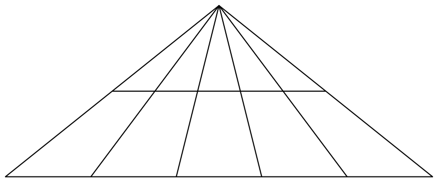
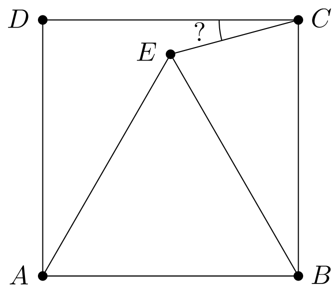
Aufgabe 1. Vor drei Jahren war Florians Mutter dreimal so alt wie Florian damals war. Jetzt ist Florians Vater dreimal so alt wie Florian. Wie viele Jahre ist der Altersunterschied von Florians Eltern?

Aufgabe 2. Wie viele Dreiecke sind in diesem Bild zu sehen?



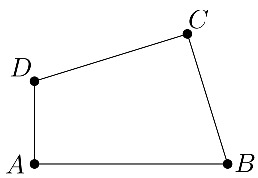
Aufgabe 3. Im Inneren eines Quadrates $ABCD$ ist ein Punkt E gegeben, so dass das Dreieck $\triangle ABE$ gleichseitig ist. Wie groß ist der Winkel $\angle DCE$ in Grad?



Aufgabe 4. Die kleine Sandi besitzt eine große Schatzkiste mit vielen beschrifteten Münzen: Eine Münze ist mit der Zahl 1 beschriftet, zwei Münzen mit der Zahl 2, ..., achtzehn Münzen mit der Zahl 18 und neunzehn Münzen mit der Zahl 19. Sandi nimmt eine Münze nach der anderen aus der Schatzkiste, ohne die Beschriftung lesen zu können. Wie viele Münzen muss Sandi mindestens herausnehmen, wenn sie sichergehen will, dass sie zehn identisch beschriftete Münzen hat?

Aufgabe 5. Herr Zucker kaufte eine große Schachtel seiner Halloween-Lieblingssüßigkeiten, um sie an vorbeikommende Kinder zu verteilen. Jedoch aß er die Hälfte davon bereits, bevor das erste Kind vorbeikam und einen gewissen Anteil erhielt. Danach aß er die Hälfte der noch verbliebenen Süßigkeiten, bis das zweite Kind kam, und wieder die Hälfte des Restes, bevor das dritte Kind kam und den gesamten Rest erhielt. Wenn jedes Kind genau drei Süßigkeiten erhielt, wie viele Süßigkeiten kaufte Herr Zucker?

Aufgabe 6. Gegeben sei ein Viereck $ABCD$ mit rechten Winkeln in den Ecken A und C. Ferner seien $\overline{BC} = 6$, $\overline{CD} = 8$ und $\overline{DA} = 2$. Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$.

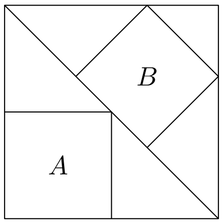


Aufgabe 7. Ein Bürodrucker kann einseitig oder doppelseitig drucken. Einseitiges Drucken dauert drei Sekunden pro Seite, Duplexdruck neun Sekunden pro Blatt. Kathi möchte einen achtzehnseitigen wissenschaftlichen Bericht doppelseitig ausdrucken. Sie kann entweder direkt Duplexdruck verwenden oder erst die ungeraden Seiten drucken, diese von Hand zurück in den Drucker legen und dann die geraden Seiten drucken. Kathi stellt bald fest, dass beide Varianten genau gleich lang dauern. Wie viele Sekunden braucht sie, um die Blätter zurück in den Drucker zu legen?

Aufgabe 8. Finde alle 9-stelligen Zahlen A, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Jede Ziffer $1, \dots, 9$ kommt genau einmal vor.
- Jede zweistellige Zahl, die aus zwei benachbarten Ziffern von A gebildet wird, ohne dabei die Reihenfolge der Ziffern zu verändern, ist durch 7 oder 13 teilbar.

Aufgabe 9. Zwei Quadrate sind in einem größeren Quadrat wie in der Abbildung zu sehen eingepasst. Bestimme den Flächeninhalt des Quadrats A, wenn 48 der Flächeninhalt des Quadrats B ist.



Aufgabe 10. Fiona hat zwei Würfel: einen der Seitenlänge 9 cm bestehend aus lauter weißen Einheitswürfeln, das heißt Würfeln mit der Seitenlänge 1 cm, und einen der Seitenlänge 10 cm, der aus lauter schwarzen Einheitswürfeln zusammengesetzt ist. Sie will damit einen Würfel der Seitenlänge 12 cm aufbauen. Wie viele cm^2 der Oberfläche müssen mindestens schwarz sein?

Aufgabe 11. Nach der Korrektur eines Mathematiktests einer Klasse erkennt der Lehrer, dass genau zehn seiner Schüler Brüche nicht multiplizieren können, vierzehn sie nicht addieren können und siebzehn Brüche nicht kürzen können. Außerdem fehlt jedem Schüler mindestens eine dieser drei Fähigkeiten und es gibt genau sechs Schüler, die alle drei Fähigkeiten nicht beherrschen. Wie viele Schüler sind höchstens in dieser Klasse?

Aufgabe 12. Einer der Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck beträgt $23°$. Bestimme den Winkel (in Grad) zwischen der Seitenhalbierenden und der Höhe, die beide vom rechten Winkel ausgehen.

Aufgabe 13. Für zwei positive ganze Zahlen a und b gilt $20a + 19b = 365$. Bestimme den Wert von $20b + 19a$.

Aufgabe 14. Ein regelmäßiges 2018-Eck besitzt 2 033 135 Diagonalen, wenn man die Seiten nicht mitzählt. Wie viele solche Diagonalen mehr besitzt ein regelmäßiges 2019-Eck?

Aufgabe 15. Finde alle reellen Lösungen der Gleichung $(x^2 - 4x + 5)^{x^2+x-30} = 1$.

Aufgabe 16. Wie viele Permutationen der Zahlen 1, 2, 3, 4 gibt es, so dass beim Löschen einer der Zahlen die verbleibende Zahlenfolge weder monoton steigend noch monoton fallend ist?

Hinweis. Eine *Permutation* ist eine Folge, die jede Zahl genau einmal enthält.

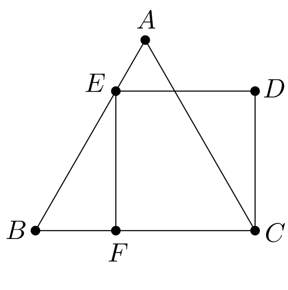
Aufgabe 17. Sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 8\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$. Mit X bzw. Y seien die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten von AC mit der Seite AB bzw. mit der Seite CD benannt. Wie lang ist die Strecke XY in Zentimetern?

Aufgabe 18. Im Kryptogramm $FOUR + FIVE = NINE$ repräsentiert jeder Buchstabe eine bestimmte Ziffer. Gleiche Buchstaben repräsentieren dieselbe Ziffer, verschiedene Buchstaben unterschiedliche Ziffern. Weiter ist bekannt, dass

- $FOUR$ durch vier teilbar ist,
- $FIVE$ durch fünf teilbar ist,
- $NINE$ durch drei teilbar ist.

Finde alle möglichen Werte von $NINE$.

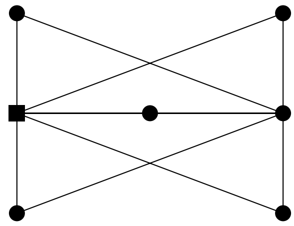
Aufgabe 19. Wie in der Skizze zu sehen, sei $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck und $CDEF$ ein Quadrat, so dass E auf der Strecke AB und F auf der Strecke BC liegt. Was ist der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn der Umfang des Quadrates 4 ist?



Aufgabe 20. Es seien a und b reelle Zahlen. Von der Gleichung $x^3 - ax^2 + 588x - b = 0$ ist bekannt, dass sie eine dreifache reelle Lösung hat. Welche Werte sind dann für a möglich?

Aufgabe 21. Simon befindet sich auf einer Reise zu Inseln, die, wie die Abbildung zeigt, mit mautpflichtigen Brücken verbunden sind. Von jeder Brücke ist die Aussicht einzigartig, deshalb möchte er jede Brücke überqueren. Gleichzeitig möchte er Geld sparen und deshalb jede Brücke nur ein einziges Mal überqueren. Wie viele mögliche Reisewege hat er, startend auf der quadratischen Insel?

Hinweis. Simon kann nicht von einer Brücke auf eine andere springen, wenn er sich nicht auf einer Insel befindet, und er kann jede Insel beliebig oft besuchen.



Aufgabe 22. Wieviele geordnete Paare positiver ganzer Zahlen (m, n) mit kleinstem gemeinsamen Vielfachen 2000 gibt es?

Aufgabe 23. Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck $ABCDEFGH$ mit $\overline{AC} = 7\sqrt{2}$. Bestimme den Flächeninhalt dieses Achtecks.

Aufgabe 24. Vier Freunde beschließen neue Sprachen zu lernen. In der Sprachschule wird Arabisch, Bengalisch, Chinesisch und Niederländisch angeboten. Jeder der vier Freunde möchte genau drei dieser Sprachen lernen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl der Sprachen, wenn sie zumindest einen Kurs gemeinsam belegen wollen?

Aufgabe 25. Anna bekommt eine positive ganze Zahl n mit Ziffern ungleich null genannt. Sie multipliziert diese mit derjenigen Zahl, welche die gleichen Ziffern wie n hat, aber in umgekehrter Reihenfolge. Anna stellt fest, dass das Ergebnis um tausend größer ist als das Produkt der Ziffern von n. Finde alle möglichen Werte für n.

Aufgabe 26. In einem Parallelogramm $ABCD$ sei T ein Punkt im Inneren der Strecke AD, so dass die Gerade TC den Winkel $\angle DCB$ halbiert. Weiterhin sei E ein Punkt auf der Seite AB, so dass $\angle TEA = 40°$ gilt. Wie groß ist der Winkel $\angle ADC$ (in Grad), wenn $\angle ETC = 75°$ ist?

Aufgabe 27. Zwei große Adelshäuser trafen sich zu einem Fest, beide vertreten durch mindestens ein männliches und mindestens ein weibliches Mitglied. Jedes Mitglied eines Hauses begrüßte jedes Mitglied des anderen Hauses: Wenn sich zwei Männer begrüßten, schüttelten sie sich die Hände, während sich zwei Frauen oder eine Frau und ein Mann voreinander verbeugten. Insgesamt kam es während der Begrüßung zu 85 Handschlägen und 162 Verbeugungen. Wie viele Frauen waren auf dem Fest anwesend?

Hinweis. Es zählt als *eine* Verbeugung, wenn sich zwei Personen voreinander verneigen.

Aufgabe 28. Betrachte ein Dreieck mit den Seitenlängen 10, 24 und 26. Sei k ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der längsten Dreiecksseite liegt, und der die beiden kürzeren Dreiecksseiten berührt. Finde den Radius des Kreises k.

Aufgabe 29. Margarita geht mit 10 € in ein Casino. Die Spielautomaten im Casino funktionieren folgendermaßen: Der Spieler wirft 1 € in beliebigen Münzen ein und gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit p den Jackpot, bei Nichtgewinn werden 0.5 € zurückgegeben. Margarita möchte den Spielautomaten so lange spielen, bis sie entweder den Jackpot gewinnt oder aber kein Geld mehr hat. Finde für sie die kleinste Wahrscheinlichkeit p, so dass sie eine Chance von mindestens 50% hat, den Jackpot zu gewinnen.

Aufgabe 30. Bestimme alle vierstelligen positiven ganzen Zahlen $\overline{abcd}$, die gleich dem Wert von $a^a + b^b + c^c + d^d$ sind. Dabei darf keine der Ziffern die Null sein.

Aufgabe 31. Wie viele 5-Tupel zweistelliger Zahlen gibt es, so dass jede der Ziffern von 0 bis 9 genau einmal vorkommt und jede der zweistelligen Zahlen gerade, aber nicht durch drei teilbar ist?

Hinweis. Dabei werden 5-Tupel, die sich nur in der Anordnung der zweistelligen Zahlen unterscheiden, als gleich angesehen.

Aufgabe 32. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n, welche die Gleichung

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{35} \right\rfloor = 2019$$

erfüllen.

Hinweis. Dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl x, das heißt die größte ganze Zahl kleiner gleich x.

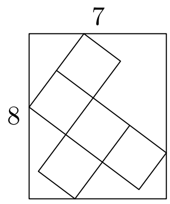
Aufgabe 33. Für wie viele ganze positive Zahlen n kann man (nicht unbedingt verschiedene) positive ganze Zahlen $x, y \leq 1\,000\,000$ finden, so dass

$$n = S(x) = S(y) = S(x + y)$$

gilt?

Hinweis. Mit $S(a)$ ist die Quersumme einer positiven ganzen Zahl a bezeichnet.

Aufgabe 34. Ein Pentomino bestehend aus fünf Quadraten mit der Seitenlänge a ist in ein Rechteck der Größe 7×8 eingepasst, wie in der Abbildung zu sehen ist:



Finde die Seitenlänge a.

Aufgabe 35. Paul hat eine rechteckige Schokoladentafel der Größe 5×3. Er hat extra Zucker auf das linke, obere Schokoladenstückchen gelegt, um es süßer zu machen. Er isst die Schokoladentafel in folgender Weise: In jedem Schritt wählt er zufällig die Spalte ganz rechts oder die unterste Reihe, jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$. Das wiederholt er, bis die gesamte Schokolade gegessen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er im letzten Schritt nur das einzelne süßere Schokoladenstückchen isst?

Aufgabe 36. Christoph bildete einige paarweise verschiedene Primzahlen, wobei er jede der Ziffern $1, \ldots, 9$ genau zwei Mal benutzte und darauf achtete, dass die Summe aller dieser Primzahlen so klein wie möglich war. Welchen Wert hatte diese Summe?

Aufgabe 37. Tom und Jerry haben zwei Polynome $T(x) = x^2 + 2x + 10$ und $J(x) = x^2 - 8x + 25$. Wenn jeder von ihnen seine positive ganze Lieblingszahl t bzw. j in sein jeweiliges Polynom einsetzt, erhalten sie dasselbe Ergebnis, d.h. es ist $T(t) = J(j)$. Finde alle möglichen Werte von $|t - j|$.

Aufgabe 38. Die Höhe des Dreiecks $\triangle ABC$ durch den Eckpunkt A ist gleich lang wie die Seitenhalbierende durch den Eckpunkt B. Der Winkel $\angle CBA$ beträgt $75°$. Bestimme das Verhältnis $\overline{AB} : \overline{BC}$.

Aufgabe 39. Bei Tic-Tac-Toe setzen zwei Spieler abwechselnd Kreise und Kreuze in ein 3×3 Quadrate großes Spielfeld. Es gewinnt der Spieler, der zuerst drei seiner Symbole in einer Zeile, Spalte oder Diagonale hat. Das Spiel endet unentschieden, wenn sämtliche Felder ausgefüllt wurden und kein Spieler gewonnen hat. Wie viele Spielfeldkonfigurationen sind bei einem Unentschieden möglich?

Hinweis. Rotierte Anordnungen werden alle separat gezählt, Kreis und Kreuz können beide das Spiel beginnen.

Aufgabe 40. Bestimme die größte positive ganze Zahl a, so dass keine positive ganze Zahl b die Ungleichungen

$$\frac{4}{3} < \frac{a}{b} < \frac{25}{18}$$

erfüllt.

Aufgabe 41. Heiko und Eva machen eine Radtour der Länge 110 km von Passau nach Linz. Auf dieser Strecke müssen sie drei Steigungen überwinden. In der ersten Pause sagt Heiko, ein kluger Kopfrechner, zu Eva: „Wenn man die Entfernungen von Passau zu dem jeweils höchsten Punkt der drei Anstiege miteinander multipliziert, so erhält man ein Vielfaches von 2261.“ Eva überlegt eine Weile und erwidert erstaunt: „Das Gleiche gilt, wenn man die Entfernungen dieser Punkte von Linz aus gemessen multipliziert.“ Nach 80 km machen sie eine zweite Pause und Heiko meint: „Jetzt haben wir bis Linz nur noch einen Anstieg vor uns und haben es dann bald geschafft.“
Angenommen, alle vorkommenden Entfernungen sind natürliche Zahlen und in km angegeben, in welcher Entfernung von Passau befinden sich dann die höchsten Punkte der drei Anstiege? Gib die Entfernungen ebenfalls in km an.

Aufgabe 42. Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C und den Seitenlängen $\overline{AC} = 4-\sqrt{3}$ und $\overline{BC} = \sqrt{3}$. Ferner seien D und E die weiteren Eckpunkte des Quadrats $AEDB$, welches den Punkt C nicht im Inneren enthält. Außerdem sei J derjenige Punkt auf DE, für den $\angle ACJ = 45°$ gilt. Schließlich sei K ein Punkt auf CJ mit $AK \parallel BC$. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle JKE$.

Aufgabe 43. Zwei Gefangene stehen vor zwei Urnen. Sie wissen, dass eine Urne zwei weiße Murmeln und eine schwarze enthält und die andere Urne eine weiße und zwei schwarze. Sie wissen aber nicht, welche Urne die zwei weißen Murmeln enthält. Jeder Gefangene muss eine Urne auswählen und zufällig eine Murmel ohne Zurücklegen ziehen. Wenn er eine weiße zieht, dann kommt er frei, andernfalls wird er hingerichtet. Wenn der zweite Gefangene den Zug des ersten Gefangenen und dessen Ergebnis beobachtet und möglichst klug vorgeht, wie groß ist dann vor dem Ziehen der ersten Murmel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er überlebt?

Hinweis. Es wird angenommen, dass der erste Gefangene eine Urne zufällig auswählt.

Aufgabe 44. Bestimme die kleinste positive ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft: Unter n nicht notwendigerweise verschiedenen reellen Zahlen aus dem Intervall $[1, 2019]$ gibt es stets drei Zahlen, welche Seitenlängen eines nicht entarteten Dreiecks sein können.

Aufgabe 45. Sei $\sigma(k)$ die Anzahl aller (positiven) Teiler einer positiven ganzen Zahl k. Ermittle die kleinste positive ganze Zahl n, sodass der größte gemeinsame Teiler von $\sigma(n)$ und $\sigma(n^3)$ keine Zweierpotenz ist (einschließlich 1).

Aufgabe 46. Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkeliges Dreieck mit $\angle ACB = 90°$, $\overline{AC} = 15$ und $\overline{BC} = 20$. Sei D jener Punkt auf AB, sodass $CD \perp AB$ gilt. Der Inkreis t des Dreiecks $\triangle ACD$ berührt die Strecke CD im Punkt T. Ein anderer Kreis c berührt die Strecke CD ebenfalls in T und er berührt die Strecke BC. Die beiden Schnittpunkte des Kreises c mit der Strecke AB werden durch X und Y bezeichnet. Wie lange ist XY?

Aufgabe 47. Jedes quadratische Feld einer 6×7 Tabelle wird weiß, grün, rot oder blau eingefärbt. Wir nennen eine Färbung *hübsch*, wenn die vier Felder eines jeden 2×2 Quadrats unterschiedliche Farben haben. Wie viele hübsche Färbungen gibt es?

Aufgabe 48. Einhundert Kinder stehen in einer Reihe. Das erste Kind hat 4 Gramm Schokolade, das zweite Kind hat 8 Gramm Schokolade usw., schließlich hat das 100. Kind 400 Gramm Schokolade. Das erste Kind gibt dem zweiten Kind ein Drittel seiner Schokolade, das zweite Kind hat jetzt also $\frac{28}{3}$ Gramm Schokolade. Das zweite Kind gibt dann dem dritten Kind ein Drittel seiner Schokolade und so weiter, bis das 99. Kind dem 100. Kind ein Drittel seiner Schokolade gibt. Wie viel Gramm Schokolade hat das 100. Kind am Ende?

Aufgabe 49. Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 3$, für welche

$$\frac{(n-1)^{n-1} - n^2 + 2019 \cdot (n-1)}{(n-2)^2}$$

ebenfalls eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 50. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit je einer Ecke auf einem von drei konzentrischen Kreisen mit den Radien 3, 4 und 5. Finde alle möglichen Seitenlängen des Dreiecks.

Aufgabe 51. Sieben Personen sitzen in gleichem Abstand rund um einen runden Tisch. Auf dem Tisch werden genau sieben Pfeile gezeichnet, sodass auf jedem Platz genau ein Pfeil beginnt und einer endet, wobei Start und Ende eines Pfeils nicht unbedingt verschieden sein müssen. Jede Minute wechseln die Personen Plätze und setzen sich auf jenen Platz, auf den der Pfeil zeigt, der von ihrem jetzigen Platz weg geht. Danach wird der Tisch um einen Platz im Uhrzeigersinn gedreht. Wie lange dauert es maximal in Minuten, bis alle Personen gleichzeitig zum ersten Mal wieder auf ihren ursprünglichen Plätzen sitzen?

Aufgabe 52. Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge von positiven reellen Zahlen. Beginnend mit a_2 ist jede Zahl die Hälfte der Summe von arithmetischem und geometrischem Mittel der beiden Nachbarzahlen. Berechne a_{333}, wenn $a_1 = \frac{2}{7}$ und $a_{11} = \frac{7}{2}$ bekannt sind.

Hinweis. Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen x und y ist durch $\sqrt{xy}$ definiert.

Aufgabe 53. Adam hat ein Rechteck mit Umfang 444 und positiven, ganzzahligen Seitenlängen a und b mit $a > b$. Er versucht, es mit Quadraten der Seitenlänge $a - b$ auszufüllen. Das erste Quadrat legt er in die linke obere Ecke. Weitere Quadrate legt er, indem er dem Muster eines quadratischen Gitters mit Achsen parallel zu den Seiten des Rechtecks und Ursprung in der linken oberen Ecke des Rechtecks folgt. Nachdem er zumindest ein Quadrat gelegt hat, muss er irgendwann aufhören, da es nicht möglich ist, ein zusätzliches Quadrat zu legen, das komplett innerhalb des Rechtecks liegt. Der Flächeninhalt des unbelegten Teils des Rechtecks beträgt 1296. Finde die Summe aller möglichen Seitenlängen des Quadrates, das zum Füllen des Rechtecks verwendet wurde.

Aufgabe 54. Sei P ein Punkt innerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Wir bezeichnen mit A', B', C' die Schnittpunkte von AP, BP, CP mit BC, CA, AB in dieser Reihenfolge. Angenommen es gilt

$$\overline{A'P} = \overline{B'P} = \overline{C'P} = 3$$

und

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} = 25.$$

Bestimme $\overline{AP} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{CP}$.

Aufgabe 55. Vierzehn Punkte $A_1, \ldots, A_{14}$ wurden in dieser Reihenfolge auf einem Kreis k gegen den Uhrzeigersinn ausgewählt, so dass keine drei verschiedenen Sehnen mit Endpunkten unter den ausgewählten Punkten sich im Innern von k schneiden. Christina zeichnete all diese Segmente. Da die Zeichung zu unübersichtlich wurde, entschied sie dann aber, alle Seiten und Diagonalen der Siebenecke $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}A_{13}$ und $A_2A_4A_6A_8A_{10}A_{12}A_{14}$ zu entfernen. In wieviele Bereiche teilen die restlichen Sehnen das Kreisinnere?

Aufgabe 56. Finde die Anzahl der Quadrupel (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen mit den Eigenschaften

$$a + b + c + d = 505 \quad \text{und} \quad ab = cd.$$