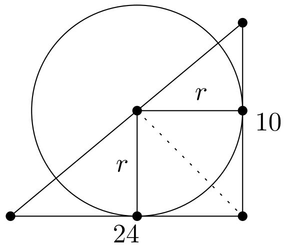
Úloha 28. Trojúhelník má strany dlouhé 10, 24 a 26. Nechť k je kružnice, která má střed na jeho nejdelší straně a dotýká se obou kratších stran. Najděte poloměr kružnice k.

Výsledek. 120/17

Řešení. Z Pythagorovy věty plyne, že uvažovaný trojúhelník je pravoúhlý. Spojnice vrcholu u pravého úhlu se středem kružnice rozděluje tento trojúhelník na dva menší. Úsečky vedoucí ze středu kružnice k bodům dotyku s kratšími stranami původního trojúhelníka jsou na tyto strany kolmé, takže jsou to výšky v menších trojúhelnících. Zároveň jde o poloměry kružnice k, hledáme tedy právě jejich délku r. Obsah původního trojúhelníka můžeme spočítat dvěma způsoby, a to buď s využitím délek jeho stran, anebo s využitím menších trojúhelníků:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot r.$$

Z toho plyne $r = 120/17$.



Úloha 29. Martin přišel do kasina s 10 €. Tamní hrací automat funguje následovně: Hráč vhodí 1 € v libovolných mincích a s pravděpodobností p vyhraje jackpot, jinak mu automat vrátí 0,5 €. Martin chce na automatu hrát, dokud nevyhraje jackpot nebo dokud mu nedojdou peníze. Pomozte Martinovi najít nejmenší pravděpodobnost p tak, aby měl aspoň 50% šanci na výhru.

Výsledek. $1 - \sqrt[19]{0{,}5}$

Řešení. Nejdříve si všimněme, že Martin může hrát na tomto automatu neúspěšně maximálně 19krát. Jakmile totiž vhodí do automatu poslední 1 €, zbude mu jen 0,5 €, což je méně, než automat přijímá. Pravděpodobnost každé prohry je $1 - p$, takže pravděpodobnost, že jackpot nikdy nevyhraje, je $(1-p)^{19}$. Aby měl Martin aspoň 50% šanci na výhru jackpotu, musí platit $(1-p)^{19} \leq 0{,}5$, což je ekvivalentní $p \geq 1 - \sqrt[19]{0{,}5}$. Hledaná nejmenší hodnota p je tedy $1 - \sqrt[19]{0{,}5}$.

Úloha 30. Najděte všechna čtyřciferná čísla $\overline{abcd}$, pro která platí $\overline{abcd} = a^a + b^b + c^c + d^d$. Žádná z cifer nesmí být 0.

Výsledek. 3435

Řešení. Protože $6^6 > 9999$, žádná z cifer nesmí být větší než 5. Číslo 4444 rovnici nesplňuje, a kdyby mezi ciframi byly nanejvýš tři čtyřky a dále jen 1, 2 nebo 3, pravá strana rovnosti by byla nanejvýš $3 \cdot 4^4 + 3^3 < 1000$. Jedna z cifer tedy musí být 5. Platí $5^5 = 3125$, a tak se musí cifra 5 objevit přesně jednou, protože v opačném případě by první cifra byla větší než 5. Dále $3000 < 5^5 < 5^5 + 3 \cdot 4^4 < 4000$, takže první cifra musí být 3.

Nyní víme, že hledané číslo je aspoň $5^5 + 3^3 + 2 \cdot 1^1 = 3154$. To ale nefunguje, stejně jako 3155. Následující číslo neobsahující nuly a cifry větší než 5 je $3211 > 5^5 + 3 \cdot 3^3$, a proto musí být jedna z cifer 4. Nicméně žádná další čtyřka už v čísle být nemůže, protože by pak druhá cifra byla větší než 5. Vyzkoušením zbývajících tří možností zjistíme, že jediným řešením je 3435.

Úloha 31. Kolik existuje pětic dvojciferných čísel, v nichž se každá z cifer od 0 do 9 vyskytuje právě jednou a každé z dvojciferných čísel je sudé, ale není dělitelné třemi? Pětice, které se liší jen pořadím jednotlivých dvojciferných čísel, považujeme za stejné.

Výsledek. 16

Řešení. Všech pět čísel musí končit na sudou číslici. Pro splnění nedělitelnosti třemi musí čísla končící na 0 nebo 6 začínat na některou z číslic 1, 5, 7, čísla končící na 2 nebo 8 musí začínat na některou z číslic 3, 5, 9 a čísla končící na 4 musí začínat na některou z číslic 1, 3, 7, 9. Pokud vybereme 14 jako číslo končící na 4, máme jen dvě možnosti pro doplnění desítkových cifer k 0 a 6 (buď vznikne 50 a 76, nebo 56 a 70) a potom jen dvě možnosti pro desítkové cifry k 2 a 8 (buď 32, 98, nebo 38, 92), což dává dohromady čtyři možnosti. Stejně můžeme postupovat pro kteroukoli volbu desítkové číslice k 4, a protože k ní můžeme vybrat čtyři různé číslice, celkový počet pětic je $4 \cdot 4 = 16$.

Úloha 32. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro která platí

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019.$$

Poznámka: Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x, tj. největší celé číslo menší nebo rovné x.

Výsledek. 5439

Řešení. Označme

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor.$$

Zjevně je f neklesající funkcí proměnné n. Dále $f(n) - f(n-1) = 1$, pokud n je dělitelné právě jedním z čísel 5 nebo 7, a $f(n) - f(n-1) = 3$, pokud n je dělitelné 35. Ve všech ostatních případech platí $f(n) = f(n-1)$. Protože

$$f(n) \leq \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{35} \right) n = \frac{13}{35} n,$$

dostaneme pro řešení odhad

$$n \geq \frac{35}{13} \cdot 2019$$

neboli $n \geq 5436$, protože n je celé číslo. Platí $f(5436) = 2018$. Nejbližší vyšší číslo dělitelné 5 je 5440 a nejbližší číslo dělitelné 7 je 5439. Z předchozího máme $f(5439) = 2019$ a $f(5440) = 2020$, jediným řešením je proto 5439.

Úloha 33. Pro kolik kladných celých čísel n lze najít kladná celá čísla $x, y \leq 1\,000\,000$ (ne nutně různá) tak, aby platilo

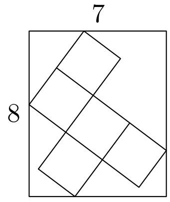
$$n = S(x) = S(y) = S(x+y),$$

kde $S(a)$ označuje ciferný součet čísla a?

Výsledek. 6

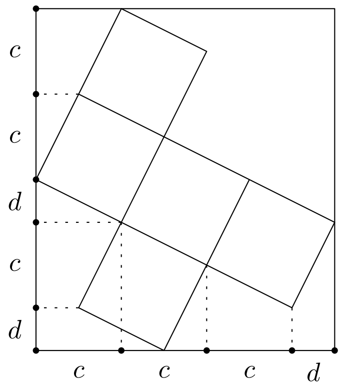
Řešení. Pro libovolné číslo a dávají $S(a)$ a a stejný zbytek po dělení 9. Ze zadání tedy víme, že čísla n, x, y, $x+y$ dávají všechna stejný zbytek po dělení 9. Z toho plyne, že x, a tedy i n, musí být násobkem 9. Pokud $n = 9m$ pro nějaké kladné celé číslo m, pak volbou $x = y = 10^m - 1$ dostaneme rovnost ze zadání. Největší možný ciferný součet čísel menších než milion je 54, takže existuje šest vyhovujících čísel n: 9, 18, 27, 36, 45 a 54.

Úloha 34. Pentomino složené z pěti čtverců se stranou délky a je vepsáno do obdélníku o rozměrech 7×8 jako na obrázku. Určete a.



Výsledek. $\sqrt{5}$

Řešení. Kolmou projekcí stran čtverců na strany obdélníku dostaneme dvě různé délky úseček. Delší označme c a kratší d.



Pak

$$3c + 2d = 8,$$
$$3c + d = 7,$$

takže $c = 2$ a $d = 1$. Z Pythagorovy věty vyvodíme, že $a = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{5}$.

Úloha 35. Ondra má obdélníkovou tabulku čokolády o rozměrech 3×5 čtverečků. Aby byl levý horní čtvereček sladší, dá na něj trochu cukru. Pak se pustí do jedení čokolády následujícím způsobem: V každém kroku se náhodně rozhodne, zda sní pravý sloupec, nebo spodní řádek. Obě možnosti mají pravděpodobnost $1/2$. Tento krok Ondra opakuje, dokud nesní celou tabulku. Jaká je pravděpodobnost, že v posledním kroku sní pouze oslazený čtvereček?

Výsledek. 15/64

Řešení. Ze symetrie problému můžeme předpokládat, že tabulka má pět řádků a tři sloupečky. Postup můžeme zjednodušit následovně: Ondra si vybere posloupnost Ř a S délky $(5-1)+(3-1) = 6$ a podle této posloupnosti se dá do jedení řádků a sloupečků čokolády. Mohou nastat dvě možnosti. Buď posloupnost obsahuje přesně dvě S a čtyři Ř – v takovém případě zbývá na konec pouze oslazený čtvereček –, nebo obsahuje aspoň tři S či aspoň pět Ř – v takovém případě je nejpozději po šesti ulomeních snědená celá čokoláda, přičemž v posledním kroku byl snědén více než jen čtvereček. Ondra totiž v předchozích krocích nesnědl dost sloupečků nebo řádků na to, aby mu z posledního řádku nebo sloupečku zbyl jediný čtvereček.

Existuje 2^6 posloupností S a Ř délky 6, z nichž $\binom{6}{2}$ obsahuje právě dvě S, takže hledaná pravděpodobnost je

$$\frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}.$$

Úloha 36. Karel vytvořil několik po dvou různých prvočísel, přičemž každou číslici $1, \ldots, 9$ použil právě dvakrát. Všiml si, že součet jeho čísel je nejmenší možný ze všech takových skupin prvočísel. Kolik mu vyšlo?

Výsledek. 477

Řešení. Žádné prvočíslo kromě 2 a 5 nemůže končit na 5 nebo sudou číslici. Proto se musí každá z číslic 2, 5, 4, 4, 6, 6, 8, 8 objevit v nějakém z Karlových čísel aspoň na místě desítek a přispět tak k celkovému součtu nejméně svým desetinásobkem. Dále každá ze zbývajících číslic 2, 5, 1, 1, 3, 3, 7, 7, 9, 9 musí být v nějakém Karlově čísle aspoň na místě jednotek. Hledaný součet je proto minimálně

$$10(2+5+4+4+6+6+8+8)+2+5+1+1+3+3+7+7+9+9=477.$$

Takový součet Karel získal vytvořením prvočísel 2, 5, 29, 53, 41, 47, 61, 67, 83, 89.

Úloha 37. Jeníček a Mařenka mají dva polynomy $J(x)=x^2+2x+10$ a $M(x)=x^2-8x+25$. Když každý z nich dosadí své oblíbené kladné celé číslo j, m do svého polynomu, dostanou stejný výsledek, tj. $J(j)=M(m)$. Najděte všechny možné hodnoty $|j-m|$.

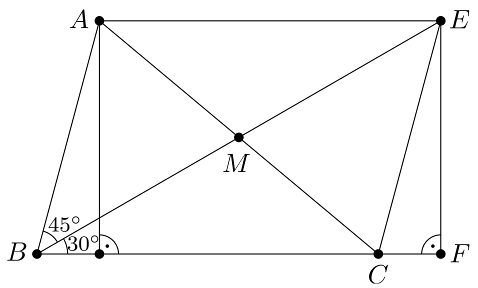
Výsledek. 1, 5

Řešení. Rozložením levé strany rovnice $J(j)-M(m)=0$ dostaneme $(j+m-3)(j-m+5)=0$, takže buď $\{j,m\}=\{1,2\}$, nebo $|j-m|=5$.

Úloha 38. Výška z bodu A v trojúhelníku ABC je stejně dlouhá jako těžnice z bodu B. Dále víme, že $|\sphericalangle ABC|=75°$. Určete poměr délek $|AB|:|BC|$.

Výsledek. $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Řešení. Označme M střed strany AC a E obraz bodu B ve středové souměrnosti podle M. Dále označme F kolmou projekci bodu E na přímku BC. Pak z první podmínky plyne, že $\sin(|\sphericalangle EBC|)=\frac{|EF|}{|BE|}=\frac{1}{2}$, a tedy $|\sphericalangle EBC|=30°$ (tento úhel nemůže být tupý kvůli druhé podmínce ze zadání). Proto $|\sphericalangle ABM|=|\sphericalangle ABE|=75°-30°=45°$.



Použitím sinové věty v trojúhelnících ABM a CBM spočítáme

$$\frac{|BM|}{\sin(|\sphericalangle BAC|)}=\frac{|AM|}{\sin 45°}=\frac{|AM|}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

a

$$\frac{|BM|}{\sin(|\sphericalangle BCA|)}=\frac{|CM|}{\sin 30°}=\frac{|AM|}{\frac{1}{2}}.$$

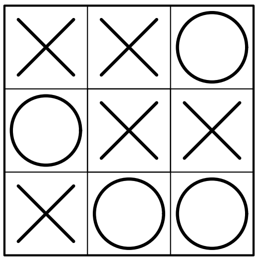
Protože $|AM|=|CM|$, dostaneme vydělením těchto rovností a využitím sinové věty v trojúhelníku ABC kýžený poměr

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{\sin(|\sphericalangle BCA|)}{\sin(|\sphericalangle BAC|)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Úloha 39. V piškvorkách dva hráči střídavě kreslí kolečka a křížky do tabulky 3×3. Hráč vyhraje, pokud jsou tři jeho symboly ve stejném řádku, sloupci nebo diagonále. Hra skončí remízou, pokud je tabulka zaplněná a žádný z hráčů nevyhrál. Kolik je možných různých uspořádání symbolů v tabulce v případě remízy? Rozlišujeme i uspořádání lišící se otočením nebo překlopením tabulky. Kterýkoli hráč může začít hru.

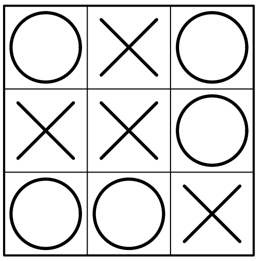
Výsledek. 32

Řešení. Rozlišíme čtyři případy podle symbolu umístěného uprostřed tabulky a podle toho, který symbol se v tabulce objeví pětkrát. Pokud je uprostřed křížek a v tabulce je celkem pět křížků (tomuto případu budeme říkat „křížek–křížky“), musíme čtyři křížky umístit do zbytku tabulky. Nesmíme ale využít žádnou celou diagonálu ani žádný celý řádek nebo sloupec. Získáme tak uspořádání, které není symetrické vzhledem k žádnému otočení nebo převrácení, a tedy zde dostaneme 8 různých případů remízy.

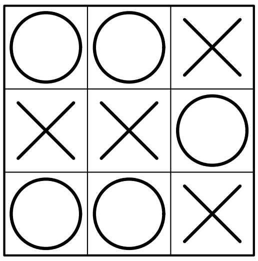


Obrázek 1

V případě „křížek–kolečka“ musíme umístit pět koleček do tabulky s křížkem uprostřed. Nemůžeme dát kolečka do všech čtyř rohů, protože by pak páté kolečko vyhrálo. Na druhou stranu ale musíme aspoň jedno kolečko dát na každou diagonálu, protože jinak by vyhrály křížky. Musíme tedy dát buď přesně tři, nebo přesně dvě kolečka do rohů a v obou těchto podpřípadech máme právě jednu možnost, jak doplnit tabulku do remízového stavu. Dostaneme tak některé ze čtyř možných otočení jednoho ze zobrazených uspořádání (Obrázek 2 a Obrázek 3).



Obrázek 2



Obrázek 3

Případy „kolečko–kolečka“ a „kolečko–křížky“ jsou analogické předchozím případům. Celkový počet remízových uspořádání je tedy $2(8+4+4) = 32$.

Úloha 40. Najděte největší kladné celé číslo a takové, že nerovnost

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}$$

není splněna pro žádné kladné celé číslo b.

Výsledek. 32

Řešení. Přechodem k převráceným hodnotám dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$0{,}72 < \frac{b}{a} < 0{,}75.$$

Interval mezi 0,72 a 0,75 má délku $0{,}03 > 1/34$, takže pro všechna $a \geq 34$ již řešení existuje. Pro $a = 33$ máme řešení $b = 24$ (zde $b/a = 0{,}7272\ldots$). Pro $a = 32$ řešení neexistuje, neboť $24/32 = 0{,}75$ a $1/32 > 0{,}03$.

Úloha 41. Olin s Martinou vyrazili na 24hodinový pochod délky 110 km z Prahy do Tábora. Martina naplánovala trasu přes tři kopce. Při té příležitosti si všimla, že součin jejich vzdáleností od Prahy je násobkem 2261. Olin se nad touto skutečností zamyslel a řekl: „A víš, že součin jejich vzdáleností od Tábora je taky násobkem 2261?“ Během pauzy na 80. kilometru Martina poznamenala: „Teď už nás čeká jen jeden kopec a pak hurá do Tábora!“ Za předpokladu, že vzdálenosti měříme v kilometrech po trase pochodu a jsou celočíselné, v jaké vzdálenosti od Prahy se nachází každý ze tří zdolaných kopců?

Výsledek. 68, 76, 91

Řešení. Nechť A, B a C jsou vzdálenosti zmíněných tří kopců od Prahy, měřené v kilometrech. Dle zadání platí $2261 \mid ABC$ a $2261 \mid (110-A)(110-B)(110-C)$. Číslo 2261 se rozkládá jako $7 \cdot 323 = 7 \cdot 17 \cdot 19$, a jelikož $7 \cdot 17 = 119 > 110$, nemůže žádná z trojice vzdáleností přispívat do rozkladu 2261 více než jedním prvočíslem.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $7 \mid A$, $17 \mid B$ a $19 \mid C$. Protože $7 \nmid (110-A)$, připadá dále v úvahu jedna z variant $7 \mid (110-B)$, $7 \mid (110-C)$. V prvním případě dostáváme $19 \mid (110-A)$, neboť $19 \nmid (110-C)$, a konečně $17 \mid (110-C)$. Ve druhém případě dostaneme podobně $17 \mid (110-A)$ a $19 \mid (110-B)$.

Protože $\mathrm{NSD}(7,19) = 1$, jediná možnost, jak rozložit 110 na $a \cdot 7 + b \cdot 19$ pro nezáporná celá čísla a a b, je $110 = 13 \cdot 7 + 1 \cdot 19$ (všechny rozklady jsou tvaru $110 = (13+19k) \cdot 7 + (1-7k) \cdot 19$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a koeficienty jsou nezáporné pouze pro $k = 0$). Podobně získáme rozklady $110 = 4 \cdot 17 + 6 \cdot 7$ a $110 = 4 \cdot 19 + 2 \cdot 17$. Ty nás vedou ke dvěma řešením

$$A = 13 \cdot 7 = 91, \quad B = 4 \cdot 17 = 68, \quad C = 4 \cdot 19 = 76$$

a

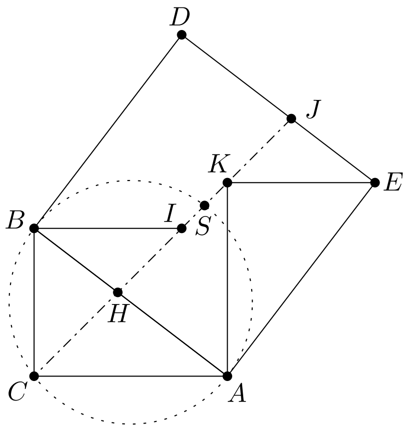
$$A = 6 \cdot 7 = 42, \quad B = 2 \cdot 17 = 34, \quad C = 19.$$

Martinina poznámka na 80. kilometru říká, že poslední kopec je vzdálen alespoň 80 km od Prahy. Jediným řešením je tedy trojice 68, 76 a 91.[2]

Úloha 42. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, pro který platí $|AC| = 4 - \sqrt{3}$ a $|BC| = \sqrt{3}$. Zvolme body D a E tak, aby čtyřúhelník $ABDE$ byl čtverec a bod C ležel vně tohoto čtverce. Na úsečce DE najděme bod J tak, aby $|\sphericalangle ACJ| = 45°$, a na úsečce CJ bod K tak, aby $AK \parallel BC$. Jaký je obsah trojúhelníka JKE?

Výsledek. $3\sqrt{3}/8$

Řešení. Předně si všimněme, že $|\sphericalangle EKA| = 90°$. Trojúhelníky AEK a ABC jsou totiž shodné, neboť $|AK| = |AC|$, $|AE| = |AB|$ a $|\sphericalangle EAK| = |\sphericalangle BAC|$. Střed S čtverce $ABDE$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, neboť úhly ASB a ACB jsou pravé. Jelikož $|AS| = |BS|$, je také $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle BCS|$. To však znamená, že bod S leží na úsečce CJ. Zobrazme nyní trojúhelník JKE ve středové souměrnosti podle středu S. Bod E se zobrazí na bod B, bod J na průsečík AB a CJ – označme jej H – a bod K na vnitřní bod úsečky CJ – nazvěme jej I – splňující $|\sphericalangle IBC| = 90°$.



Obsah trojúhelníka budeme značit hranatými závorkami. Trojúhelník IBC je pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu B, takže dostáváme $[IBC] = (\sqrt{3})^2/2 = 3/2$. Nyní

$$\frac{[IBC]}{[IBH]} = \frac{|IC|}{|IH|} = \frac{|IH| + |HC|}{|IH|} = 1 + \frac{|HC|}{|IH|}.$$

Trojúhelníky ACH a BIH jsou zřejmě podobné s koeficientem podobnosti

$$\frac{|HC|}{|IH|} = \frac{|AC|}{|IB|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Nyní už umíme spočítat obsah trojúhelníka JKE jako

$$[JKE] = [IBH] = [IBC] \cdot \frac{|BC|}{|AC| + |BC|} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Úloha 43. Dva vězni, David a Michal, stojí před dvěma krabicemi. Vědí, že jedna krabice obsahuje dvě bílé kuličky a jednu černou kuličku a druhá krabice obsahuje jednu bílou kuličku a dvě černé kuličky; nevědí však, která krabice je která. David si musí vybrat krabici a náhodně z ní vytáhnout kuličku, kterou už ale zpět do krabice nevrací. Pokud si vytáhne bílou kuličku, je volný, jinak je popraven. Totéž pak musí udělat i Michal. Jestliže Michal vidí, kterou krabici si David vybral a jakou kuličku z ní vytáhl, a pokud postupuje logicky, jaká je jeho šance na přežití před vytažením první kuličky? Předpokládejme, že David si krabici vybral náhodně.

Výsledek. 5/9

[2] Jedná se o kopce Mezivrata (713 m), Kalvárie (698 m) a Bukovec (658 m) a pauza na 80. kilometru se odehrávala v Žibkově na návsi, kde je pěkná dřevěná lavička :) (Martina si na překladu anglické verze úlohy dala opravdu záležet; původní formulace se o skutečný místopis neopírala.)

Řešení. Barvu, kterou si vytáhl David, označme d, a druhou barvu nazvěme e. Pak pravděpodobnost, že si David vybral krabici s d, d, e, je $2/3$ a pravděpodobnost, že si vybral krabici s d, e, e, je $1/3$. Pokud si Michal zvolí stejnou krabici jako David, vytáhne si d s pravděpodobností

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

a e s pravděpodobností

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Pokud si zvolí druhou krabici, vytáhne si d s pravděpodobností

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

a e s pravděpodobností

$$1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Pokud je d bílá, a tedy zaručující přežití, chce si Michal vytáhnout také d. Protože $\frac{4}{9} > \frac{1}{3}$, je pro něj lepší zvolit druhou krabici s šancí na přežití $4/9$. Pokud je d černá, chce si Michal vytáhnout e. Protože $\frac{2}{3} > \frac{5}{9}$, je pro něj lepší zvolit stejnou krabici a přežít tak s pravděpodobností $2/3$. Protože je černých a bílých kuliček stejně, je barva d bílá s pravděpodobností $1/2$ a černá s pravděpodobností $1/2$, takže Michal přežije s pravděpodobností

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{9}.$$

Úloha 44. Jaké je nejmenší kladné celé číslo n takové, že z libovolných (ne nutně různých) n reálných čísel z intervalu $\langle 1, 2019 \rangle$ umíme už nutně vybrat tři čísla představující délky stran nedegenerovaného trojúhelníka?

Výsledek. 18

Řešení. Pro $n < 18$ vezměme prvních n členů Fibonacciho posloupnosti, dané vztahy $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597.$$

Zřejmě je největší číslo libovolné trojice vybrané z tohoto seznamu větší nebo rovné součtu druhých dvou, takže se nejedná o délky stran nedegenerovaného trojúhelníka. Nyní ukažme, že z každých osmnácti čísel $1 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{18} \leq 2019$ lze vybrat délky stran trojúhelníka. Kdyby tomu tak nebylo, pak máme

$$x_1, x_2 \geq 1, \quad x_3 \geq x_1 + x_2 \geq 2, \quad x_4 \geq x_2 + x_3 \geq 1 + 2 = 3, \quad \ldots,$$

přičemž v každém kroku dostaneme na pravé straně nerovnosti člen zmíněné Fibonacciho posloupnosti. Nakonec dojdeme k $x_{18} \geq 987 + 1597 > 2019$, což není možné. Hledané n je tedy 18.

Úloha 45. Symbolem $\sigma(k)$ označme počet všech kladných dělitelů čísla k. Najděte nejmenší kladné celé číslo n, pro které největší společný dělitel $\sigma(n)$ a $\sigma(n^3)$ není mocninou dvojky (včetně $2^0 = 1$).

Výsledek. $432 = 2^4 \cdot 3^3$

Řešení. Když označíme $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ prvočíselný rozklad n, platí

$$\sigma(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_t + 1).$$

Podmínka, že největší společný dělitel není mocninou dvojky, je ekvivalentní existenci lichého prvočísla q, jež dělí zároveň $\sigma(n)$ i $\sigma(n^3)$. Protože

$$\sigma(n^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) \cdots (3\alpha_t + 1),$$

není $\sigma(n^3)$ nikdy dělitelné 3, takže nejmenší q, které připadá v úvahu, je 5. Dále si uvědomme, že q nemůže být současně dělitelem $\alpha_i + 1$ a $3\alpha_i + 1$, neboť jinak by muselo dělit také

$$3(\alpha_i + 1) - (3\alpha_i + 1) = 2.$$

Existují tedy $i, j \in \{1, \ldots, t\}$, $i \neq j$, taková, že $q \mid \alpha_i + 1$ a $q \mid 3\alpha_j + 1$. Protože hledáme nejmenší n, předpokládejme, že $t = 2$, $i = 1$ a $j = 2$.

Pro $q = 5$ jsou nejmenší možné hodnoty α_1 a α_2 postupně 4 a 3, a vezmeme-li nejmenší možná prvočísla, tj. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, dostaneme $n = 2^4 \cdot 3^3 = 432$. Pro $q \geq 7$ pak dostáváme $\alpha_1 \geq 6$ a $\alpha_2 \geq 2$, což znamená, že

$$n \geq 2^6 \cdot 3^2 = 576 > 432.$$

Tedy 432 je vskutku nejmenší možná hodnota n.

Úloha 46. Nechť ABC je trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu C, v němž $|AC| = 15$ a $|BC| = 20$. Na přímce AB zvolme bod D tak, aby platilo $CD \perp AB$. Kružnice t vepsaná trojúhelníku ACD se dotýká přímky CD v bodě T. Kružnice c se také dotýká přímky CD v bodě T a zároveň se dotýká i BC. Označme průsečíky kružnice c s přímkou AB jako X a Y. Jaká je délka úsečky XY?

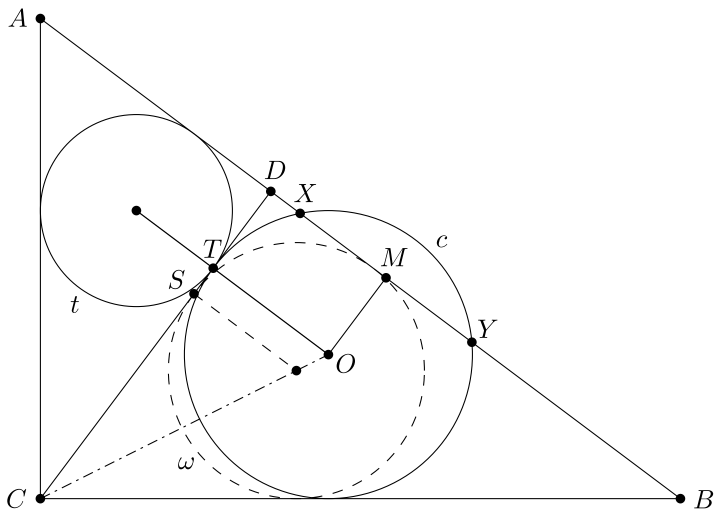
Výsledek. $3\sqrt{5}$

Řešení. S využitím Eukleidových vět spočteme

$$|AD| = \frac{|AC|^2}{|AB|} = 9, \quad |BD| = \frac{|BC|^2}{|AB|} = 16, \quad |CD| = \sqrt{|AD| \cdot |BD|} = 12.$$

Poloměr kružnice t (který je roven $|DT|$) určíme pomocí známé rovnosti mezi obsahem trojúhelníka a součinem poloviny jeho obvodu a poloměru kružnice vepsané, kterou aplikujeme na trojúhelník ACD: $|DT| = 54/(36/2) = 3$. Označme ω kružnici vepsanou trojúhelníku BCD a S její bod dotyku se stranou CD. Stejným způsobem jako výše získáme $|DS| = 4$. Stejnolehlost se středem C a koeficientem $|CT|/|CS| = 9/8$ zobrazí kružnici ω na kružnici c. Poloměr kružnice c je tedy roven $4 \cdot 9/8 = 9/2$. Buď nyní M střed úsečky XY a O střed kružnice c. Víme, že $|XO| = 9/2$ a $|OM| = |DT| = 3$. Za pomoci Pythagorovy věty už snadno dopočteme

$$|XY| = 2 \cdot |XM| = 2\sqrt{\frac{9^2}{2^2} - 3^2} = 6\sqrt{\frac{9}{4} - 1} = 3\sqrt{5}.$$



Úloha 47. Každé políčko šachovnice 6×7 obarvíme jednou ze čtyř barev. Obarvení nazveme *atraktivním*, jestliže každý čtverec 2×2 obsahuje políčka čtyř různých barev. Kolik existuje atraktivních obarvení?

Výsledek. 1128

Řešení. Nejprve učiníme několik pozorování. Vzhledem k tomu, že v atraktivním obarvení mají každá dvě sousední políčka různé barvy, pak v každém řádku, ve kterém se celkem vyskytují více než dvě barvy, najdeme trojici sousedních políček obarvených třemi různými barvami. Tato trojice už jednoznačně určuje obarvení příslušných tří sloupců – každý z nich nutně obsahuje právě dvě střídající se barvy. Totéž platí, zaměníme-li v předchozím řádky a sloupce. Z toho vyplývá, že v atraktivním obarvení se nemůžou současně vyskytovat řádek i sloupec s více než dvěma barvami.

Nyní spočteme, kolik je atraktivních obarvení šachovnice se 6 řádky a 7 sloupci, která v každém řádku používají právě dvě barvy. Jestliže vybereme dvojici barev pro první řádek, jednoznačně tím určíme i dvojice barev pro všechny ostatní řádky. Pak už jde jen o to, která barva se v každém řádku vyskytne jako první. Celkem tedy máme $\binom{4}{2} \cdot 2^6 = 6 \cdot 2^6$ obarvení. Podobně dostaneme $6 \cdot 2^7$ obarvení, která používají v každém sloupci právě dvě barvy. Nakonec potřebujeme odečíst obarvení, která jsme započítali dvakrát, což jsou právě ta, která používají pouze dvě barvy v každém řádku a v každém sloupci. Všechna taková obarvení jsou určena pořadím barev v levém horním čtverci 2×2, a je jich tedy $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Celkem máme $6 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^7 - 24 = 1128$ atraktivních obarvení.

Úloha 48. Sto dětí stojí v řadě. První dítě má 4 gramy čokolády, druhé má 8 gramů čokolády, a tak to pokračuje dále, až sté dítě má 400 gramů čokolády. První dítě dá třetinu své čokolády druhému dítěti (takže druhé dítě má teď $\frac{28}{3}$ gramů čokolády). Druhé dítě pak dá jednu třetinu své čokolády třetímu dítěti, a tak dále, až devadesáté deváté dítě dá jednu třetinu své čokolády stému dítěti. Kolik gramů čokolády bude nakonec mít sté dítě?

Výsledek. $597 + 3^{-99}$

Řešení. Všechny hmotnosti jsou v gramech. Po prvním kroku má druhé dítě $8 + 4/3$. Ve druhém kroku dá třetinu své čokolády třetímu dítěti, které pak má $12 + 8/3 + 4/3^2$. Po třetím kroku má čtvrté dítě $4(4 + 3/3 + 2/3^2 + 1/3^3)$ čokolády. Snadno vypozorujeme, že sté dítě bude mít nakonec

$$4\left(100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}\right).$$

Označme

$$S = 100 + \frac{99}{3^1} + \frac{98}{3^2} + \frac{97}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}}.$$

Potom máme

$$\begin{aligned} S = \quad & 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{99}} + \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{98}} + \\ & \vdots \\ & + 1 + \frac{1}{3} + \\ & + 1. \end{aligned}$$

Sečtením geometrické řady

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2}\left(100 - \left(\frac{1}{3^{100}} + \frac{1}{3^{99}} + \cdots + \frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{98}} + \cdots + 1\right)\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right). \end{aligned}$$

Nakonec máme

$$4S = 4 \cdot \frac{3}{2}\left(100 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{100}}\right)\right) = 600 - 3 + \frac{1}{3^{99}} = 597 + 3^{-99}.$$

Úloha 49. Najděte všechna kladná celá čísla $n \geq 3$, pro která je následující výraz celočíselný:

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}.$$

Výsledek. 3, 4, 5, 6, 8, 14

Řešení. Hledáme všechna n, která splňují podmínku $(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)$. Po přičtení $(n-2)^2$ k pravé straně dostáváme ekvivalentní výraz

$$(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1) + (n-2)^2 = (n-1)^{n-1} + 2015 \cdot (n-1).$$

Jelikož jsou čísla $n-1$ a $n-2$ nesoudělná, platí také $(n-2)^2 \mid (n-1)^{n-2} + 2015$. Položíme-li $t = n-2$, můžeme podmínku dělitelnosti přepsat jako $t^2 \mid (t+1)^t + 2015$, což pomocí binomické věty rozvineme na

$$t^2 \mid t^t + \binom{t}{t-1} t^{t-1} + \cdots + \binom{t}{2} t^2 + \binom{t}{1} t + 1 + 2015.$$

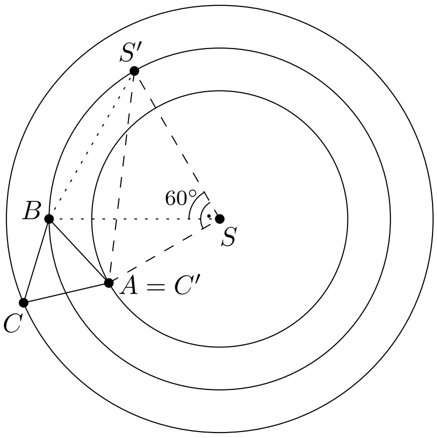
Prvních t členů je dělitelných t^2, takže zbývá splnit $t^2 \mid 2016$. Rozklad čísla 2016 na prvočinitele je $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, takže jediné možné hodnoty t jsou 1, 2, 3, 4, 6, 12. Zpětnou substitucí do $n = t + 2$ získáme šest řešení: 3, 4, 5, 6, 8, 14.

Úloha 50. Na každé ze tří soustředných kružnic s poloměry 3, 4 a 5 leží jeden vrchol rovnostranného trojúhelníka. Jaké jsou všechny možné délky strany tohoto trojúhelníka?

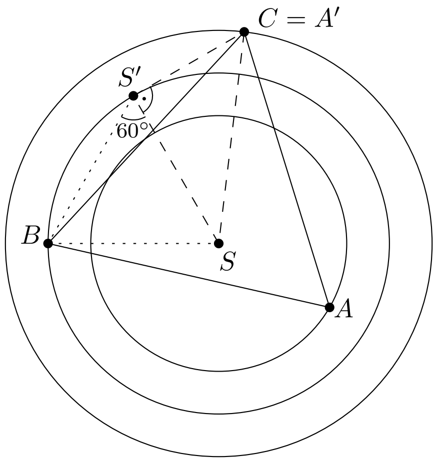
Výsledek. $\sqrt{25-12\sqrt{3}}$, $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$

Řešení. Vrcholy trojúhelníka ze zadání označme postupně A, B, C. Nechť S je společný střed všech tří kružnic. Mohou nastat dva případy: bod S buď leží vně trojúhelníka ABC, nebo uvnitř něho.

V prvním případě dostaneme otočením bodů C a S o $60°$ okolo bodu B body $C' = A$ a S'. Trojúhelník SBS' je rovnostranný se stranou délky 4 a $|S'C'| = |SC| = 5$. Trojúhelník $SS'C'$ má délky stran 3, 4, 5, a tedy $|\sphericalangle S'SC'| = 90°$. Dále $|\sphericalangle BSA| = |\sphericalangle S'SC'| - |\sphericalangle S'SB| = 30°$ a použitím kosinové věty v trojúhelníku BSA dostaneme $|AB| = \sqrt{25-12\sqrt{3}}$.



Ve druhém případě otočíme body A a S o $60°$ okolo B, čímž získáme body $A' = C$ a S'. V trojúhelníku $SS'A'$ je ze stejného důvodu jako v předchozím případě $|\sphericalangle SS'A'| = 90°$. Tedy $|\sphericalangle BSA| = |\sphericalangle BS'A'| = |\sphericalangle SS'A'| + |\sphericalangle SS'B| = 150°$. Použitím kosinové věty v trojúhelníku BSA dostaneme druhé řešení $AB = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$.



Úloha 51. Okolo kulatého otočného stolu je rovnoměrně rozmístěno sedm židlí. Na stole je namalováno sedm šipek tak, že od každé židle a ke každé židli vede právě jedna šipka (počáteční a koncová židle jedné šipky nemusí být nutně různé). Na každé židli sedí jeden člověk. Každou minutu se všichni zvednou, vymění si místa podle šipek a následně otočí stolem o jedno místo, tj. o jednu sedminu kruhu, po směru hodinových ručiček. Kolik nejvíce minut jim může trvat, než se poprvé všichni zároveň vrátí na své původní židle?

Výsledek. 84

Řešení. V každé minutě proběhne permutace lidí sedících okolo stolu podle šipek. Po každé sedmé výměně míst se pak stůl dostane do stejné polohy jako na začátku. Podíváme-li se tedy na každý sedmiminutový blok jako na jeden celek, můžeme mu přiřadit permutaci – složení příslušných sedmi dílčích výměn.

Permutace na sedmi prvcích má řád (tj. počet nutných zopakování, po kterých se všechny prvky vrátí na svá původní místa) nanejvýš 12. Řád permutace totiž zřejmě spočteme jako nejmenší společný násobek délek cyklů, které ji tvoří. Řádu 12 jsou například všechny permutace typu

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4,$$

tj. složené z jednoho cyklu o třech a jednoho cyklu o čtyřech prvcích.

Nejpozději se tedy lidé vrátí na svá původní místa po $7 \cdot 12 = 84$ minutách. Nyní ukážeme, že existuje rozložení šipek, pro které je těchto 84 minut opravdu potřeba.

Jestliže jsou na stole šipky vyznačené tak, že si při první iteraci vymění místa pouze lidé na pozicích 1 a 4, pak jsou po sedmi minutách pozice zamíchané pomocí permutace

$$1 \to 2 \to 3 \to 1; \quad 4 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4$$

řádu 12. Po 84 minutách se tedy všichni ocitnou na svých původních místech. Zbývá ukázat, že se na ně nedostanou už dříve v průběhu některého sedmiminutového bloku.

Všimněme si, že po dokončení celého bloku sedí na pozicích 1, 2 a 3 vždy jejich původní osazenstvo (ne nutně každý na svém původním místě). V průběhu bloku však pokaždé sedí alespoň jeden z těchto lidí na některé z pozic 4–7. Z toho vyplývá, že na původní místa se všichni znovu dostanou skutečně až po 84 minutách.

Úloha 52. Nechť $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je posloupnost kladných reálných čísel. Počínaje členem a_2 je každé číslo polovinou součtu aritmetického a geometrického průměru svých dvou sousedů. Určete a_{333}, jestliže víte, že $a_1 = \frac{2}{7}$ a $a_{11} = \frac{7}{2}$.

Poznámka: Geometrický průměr dvou kladných reálných čísel x a y je definován jako $\sqrt{xy}$.

Výsledek. 2016

Řešení. Podmínku v zadání lze přepsat jako

$$a_k = \frac{\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} + \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}\right)^2}{4}$$

pro každé $k \geq 2$. Jelikož jsou všechny členy posloupnosti kladná čísla, můžeme výraz upravit do tvaru

$$\sqrt{a_k} = \frac{\sqrt{a_{k-1}} + \sqrt{a_{k+1}}}{2}.$$

Uvažujme nyní posloupnost $b_1, b_2, \ldots$, kde $b_k = \sqrt{a_k}$. Tato posloupnost je aritmetická s diferencí d. Navíc víme, že $b_1 = \sqrt{2/7}$ a $b_{11} = \sqrt{7/2}$, odkud spočteme

$$d = \frac{\sqrt{7/2} - \sqrt{2/7}}{10} = \frac{1}{2\sqrt{14}}.$$

Z toho již snadno dostaneme b_{333} jako

$$b_{333} = b_1 + 332 \cdot d = \sqrt{\frac{2}{7}} + \frac{332}{2\sqrt{14}} = \frac{4+332}{2\sqrt{14}} = 12\sqrt{14}$$

a následně $a_{333} = b_{333}^2 = 2016$.

Úloha 53. Viki má obdélník s obvodem 444 a stranami kladných celočíselných délek a a b, kde $a > b$. Snaží se jej vyplnit čtverci o straně délky $a - b$ tak, že první z nich umístí do levého horního rohu a další skládá do čtvercové mřížky určené tímto čtvercem (mřížka má tedy počátek v levém horním rohu obdélníka a osy rovnoběžné s jeho stranami). Po položení několika čtverců (tj. aspoň jednoho) se však dostane do situace, kdy se už žádný další celý čtverec do obdélníka nevejde. V té chvíli je obsah nepokryté části obdélníka roven 1296. Sečtěte všechny možné délky strany čtverce použitého pro vyplnění daného obdélníka (sčítáme přes všechny možné Vikiho obdélníky splňující zadání).

Výsledek. 166

Řešení. Platí $a \equiv b \equiv r \pmod{a-b}$, kde $0 \leq r \leq a - b - 1$. Obsah nepokryté části obdélníka je tedy $ra + rb - r^2 = -r^2 + 222r = 1296$, což ekvivalentně přepíšeme jako $(r-6)(r-216) = 0$. Evidentně je $a > r$ a $b > r$, takže musí být $r = 6$.

Odstraníme-li nyní nepokrytou část a položíme $x = a - r$ a $y = b - r$, dostaneme obdélník $x \times y$ beze zbytku vyplněný čtverci o straně $x - y = a - b$. Protože $x - y$ dělí x i y, musí dělit i $x + y = a + b - 2r = 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Zvolme $d \mid 210$ a vyřešme soustavu rovnic $x - y = d$ a $x + y = 210$ vzhledem k x a y:

$$x = \frac{210+d}{2}, \quad y = \frac{210-d}{2}.$$

Řešeními musí být kladná celá čísla, neboť zadání říká, že Viki položil alespoň jeden čtverec o straně $a - b = x - y > 0$. Fakt, že jsme vyplnili co možná největší část obdélníka, nám navíc dává podmínku $x - y > 6$. Z toho plyne, že d dává řešení právě tehdy, když je sudým dělitelem 210 splňujícím $6 < d < 210$. Jinými slovy musí být d jedním z čísel 10, 14, 30, 42 a 70, jejichž součet je 166.

Úloha 54. Uvnitř trojúhelníka ABC zvolme bod P. Označme A', B', C' postupně průsečíky přímek AP, BP, CP se stranami BC, CA, AB. Jestliže

$$|A'P| = |B'P| = |C'P| = 3$$

a

$$|AP| + |BP| + |CP| = 25,$$

určete $|AP| \cdot |BP| \cdot |CP|$.

Výsledek. 279

Řešení. Obsah trojúhelníka budeme značit hranatými závorkami. Pišme $a = |AP|$, $b = |BP|$, $c = |CP|$. Pak

$$\frac{[PBC]}{[ABC]} = \frac{|PA'|}{|AA'|} = \frac{3}{a+3}$$

a podobně

$$\frac{[PCA]}{[ABC]} = \frac{3}{b+3}, \quad \frac{[PAB]}{[ABC]} = \frac{3}{c+3}.$$

Dále máme $[PBC] + [PCA] + [PAB] = [ABC]$ neboli

$$\frac{3}{a+3} + \frac{3}{b+3} + \frac{3}{c+3} = 1,$$

což můžeme upravit do tvaru

$$54 + 9(a+b+c) = abc.$$

Výsledek získáme dosazením $a + b + c = 25$ do této rovnice.

Úloha 55. Hedvika má kružnici k, na které zvolila proti směru hodinových ručiček čtrnáct bodů $A_1, \ldots, A_{14}$. Ukázalo se, že z úseček spojujících body A_i a A_j pro $1 \leq i < j \leq 14$ se žádné tři neprotínají v jednom bodě uvnitř kružnice k. Hedvika si všechny tyto úsečky poctivě namalovala do jednoho obrázku, ale protože se její obrázek stal vzhledem k tolika čárám dost nepřehledným, rozhodla se vygumovat všechny strany a úhlopříčky sedmiúhelníků $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ a $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$. Na kolik oblastí dělí zbývající úsečky kruh ohraničený kružnicí k?

Výsledek. 295

Řešení. Přidávejme úsečky jednu po druhé. Kdykoliv přidáme jednu úsečku, zvýší se celkový počet oblastí o 1 + počet úseček, které tato nová úsečka protíná. Hledaný počet oblastí je tedy roven

$$1 + \text{počet úseček} + \text{počet průsečíků těchto úseček}.$$

Bodům $A_1, A_3, \ldots, A_{13}$ říkejme *liché* a ostatním bodům říkejme *sudé*. Nevygumované jsou právě ty úsečky, které spojují liché body se sudými. Těch je $7 \cdot 7 = 49$.

Koncové body protínajících se úseček leží na kružnici k v pořadí lichý – lichý – sudý – sudý. Naopak každá taková čtveřice bodů určuje jeden průsečík, takže nám stačí zjistit počet těchto čtveřic. Bez újmy na obecnosti buď A_1 první z lichých bodů čtveřice. Rozdělíme-li body na kružnici k do sedmi dvojic $(A_2, A_3), (A_4, A_5), \ldots, (A_{14}, A_1)$, vidíme, že zbývající tři body čtveřice musí patřit do různých dvojic. Každá volba tří z uvedených dvojic nám navíc dává vyhovující čtveřici bodů: stačí vybrat lichý bod z první dvojice a sudé body z druhých dvou. K tomu však máme sedm různých možností výběru prvního lichého bodu, takže dostáváme celkem

$$7 \cdot \binom{7}{3} = 245$$

průsečíků. Kruh je tedy úsečkami rozdělený na $1 + 49 + 245 = 295$ oblastí.

Úloha 56. Určete počet uspořádaných čtveřic kladných celých čísel (a, b, c, d) splňujících

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{a} \quad ab = cd.$$

Výsledek. 800

Řešení. Nejdříve vynásobme první rovnici číslem a a využijme druhou, čímž dostaneme $(a+c)(a+d) = 505a = 5 \cdot 101 \cdot a$. Protože 5 i 101 jsou prvočísla a protože jsou obě závorky větší než a, musí být jedna z nich rovna $5k$ a druhá $101l$, přičemž $kl = a$. Rozeberme nyní dva případy. Nejprve uvažujme $a + c = 5k$ a $a + d = 101l$ pro daná k, l splňující $kl = a$. Pak platí $c = k(5 - l)$, $d = l(101 - k)$ a $b = 505 - a - d - c = (101 - k)(5 - l)$. Snadno ověříme, že čtveřice

$$(a, b, c, d) = (kl, (101 - k)(5 - l), k(5 - l), l(101 - k))$$

splňuje podmínku $ab = cd$ a je tedy řešením daného systému pro libovolné $l = 1, 2, 3, 4$ a libovolné $k = 1, 2, \ldots, 100$. Vedou-li dvojice (k_1, l_1) a (k_2, l_2) podle vzorce uvedeného výše ke stejnému řešení, pak nutně platí $k_1 l_1 = k_2 l_2$ a $(5 - l_1)k_1 = (5 - l_2)k_2$, z čehož plyne $k_1 = k_2$ a $l_1 = l_2$. Máme tedy 400 po dvou různých řešení.

Druhou možností volby hodnot závorek je případ $a + c = 101l$ a $a + d = 5k$, pro který podobným způsobem dostaneme 400 po dvou různých řešení

$$(a, b, c, d) = \big(kl, (101 - k)(5 - l), l(101 - k), k(5 - l)\big)$$

pro jakákoli $l = 1, 2, 3, 4$ a $k = 1, 2, \ldots, 100$. Žádné řešení z druhého případu není stejné jako řešení z prvního případu, protože $5k = a + c = 101l$ neplatí pro žádná k, l v daných mezích. Dohromady tedy existuje $400 + 400 = 800$ řešení.