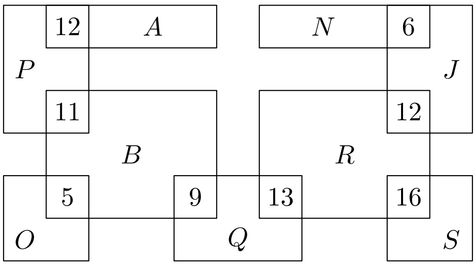
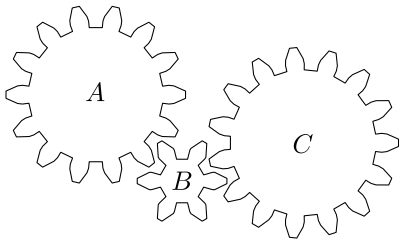
Úloha 1. Každé písmeno na obrázku odpovídá jiné nenulové číslici. V místě překryvu dvou obdélníků je vždy napsaný součet odpovídajících číslic. Určete pěticiferné číslo $NABOJ$.



Výsledek. 14325

Řešení. Číslo 16 lze získat jen jako součet 7 a 9. Kdyby $R = 9$, tak dostaneme $J = 3$ a následně $N = 3$, což odporuje zadání. Proto $R = 7$ a $S = 9$. Postupně spočítáme všechny ostatní číslice: $J = 5$, $N = 1$, $Q = 6$, $B = 3$, $P = 8$, $A = 4$ a $O = 2$. Hledaným číslem je tedy $NABOJ = 14325$, což mimochodem obsahuje skrytou zprávu o termínu konání Náboje 14. 3. 2025.

Úloha 2. Po kolika otočeních ozubeným kolečkem C kolem dokola se všechna kolečka zase vrátí přesně do původních poloh?



Výsledek. 14

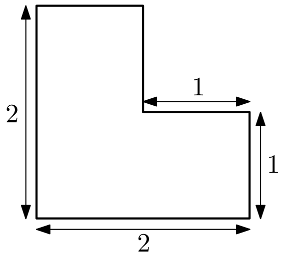
Řešení. Kolečko A má 14 zubů, B jich má 6 a C jich má 15. Nejprve určíme, o kolik zubů se musejí naše kolečka otočit, aby byla všechna zase v původních polohách. Toto číslo musí být násobkem 14, 6 i 15. Nejmenší společný násobek těchto čísel je $14 \cdot 15 = 210$ (kolečko B tedy náhodou „nehraje roli“; jakmile jsou v původní poloze A a C, tak je v původní poloze i B). Otočení o $14 \cdot 15$ zubů odpovídá $210/15 = 14$ otočením kolečka C.

Úloha 3. Na zeď Matfyzu kdosi nasprejoval deseticiferné číslo. Ondra si všiml, že kdykoli v něm podtrhne dvě stejné číslice, tak se někde mezi nimi nachází alespoň jedna menší cifra. Jaké největší číslo může být na zdi napsané?

Výsledek. 9 897 989 698

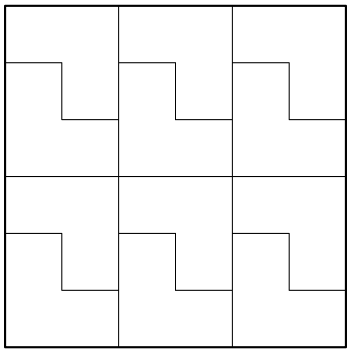
Řešení. Budeme číslo postupně budovat zleva. (Sprejer asi postupoval podobně.) Jako první číslici použijeme 9; i v každém dalším kroku vždy zvolíme největší číslici, která neporuší podmínku ze zadání. Na druhou pozici nemůžeme napsat 9, takže použijeme 8. Potom lze použít 9. Na čtvrtou pozici pak nelze napsat 8 ani 9, takže největší možná hodnota je 7. Následně jde opět postupně použít trojici číslic 9, 8, 9. Na osmou pozici ale musíme napsat 6, protože 9, 8 ani 7 nelze použít. Poslední dvě číslice vyjdou jako 9 a 8. Takto jsme sestavili číslo $n = 9\,897\,989\,698$ splňující zadání. Zdůvodníme, že na zdi skutečně nemůže být napsané větší číslo. Pokud totiž jiné číslo m také splňuje podmínky, stačí se podívat na první pozici, kde se liší od n. Protože jsme pro n vždy zvolili největší možnou číslici na daném místě, má zde m nějakou menší číslici. Proto určitě $m < n$, ať už jsou ostatní číslice jakékoli.

Úloha 4. Olin pokrývá čtvercovou podlahu dlaždicemi tvaru L (viz obrázek) tak, aby se dlaždice nepřekrývaly a podlaha byla zcela pokryta. Jaká je nejmenší délka strany pokrývaného čtverce, pro kterou se mu to podaří?

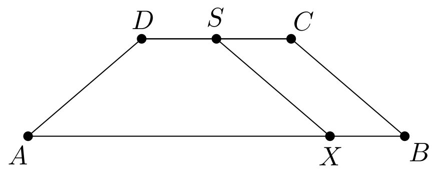


Výsledek. 6

Řešení. Obsah dlaždice je 3, takže obsah kteréhokoliv vydlážditelného útvaru je také násobkem 3. Nahlédneme, že čtverec 3×3 pokrýt nelze. Čtverec 6×6 už vydláždit jde; jedno z možných pokrytí je znázorněno níže.



Úloha 5. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD platí $|BC| = |CD| = |AD|$. Dále nechť S je střed úsečky DC a X bod na úsečce AB takový, že XS je rovnoběžná s BC. Určete obvod rovnoběžníku $XBCS$, je-li obvod $ABCD$ roven 50 a obvod $AXSD$ roven 38.



Výsledek. 36

Řešení. Protože se jedná o rovnoběžník, jsou úsečky $|XS|$ a $|BC|$ stejně dlouhé. Rozdíl zadaných obvodů, jehož hodnota je zjevně $50 - 38 = 12$, je proto roven $|XB| + |CS|$. Zároveň platí $|XB| + |CS| = 2 \cdot |CS| = |CD|$, a ze zadání víme, že tato délka se rovná i $|BC|$ a $|XS|$. Hledaný obvod je tedy $|XB| + |CS| + |BC| + |XS| = 3 \cdot |CD| = 3 \cdot 12 = 36$.

Úloha 6. David si myslí dvojmístné číslo složené ze dvou nenulových cifer. Když toto číslo vynásobil číslem s prohozenými ciframi, vyšlo mu čtyřmístné číslo s počáteční cifrou 3 a s koncovou 7. Jaké bylo větší z obou vynásobených čísel?

Výsledek. 93

Řešení. Označme x a y cifry Davidova čísla. Všimneme si, že cifra na místě jednotek ve výsledném součinu odpovídá jednotkám v součinu $x \cdot y$. Z toho plyne, že x ani y není sudé (jinak by součin byl sudý), a navíc se ani jedno z nich nesmí rovnat 5 (jinak by součin byl dělitelný 5). Pak už snadno vyzkoušíme, že cifru 7 můžeme dostat jen dvěma způsoby, a to jako $1 \cdot 7 = 7$ a $3 \cdot 9 = 27$. První možnost, tedy $17 \cdot 71$, má na místě tisíců 1, správným součinem je proto $39 \cdot 93 = 3627$ a řešením je 93.

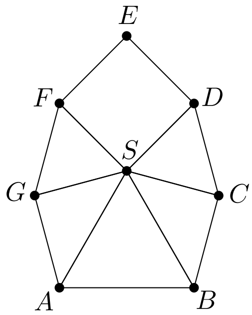
Úloha 7. Honza hraje karetní hru se standardním balíčkem 52 karet (13 hodnot ve 4 barvách). V každém tahu si buď dobere kartu, nebo ze své ruky zahraje kartu, která má shodnou hodnotu nebo barvu s vrchní kartou odhazovací hromádky. V předešlých tazích měl Honza smůlu a postupně si dobral hodně karet, což jej přivedlo k myšlence: Kolik nejméně karet musí mít na ruce, aby měl jistotu, že může určitě některou z karet zahrát (bez ohledu na to, jaká je vrchní karta odhazovací hromádky a jaké karty má na ruce)?

Výsledek. 37

Řešení. Pokud má Honza na ruce všechny kombinace 3 barev a 12 hodnot (celkem $3 \cdot 12 = 36$ karet), potom se může stát, že karta na vršku odhazovací hromádky má čtvrtou barvu a třináctou hodnotu, které Honzovi na ruce chybí. V takovém případě nemůže Honza žádnou ze svých karet zahrát. Hledaný počet karet je tedy alespoň 37.

Na druhou stranu, horní karta odhazovacího balíčku sdílí barvu s 12 dalšími kartami a hodnotu s dalšími 3 kartami. Jelikož je karet celkem 52 a alespoň 1 je na odhazovací hromádce, nejvyšší počet karet, které Honza může mít v ruce a nemoci je odehrát, je $52 - 1 - 12 - 3 = 36$. Pokud má Honza na ruce 37 karet, určitě může alespoň jednu z nich zahrát.

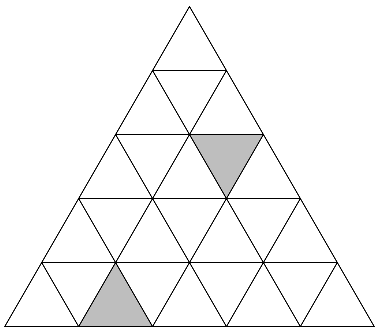
Úloha 8. Sedmiúhelník $ABCDEFG$ je složen ze 6 mnohoúhelníků se společným vrcholem S: tří rovnostranných trojúhelníků (ABS, CDS, FGS), dvou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků (BCS, GAS s pravým úhlem u vrcholu C, respektive G) a čtverce ($DEFS$). Určete velikost úhlu SAE ve stupních.



Výsledek. $15°$

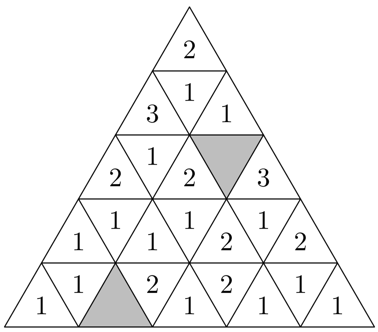
Řešení. Trojúhelník FGS je rovnostranný, z čehož plyne, že $|FS| = |GS|$, a rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky SGA a EFS jsou tak shodné. Proto $|ES| = |AS|$, a tedy i trojúhelník EAS je rovnoramenný. Jelikož $|\sphericalangle ESA| = 45° + 60° + 45° = 150°$, dostáváme $|\sphericalangle SAE| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle ESA|) = 15°$.

Úloha 9. Kolik je na obrázku trojúhelníků složených jen z bílých dlaždic?



Výsledek. 34

Řešení. Do každé dlaždice napíšeme, kolik trojúhelníků splňujících zadanou podmínku ji obsahuje jako horní nebo dolní roh (v závislosti na její orientaci):



Tímto způsobem započítáme každý z hledaných trojúhelníků právě jednou, a řešení tedy dostaneme jako součet všech těchto čísel.

Úloha 10. O čtyřciferném čísle řekneme, že je *čarokrásné*, jestliže má následující vlastnost: Když odstraníme číslici na pozici stovek, bude vzniklé trojciferné číslo přesně jedna devítina původního čtyřciferného čísla. Například 2025 je čarokrásné číslo, protože $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$. Nalezněte největší čtyřciferné čarokrásné číslo.

Výsledek. 6075

Řešení. Vezměme čarokrásné číslo $N = \overline{abcd}$ a označme $n = \overline{cd}$. Pak $N = 1000a + 100b + n$ a odstraněním číslice na pozici stovek dostáváme $M = 100a + n$. Požadovanou rovnost $M = \frac{1}{9}N$ lze přepsat jako $9M = N$ neboli

$$9(100a + n) = 1000a + 100b + n;$$

po přeuspořádání a vydělení čtyřmi dostáváme podmínku

$$25(a+b) = 2n.$$

Z této rovnosti vyplývá, že $a+b$ je sudé číslo, které je navíc ostře menší než $\frac{2\cdot 100}{25} = 8$, protože $n < 100$. Proto $a+b \leq 6$. Abychom získali co největší N, je rozhodující jeho první číslice, takže volíme $a = 6$ a $b = 0$, což dává $n = \frac{25\cdot 6}{2} = 75$. Číslo $N = 6075$ je skutečně čarokrásné, jelikož $675 = \frac{1}{9} \cdot 6075$.

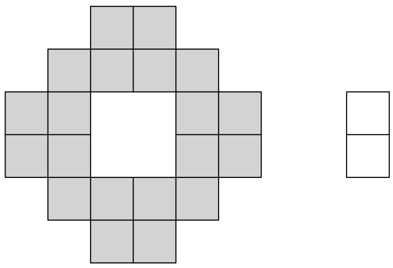
Úloha 11. Nákladní loď *Strýček Jack* může vozit tři různé kapaliny současně: etanol, naftu a rtuť. Pro každou surovinu má jinou maximální kapacitu: 10 tun etanolu, 30 tun nafty a 60 tun rtuti. Na cestě z Prahy do Hamburku vezla loď dohromady 85 tun těchto kapalin. Na zpáteční cestě převážela (v porovnání s cestou do Hamburku) stejné množství etanolu, dvakrát více nafty a třetinové množství rtuti. Kolik tun nákladu vezla na zpáteční cestě?

Výsledek. 60

Řešení. Maximální kapacita lodi je 100 tun. Protože na cestě do Hamburku vezla 85 tun nákladu, musela nutně vézt nejméně 15 tun nafty. Kdyby ale vezla více než 15 tun nafty, nemohla by jí na zpáteční cestě vézt dvakrát tolik. Proto loď na cestě tam vezla přesně 15 tun nafty a ostatních dvou komodit vezla maximální možné množství. Celkový náklad na zpáteční cestě už snadno spočteme jako

$$10 + 2 \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 60.$$

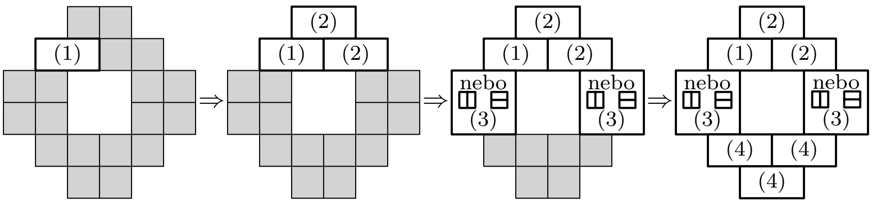
Úloha 12. Kolika různými způsoby lze vyobrazený šedý útvar zcela pokrýt dominovými kostkami tak, aby se nepřekrývaly? Každá dominová kostka (vyobrazená bíle vpravo) vždy pokrývá dvě sousední políčka a může být umístěna vodorovně nebo svisle.



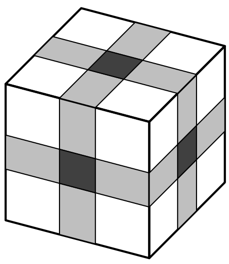
Poznámka: Dvě pokrytí, která jsou vůči sobě zrcadlově převrácená nebo která se liší otočením, počítáme jako různá. Dominové kostky nesmějí přečnívat přes okraj šedého útvaru.

Výsledek. 8

Řešení. Začneme pokrývat útvar z jednoho z vnitřních rohů, viz diagram (1); existuje i druhý způsob, jak první kostku položit (svisle místo vodorovně), ale obě výsledné situace jsou shodné, jen zrcadlově převrácené. Druhou možnost proto zatím ignorujeme a jen na závěr vynásobíme výsledek dvěma. Když už je položena tato první kostka, jsou jednoznačně určeny polohy dalších dvou, viz (2). Následně máme po dvou možnostech pokrytí obou „čtverců“ vlevo a vpravo, viz (3), a zbytek dláždění už je jednoznačný, viz (4). Existují tedy $2 \cdot 2 = 4$ možnosti, jak vydláždit útvar po položení kostky (1). Když započítáme zmíněnou volnost v položení tohoto domina, dostáváme dohromady $2 \cdot 4 = 8$ způsobů.



Úloha 13. Balíček ve tvaru krychle je zalepený lepicí páskou, jejíž šířka je menší než šířka hrany balíčku. Tmavě šedé plochy na povrchu (včetně těch, které na obrázku nejsou vidět) mají celkový obsah $216\,\mathrm{cm}^2$. Obsah světle šedých ploch na povrchu odpovídá polovině obsahu plochy, která vůbec není pokrytá lepicí páskou. Určete délku hrany balíčku v centimetrech.



Výsledek. 30

Řešení. Obsah každého tmavě šedého čtverce je $216/6 = 36$, takže délka jeho strany je $\sqrt{36} = 6$. Na každé stěně má nepokrytá část dvakrát větší obsah než světle šedé plochy, z čehož plyne, že každý světle šedý obdélník má poloviční velikost oproti bílému čtverci. Z toho plyne, že můžeme kolem hrany balíčku umístit 5 světle šedých obdélníků šířky 6, a délka hrany balíčku je tak $5 \cdot 6 = 30$.

Úloha 14. V jistém papírnictví prodávají tužky, sešity a pravítka. Sešit stojí tolik jako tužka a pravítko dohromady. Kdyby pravítko zdražilo o 50 %, stálo by tolik jako tužka a sešit dohromady. O kolik procent by musela zdražit tužka, aby stála tolik jako sešit a pravítko dohromady?

Výsledek. 800 %

Řešení. Označme si ceny tužky, sešitu a pravítka postupně jako t, s, p. Zadané podmínky se dají přepsat jako rovnice $s = t + p$ a $\frac{3}{2}p = t + s$. Dosazením za s do druhé rovnice dostáváme $\frac{3}{2}p = 2t + p$ neboli $p = 4t$; dosadíme-li toto do první rovnice, vyjde $s = 5t$. Platí tedy $s + p = 9t$; proto by se cena tužky musela zdevítinásobit, tj. vzrůst o 800 %.

Úloha 15. Označme $\mathrm{NSD}(a, b)$ největšího společného dělitele a $\mathrm{nsn}(a, b)$ nejmenší společný násobek čísel a a b. Určete hodnotu výrazu

$$\mathrm{nsn}(2025, \mathrm{nsn}(2024, \mathrm{NSD}(2023, \mathrm{NSD}(2022, \ldots \mathrm{nsn}(4, \mathrm{NSD}(3, \mathrm{NSD}(2, 1))) \ldots)))).$$

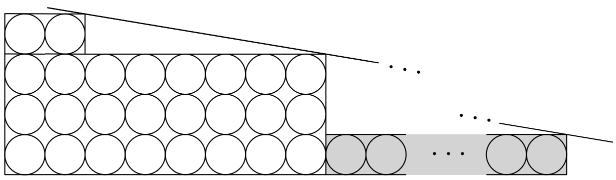
Operace NSD a nsn se střídají každé dva kroky a obě jsou použity 1012krát. Pokud by místo toho byla každá použita pouze dvakrát, výraz by vypadal takto: $\mathrm{nsn}(5, \mathrm{nsn}(4, \mathrm{NSD}(3, \mathrm{NSD}(2, 1))))$.

Výsledek. 4 098 600

Řešení. Pro každé kladné celé číslo x platí $\mathrm{NSD}(x, x-1) = 1$, a proto pro každá kladná celá čísla x, a máme $\mathrm{NSD}(x, \mathrm{NSD}(x-1, a)) = 1$. Toto pozorování použijeme pro $x = 2023$. Tím zjistíme, že před provedením posledních dvou operací je hodnota výrazu rovna 1, takže se celý výraz rovná

$$\mathrm{nsn}(2025, \mathrm{nsn}(2024, 1)) = 2025 \cdot 2024 = 4\,098\,600.$$

Úloha 16. Na obrázku jsou tři obdélníky, ve kterých jsou pravidelně vepsané shodné kružnice, a přímka procházející pravými horními rohy všech tří obdélníků. Prostřední část obrázku je skrytá. Kolik kružnic je v šedém obdélníku?



Výsledek. 12

Řešení. Pravoúhlé trojúhelníky vzniklé mezi přímkou a jednotlivými obdélníky jsou podobné s poměrem 2. Ten více vlevo má odvěsny délek 1 a 6, vyjádřeno v průměrech vepsaných kružnic. Z toho plyne, že šířka šedého obdélníku je $2 \cdot 6 = 12$ průměrů kružnic.

Úloha 17. Jarda běžel 18kilometrový okruh. Vyrazil rovnoměrným tempem, ale v určitém bodě se začal cítit unavený, a tak své tempo snížil o 25 % a tímto tempem uběhl zbytek trasy. Poté co doběhl, zkontroloval Jarda údaje na svých chytrých hodinkách a zjistil, že pomalejším tempem běžel dvakrát déle než rychlejším tempem. Kolik kilometrů Jarda uběhl, než zpomalil?

Výsledek. $7{,}2 = \frac{36}{5}$

Řešení. Nechť v je Jardova původní rychlost (v kilometrech za hodinu) a t je čas (v hodinách), po který běžel rychlostí v. Potom jeho snížená rychlost je $\frac{3}{4}v$ a čas, po který běžel touto rychlostí, je $2t$. Celková vzdálenost je součet dvou dílčích vzdáleností, tedy

$$18 = v \cdot t + \frac{3}{4}v \cdot 2t = \frac{5}{2}vt,$$

z čehož plyne

$$vt = \frac{18}{\frac{5}{2}} = 7{,}2.$$

To je právě vzdálenost, kterou Jarda urazil, než zpomalil.

Úloha 18. Hedvika, José, Klárka, Martin a Naty se chtějí vyfotit před pomníkem Velkého Náboje, a musejí si proto stoupnout do jedné řady vedle sebe. Trvají ale na následujících podmínkách:

- Martin chce stát napravo od Hedviky, Klárky a Naty.
- Klárka chce stát nalevo od Hedviky, Martina a Naty.

Kolika různými způsoby se může těchto pět kamarádů vyfotit?

Výsledek. 10

Řešení. Všimněme si, že José není omezen žádnými podmínkami, a proto může stát kdekoliv. Na druhou stranu máme jen dva způsoby, jak si mohou stoupnout ostatní: KHNM a KNHM. V obou případech má José pět možností, kam se postavit. Celkem jsme tedy nalezli $2 \cdot 5 = 10$ možností.

Úloha 19. Hrad tvoří pět věží spojených rovnými zdmi o délkách 50 loktů, 70 loktů, 90 loktů, 110 loktů a 130 loktů. Hradní zdi mohou být uspořádány v libovolném pořadí. Uvnitř hradu se šlechtici předhánějí, jak daleko jsou schopni dostřelit z luku. Jaká je největší možná přímá vzdálenost (v loktech), kterou může uvnitř hradu překonat vystřelený šíp, když uvážíme takové uspořádání hradních věží a zdí, které je k tomu nejvhodnější?

Poznámka: Tloušťky zdí a rozměry věží považujeme za zanedbatelné. Délku, na kterou lučištník dostřelí, měříme jako vodorovnou úsečku.

Výsledek. 220

Řešení. Zadání teoreticky povoluje i tzv. *nekonvexní* hrady, tj. takové, kde spojnice některých dvou věží leží mimo hrad. (Ekvivalentně lze říci, že takový hrad má u některé věže úhel větší než 180°.) Je ale intuitivně jasné, že pokud se snažíme najít hrad co nejvhodnější pro lukostřelbu, pak takový hrad bude konvexní. (Lze to přesně matematicky dokázat, ale nebudeme to tu rozebírat.)

Pro libovolné uspořádání hradních zdí si pak uvědomíme, že nejdelší úsečka uvnitř konvexního hradu (jejíž délku označíme ℓ) povede od jedné věže k jiné věži. Výběrem těchto dvou věží se zdi rozdělí do dvou skupin, přičemž součet délek v každé z nich musí být větší nebo roven ℓ. Hledáme tedy co největší číslo ℓ, pro které je možné rozdělit délky zdí na dvě množiny, jejichž součty jsou větší nebo rovny ℓ. Zjevně tedy

$$\ell \leq \frac{50 + 70 + 90 + 110 + 130}{2} = 225.$$

Protože je ale součet délek libovolné množiny zdí násobkem deseti, dostáváme dokonce $\ell \leq 220$. Tuto hodnotu už získat lze, a to při rozdělení stěn $130 + 90 < 110 + 50 + 70$.

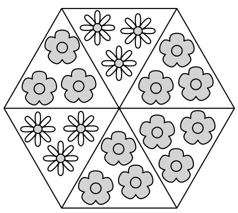
Příslušný hrad má tedy jednu dlouhou rovnou zeď délky 220 loktů, která je po 130 loktech přerušená věží (to se u skutečného hradu klidně může stát); nejdelší možný výstřel z luku povede těsně podél této zdi.

Úloha 20. Tobík má 8 kartiček, na nichž jsou postupně číslice 1 až 8. Uspořádal všechny kartičky tak, že vznikla dvě čtyřciferná čísla. Jaká mohla být nejmenší možná kladná hodnota jejich rozdílu?

Výsledek. 247

Řešení. Snažíme se vytvořit z kartiček dvě čísla, která si budou co nejblíž. Proto na pozice tisíců umístíme číslice lišící se o jedničku. Dál musíme na pozice stovek dát co nejmenší číslici ve větším čísle a naopak co největší číslici v tom menším. Jakmile jsou určeny číslice v řádu stovek, stejnou úvahu provedeme pro desítky a následně pro jednotky. Takto dojdeme k číslům 5123 a 4876, jejichž rozdíl je 247.

Úloha 21. Krteček chce osázet svoji šestiúhelníkovou zahrádku dvěma druhy květin: fialkami a pampeliškami. Na každý ze šesti záhonů, které dohromady tvoří pravidelný šestiúhelník, zasadí buď fialky, nebo pampelišky. Jedno takové rozmístění květin je na obrázku. Kolika způsoby to může udělat, pokud chce mít alespoň na jedné dvojici sousedících záhonů stejný druh květin?

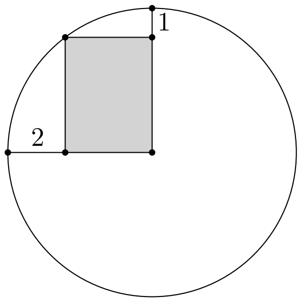


Poznámka: Rozmístění lišící se symetrií (otočením nebo převrácením) stále považujeme za různá.

Výsledek. 62

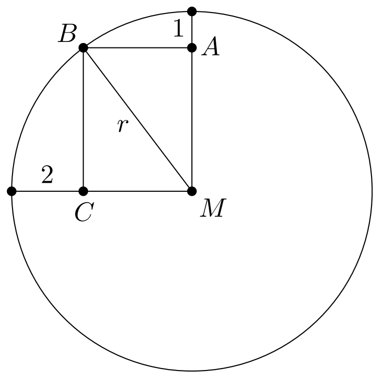
Řešení. Pokud na chvíli zapomeneme na podmínku, že na některých dvou sousedících záhonech musejí být stejné květiny, pak je odpověď $2^6 = 64$, protože na každém ze šesti záhonů má Krteček dvě možnosti a volby pro jednotlivé záhony jsou na sobě nezávislé. Od tohoto počtu pak odečteme ta rozmístění, kde je podmínka porušená; to nastane v případě, že se na záhonech oba druhy květin pravidelně střídají. Takové možnosti jsou dvě, takže dohromady existuje $64 - 2 = 62$ povolených rozmístění.

Úloha 22. Z kruhového listu papíru Klárka vystřihla obdélník, který má jeden vrchol ve středu kruhu a protější vrchol na obvodu kruhu. Zbývající dva vrcholy leží na dvou různých úsečkách vedoucích ze středu – jeden ve vzdálenosti 1 dm a druhý 2 dm od obvodu kruhu. Jaký je obsah zbytku papíru (v dm^2)?



Výsledek. $25\pi - 12$

Řešení. Označme M střed kruhového papíru a A, B, C ostatní vrcholy obdélníku. Poloměr kruhu označme r.



Platí $|MA| = r - 1$, $|MB| = r$ a $|MC| = r - 2$, přičemž $|AB| = |MC|$. S využitím Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ABM dostaneme rovnici

$$r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2,$$

kterou můžeme zjednodušit na

$$0 = r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5).$$

Protože možnost $r = 1$ je nesmyslná ($|MC|$ by byla záporná), jediné možné řešení je $r = 5$. Zbývající obsah papíru je tedy $r^2\pi - 3 \cdot 4 = 25\pi - 12$ (v dm^2).

Úloha 23. Mistr Nábo de Prahe, největší žijící učenec a nepřekonatelný virtuos v míchání esencí, se chystá vytvořit legendární *algemii* – jednolitou směs algebry a alchymie smíchaných v poměru 1 : 1. K dispozici má tyto přísady:

- Algybra: Obsahuje 80 % algebry a 20 % alchymie; celkem 10 mg.
- Alchemie: Obsahuje 30 % algebry a 70 % alchymie; celkem 14 mg.

Kolik mg algemie může mistr z těchto zásob nanejvýš vyrobit?

Poznámka: Nábo není v žádné fázi procesu schopný oddělit od sebe složky směsi; pouze může dále míchat suroviny, které jsou v danou chvíli dostupné.

Výsledek. $23\frac{1}{3} = \frac{70}{3}$

Řešení. Smícháním x jednotek algybry s y jednotkami alchemie vznikne směs obsahující $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y$ jednotek algebry a $\frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$ jednotek alchymie. Aby byly algebra a alchymie zastoupeny v poměru 1 : 1, musí proto platit

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y,$$

což lze zjednodušit jako $y = \frac{3}{2}x$. Za každý mg algybry je proto potřeba do směsi přidat 1,5 mg alchemie. Největší množství algemie proto vznikne, když mistr použije všech 14 mg alchemie a $\frac{2}{3} \cdot 14$ mg algybry. Dohromady proto mistr může vytvořit $\frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3}$ mg kýžené směsi.

Úloha 24. Čtyřmístné číslo $K = n^2$ je druhou mocninou a zároveň má všechny číslice menší než 7. Pokud všechny jeho cifry zvýšíme o 3, dostaneme druhou mocninu jiného celého čísla. Určete kladné celé číslo n.

Výsledek. 34

Řešení. Označme $m^2 = n^2 + 3333$. Aby byla m^2 a n^2 čtyřciferná, musí platit $32 \le n < m \le 99$, protože 31^2 je trojciferné a 100^2 pěticiferné číslo. Proto

$$32 + 33 \le m + n \le 98 + 99$$

neboli

$$65 \le m + n \le 197.$$

Díky znalosti rozdílu m^2 a n^2 dostáváme

$$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2 = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101.$$

Vzhledem k uvedeným nerovnostem je jediným možným rozkladem $m + n = 101$ a $m - n = 33$, což dává $m = 67$ a $n = 34$. Snadno ověříme, že $K = 34^2 = 1156$ má skutečně všechny číslice menší než 7 (což z našeho dosavadního výpočtu ještě neplynulo).

Úloha 25. Nechť X a Y jsou dva protější vrcholy krychle se stranou délky 1 a C je válec, na jehož povrchu leží všechny vrcholy této krychle, přičemž vrcholy X a Y jsou středy kruhových podstav válce C. Jaký je objem válce C?

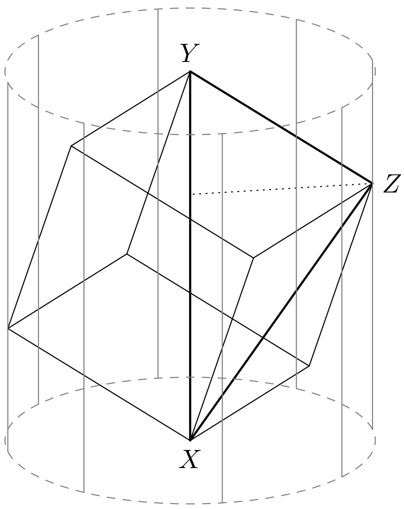
Výsledek. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Řešení. Protože jsou X a Y středy podstav válce, výška válce je rovna jejich vzdálenosti. A protože jsou to protější vrcholy krychle, tato vzdálenost je rovna délce tělesové úhlopříčky, tedy $\sqrt{3}$.

Pro určení poloměru válce dále vyberme kterýkoli jiný vrchol krychle, označme ho Z a spočítejme jeho vzdálenost od úhlopříčky XY. Trojúhelník XZY je pravoúhlý s pravým úhlem u Z (XZ je stěnová úhlopříčka a YZ je hrana krychle) a hledaná vzdálenost je výška v_z ze Z na stranu XY. Obsah trojúhelníku XYZ můžeme spočítat jako $\frac{1}{2}|YZ| \cdot |XZ| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}$ nebo jako $\frac{1}{2}v_z \cdot |XY| = \frac{1}{2}v_z \cdot \sqrt{3}$, z čehož plyne, že tato výška v_z, a tedy i poloměr podstavy válce, má délku $\sqrt{2/3}$.

Hledaný objem válce je tedy

$$\pi\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$



Úloha 26. V Kocourkově žije celkem 60 lidí, z nichž každý patří do jedné ze tří kast: pravdomluvkové mluví vždy pravdu, lháři pořád lžou a normální lidé si mohou říkat, co chtějí. Každý Kocourkovan ví, kdo patří do které kasty. Do vesnice přišel cizinec a všech obyvatel se zeptal:

1. „Žije zde alespoň 31 pravdomluvků?“ – a kladnou odpověď dostal 43krát.

2. „Žije zde alespoň 31 lhářů?“ – a kladnou odpověď dostal 39krát.

Jaký nejmenší počet normálních lidí určitě žije v Kocourkově?

Výsledek. 13

Řešení. Nejprve si všimněme, že na druhou otázku je určitě pravdivou odpovědí „Ne“: Kdyby totiž v Kocourkově žilo alespoň 31 lhářů, všichni by museli lhát a tedy odpovědět záporně; pak by ale nemohl cizinec dostat 39 kladných odpovědí. Proto je lhářů nejvýše 30. Všichni pravdomluvkové tedy museli na druhou otázku pravdivě odpovědět „Ne“, takže jich může být nejvýše $60 - 39 = 21$.

Z toho vyplývá, že i na první otázku je pravdivou odpovědí „Ne“. Oněch 43 kladných odpovědí pochází od lhářů a některých normálních lidí. Jelikož je lhářů nejvýše 30, musí v Kocourkově žít alespoň $43 - 30 = 13$ normálních lidí.

Zbývá ověřit, že tato konfigurace skutečně mohla nastat. Když bude pravdomluvků 17, lhářů 30 a normálních lidí 13, může cizinec skutečně poprvé dostat $30 + 13$ a podruhé $30 + 9$ nepravdivých odpovědí. V Kocourkově tedy žije nejméně 13 normálních lidí.

Úloha 27. Čtyři týmy označené A, B, C, D se zúčastnily turnaje hraného systémem „každý s každým“. Každá dvojice týmů spolu sehrála právě jeden zápas. Vítěz zápasu obdržel 1 nebo 2 body podle toho, s jak velkou převahou zvítězil; poražený tým nedostal žádné body. Žádný zápas neskončil remízou. Na konci turnaje byla vytvořena tabulka podobná té vyobrazené níže. Víme jen to, že jeden tým získal celkem 4 body, zatímco ostatní týmy měly na konci turnaje po 1 bodě. Kolik různých tabulek odpovídá takovéto situaci?

	A	B	C	D	celkem
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Poznámka: Pozice jednotlivých týmů v tabulce je pevně daná, tj. nelze měnit označení sloupců a řádků.

Výsledek. 24

Řešení. Nejprve si všimneme, že celkový počet získaných bodů je 7, zatímco sehraných zápasů je 6; proto jen jeden zápas skončil vítězstvím $2:0$, zatímco vítězové všech ostatních zápasů dostali jen jeden bod. Z toho plyne, že vítěz turnaje porazil všechny ostatní týmy, přičemž za jedno z těchto vítězství dostal 2 body. Vzájemné výsledky ostatních týmů musely vytvořit „cyklus“, protože každý z nich vyhrál právě jednou. Dohromady máme nejprve čtyři možnosti, jak vybrat vítězný tým, pak tři možnosti, jak vybrat tým, který od něj dostal nakládačku, a nakonec dvě možnosti, jak orientovat cyklus mezi poraženými týmy. Dohromady mohl turnaj proběhnout $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ způsoby.

Úloha 28. Káťa zapsala číslo 2025 jako součet M členů, kde každý člen byla mocnina desítky (tj. číslo 10^n, kde n je nezáporné celé číslo). Členy v součtu se mohou opakovat. Kolik je možných hodnot čísla M?

Výsledek. 225

Řešení. Nejmenší možná hodnota M je 9, protože

$$2025 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Zároveň, kdykoli je $k \geq 1$, lze kterýkoli člen 10^k nahradit deseti členy 10^{k-1}, což zvýší počet sčítanců o 9. Protože všechny možné Kátiny zápisy lze získat z původního zápisu s devíti sčítanci opakovaným provedením takovýchto nahrazení, je zřejmé, že M musí bát násobek 9. Největší možná hodnota M je zjevně 2025, neboť

$$2025 = 2025 \cdot 10^0.$$

Při postupném nahrazování sčítanců z nejkratšího zápisu (délky 9) do nejdelšího zápisu (délky 2025) se mezi možnými hodnotami M vyskytnou všechny násobky 9, takže počet všech možných hodnot M je

$$\frac{2025 - 9}{9} + 1 = 225.$$

Úloha 29. Bára a Matěj stáli zády k sobě na nástupišti, kolem kterého projížděl konstantní rychlostí nákladní vlak. V okamžiku, kdy je míjel předek vlaku, vykročili oba dva stejnou stálou rychlostí, ale opačnými směry. Zadní část vlaku minula Báru, když byla 45 metrů od své výchozí pozice, a krátce nato projela i kolem Matěje, který v tu chvíli byl 60 metrů od své výchozí pozice. Jaká je délka vlaku v metrech?

Výsledek. 360

Řešení. Označme ℓ délku vlaku v metrech, t_1 čas od okamžiku, kdy Báru s Matějem minul předek vlaku, do chvíle, kdy Báru minula jeho zadní část, a následně t_2 čas, za který se zadní část vlaku přesunula od Báry k Matějovi. Za dobu t_1 ušla Bára 45 metrů, zatímco za dobu t_2 Matěj ušel $60 - 45 = 15$ metrů; jelikož oba kráčejí stejnou rychlostí, je poměr těchto časových intervalů roven

$$t_1 : t_2 = 45 : 15 = 3 : 1.$$

Teď se zaměříme na pohyb vlaku. Za dobu t_1 vlak ujel vzdálenost $\ell - 45$ (protože na začátku byl předek vlaku na výchozí pozici Báry s Matějem, zatímco na konci této doby chybělo ještě 45 metrů k tomu, aby na ono místo dojel konec vlaku). Za dobu t_2 pak ujel $45 + 60 = 105$ metrů. Rychlost vlaku proto lze spočítat dvěma způsoby jako

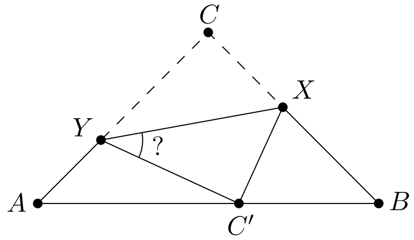
$$\frac{\ell - 45}{t_1} = v = \frac{105}{t_2}.$$

Díky známému poměru časových intervalů dostáváme

$$\ell - 45 = 105 \cdot \frac{t_1}{t_2} = 105 \cdot 3 = 315,$$

takže $\ell = 360$.

Úloha 30. Rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C jsme přeložili podél šikovně zvolené úsečky XY tak, že se vrchol C zobrazil na bod C' na straně AB. Navíc platí $|BC'| = |BX|$. Určete velikost úhlu $C'YX$ ve stupních.



Výsledek. $33{,}75^\circ = \frac{135}{4}^\circ$

Řešení. Z rovnoramennosti trojúhelníka $XC'B$ a znalosti velikosti úhlu u vrcholu B plyne

$$|\sphericalangle C'XB| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67{,}5^\circ.$$

Dále díky osové souměrnosti platí $|\sphericalangle CXY| = |\sphericalangle YXC'|$, takže prozkoumáním situace kolem vrcholu X zjistíme

$$|\sphericalangle YXC'| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 67{,}5^\circ) = 56{,}25^\circ.$$

Díky osové souměrnosti také $|\sphericalangle XC'Y| = |\sphericalangle YCX| = 90^\circ$, takže díky součtu úhlů v trojúhelníku XYC' dostáváme

$$|\sphericalangle C'YX| = 180^\circ - |\sphericalangle XC'Y| - |\sphericalangle YXC'| = 33{,}75^\circ.$$

Úloha 31. Kuba vzal všechny ostře rostoucí čtveřice obsahující čísla z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ a vytvořil z nich lexikograficky uspořádanou posloupnost:

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), (0, 1, 2, 5), \ldots, (12, 13, 14, 15).$$

To znamená, že (a_1, a_2, a_3, a_4) se v této posloupnosti vyskytuje před (b_1, b_2, b_3, b_4) právě tehdy, když

$$a_1 < b_1 \quad \text{nebo} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{nebo} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{nebo} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 < b_4.$$

Na kolikáté pozici se v Kubově posloupnosti nachází čtveřice $(2, 4, 7, 14)$?

Výsledek. 911

Řešení. Nejdřív si všimneme, že pro $k \leq n$, se počet ostře rostoucích k-tic obsahujících čísla z $\{1, 2, \ldots, n\}$ rovná $\binom{n}{k}$, jelikož ostře rostoucí k-tice odpovídají podmnožinám velikosti k. Ze stejného důvodu obecněji platí, že počet všech ostře rostoucích k-tic s prvky z $\{m, m+1, \ldots, n\}$ je $\binom{n-m+1}{k}$. Abychom zjistili pozici naší čtveřice, spočítáme, kolik se před ní vyskytne čtveřic; ty rozdělíme do skupin podle jejich počátečních prvků:

- $(0, *, *, *)$: takových čtveřic je $\binom{15}{3} = 455$;
- $(1, *, *, *)$: takových čtveřic je $\binom{14}{3} = 364$;
- $(2, 3, *, *)$: takových čtveřic je $\binom{12}{2} = 66$;
- $(2, 4, a, *)$, kde $a \in \{5, 6\}$: takových čtveřic je $\binom{10}{1} + \binom{9}{1} = 19$;
- $(2, 4, 7, b)$, kde $b \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$: takových čtveřic je 6.

Čtveřice $(2, 4, 7, 14)$ se tudíž vyskytuje na pozici $455 + 364 + 66 + 19 + 6 + 1 = 911$.

Úloha 32. Dvě farmářky, Anička a Bára, prodávaly jablka na trhu. Dohromady jich prodaly 100. Anička prodávala jedno jablko za a korun, zatímco Bára chtěla za jedno jablko b korun. Když prodaly všechna jablka, obě vydělaly stejný obnos. Anička poté poznamenala, že kdyby prodala svá jablka za Bářinu cenu b korun za kus, vydělala by 45 korun. Bára dodala, že kdyby prodávala jablka za Aniččinu cenu a korun za kus, vydělala by 20 korun. Kolik jablek prodala Anička?

Výsledek. 60

Řešení. Označme A a B jako počty jablek, které prodaly Anička a Bára. Víme, že

$$\begin{aligned} A + B &= 100, \\ A \cdot a &= B \cdot b, \\ A \cdot b &= 45, \\ B \cdot a &= 20. \end{aligned}$$

Dosazením $b = \frac{45}{A}$ a $a = \frac{20}{B}$ do druhé rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{20}{B} &= B \cdot \frac{45}{A}, \\ \frac{A^2}{B^2} &= \frac{45}{20} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Platí proto $A = \frac{3B}{2}$ a dosazením do první rovnice dostáváme $\frac{3B}{2} + B = 100$, tedy $B = 40$ a $A = 100 - 40 = 60$.

Úloha 33. Biance se ve snu zjevilo největší trojmístné číslo s následující vlastností: Toto číslo se rovná součtu své číslice na pozici stovek, druhé mocniny číslice na pozici desítek a třetí mocniny číslice na pozici jednotek. O kterém čísle se Biance zdálo?

Výsledek. 598

Řešení. Označme si Biančino číslo jako $N = 100a + 10b + c$, kde a, b, c jsou jednotlivé číslice. Kdyby bylo $c = 9$, tak $819 = 9 + 9^2 + 9^3 \geq N > 9^3 = 729$, takže a musí být 7 nebo 8. Ani v jednom případě ale nelze zvolit b tak, aby se poslední cifra čísla $729 + a + b^2$ rovnala 9. (Poslední cifra b^2 se totiž nikdy nerovná 3 ani 2.)

Dále se podíváme na případ $c = 8$. Jelikož $8^3 = 512$, musí a být 5 nebo 6. Jenže

$$N \leq 512 + 9^2 + 6 = 599 < 600,$$

takže a může být jedině 5. Pak potřebujeme, aby pro b platilo

$$512 + b^2 + 5 = 8 + 10b + 500 \qquad \text{neboli} \qquad b^2 - 10b + 9 = 0,$$

což dává $b = 1$ nebo $b = 9$. Obě takto získaná čísla mají požadovanou vlastnost:

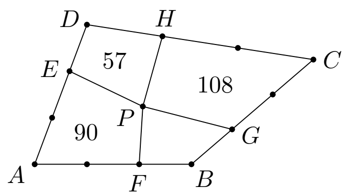
$$518 = 5 + 1^2 + 8^3 \quad \text{a} \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3.$$

Kdyby $c \leq 7$, tak $N \leq 7^3 + 9^2 + 9 = 433 < 598$, takže největší možnou hodnotou N je skutečně 598.

Úloha 34. Každá strana čtyřúhelníku $ABCD$ je dvěma body rozdělená na tři shodné části. Navíc platí:

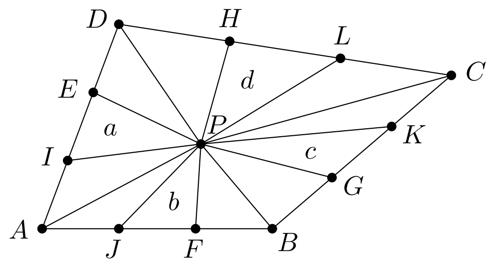
- Bod E leží na úsečce AD, přičemž $|AE| : |ED| = 2 : 1$.
- Bod H leží na úsečce CD, přičemž $|CH| : |HD| = 2 : 1$.
- Bod F leží na úsečce AB, přičemž $|AF| : |FB| = 2 : 1$.
- Bod G leží na úsečce CB, přičemž $|CG| : |GB| = 2 : 1$.

Uvnitř čtyřúhelníku leží bod P. Když jej spojíme s body E, F, G, H, tak tím čtyřúhelník rozdělíme na čtyři menší čtyřúhelníčky. Obsahy tří z nich jsou vyznačené v obrázku. Určete obsah čtvrtého čtyřúhelníčku $PFBG$.



Výsledek. 42

Řešení. Když bod P spojíme s vrcholy čtyřúhelníku $ABCD$ a ostatními body, které rozdělují jeho strany na třetiny, vznikne nám dvanáct trojúhelníčků.



Všimneme si, že trojúhelníčky, jejichž dva vrcholy leží na stejné straně čtyřúhelníku $ABCD$, mají stejný obsah, protože mají společnou výšku z bodu P a jejich základny jsou stejně dlouhé. Označme postupně a, b, c, d obsahy trojúhelníčků PEI, PJF, PGK a PLH. Pak ze znalosti obsahů některých čtyřúhelníků získáme tyto rovnice

$$90 = 2a + 2b, \quad 57 = a + d, \quad 108 = 2c + 2d.$$

Obsah čtyřúhelníku $PFBG$ je pak rovný hodnotě $b + c$, kterou vyjádříme jako

$$b + c = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) - (a + d) = \frac{1}{2}(90 + 108) - 57 = 42.$$

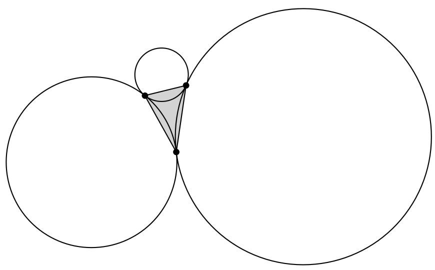
Úloha 35. Odstraněním čtyř středových čtverců ze čtvercové mřížky 4×4 vznikne prstenec tvořený dvanácti čtverci. Kolika způsoby můžeme z prstence vybrat čtyři čtverce tak, aby byl z každé strany prstence vybrán alespoň jeden čtverec?

Poznámka: Každý roh náleží dvěma stranám prstence. Čtveřice lišící se pouze symetrií (rotace a zrcadlení prstence) jsou považovány za různé.

Výsledek. 237

Řešení. Celkem existuje $\binom{12}{4} = 495$ způsobů, jak vybrat 4 čtverce z prstence tvořeného 12 čtverci. Pro každou stranu existuje 8 čtverců, které do ní nepatří, tedy $\binom{8}{4} = 70$ čtveřic vyhýbající se dané straně prstence. Mohlo by se proto zdát, že máme $495 - 4 \cdot 70 = 215$ možností, jak nevynechat žádnou stranu. Některé možnosti jsme ale odečetli vícekrát – konkrétně jsme dvakrát odečetli ty, kde jsou vynechány dvě strany najednou (vynechat najednou tři strany evidentně není možné). Konfigurací, které vynechávají pevně danou dvojici *sousedních* stran, je 5, protože vybíráme 4 z 5 čtverců u protějšího rohu; dohromady tedy máme 20 konfigurací, které vynechávají některé dvě sousední strany. Pokud chceme vynechat zvolenou dvojici *protějších* stran, máme jen jednu možnost a dvojice protějších stran jsou 2. Proto existuje 22 možností, jak vynechat dvě strany, a celkem tedy dostáváme $215 + 22 = 237$ způsobů, jak splnit zadání.

Úloha 36. Tři kružnice s poloměry 1, 2 a 3 mají po dvou vnější dotyk jako na obrázku. Určete obsah trojúhelníku, jehož vrcholy jsou příslušné body dotyku.



Výsledek. $\frac{6}{5}$

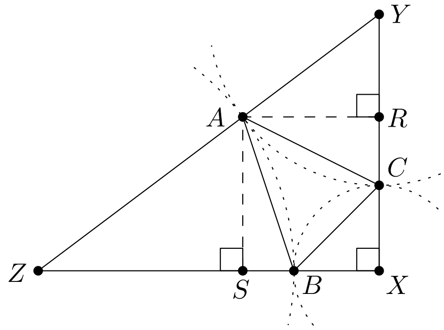
Řešení. Středy kružnic označíme postupně X, Y a Z a dále body dotyku A, B a C jako na obrázku. Trojúhelník XYZ má délky stran $1+2=3$, $1+3=4$ a $2+3=5$, z Pythagorovy věty je tedy pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu X. Obsah trojúhelníka ABC získáme odečtením obsahů rovnoramenných trojúhelníků XCB, YAC a ZBA od obsahu XYZ, který je roven $\frac{1}{2}(3 \cdot 4) = 6$.

- Trojúhelník XCB je pravoúhlý, jeho obsah je proto roven $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.
- Pro obsah YAC nejprve spočítejme výšku AR. Trojúhelníky RYA a XYZ jsou podobné s poměrem $\frac{|YA|}{|YZ|} = \frac{2}{5}$, a tedy $|AR| = \frac{2}{5}|ZX| = \frac{8}{5}$. Obsah YAC se rovná $\frac{1}{2}(|AR| \cdot |CY|) = \frac{1}{2}(\frac{8}{5} \cdot 2) = \frac{8}{5}$.

- Pro obsah ZBA obdobně využijeme podobnost trojúhelníků SAZ a XYZ s poměrem $\frac{3}{5}$ a získáme $|AS| = \frac{9}{5}$. Obsah trojúhelníka ZBA je $\frac{1}{2}(\frac{9}{5} \cdot 3) = \frac{27}{10}$.

Hledaný obsah je tudíž roven

$$6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$



Úloha 37. Marian narýsoval pravidelný n-úhelník, kde $n > 3$, a spočítal jeho úhlopříčky. Všiml si, že výsledné číslo je násobkem 2025. Pro jaké nejmenší n to mohlo nastat?

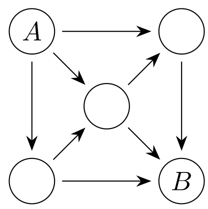
Poznámka: Strany n-úhelníka nepočítáme jako úhlopříčky.

Výsledek. 300

Řešení. Snadno určíme, že počet úhlopříček n-úhelníka je $\frac{1}{2}n(n-3)$. Protože 2025 je liché, stačí zkoumat, kde je $P = n(n-3)$ dělitelné 2025. Máme $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, a díky nesoudělnosti mocnin různých prvočísel vidíme, že potřebujeme zajistit, aby bylo P dělitelné $3^4 = 81$ a zároveň $5^2 = 25$. Z činitelů n, $n-3$ může být jen jeden dělitelný 5, takže jeden z nich musí být dělitelný 25. Naproti tomu n je dělitelné 3 právě tehdy, když je dělitelné 3 číslo $n-3$; nemohou ale obě být zároveň dělitelná 9. Z těchto úvah vyplývá, že hledáme takové číslo n, aby alespoň jedno z čísel n, $n-3$ bylo dělitelné 25 a zároveň alespoň jedno z nich bylo dělitelné 27.

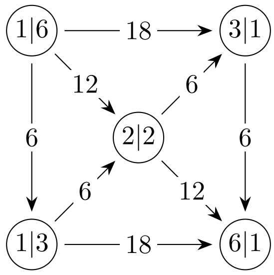
Kdyby byl jeden z činitelů násobkem 25 i 27, musel by být roven nejméně $25 \cdot 27 = 675$. Pokusme se dosáhnout menší hodnoty n tím, že jeden z činitelů (který označíme m) bude dělitelný 27, a ten druhý ($m \pm 3$) bude dělitelný 25 (takže $n = m$ nebo $n = m + 3$). První podmínka dává $m = 27k$ pro kladné celé k; snažíme se nyní najít nejmenší k, pro něž je $27k \pm 3$ dělitelné 25 (pro vhodnou volbu znaménka). Odečtením $25k$ stačí ekvivalentně zkoumat číslo $2k \pm 3$, které je 25 poprvé dělitelné pro volbu $k = 11$ a znaménko plus. Proto $m = 27 \cdot 11 = 297$ and $n = m + 3 = 300$.

Úloha 38. David se vydal na cestu vyobrazeným diagramem. Začíná v uzlu A a končí v uzlu B. Celou dobu se pohybuje po šipkách v jejich určeném směru; jen v jednom tahu to nedodrží a rebelsky se vydá proti směru nakreslené šipky. Takovýto rebelský tah musí uskutečnit za celou cestu právě jeden, i kdyby to bylo za cenu toho, že krátkodobě opustí cíl B poté, co už do něj došel. Všechny šipky je povoleno během celého procesu používat opakovaně. Kolika různými způsoby může David uskutečnit svou cestu?



Výsledek. 84

Řešení. Nejprve pro každý jednotlivý uzel snadno spočítáme (1) počet cest (dodržujících směry šipek) z uzlu A, které v daném uzlu končí, (2) počet cest, které v něm začínají a končí v B. V následujícím diagramu například popisek 3|1 v pravém horním uzlu znamená, že zde končí právě tři cesty z A a že odsud vede jen jediná cesta do B. Následně pro každou šipku určíme počet možných Davidových cest, které právě tuto šipku využívají pro svůj rebelský tah: Stačí vynásobit první číslo v popisku jejího koncového uzlu s druhým číslem v jejím počátečním uzlu. Provedeme těchto osm součinů a následně čísla posčítáme; vyjde 84.



Úloha 39. V následujícím výpočtu označuje každé písmeno jinou nenulovou číslici.

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A & A \\
 & & + & B & B & B \\
 & & & + & O & O \\
 & & & & + & J \\
 & - & 2 & 0 & 2 & 5 \\
\hline
= & N & A & B & O & J
\end{array}$$

Určete největší možnou hodnotu pěticiferného čísla $NABOJ$.

Výsledek. 18249

Řešení. Můžeme naznačený výpočet ekvivalentně přepsat jako

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A & A \\
 & & + & B & B & B \\
 & & & + & O & O \\
 & & & & + & J \\
- & N & A & B & O & J \\
\hline
 & = & 2 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

a toto dále zjednodušit do následující podoby:

$$\begin{array}{ccccc}
 & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A \\
 & & + & B & B \\
 & & & + & O \\
\hline
= & 2 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

Kdyby $N \geq 2$, byl by první sčítanec moc velký, takže nutně $N = 1$. Po dosazení dostaneme $\overline{AAA} + \overline{BB} + O = 2025 - 1111 = 914$, což implikuje $A = 8$. Dalším dosazením $914 - 888 = 26$ dostáváme $B = 2$ a nakonec $O = 4$. Hodnotu J můžeme zvolit jakkoli (když dodržíme, že všechny cifry budou různé, což zde ovšem náhodou nehraje roli); největší možná hodnota čísla $NABOJ$ je tedy 18249.

Úloha 40. Pět set organizátorů Náboje se sešlo, aby vybrali úlohy pro další ročník. U každé úlohy může každý z přítomných organizátorů hlasovat buď pro vybrání, nebo proti. Hned po hlasování o první úloze opustilo místnost několik organizátorů, kteří hlasovali pro její vybrání, protože jim hlasovací proces připadal příliš zdlouhavý. Nikdo z těch, kdo hlasovali proti, ale neodešel. Při hlasování o druhé úloze hlasoval pro vybrání stejný počet organizátorů jako u první úlohy, ale hlasů proti byla jen třetina oproti počtu hlasů proti z prvního hlasování. Dále víme, že právě 120 organizátorů hlasovalo pro vybrání obou úloh a 70 hlasovalo proti oběma. Kolik organizátorů opustilo místnost po prvním hlasování?

Výsledek. 150

Řešení. Označme AN počet organizátorů, kteří v prvním hlasování byli pro a v druhém proti. Analogicky definujeme AA, NN a NA. Dále označme AX počet organizátorů, kteří po prvním hlasování opustili místnost. Ze zadání jsme získali následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
AA + AN + NA + NN + AX &= 500, \\
AA + AN + AX &= AA + NA, \\
NA + NN &= 3(AN + NN).
\end{aligned}$$

Dosazením $AA = 120$ a $NN = 70$ a přeuspořádáním dostáváme

$$\begin{array}{rcrcrcr} AN & + & NA & + & AX & = & 310, \\ AN & - & NA & + & AX & = & 0, \\ -3AN & + & NA & & & = & 140. \end{array}$$

Vynásobíme-li druhou rovnici dvěma a všechny sečteme, získáme $3AX = 450$, tedy $AX = 150$. (Zbývající počty jsou $AN = 5$ a $NA = 155$.)

Úloha 41. Dvojici kladných celých čísel (a, b) nazveme *nabitou*, pokud $a \le b$ a čísla a a b spolu s $\mathrm{NSD}(a, b)$ můžeme uspořádat do aritmetické posloupnosti se součtem 2025. Určete počet nabitých dvojic.

Poznámka: Aritmetická posloupnost je taková posloupnost čísel, ve které je rozdíl každých dvou po sobě jdoucích členů stejný.

Výsledek. 12

Řešení. Nechť $g = \mathrm{NSD}(a, b)$. Pak $a = ga'$, $b = gb'$ pro nějaká kladná celá čísla a', b'. Protože $g \le a \le b$, aritmetická posloupnost může být jen v pořadí (g, a, b) nebo opačném – ve druhém případě jde o klesající posloupnost, která má jinak shodné vlastnosti s (g, a, b). V každém případě $a - g = b - a$ neboli $b = 2a - g$. Po vydělení g vyjde $b' = 2a' - 1$. Z podmínky na součet dostaneme

$$g + a + b = g(1 + a' + 2a' - 1) = 3ga' = 2025,$$

tedy $ga' = 675 = 3^3 5^2$. Toto číslo má $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ kladných dělitelů. Zbývá ověřit, že každého dělitele lze skutečně použít jako a' v nějaké nabité trojici. Protože platí $b' = 2a' - 1$, $g = 675/a'$, $a = ga' = 675$, $b = gb'$, skutečně dostáváme $a \le b$, neboť $ga' \le g(2a' - 1)$ pro libovolná kladná celá čísla a', g. Navíc platí

$$\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}\big(ga', g(2a' - 1)\big) = g \cdot \mathrm{NSD}(a', 2a' - 1) = g,$$

protože a' a $2a' - 1$ jsou nesoudělná pro libovolné kladné celé číslo a'.

Úloha 42. Každý tým v *Náboji pro mateřské školy* na začátku soutěže dostane první 3 úlohy ze sady 16 očíslovaných úloh. Každý tým má svoji sadu úloh, ale všechny sady obsahují stejných 16 shodně očíslovaných úloh. Pokud tým úlohu vyřeší, dostane místo ní úlohu ze své sady s nejnižším číslem, které je k dispozici. Na konci soutěže se ukázalo, že žádné dva týmy nevyřešily přesně stejnou množinu úloh. Kolik nejvíce týmů se mohlo této soutěže zúčastnit?

Výsledek. 697

Řešení. Množina úloh, kterou tým vyřešil, je jednoznačně určená množinou úloh, které tým nevyřešil, a naopak. Klíčové pozorování je, že to také jednoznačně odpovídá množině nevyřešených úloh, které u sebe tým měl na konci soutěže. To může být libovolná množina nejvýše 3 úloh. Celkem se tedy soutěže mohlo účastnit nejvýše

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 697$$

týmů.

Úloha 43. Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla splňující

$$\begin{aligned} 2a + 2b - ab &= 2025, \\ 2b + 2c - bc &= 47, \\ 2c + 2d - cd &= 5. \end{aligned}$$

Určete hodnotu $2a + 2d - ad$.

Výsledek. 51

Řešení. Použitím vzorečku $(x-2)(y-2) = xy-2x-2y+4$ můžeme podmínky ze zadání přeuspořádat do následujících rovností:

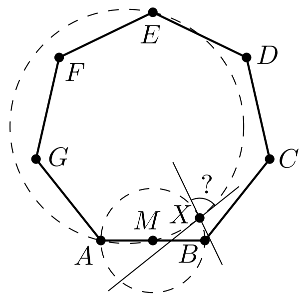
$$\begin{aligned} (a-2)(b-2) &= -2021, \\ (b-2)(c-2) &= -43, \\ (c-2)(d-2) &= -1. \end{aligned}$$

Naším cílem je určit hodnotu $(a - 2)(d - 2)$, ze které už výsledek dostaneme snadno. Z druhé rovnice plyne $b \ne 2$ a $c \ne 2$. Hledaný výraz můžeme vyjádřit jako

$$(a-2)(d-2) = \frac{(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)}{(b-2)(c-2)} = \frac{(-2021) \cdot (-1)}{-43} = -47.$$

Proto $2a + 2d - ad = -(-47) + 4 = 51$.

Úloha 44. V pravidelném sedmiúhelníku $ABCDEFG$ označme M střed strany AB. Uvnitř sedmiúhelníku leží bod X, který je průsečíkem kružnice opsané trojúhelníku AME a kružnice se středem v bodě M procházející bodem A. Určete velikost ostrého úhlu (ve stupních), který svírají tečny k těmto kružnicím v bodě X.



Výsledek. $540°/7$

Řešení. Jelikož je $ABCDEFG$ pravidelný sedmiúhelník, je úhel AME pravý, a AE tedy (podle Thaletovy věty) tvoří průměr větší kružnice. Kromě bodu X je druhým průsečíkem kružnic bod A, proto místo zkoumání úhlu mezi tečnami v bodě X se ekvivalentně můžeme podívat na úhel sevřený tečnami v bodě A. Jelikož jsou průměry kružnic kolmé na tečny, je tento úhel stejný jako úhel BAE, který svírají průměry kružnic. Zbývá tedy určit $|\sphericalangle BAE|$. To lze provést buď na základě pozorování, že jde o obvodový úhel kružnice opsané sedmiúhelníku $ABCDEFG$ odpovídající středovému úhlu o velikosti $\frac{3}{7} \cdot 360°$, nebo díky symetrii sedmiúhelníka; každopádně zjišťujeme, že velikost požadovaného úhlu je $\frac{3}{7} \cdot 180° = 540°/7$.

Úloha 45. Na obrovské tabuli jsou napsány všechny výrazy tvaru $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \cdots \pm 2^{99})^2$, za každou volbu 100 znamének uvnitř závorky jeden. Určete součet těchto výrazů.

Výsledek. $\frac{2^{100} \cdot (4^{100}-1)}{3}$

Řešení. Nejprve budeme řešit obecnější úlohu. Uvažujme jakékoli kladné hodnoty $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Určíme součet všech výrazů tvaru $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$, přičemž stejně jako v zadání sčítáme přes všechny volby znamének uvnitř závorky. Při roznásobení kteréhokoli z výrazů $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$ obdržíme jednak členy tvaru $+x_i^2$ pro $i \in \{1, \ldots, n\}$, a to vždy se znaménkem plus, jednak členy tvaru $\pm 2x_ix_j$ pro všechny dvojice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, kde $i \neq j$.

Znaménko tohoto druhého typu členů je určeno tím, jestli x_i a x_j mají stejné znaménko (pak vyjde $+2x_ix_j$), nebo mají znaménko opačné (pak vyjde $-2x_ix_j$). Pokud jsou všechna ostatní znaménka v $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$ zvolená, pak máme čtyři možnosti, jak dourčit znaménka u x_i a x_j; dvě z těchto voleb dávají $+2x_ix_j$ a dvě $-2x_ix_j$. Proto, pokud sčítáme přes všechny možné volby znamének v $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$, se tyto smíšené členy tvaru $\pm 2x_ix_j$ navzájem vynulují a zbudou pouze členy x_i^2. Každý se vyskytuje 2^n-krát (jednou za každou volbu znamének v $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$), takže výsledným součtem je

$$2^n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

V našem případě je $n = 100$ a $x_i = 2^{i-1}$, takže dosazením do odvozeného obecného vzorce zjistíme, že součet hodnot $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \cdots \pm 2^{99})^2$ přes všechny volby znamének je

$$2^{100} \cdot (1 + 4^1 + \cdots + 4^{99}).$$

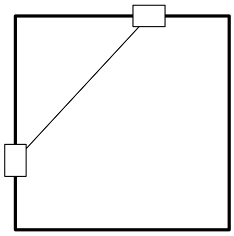
Užitím vzorce pro součet prvních sta členů geometrické posloupnosti spočteme

$$1 + 4^1 + \cdots + 4^{99} = \frac{4^{100} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{100} - 1}{3},$$

a řešením úlohy tedy je $\frac{2^{100} \cdot (4^{100}-1)}{3}$.

Naznačme ještě alternativní, o něco pracnější řešení: Lze si rozmyslet, že uvnitř závorek na tabuli dostaneme právě všechna lichá čísla v rozmezí od $-m$ do m, kde $m = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{99} = 2^{100} - 1$. Hledanou hodnotou je tedy dvojnásobek součtu všech lichých čtverců od 1^2 po m^2. Pro součet všech lichých čtverců do 1^2 do m^2 existuje nepříliš známý vzorec $\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$. Ten lze odvodit díky známému vzorci pro součet *všech* čtverců od 1^2 do k^2: $1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$. Když totiž tento známý vzorec vynásobíme 2^2, dostaneme vzorec pro součet *sudých* čtverců.

Úloha 46. Dvě auta jsou k sobě připojená pružným gumovým lankem a jezdí stále dokola po silnici ve tvaru čtverce tak, jak je naznačeno na obrázku. Nejprve stála obě ve stejném rohu a poté se rozjela obě stejným směrem, ale každé jinou konstantní celočíselnou rychlostí. Víme, že pomalejší z obou aut jede rychlostí 24 km/h, zatímco to rychlejší jede n km/h. Gumové lanko je velmi odolné, ale praskne při natažení přes celou úhlopříčku čtverce. Určete nejmenší kladné celé $n > 24$ takové, že gumové lanko při jízdě nikdy nepraskne.



Výsledek. 56

Řešení. Čtyři úsečky tvořící čtvercový objezd budeme nazývat *ulice*. Nechť $m = 24$ a $n > m$ jsou rychlosti pomalejšího a rychlejšího auta. Skutečnost, jestli lanko praskne, závisí pouze na poměru obou rychlostí, nikoli na jejich konkrétních hodnotách. Můžeme proto problém přeškálovat tak, že místo m, n budeme uvažovat rychlosti m' a n', což budou nesoudělná kladná celá čísla s vlastností $m' : n' = m : n$. Tvrdíme, že lanko nikdy nepraskne právě tehdy, když je $n' - m'$ dělitelné čtyřmi.

Nejprve se podívejme na případ, kdy $n' - m'$ není dělitelné čtyřmi. Poté, co pomalejší auto projede m' ulicemi, ocitne se v rohu. V tentýž moment projelo rychlejší auto přesně n' ulicemi (díky poměru rychlostí), a je tedy také v rohu. Protože ovšem $n' - m'$ není dělitelné čtyřmi, jedná se o dva různé rohy. Pokud jsou naproti sobě, lanko právě prasklo. Pokud se jedná o rohy sousedící, stačí projet ještě jednou stejným počtem ulic, a pak již budou auta v protějších rozích a lanko praskne.

Nyní předpokládejme, že $n' - m'$ je dělitelné čtyřmi. Uvědomme si, že auta nemohou být obě současně v rozích dříve, než pomalejší auto projede m' ulicemi. Pokud by totiž pomalejší auto projelo pouze $u < m'$ ulicemi a ocitlo by se v rohu, stihlo by za tutéž dobu rychlejší auto projet $\frac{u}{m'} \cdot n'$ ulicemi, což není ale celé číslo, jelikož m' a n' jsou nesoudělná. Proto se obě auta ocitnou zároveň v rozích až tehdy, když pomalejší projede m' a rychlejší n' ulicemi. A jelikož je rozdíl $n' - m'$ dělitelný čtyřmi, budou obě auta ve stejném rohu. Od této chvíle se situace periodicky opakuje a auta se spolu opět po čase potkají v tomtéž rohu, aniž by mezitím lanko prasklo.

Stačí tedy nalézt nejmenší takové $n > 24$, abychom po přeškálování dostali nesoudělná m' a n' s rozdílem $n' - m'$ dělitelným čtyřmi. Z toho již plyne, že m' a n' musejí být lichá. Dále víme, že rychlejší auto jede rychlostí $n = n' \frac{m}{m'}$. Aby bylo n celé číslo, musí faktor m/m' být také celočíselný (kvůli nesoudělnosti m' a n'). Pokud do vzorce pro n zahrneme i fakt, že $n' - m' = 4k$ pro nějaké kladné celé k, dostaneme $n = n' \frac{m}{m'} = (m' + 4k) \frac{m}{m'} = m + 4k \frac{m}{m'}$. Jelikož $m = 24$ je pevně dáno, dostaneme nejnižší přípustnou rychlost rychlejšího auta pro $k = 1$ a $m' = 3$, jakožto největšího lichého dělitele čísla m. Hledaná nejnižší možná rychlost n je tedy $24 + 4 \cdot 8 = 56$.

Úloha 47. Kolem stolu se sešlo 2025 hráčů a hrají hazardní hru. Každé kolo končí tím, že hráč, který v daném kole prohrál, vyplatí každému z ostatních hráčů tolik mincí, kolik daný hráč právě vlastní (různí hráči tedy mohou dostat různé počty mincí). Po 2025 odehraných kolech má každý hráč přesně 2^{3000} mincí a navíc během hry žádný hráč neměl dluhy a každý hráč prohrál právě jednou. Spočítejte, kolik mincí měl na začátku hráč, který prohrál jako první.

Výsledek. $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot \left(1 + 2025 \cdot 2^{2024}\right)$

Řešení. Hráče označíme čísly 1 až 2025 a počet mincí, které měl hráč h po odehrání k kol, si označíme $m_{h,k}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že hráč číslo 1 prohrál v prvním kole, hráč číslo 2 prohrál ve druhém kole a tak dále. Potřebujeme tedy určit hodnotu $m_{1,0}$. Označíme $M = 2^{3000}$ počet mincí, které má každý hráč na konci hry.

Pro hráče h se po jeho prohře v h-tém kole už v každém dalším kole počet jeho mincí zdvojnásobuje, dokud se na konci hry nedostane na M. Pro počet mincí hráče h po k-tém kole, kde $h \leq k$, tedy platí

$$m_{h,k} = \frac{M}{2^{2025-k}}.$$

Protože k-tý hráč v k-tém kole prohrál, je počet mincí, které v něm musí ostatním vyplatit, roven součtu mincí všech ostatních hráčů. Víme, že ve hře je dohromady $2025M$ mincí, takže

$$m_{k,k} = m_{k,k-1} - \sum_{h \neq k} m_{h,k-1} = m_{k,k-1} - (2025M - m_{k,k-1}).$$

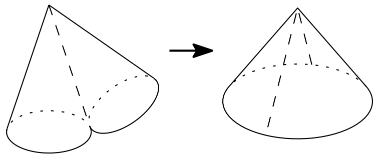
Přeuspořádáním této rovnice dostaneme

$$m_{k,k-1} = \frac{m_{k,k}}{2} + \frac{2025M}{2} = \frac{M}{2^{2026-k}} + \frac{2025M}{2}.$$

Po dosazení $k = 1$ dostaneme výsledek

$$m_{1,0} = \frac{M}{2^{2025}} + \frac{2025M}{2} = 2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot \left(1 + 2025 \cdot 2^{2024}\right).$$

Úloha 48. Fifánek ve školce vyrobil tři papírové zmrzlinové kornouty v podobě povrchů tří stejných rotačních kuželů bez podstavy. Jeho tvořivosti ale nebyl konec; Fifánek vzal dva kornouty a přiložil je k sobě tak, že se jejich povrchy dotýkaly podél jedné úsečky od vrcholu po okraj podstavy. Oba papírové kornouty podél této společné úsečky rozstřihl a povrchy slepil k sobě, čímž vytvořil nový širší kornout (jak je naznačeno na obrázku). Objem kužele odpovídajícího nově vzniklému kornoutu byl 10. Fifánek pokračoval a stejným způsobem zkombinoval nový kornout se třetím původním kornoutem. Chtěl změřit objem kužele odpovídajícího nejnovějšímu kornoutu, ale k jeho překvapení mu vyšla nula. Určete objem kužele odpovídajícího původnímu kornoutu.



Výsledek. $\sqrt{10}$

Řešení. Jelikož při kombinování kornoutů vždy vzroste poloměr podstavy, musí být nulový objem finálního kužele zapříčiněn jeho nulovou výškou. Tento kornout je tedy obyčejný kruh a povrchy tří původních kornoutů odpovídají kruhovým výsečím se středovým úhlem 120°.

Označme l délku strany původních kuželů a r poloměr jejich podstavy. Všimněme si, že při kombinování různých kuželů se délka strany nemění, zatímco poloměry podstav se sčítají (protože se sčítají středové úhly příslušných výsečí, a tím i obvody podstav odpovídajících kuželů). Díky finálnímu kornoutu, jehož délka strany je shodná s jeho poloměrem podstavy, tak dostaneme vztah $l = 3r$.

Střední kornout, který vznikl spojením dvou původních, má po rozvinutí pláště středový úhel 240°, a tedy poloměr podstavy $2r$. Použitím vzorce pro objem kužele dostáváme

$$10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Objem jednoho ze tří původních kuželů tak vyjde

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3 = \sqrt{10}.$$

Úloha 49. Pro kolik kladných celých čísel n menších nebo rovných 200 má rovnice

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor - n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = 1$$

alespoň jedno celočíselné řešení x, které splňuje $1 \leq x \leq 200$?

Poznámka: Symbol $\lfloor t \rfloor$ značí největší celé číslo, které je menší nebo rovno reálnému číslu t.

Výsledek. 82

Řešení. Pokud je n násobek pěti, je i celá levá strana rovnice násobkem pěti; v takovém případě tedy žádné řešení neexistuje. Také neexistuje řešení pro $n = 1$, protože v takovém případě nemůže být levá strana rovnice kladná. Ve všech ostatních případech bude řešení existovat, pokud ignorujeme podmínku $x \leq 200$. Přeuspořádáme rovnici jako

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor = n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor + 1; \qquad (\heartsuit)$$

levá strana této rovnice je násobek pěti, a my rozebereme možná řešení v závislosti na hodnotě $n \bmod 5$.

Pokud $n = 5k + 4$, je vždycky řešením $x = n + 1 = 5k + 5$ (protože po dosazení jsou obě strany ($\heartsuit$) rovné x), takže všech 40 kladných hodnot $n \leq 200$ tohoto tvaru splňuje zadání. Nechť nyní $n = 5k + 3$. Aby byla pravá strana ($\heartsuit$) násobkem pěti, musí $\lfloor x/n \rfloor$ dávat zbytek 3 mod 5, což především znamená $\lfloor x/n \rfloor \geq 3$. To ale nejde pro $n \geq 67$, protože pak by muselo být $x > 200$. Pro $n \leq 66$ (celkem 13 hodnot) lze jako řešení zvolit $x = 3n + 1$; obě strany ($\heartsuit$) budou zase rovné x. Obdobně zjistíme, že pro $n = 5k + 2$ musí platit $\lfloor x/n \rfloor \geq 2$, což nemůže nastat pro $n \geq 101$; pro menší hodnoty n (kterých je 20) lze zvolit $x = 2n + 1$. Pro $n = 5k + 1$ vyjdou jako jediné přípustné případy $n \leq 50$, a v takovém případě lze použít $x = 4n + 1$, je-li $n > 1$. (Takových hodnot n je $10 - 1$; a pro $n = 1$ je rovnice neřešitelná, jak jsme si rozmysleli už na začátku.) Dohromady jsme dostali $40 + 13 + 20 + 9 = 82$ vhodných čísel n.

Úloha 50. Daník má neomezenou zásobu dvacetistěnných kostek, každá z nich má stěny očíslované od 1 do 20. Daník vždy najednou hodí pevně zvoleným počtem kostek a jeho cílem je, aby v jednom hodu padly přesně jedna nebo dvě jedničky. Kolika kostkami by měl Daník hodit, aby maximalizoval pravděpodobnost úspěchu?

Výsledek. 28

Řešení. Nejdřív určíme pravděpodobnost, že při hodu n kostkami padne právě jedna jednička

$$P_1 = n \cdot \frac{1}{20}\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1},$$

a pravděpodobnost, že padnou právě dvě jedničky

$$P_2 = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{n-2}.$$

Pravděpodobnost Daníkova úspěchu při hodu n kostkami označme a_n. Dostáváme

$$a_n = P_1 + P_2 = \frac{1}{2 \cdot 19^2} n(n+37)\left(\frac{19}{20}\right)^n.$$

Hledáme takové n, pro které platí $a_{n+1} < a_n$. Tuto nerovnost lze přepsat jako

$$\frac{19}{20}(n+1)(n+38) < n(n+37),$$

což dále zjednodušíme jako

$$n^2 - n - 722 > 0.$$

Pro kladné celé číslo n je tato nerovnost ekvivalentní $n \geq 28$. (Přímému řešení kvadratické nerovnice se případně můžeme vyhnout tím, že nejprve získáme pro každé řešení odhad $n^2 > 722$ neboli $n \geq 27$. Pak už snadno ověříme, že $n = 27$ řešením ještě není, ale $n = 28$ už ano.) Vyřešením nerovnice jsme zjistili, že posloupnost a_n je nejprve rostoucí (neboť $a_{n+1} \geq a_n$ pro $n \leq 27$) a následně klesající, takže 28 je hledaný index největšího členu posloupnosti.

Úloha 51. Uvnitř strany AC trojúhelníku ABC leží bod D. Platí, že $|AD| = |BC|$ a $|BD| = |CD|$. Velikost úhlu BAC je 30°. Jaká je velikost úhlu DBA ve stupních?

Výsledek. 30°, 110° (2 řešení)

Řešení. Nechť O je střed kružnice opsané $\triangle ABD$. Pak díky vztahu velikostí obvodového a středového úhlu je $|\sphericalangle BOD| = 2|\sphericalangle BAD| = 2 \cdot 30° = 60°$. Toto spolu s $|BO| = |DO|$ již znamená, že $\triangle BDO$ je rovnostranný, takže

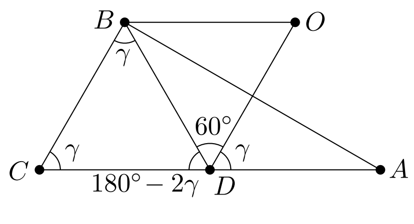
$$|AO| = |DO| = |BD| = |CD|.$$

Ze zadání je navíc $|AD| = |BC|$, takže $\triangle AOD$ a $\triangle CDB$ jsou shodné. Označme $\gamma = |\sphericalangle ACB|$, pak ze shodnosti a rovnoramennosti je i $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DAO| = |\sphericalangle ADO| = \gamma$. Další postup uzpůsobme možné poloze O vzhledem k úhlu BAC:

Uvažujme nejdříve O ležící mimo úhel BAC a blíže k polopřímce AB než k AC. Platí

$$180° = |\sphericalangle ADO| + |\sphericalangle ODB| + |\sphericalangle BDC| = \gamma + 60° + (180° - 2\gamma) = 240° - \gamma,$$

takže $\gamma = 60°$. Z toho již plyne, že hledaná velikost úhlu DBA musí být 30°.



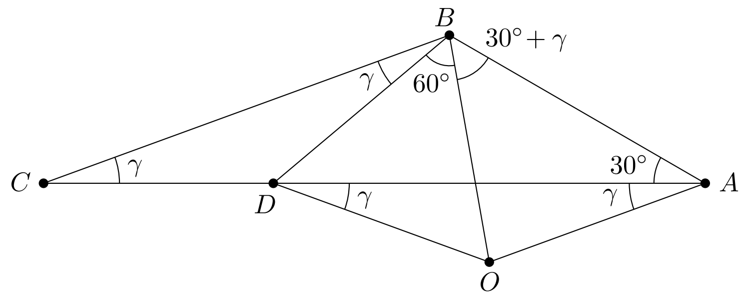
Nyní předpokládejme, že O opět leží mimo úhel BAC, ale O leží blíže k polopřímce AC než k AB. Pak je díky rovnoramennosti $|\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DAO| = 30° + \gamma$, takže

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle OBA| + |\sphericalangle DBO| + |\sphericalangle CBD| = (30° + \gamma) + 60° + \gamma = 90° + 2\gamma.$$

Proto

$$180° = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ACB| = 30° + (90° + 2\gamma) + \gamma = 120° + 3\gamma,$$

a tedy $\gamma = 20°$. V tomto případě je tedy hledaná velikost úhlu DBA rovna $60° + (30° + \gamma) = 110°$.



Nakonec pro spor předpokládejme, že O leží uvnitř úhlu BAC. Pak je $|\sphericalangle DAO| < 30°$, takže $|\sphericalangle DOA| > 120°$. Z rovnostrannosti $\triangle BDO$ a polohy O ale zároveň vyplývá $|\sphericalangle BDA| > 60°$, takže $|\sphericalangle BDC| < 180° - 60° = 120°$, což je ve sporu se shodností $\triangle CDB$ a $\triangle AOD$.

Úloha 52. Mějme funkci f, která každé dvojici nezáporných celých čísel přiřazuje nějaké nezáporné celé číslo a je definovaná následujícími vlastnostmi:

1. Pro každé x: $f(x, x) = 0$.
2. Pro každá x, y: $f(x, y) = f(y, x)$.
3. Pro každá x, y: $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Pro každá x, y: $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
5. Pro každá x, y: $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Určete součet všech nezáporných celých $t \leq 60$, která splňují $f(20, t) = 2$.

Výsledek. 415

Řešení. Pro nezáporná celá čísla x, y definujme $x' = \lfloor x/2 \rfloor$, $y' = \lfloor y/2 \rfloor$ – tato nová čísla x', y' lze chápat tak, že x, y zapíšeme ve dvojkové soustavě a odřízneme jejich poslední cifru. Přitom podle vlastností f je $f(x', y') = f(x, y)$, pokud se x a y v poslední (odřezávané) cifře shodují (třetí, respektive čtvrtá vlastnost pro x, y obě sudá, respektive lichá). Pokud se naopak x a y v poslední cifře liší, tak naopak platí $f(x', y') = f(x, y) + 1$ (pátá vlastnost případně v kombinaci s druhou vlastností). Pokud je $x = y$, pak navíc $f(x, y) = 0$.

Podle předchozích úvah lze $f(x, y)$ vyčíslit algoritmem, který nejdříve zapíše x a y ve dvojkové soustavě a následně postupně porovnává a odřezává jejich cifry od konce jejich dvojkových zápisů, přičemž nasčítává jedničky za jednotlivé výskyty dvojic odlišných cifer. To ale znamená, že výsledná hodnota $f(x, y)$ bude přesně počet pozic, na nichž se cifra dvojkového zápisu x liší od odpovídající cifry dvojkového zápisu y.

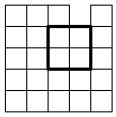
To znamená, že hodnoty $t \leq 60$ splňující $f(20, t) = 2$ jsou právě takové, které mají dvojkový zápis o délce nejvýše šesti cifer a liší se od 010100_2, tj. dvojkového zápisu čísla 20, na právě dvou pozicích (zde využíváme toho, že volby $t = 61$, 62 ani 63 nevyhovují $f(20, t) = 2$, a můžeme tedy uvažovat všechna $t \leq 63 = 2^6 - 1$ místo $t \leq 60$, aniž bychom změnili výsledek). Takových čísel je právě $\binom{6}{2} = 15$, neboť vybíráme dvě pozice v 010100_2, na nichž pozměníme cifru. Všimněme si, že pokud jednu takovou pozici zafixujeme, existuje právě 5 možností, kde pozměnit druhou cifru, takže každá pevně zvolená cifra je pozměněná právě v pěti číslech z uvažovaných patnácti.

Z oněch patnácti sčítaných hodnot t bude tudíž právě pět mít poslední dvojkovou cifru rovnou jedné, což přispívá do součtu hodnotou $5 \cdot 2^0$ (zbylé možné hodnoty t mají poslední cifru nulovou a do součtu nepřispívají). Obdobně má právě pět hodnot t nenulovou předposlední cifru, což dává příspěvek $5 \cdot 2^1$. Naopak je ale mezi sčítanými hodnotami t celkem 10 čísel s jedničkou na třetí pozici od konce jejich dvojkového zápisu, neboť $20 = 010100_2$ má na této pozici cifru jedna, takže ta se v právě pěti případech pozmění na nulu, zatímco ve zbylých deseti zůstane na této pozici jednička. Proto tato pozice přispívá hodnotou $10 \cdot 2^2$. Obdobně zjistíme příspěvky zbylých tří pozic; hledaný součet je tedy

$$5 \cdot 2^0 + 5 \cdot 2^1 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 = 415,$$

respektive $5 \cdot (010100_2 + 111111_2)$.

Úloha 53. Míša nakreslila tabulku o rozměrech 45×45 a spočítala v ní počet čtverečků o velikosti 1×1. Rozesmutnilo ji, že dostala číslo 2025, protože se jí mnohem víc líbí útvary složené z právě 2024 čtverečků. Aby původní útvar napravila, vymazala z okraje tabulky jeden čtvereček o velikosti 1×1. Poté spočítala počet všech čtverců v tabulce (ne nutně velikosti 1×1). Míša trpí nevysvětlitelným strachem z čísla 13, proto si dala pozor, aby po smazaní čtverečku nebyl počet všech čtverců v tabulce dělitelný 13. Na obrázku níže je tabulka 5×5 s jedním vymazaným čtverečkem a se zvýrazněným čtvercem velikosti 2×2 v upravené tabulce. Spočítejte, kolika způsoby mohla Míša zvolit smazaný čtvereček tak, aby byla její podmínka splněna.



Výsledek. 152

Řešení. Celkový počet čtverců v původní tabulce 45×45 je dán součtem

$$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + 45^2 = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot (45+1) \cdot (2 \cdot 45 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot 46 \cdot 91.$$

Když Míša smaže čtvereček 1×1 z okraje tabulky, sníží se celkový počet čtverců o R, kde R je počet čtverců, které obsahují smazaný čtvereček. Protože je S dělitelné 13, bude počet čtverců v upravené tabulce dělitelný 13 právě tehdy, když bude R dělitelné 13. Spočítáme tedy, pro kolik R to platí.

Nechť x je některý čtvereček na okraji tabulky. Všimneme si, že každý čtverec obsahující daný čtvereček x je jednoznačně určen svými dvěma rohovými čtverečky ležícími na hraně obsahující x; tyto rohy mohou být zvoleny libovolně, pokud bude dodržena podmínka, že x leží mezi nimi (nebo je přímo identický s některým z těchto rohů). Pokud je čtvereček x v rámci své hrany na pozici $n \in \{1, \ldots 45\}$, můžeme jeden roh velkého čtverce zvolit n způsoby a druhý $46 - n$ způsoby. Dostáváme tedy

$$R = n(46 - n).$$

Stačí nám tudíž zjistit, pro která n je $n(46 - n)$ dělitelné 13, jelikož těmto pozicím se Míša musí vyhnout.

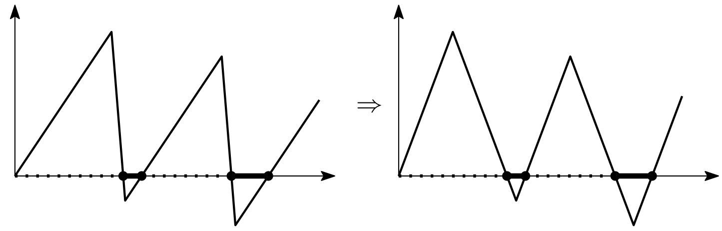
Projdeme hodnoty $1 \leq n \leq 23$ (pro větší čísla bychom ze symetrie dostali stejný výsledek) a zjistíme, že dělitelnost 13 nastane právě pro $n = 7, 13, 20$. Díky symetrii máme na každé hraně tabulky celkem 6 políček, která Míša nesmí použít. Jelikož žádné z nich není v rohu tabulky, existuje dohromady $4 \cdot 6 = 24$ zakázaných čtverečků. Na okrajích máme celkem $4 \cdot 44 = 176$ čtverečků, takže si Míša může vybrat z $176 - 24 = 152$ políček.

Úloha 54. Zajíc a želva se účastní závodu v rychlostním běhu. Želva se pomalu, ale jistě šine kupředu, zatímco zajíc se pohybuje 6krát rychleji, ale vždy, když uběhne 9 metrů vpřed, tak se otočí a vrátí se o 7 metrů zpátky, aby se želvě vysmál. Uvažme časový interval začínající startem a končící v okamžiku, kdy se zajíc a želva naposledy potkají na trase. Jaký podíl tohoto času byla želva před zajícem?

Výsledek. $\frac{22}{45}$

Řešení. Vždy, když zajíc běží dopředu, přiblíží se k cíli o $9 - \frac{9}{6} = \frac{45}{6}$ metrů více než želva (takže buď o tuto vzdálenost zvýší svůj náskok, nebo o ni sníží náskok želvy); ve fázích, kdy běží dozadu, ale naopak oproti želvě ztratí $7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ metrů. (Z toho už je mimochodem jasné, že zajíc ve výsledku závod prohraje.) Výpočet si zjednodušíme tím, že přejdeme do vztažné soustavy spojené se želvou.

V této nové soustavě ovšem běhá zajíc směrem dozadu rychleji než směrem dopředu. Kvůli tomu v ní není vždy možné přímočaře převádět čas na vzdálenost a naopak – celková uběhnutá vzdálenost není v každý okamžik přímo úměrná uplynulému času. Tato přímá úměrnost ovšem platí pro kterýkoli časový interval, na jehož začátku i konci se zajíc a želva setkali; důvodem je to, že pro každý takový časový úsek je zajícova průměrná rychlost stejná, neboť v něm uběhl v obou směrech, a tedy oběma rychlostmi, stejnou vzdálenost. Když pro zpřehlednění nahradíme zajícův skutečný pohyb takovým pohybem, při němž běží přesně po téže dráze, ale celou dobu svou průměrnou rychlostí, nezměníme tím celkový čas ani uběhnutou vzdálenost. Následující dva grafy závislosti zajícovy polohy na čase ilustrují, jak to vypadá, když zajícovu skutečnou rychlost nahrazujeme průměrnou.



Protože nás zajímají jenom poměry, můžeme dále všechny vzdálenosti vynásobit šesti. Zajícův pohyb rozdělíme na jednotlivé *cykly*, což budou časové úseky, během kterých zajíc vždy nejprve uběhne 45 metrů dopředu a následně

49 metrů dozadu. Během každého cyklu tedy zajíc uběhne 94 metrů a určitou část této dráhy se nachází za želvou; v prvním cyklu to jsou $0 + 4$ metry, ve druhém je to $4 + 8$ metrů, a tak dále. Poslední celý cyklus je ten jedenáctý, ve kterém zajíc stráví $40 + 44 = 84$ metrů za želvou a skončí 44 metrů za ní. Poté zajíc poběží dalších 46 metrů (45 metrů tam a 1 metr zpátky) a pak se s želvou setká naposledy; z tohoto neúplného, dvanáctého cyklu stráví za želvou 44 metrů.

Do posledního setkání zajíc uběhl celkem $11 \cdot 94 + 46 = 1080$ metrů a z této vzdálenosti se nacházel za želvou po délku $(4+12+\cdots+84)+44 = 528$ metrů. Želva tedy byla ve vedení na $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$ celkové dráhy, a díky výše uvedeným argumentům vyjadřuje tento zlomek i podíl času, ve kterém byla želva před zajícem.

Úloha 55. Olda si přál k narozeninám posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dostal ale jen její počáteční členy $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ a rekurentní vztah

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

platný pro všechna $n \geq 2$. Zbytek posloupnosti si prý má vyrobit sám. Bohužel ale daný vztah neurčuje posloupnost jednoznačně. Olda se proto rozhodl, že bude postupně počítat jednotlivé členy posloupnosti, a když mu vyjde více možných hodnot, tak z nich vybere tu největší. Jaká mu vyjde hodnota a_{13}?

Výsledek. 12274

Řešení. Po přeuspořádání rekurentního vztahu dostaneme

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - a_n^2 - 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n+1} + 4a_n \cdot a_{n-1} = 2n - 1,$$

což můžeme upravit na

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 - (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 = 2n - 1.$$

Protože $(a_2 - 2 \cdot a_1)^2 = (3 - 2)^2 = 1 = 1^2$ a $(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$, můžeme pomocí jednoduché indukce ukázat, že

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 = (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 + 2n - 1 = n^2.$$

Pro člen a_{n+1} tedy dostáváme dvě možnosti:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n \quad \text{nebo} \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n.$$

Olda vždy vybírá větší hodnotu, takže pokaždé použije vzorec

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n.$$

S využitím této rekurence postupně od $a_1 = 1$ dostaneme

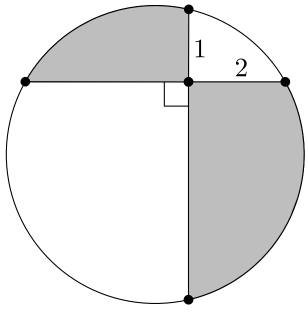
$$a_{13} = 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0.$$

To lze zjednodušit následujícím způsobem:

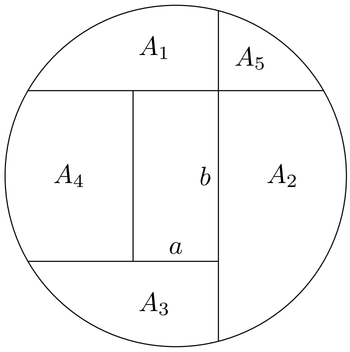
$$\begin{aligned}
a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0 \\
&= 2^{12} + (2^{11} + 2^{10} + \cdots + 2^0) + (2^{10} + 2^9 + \cdots + 2^0) + (2^9 + 2^8 + \cdots + 2^0) + \cdots + (2^1 + 2^0) + 2^0 \\
&= 2^{12} + (2^{12} - 1) + (2^{11} - 1) + \cdots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) \\
&= 2^{12} + (2^{13} - 2) - 12 \\
&= 4096 + 8192 - 14 = 12274.
\end{aligned}$$

Oldovi proto vyjde hodnota $a_{13} = 12274$.

Úloha 56. Na obrázku je znázorněn kruh spolu se dvěma svými tětivami. Tyto tětivy jsou na sebe kolmé, jejich průsečík dělí každou z nich na dvě části a na obrázku je pro obě tětivy uvedena délka kratší části. Poměr obsahů šedé oblasti a bílé oblasti je roven $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$. Určete poloměr zadaného kruhu.



Výsledek. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
Řešení.
Uvažujme rozdělení kruhu podle obrázku níže (úsečky jsou buď původní tětivy ze zadání, nebo části obrazů těchto tětiv při středové souměrnosti podle středu kruhu).



Pro obsahy vyznačených částí kruhu platí $A_1 = A_3$ a $A_2 = A_4 + A_5$. Šedá oblast má tedy obsah

$$S = A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5$$

a bílá oblast má obsah

$$B = A_3 + A_4 + ab + A_5 = S + ab.$$

Ze zadání víme, že

$$\frac{5\pi - 2}{5\pi + 2} = \frac{S}{B} = \frac{S}{S + ab},$$

z čehož lze vyjádřit obsah šedé oblasti jako

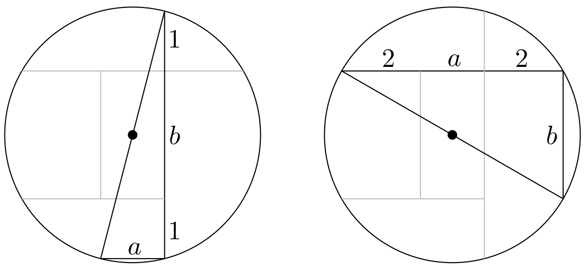
$$S = \frac{1}{4}(5\pi - 2)ab.$$

Díky tomuto vztahu můžeme obsah celého kruhu vyjádřit jako

$$\pi r^2 = S + B = 2S + ab = \frac{5\pi}{2}ab$$

neboli $2r^2 = 5ab$, kde r je hledaný poloměr daného kruhu.

Dále uvažujme pravoúhlé trojúhelníky jako na obrázcích níže (klíčové je, že přepony procházejí středem kruhu, a trojúhelníky jsou tedy opravdu pravoúhlé):



Z nich můžeme díky Pythagorově větě vyjádřit $(2r)^2 = a^2 + (2 + b)^2$ a $(2r)^2 = (4 + a)^2 + b^2$. Máme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2r^2 &= 5ab, \\ 4r^2 &= a^2 + (2 + b)^2, \\ 4r^2 &= (4 + a)^2 + b^2, \end{aligned}$$

kterou stačí vyřešit. Porovnáním pravých stran druhé a třetí rovnice dostáváme

$$a^2 + b^2 + 4b + 4 = a^2 + 8a + 16 + b^2,$$

odkud $b = 2a + 3$. Substitucí tohoto vztahu do první a druhé rovnice obdržíme

$$2 \cdot 5a(2a + 3) = 4r^2 = a^2 + \big(2 + (2a + 3)\big)^2,$$

což je kvadratická rovnice v a, jejíž jediné kladné řešení je $a = 1$. Po dosazení konečně vyjde $b = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ a

$$r = \sqrt{\frac{5ab}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Úloha 57. Nové matfyzácké koleje mají 160 pater. V každém patře je jedna chodba a ze schodiště vedou vždy dvoje dveře, oboje přímo na tuto chodbu. Na každé chodbě se nacházejí čtyři pokoje, každý má svoje vlastní dveře a v každém žije jedna osoba. Na každé dveře včetně těch do chodby bude instalován právě jeden zámek a studentům budou rozdány klíče tak, aby byly splněny tyto podmínky:

- Každý má přístup do svého pokoje, ale ne do pokoje nikoho jiného.
- Každý má přístup na chodbu ve svém patře.
- Je možné, že někdo má i přístup na chodby v jiných patrech.

Každý typ zámku k sobě má jednoznačně přiřazený klíč a je možné jej odemknout jen tímto klíčem a jeho kopiemi. Stejný typ zámku může být použit na vícero dveřích a od každého klíče je možno vyrobit a rozdat jakýkoli počet kopií. Člověk může vlastnit jakýkoli počet klíčů. Firma, která má celou záležitost na starosti, se snaží minimalizovat náklady na výrobu klíčů. Výroba nového klíče je stojí 3 eura, zatímco vytvoření kopie existujícího klíče jen 2 eura. Pokud trváme na dodržení uvedených podmínek, kolik nejméně je nutno za klíče celkem zaplatit?

Výsledek. 2432

Řešení. Zjevně nedává smysl, aby některý student měl více než dva klíče, a to jeden od svého pokoje a jeden, kterým se dostane do chodby na svém patře. Nyní v následujících třech odstavcích zdůvodníme, že můžeme předpokládat, že v každém patře bydlí právě jeden student, který si vystačí s jediným klíčem, jímž si odemkne svůj pokoj i jedny dveře na chodbě. Nikdo další pak už tento klíč mít nemůže (dostal by se k němu do pokoje), a proto ostatní tři ubytovaní na stejném patře používají pouze druhé chodbové dveře.

Předpokládejme, že jsme studentům rozdali klíče tak, aby byly splněny podmínky úlohy, ale přitom existuje patro, kde mají všichni studenti dva klíče, které potřebují. Ukážeme, že umíme změnit situaci na tomto patře tak, aby jeden student měl jen jeden klíč, a přitom byla celková cena klíčů stejná nebo nižší. Na tomto patře jistě jedny z dveří na chodbu používají maximálně dva ze čtyř studentů; označme tyto dveře D a ony studenty a a případně b. (Student b nemusí existovat; a pokud dveře D nevyužívá nikdo, stačí jako a označit libovolného ze čtyř studentů.) Upravíme zámky na dveřích následujícím způsobem: na chodbové dveře D a dveře od pokoje studenta a instalujeme úplně nové totožné zámky. Student a tak nyní potřebuje pouze jeden originální klíč za 3 eura, kdežto předtím jeho klíče stály minimálně $2 + 2 = 4$ eura. Cenu na výrobu jsme tak snížili alespoň o 1 euro.

Nyní se ovšem ještě musíme postarat o studenta b, pokud existuje. Místo klíče k D mu vytvoříme kopii klíče ke druhým chodbovým dveřím na tomto patře. Tím se cena jeho klíčů jistě nezvýšila. Student b má nyní novou sadu dvou klíčů (jeden mu byl vyměněn), která by se teoreticky mohla shodovat se sadou nějakého studenta z jiného patra. Pokud by tomu tak bylo, situaci opět napravíme instalací nového zámku na dveře od pokoje studenta b. Tím zaplatíme maximálně o 1 euro navíc za nový klíč místo kopie.

Jelikož se celková cena potřebných klíčů během tohoto procesu určitě nezvedla, můžeme skutečně u optimálního řešení předpokládat, že jeden student z každého patra má jen jeden klíč, jak jsme uvedli v prvním odstavci.

Tím jsme problém zredukovali na úkol minimalizovat cenu klíčů v situaci, kdy máme budovu se 160 patry, jedněmi hlavními dveřmi na každou chodbu a třemi pokoji na každém patře. Nechť je v této situaci rozdáno n různých typů klíčů, očíslovaných $1, 2, \ldots, n$. Každý student dostane jeden klíč ke svému pokoji a jeden k hlavním dveřím na patře. Tyto dva klíče nemohou být stejného typu (i když by pak bylo možné použít jen jeden a tím snížit cenu): Kdyby totiž byly stejné, pak by zbylí dva studenti z daného patra buď mohli vniknout do příslušného pokoje, nebo by se nebyli schopni dostat do chodby na svém patře. Také nemohou žádní dva studenti mít stejnou dvojici typů klíčů, protože pak by se byli oba schopni dostat přesně na tatáž místa, což neodpovídá zadání. Každý student proto dostane jiný z $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ párů typů klíčů. Protože studentů, kterým rozdáváme dva klíče, je celkem $3 \cdot 160 = 480$, získáváme dolní odhad pro n z nerovnosti

$$\frac{1}{2}n(n-1) \geq 480.$$

Pro celé číslo n to znamená $n \geq 32$. Nyní ukážeme, že lze použít přesně $n = 32$ typů klíčů. Toho dosáhneme tak, že rozdělíme 160 pater do 32 skupin po 5 patrech (a tedy 15 studentech). Přiřazení klíčů pak provedeme takto (první klíč je od dveří do chodby a druhý od dveří do pokoje):

- V první skupině rozdáme 15 studentům postupně páry typů klíčů $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 16)$.
- Ve druhé skupině rozdáme páry $(2, 3), (2, 4), \ldots, (2, 17)$.
- Takto pokračujeme, takže 31. skupina dostane páry $(31, 32), (31, 1), \ldots, (31, 14)$.
- A poslední, 31. skupina dostane páry $(32, 1), (32, 2), \ldots, (32, 15)$.

Snadno vidíme, že toto rozdělení splňuje uvedené podmínky. Proto je $n = 32$ nejmenším možným počtem typů klíčů, které (po první redukci) potřebujeme; a ve chvíli, kdy všem 480 studentům rozdáváme po dvou klíčích, je cena určena skutečně jen počtem použitých typů. Při výrobě klíčů pro 480 studentů se dvěma klíči tedy nejprve vyrobíme 32 originálů a následně 928 kopií, abychom jim celkem rozdali $480 \cdot 2 = 960$ klíčů.

Když k tomu připočítáme dalších 160 originálů pro studenty, kteří budou mít jen jeden klíč, je dohromady nutno vyrobit $32 + 160 = 192$ různých originálů. Finální cenu proto spočteme jako $192 \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$.