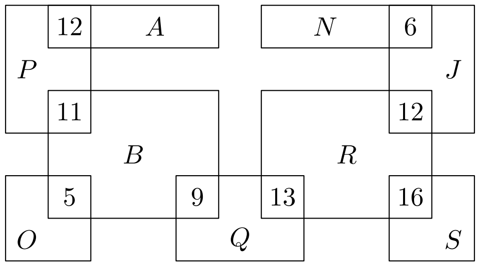
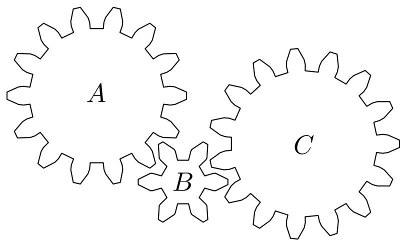
Aufgabe 1. Die Buchstaben in den Rechtecken sind verschiedene Ziffern ungleich Null. In den Überschneidungen je zweier Rechtecke steht die Summe der zugehörigen Buchstaben. Bestimme den Wert der fünfstelligen Zahl $NABOJ$.



Ergebnis. 14325

Lösung. Die Summe 16 kann nur durch $9 + 7$ gebildet werden. Weil $R = 9$ auf den Widerspruch $J = N = 3$ führt, muss $S = 9$ und $R = 7$ sein. Nun folgt der Reihe nach $J = 5$, $N = 1$, $Q = 6$, $B = 3$, $P = 8$, $A = 4$ und $O = 2$. Also ist $NABOJ = 14325$, was auch als das Datum des Náboj 2025 interpretiert werden kann.

Aufgabe 2. Wie viele vollständige Umdrehungen muss das Zahnrad C machen, damit alle drei Zahnräder zum ersten Mal in ihre ursprüngliche Ausgangsposition zurückkehren?



Ergebnis. 14

Lösung. Das Zahnrad A hat 14 Zähne, das Zahnrad B hat 6 und das Zahnrad C hat 15 Zähne. Zu bestimmen ist zunächst die kleinste Anzahl von Zähnen, um die die Zahnräder gedreht werden müssen, damit alle Zahnräder in ihre Ausgangsposition zurückkehren. Diese Zahl muss ein Vielfaches von 14, 6 und 15 sein. Das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen ist 210. Das Zahnrad C muss also um 210 Zähne gedreht werden, folglich $210 : 15 = 14$ Mal.

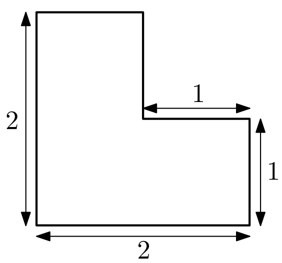
Aufgabe 3. Wie lautet die größte zehnstellige Zahl, bei der zwischen je zwei gleichen Ziffern mindestens eine kleinere Ziffer liegt?

Ergebnis. 9 897 989 698

Lösung. Betrachten wir die Ziffer ganz links. Wir wählen dafür 9, den größtmöglichen Wert, und versuchen, die gewünschte Zahl zu bilden, indem wir immer die größtmögliche Ziffer auf der rechten Seite hinzufügen, so dass die gegebene Bedingung erfüllt ist. Als nächstes können wir keine 9 hinzufügen, also verwenden wir stattdessen 8. Dann können wir wieder 9 ergänzen. Nun können wir weder 8 noch 9 nehmen, also ist der höchstmögliche Wert 7. Als nächstes können wir nacheinander wieder 9, 8, 9, aber dann keine der Ziffern aus $\{9, 8, 7\}$ einsetzen. Nach der 6 können wir wieder die 9 und dann als zehnte Ziffer die 8 hinzufügen. Auf diese Weise kommen wir auf die Zahl $n = 9\,897\,989\,698$.

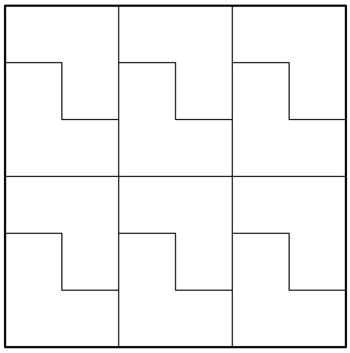
Wir behaupten, dass dies die größte zulässige zehnstellige Zahl ist. Angenommen m wäre eine andere zulässige Zahl. Wir betrachten die Stelle am weitesten links, an der sich m und n unterscheiden. Da obiger Algorithmus die größte verfügbare Ziffer an dieser Stelle gewählt hat, ergibt sich unabhängig von den übrigen Ziffern $m \leq n$.

Aufgabe 4. Was ist die kleinste Seitenlänge eines Quadrats, welches durch Verwendung von mehreren Kopien der unten gezeigten rechtwinkligen L-Form vollständig und ohne Überlappung der einzelnen L-Formen überdeckt werden kann?

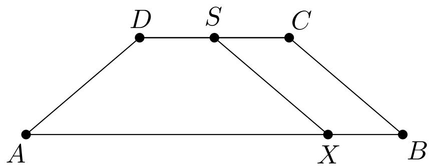


Ergebnis. 6

Lösung. Der Flächeninhalt des Quadrats muss ein Vielfaches von 3 sein, und es ist leicht zu sehen, dass ein 3×3 Quadrat nicht wie gewünscht überdeckt werden kann. Allerdings kann ein 6×6 Quadrat überdeckt werden. Eine mögliche Anordnung ist hier dargestellt:



Aufgabe 5. In einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD erfüllen die Seitenlängen die Bedingung $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$. Zusätzlich sei S der Mittelpunkt der Seite DC und X ein Punkt auf der Seite AB, so dass XS zu BC parallel ist. Bestimme den Umfang des Parallelogramms $XBCS$, wenn der Umfang von $ABCD$ als 50 und der von $AXSD$ als 38 gegeben ist.



Ergebnis. 36

Lösung. Die Differenz der beiden Umfänge ist genau $\overline{XB} + \overline{CS} = 2 \cdot \overline{CS} = \overline{CD}$, was auch gleich $\overline{BC}$ und $\overline{XS}$ ist. Folglich berechnet sich der Umfang des Parallelogramms $XBCS$ zu $3 \cdot (50 - 38) = 36$.

Aufgabe 6. Ida wählte eine zweistellige Zahl ohne Nullen und multiplizierte sie mit der Zahl, die durch Vertauschen der beiden Ziffern ihrer gewählten Zahl entsteht. Das Ergebnis war eine vierstellige Zahl, die mit 3 begann und mit 7 endete. Was war die größere der beiden Zahlen, die Ida multiplizierte?

Ergebnis. 93

Lösung. Seien x, y die beiden Ziffern der Zahl. Beachte, dass die Einerstelle von Idas Produkt gleich der Einerstelle des Produkts $x \cdot y$ ist. Es gibt nur zwei Möglichkeiten, zwei Ziffern zu multiplizieren und eine Zahl zu erhalten, die mit 7 endet, nämlich $1 \cdot 7 = 7$ und $3 \cdot 9 = 27$. Die Möglichkeit $17 \cdot 71$ kann ausgeschlossen werden, da das Produkt nicht mit 3 beginnt. Somit ist die korrekte Möglichkeit $39 \cdot 93 = 3627$ und die Lösung ist 93.

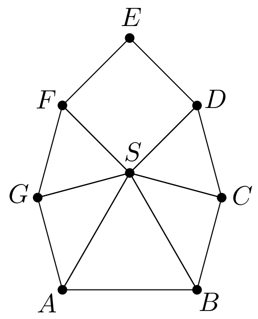
Aufgabe 7. Kurt spielt ein Kartenspiel mit einem Standarddeck von 52 Karten, das aus 13 Rängen in je 4 Farben besteht. In jeder Runde kann ein Spieler entweder eine Karte ziehen oder eine Karte aus seiner Hand ausspielen, die entweder denselben Rang oder dieselbe Farbe hat wie die Karte, die oben auf dem Spielstapel liegt. In den vorangegangenen Runden hatte Kurt enormes Pech und musste sehr viele Karten ziehen, was ihn zum Nachdenken brachte: Wie viele Karten N muss er mindestens auf der Hand haben, damit er garantiert mindestens eine Karte ausspielen kann, egal welche N Karten er auf der Hand hat und egal welche Karte oben auf dem Spielstapel liegt?

Ergebnis. 37

Lösung. Wenn Kurt alle Kombinationen aus drei Farben und zwölf Rängen besitzt, das sind insgesamt $3 \cdot 12 = 36$ Karten, dann ist es möglich, dass die Karte oben auf dem Spielstapel die fehlende vierte Farbe und den fehlenden dreizehnten Rang hat. In diesem Fall ist keine von Kurts Karten spielbar. Also ist N mindestens 37.

Andererseits hat die Karte oben auf dem Stapel die gleiche Farbe wie 12 andere Karten und den gleichen Rang wie 3 andere Karten. Da die Gesamtzahl der Karten 52 beträgt und mindestens eine davon sich im Stapel befindet, beträgt die maximale Anzahl unspielbarer Karten in Kurts Hand damit $52 - 1 - 12 - 3 = 36$. Folglich ist er mit 37 Karten sicherlich in der Lage, mindestens eine von ihnen zu spielen.

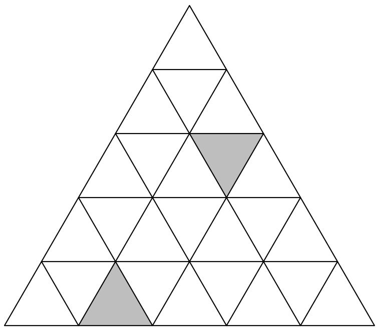
Aufgabe 8. Das Siebeneck $ABCDEFG$ besteht aus sechs Vielecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt S: aus drei gleichseitigen Dreiecken ABS, CDS und FGS, zwei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken BCS und GAS mit rechten Winkeln bei C bzw. G sowie einem Quadrat $DEFS$. Bestimme die Größe des Winkels $\angle SAE$ in Grad.



Ergebnis. 15

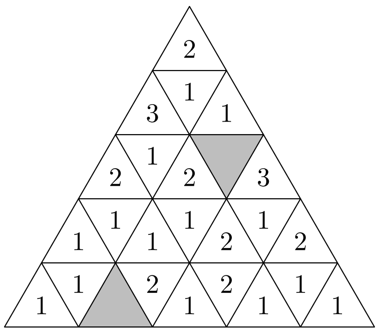
Lösung. Da das Dreieck FGS gleichseitig ist, gilt $\overline{FS} = \overline{GS}$. Daher sind die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke GAS und EFS kongruent, was $\overline{ES} = \overline{AS}$ impliziert. Folglich ist das Dreieck EAS gleichschenklig. Mit $\angle ESA = 45° + 60° + 45° = 150°$ erhält man $\angle SAE = \frac{1}{2} \cdot (180° - \angle ESA) = 15°$.

Aufgabe 9. Betrachte das gegebene Dreiecksgitter, in dem zwei Kacheln grau markiert sind. Wie viele Dreiecke können entlang der Gitterlinien gezeichnet werden, sodass diese keine der grauen Kacheln enthalten?



Ergebnis. 34

Lösung. Schreibe in jedes kleine Dreieck, wie viele zulässige Dreiecke dieses betrachtete Dreieck je nach Ausrichtung als obere oder untere Ecke besitzen:



Die gesuchte Anzahl ist dann einfach die Summe aller dieser Werte, nämlich $14 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 34$.

Aufgabe 10. Wir nennen eine vierstellige Zahl *faszinierend*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: Wenn die Hunderterstelle entfernt wird, ist die resultierende dreistellige Zahl ein Neuntel der ursprünglichen vierstelligen Zahl. Zum Beispiel ist die Zahl 2025 faszinierend, da $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$ gilt. Finde die größte faszinierende vierstellige Zahl.

Ergebnis. 6075

Lösung. Sei $N = \overline{abcd}$ eine faszinierende Zahl und setze $n = \overline{cd}$. Dann ist $N = 1000a + 100b + n$. Nach Entfernen der Hunderterstelle entsteht die Zahl $M = 100a + n$. Multipliziert man die Gleichung $M = \frac{1}{9}N$ mit 9, erhält man

$$9(100a + n) = 1000a + 100b + n$$

und durch weiteres Umformen und Dividieren durch 4 ergibt sich

$$25(a + b) = 2n.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass $a+b$ eine gerade Zahl sein muss und dass sie wegen $n<100$ auch noch kleiner als $\frac{2\cdot 100}{25}=8$ sein muss. Also ist $a+b$ höchstens 6. Um die Zahl N zu maximieren, wähle $a=6$ und $b=0$, was zu $n=75$ führt. Es ist leicht zu überprüfen, dass $N=6075$ tatsächlich eine faszinierende Zahl ist.

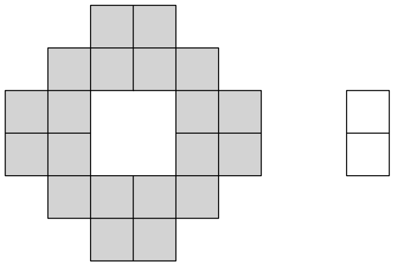
Aufgabe 11. Ein Frachtschiff ist für den gleichzeitigen Transport von drei Arten von Flüssigkeiten ausgelegt: Ethanol, Öl und Quecksilber. Jede Flüssigkeit besitzt dabei ihre eigene maximale Kapazität: 10 Tonnen Ethanol, 30 Tonnen Öl und 60 Tonnen Quecksilber. Auf der Reise von Prag nach Hamburg wird das Schiff mit insgesamt 85 Tonnen Fracht, bestehend aus diesen Flüssigkeiten, beladen. Im Vergleich zur ersten Fahrt befördert das Schiff auf der Rückfahrt die gleiche Menge Ethanol, die doppelte Menge Öl und ein Drittel so viel Quecksilber. Wie viele Tonnen Fracht befördert das Schiff auf der Rückfahrt?

Ergebnis. 60

Lösung. Weil das Schiff auf der ersten Fahrt mit 85 Tonnen beladen war, musste es mindestens 15 Tonnen Öl transportieren. Da sich die Ölmenge auf der Rückfahrt jedoch verdoppelte, konnte das Schiff höchstens 15 Tonnen Öl auf der ersten Fahrt transportiert haben. Also hatte das Schiff auf der ersten Fahrt 15 Tonnen Öl sowie die volle Kapazität an Ethanol und Quecksilber geladen. Die Gesamtlast der Fracht auf der Rückfahrt kann nun berechnet werden zu

$$10+2\cdot 15+\frac{1}{3}\cdot 60=60.$$

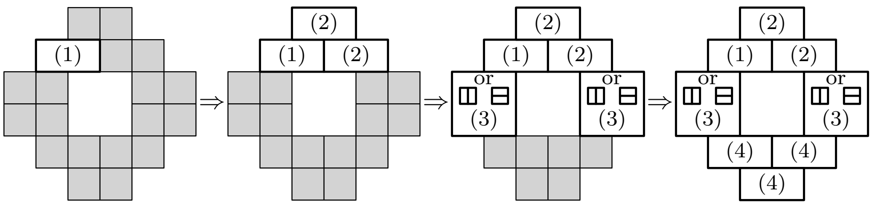
Aufgabe 12. Bestimme die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die graue Figur mit nicht überlappenden Dominosteinen abzudecken, wobei jeder Stein genau zwei benachbarte Quadrate abdeckt. Ein einzelner Dominostein ist zur Veranschaulichung als weißes Rechteck dargestellt. Er kann so gedreht werden, dass er passt.



Hinweis: Anordnungen, die sich durch Drehung oder Spiegelung der gesamten Figur unterscheiden, werden als verschieden betrachtet. Kein Dominostein darf über die Grenzen der Figur hinausragen.

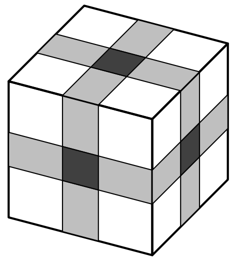
Ergebnis. 8

Lösung. Wir beginnen wir damit, die Figur von einer der inneren Ecken aus abzudecken, wie es in der Abbildung mit (1) gekennzeichnet ist. Es gibt zwei Möglichkeiten, einen Dominostein zu platzieren, die aber zu völlig symmetrischen Situationen führen. Daher können wir eine von ihnen wählen und das Ergebnis mit 2 multiplizieren. Sobald dieser Dominostein feststeht, ist eine Platzierung von zwei weiteren Steinen bestimmt, in der Abbildung mit (2) markiert. Die beiden „Quadrate“ auf der linken und rechten Seite können jeweils auf zwei Arten abgedeckt werden, siehe (3), und der Rest der Figur kann dann eindeutig abgedeckt werden, siehe (4). Es gibt also $2\cdot 2=4$ Möglichkeiten, mit dieser Platzierung in (1) zu verfahren. Berücksichtigt man die symmetrische Option, erhält man insgesamt $2\cdot 4=8$ Möglichkeiten.



Aufgabe 13. Ein würfelförmiges Paket ist mittig mit einem grauen Klebeband umwickelt, wobei die Breite des Klebebandes kürzer ist als die Paketkante. Die kleineren dunkelgrauen Bereiche auf der Oberfläche, einschließlich der im Bild nicht sichtbaren, haben einen Gesamtflächeninhalt von $216\,\text{cm}^2$. Der Flächeninhalt der hellgrauen Bereiche auf der Oberfläche ist halb so groß wie der Flächeninhalt, der nicht vom Klebeband bedeckt ist. Bestimme die Kantenlänge

des Pakets in Zentimetern.



Ergebnis. 30

Lösung. Der Flächeninhalt jedes dunkelgrauen Quadrats ist $216 : 6 = 36$, also hat seine Seite die Länge $\sqrt{36} = 6$. Auf jeder Fläche ist der unbedeckte Teil doppelt so groß wie der hellgraue Teil, das heißt, der Flächeninhalt jedes hellgrauen Rechtecks ist halb so groß wie der eines weißen Quadrats. Daher können fünf hellgraue Rechtecke mit einer Breite von 6 entlang einer Kante des Würfels angeordnet werden, was zu der Seitenlänge $5 \cdot 6 = 30$ führt.

Aufgabe 14. In einem Geschäft werden Stifte, Notizbücher und Lineale verkauft. Der Preis eines Notizbuchs entspricht der Summe der Preise eines Stifts und eines Lineals. Wenn der Preis für ein Lineal um 50% erhöht würde, würde er der Summe der Preise für einen Stift und ein Notizbuch entsprechen. Um wie viel Prozent müsste der Preis eines Stiftes erhöht werden, damit er der Summe der Preise eines Notizbuchs und eines Lineals entspricht?

Ergebnis. 800%

Lösung. Sei n der Preis eines Notizbuches, l der Preis eines Lineals und s der Preis eines Stiftes. Die gegebenen Bedingungen lassen sich in die Gleichungen $n = l + s$ und $\frac{3}{2}l = s + n = 2s + l$ übersetzen. Aus der zweiten Gleichung folgt $l = 4s$, und wenn man dies in die erste Gleichung einsetzt, erhält man $n = 5s$. Damit gilt $n + l = 9s$. Daher sollte der Preis des Stiftes auf das Neunfache steigen, das heißt um 800%.

Aufgabe 15. Mit $\mathrm{ggT}(a, b)$ wird der größte gemeinsame Teiler und mit $\mathrm{kgV}(a, b)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen a und b bezeichnet. Berechne den Ausdruck

$$\mathrm{kgV}(2025, \mathrm{kgV}(2024, \mathrm{ggT}(2023, \mathrm{ggT}(2022, \ldots \mathrm{kgV}(4, \mathrm{ggT}(3, \mathrm{ggT}(2, 1))) \ldots)))),$$

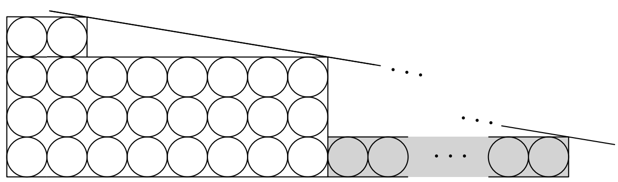
wobei sich die Operatoren ggT und kgV nach jeweils zwei Schritten abwechseln. Insgesamt enthält der Ausdruck 1012 ggT-Berechnungen und 1012 kgV-Berechnungen. Wenn beispielsweise jede dieser Berechnungen nur zwei Mal vorkommen würde, würde der Ausdruck folgendermaßen aussehen: $\mathrm{kgV}(5, \mathrm{kgV}(4, \mathrm{ggT}(3, \mathrm{ggT}(2, 1))))$.

Ergebnis. 4 098 600

Lösung. Es gilt $\mathrm{ggT}(x, x-1) = 1$ für jede positive ganze Zahl x und folglich $\mathrm{ggT}(x, \mathrm{ggT}(x-1, a)) = 1$ für alle positiven ganzen Zahlen a und x. Daher ist der Ausdruck gleich

$$\mathrm{kgV}(2025, \mathrm{kgV}(2024, 1)) = 2025 \cdot 2024 = 4\,098\,600.$$

Aufgabe 16. In der Abbildung sind drei Rechtecke mit regelmäßig einbeschriebenen kongruenten Kreisen zu sehen sowie eine Gerade, die durch die oberen rechten Ecken der Rechtecke verläuft. Der mittlere Teil des Bildes ist verdeckt. Wie viele Kreise befinden sich im grauen Rechteck?



Ergebnis. 12

Lösung. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke, die von den Bereichen zwischen der schrägen Gerade und den Rechtecken gebildet werden, sind ähnlich mit einem Ähnlichkeitsverhältnis von 2. Folglich ist die Breite des grauen Rechtecks $2 \cdot 6 = 12$, gemessen in Kreisdurchmessern.

Aufgabe 17. Jonathan lief eine 18 km lange Runde. Er begann mit einem gleichmäßigen Tempo, aber als er sich erschöpft fühlte, verlangsamte er sein Tempo für den Rest des Laufs um 25%. Nach Abschluss des Laufs überprüfte Jonathan seine Smartwatch und stellte fest, dass er im langsameren Tempo doppelt so lange gelaufen ist wie im schnelleren. Wie viele Kilometer hatte Jonathan zurückgelegt, bevor er langsamer wurde?

Ergebnis. $7{,}2 = \frac{36}{5}$

Lösung. Sei v Jonathans ursprüngliches Tempo in km/h und t die Zeit, die er im schnellen Tempo gelaufen ist, gemessen in Stunden. Dann ist sein langsames Tempo $\frac{3}{4}v$ und die Zeit, die er in diesem Tempo verbracht hat, ist $2t$. Die Gesamtstrecke ist die Summe der beiden Teilstrecken, also

$$18 = v \cdot t + \tfrac{3}{4}v \cdot 2t = \tfrac{5}{2}vt.$$

Folglich ist

$$vt = 18 \cdot \frac{2}{5} = 7{,}2$$

die im schnellen Tempo zurückgelegte Strecke in Kilometern.

Aufgabe 18. Kathi, Laura, Marie, Natalie und Olivia stellen sich in einer Linie vor einem riesigen Náboj-Monument zu einem Gruppenfoto auf. Allerdings gibt es strenge Bedingungen, wer wo stehen darf:

- Natalie muss rechts von Kathi, Marie und Olivia stehen.
- Marie muss links von Kathi, Natalie und Olivia stehen.

Auf wie viele Arten können sich die fünf jungen Damen für dieses fabelhafte Foto aufstellen?

Ergebnis. 10

Lösung. Da Laura gar nicht in den einschränkenden Bedingungen vorkommt, kann sie sich in der Reihe beliebig postieren. Die anderen vier Damen können sich auf zwei Arten aufstellen, so dass es insgesamt 10 Möglichkeiten gibt.

Aufgabe 19. Eine Burg besteht aus fünf Türmen, die durch gerade Mauern verbunden sind, deren Längen 50 Ellen, 70 Ellen, 90 Ellen, 110 Ellen und 130 Ellen betragen. Die Mauern können in beliebiger Reihenfolge angeordnet sein. Wie lang (in Ellen) ist der längste gerade Schuss, den ein Bogenschütze innerhalb der Burg abgeben kann, wenn die Mauern zu diesem Zweck optimal angeordnet sind?

Hinweis: Die Dicke der Burgmauern sowie der Türme soll dabei vernachlässigbar sein. Die Schusslänge wird als gerader horizontaler Abstand gemessen.

Ergebnis. 220

Lösung. Gesucht ist die größte Zahl S, sodass sich die gegebenen Wandlängen in zwei Teilmengen zerlegen lassen, in denen jeweils die Summe ihrer Elemente größer oder gleich S ist. Also gilt

$$S \leq \frac{50 + 70 + 90 + 110 + 130}{2} = 225.$$

Da S ein Vielfaches von 10 sein muss, folgt $S \leq 220$. Dieser Wert kann erreicht werden, indem die Mauern wie folgt aufgeteilt werden: $130 + 90 < 110 + 50 + 70$.

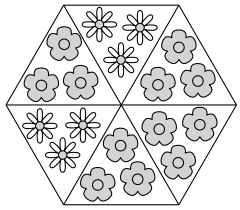
Aufgabe 20. Pauline hat acht Karten. Diese sind mit einer der Ziffern von 1 bis 8 beschriftet, wobei jede Ziffer genau ein Mal vorkommt. Sie ordnet die Karten neu an und erstellt damit zwei vierstellige Zahlen. Was ist die kleinstmögliche positive Differenz zwischen diesen beiden Zahlen?

Ergebnis. 247

Lösung. Die Differenz ist am kleinsten, wenn die Zahlen möglichst nahe beieinander liegen. Um das zu erreichen, dürfen sich die Tausenderstellen nur um 1 unterscheiden. Die Hunderterstelle muss bei der größeren Zahl so klein wie möglich und bei der kleineren Zahl so groß wie möglich sein. Sobald die Hunderterstellen festgelegt sind, gilt das Gleiche auch für die Zehnerstellen und schließlich auch für die Einerstellen. Das führt zu den Zahlen 5123 und 4876, deren Differenz 247 beträgt.

Aufgabe 21. Großmutter hat sich entschlossen, sechs dreieckige Blumenbeete, die in einem Sechseck angeordnet sind, mit zwei Sorten von Blumen zu bepflanzen. Jedes der sechs Blumenbeete im Sechseck kann entweder mit Veilchen oder mit Gänseblümchen bepflanzt werden. Eine solche Möglichkeit ist in der Abbildung zu sehen. Auf wie viele Arten kann sie ihre Anpflanzungen vornehmen, so dass es mindestens ein Paar von benachbarten Beeten gibt, auf denen die gleiche Sorte von Blumen gepflanzt ist?

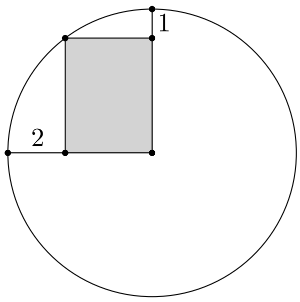
Hinweis: Anordnungen, die sich durch Symmetrie, also Drehung oder Spiegelung, unterscheiden, werden als verschieden angesehen. Jede der sechs Positionen der Blumenbeete wird als unterschiedlich betrachtet.



Ergebnis. 62

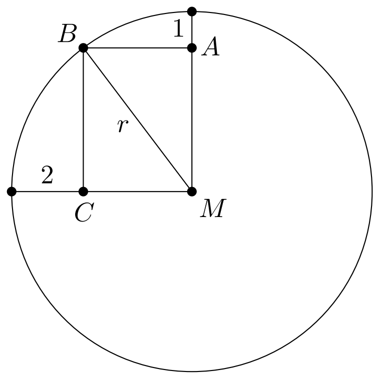
Lösung. Lässt man die gestellte Bedingung, dass zwei benachbarte Beete mit der gleichen Sorte von Blumen bepflanzt werden müssen, außer Acht, so ist die Antwort $2^6 = 64$. Von diesem Ergebnis muss nun die Anzahl der Möglichkeiten abgezogen werden, bei denen die gestellte Bedingung verletzt ist. Letztere sind genau diejenigen, in denen sich die beiden Sorten von Blumen abwechseln, und davon gibt es nur zwei Möglichkeiten. Folglich gibt es $64 - 2 = 62$ Anordnungen der gesuchten Sorte.

Aufgabe 22. Lea hat von einem kreisrunden Blatt Papier ein Rechteck so ausgeschnitten, dass eine Ecke auf dem Mittelpunkt des Kreises liegt und die gegenüberliegende Ecke auf dem Rand des Kreises. Die anderen beiden Ecken befinden sich so auf zwei Radien des Kreises, dass die eine 1 dm und die andere 2 dm von der Kreislinie entfernt sind. Wie groß ist der Flächeninhalt des Stück Papiers, das nach dem Ausschneiden des Rechtecks übrig bleibt (in dm^2)?



Ergebnis. $25\pi - 12$

Lösung. Sei M der Mittelpunkt des kreisrunden Blattes und seien A, B und C die weiteren Ecken des Rechtecks. Ferner wird der Radius des Kreises mit r bezeichnet.



Dann ist $\overline{MA} = r - 1$, $\overline{MB} = r$ und $\overline{MC} = r - 2$ sowie $\overline{AB} = \overline{MC}$. Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich im Dreieck ABM die Gleichung

$$r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2,$$

die man zu

$$0 = r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5)$$

vereinfachen kann. Da $r = 1$ zu einer ungültigen Konfiguration führt, ist $r = 5$ die einzig mögliche Lösung. Die Restfläche nach dem Ausschneiden des Rechtecks ist also $r^2\pi - 3 \cdot 4 = 25\pi - 12$ (in dm^2).

Aufgabe 23. Großmeister Náboicus, der unübertroffene Virtuose im Mischen von Essenzen, ist gerade dabei, das legendäre *Algemy* herzustellen – eine makellose Fusion von Algebra und Alchemy, gemischt in einem perfekten Verhältnis von 1 : 1. Um dies zu erreichen, beginnt er mit folgenden Zutaten:

- Algebry: bestehend aus 80% Algebra und 20% Alchemy, mit einer Gesamtmasse von 10 mg,
- Alchema: bestehend aus 30% Algebra und 70% Alchemy, mit einer Gesamtmasse von 14 mg.

Wie viel Algemy (in mg) kann Náboicus höchstens herstellen, wenn er diese Zutaten zur Verfügung hat?

Hinweis: Náboicus kann die einzelnen Bestandteile einer Mischung zu keinem Zeitpunkt im Arbeitsprozess isolieren, er kann nur die zur Verfügung stehenden Substanzen abwiegen und mischen.

Ergebnis. $23\frac{1}{3} = \frac{70}{3}$

Lösung. Werden x Einheiten der ersten Substanz und y der zweiten gemischt, dann enthält das entstandene Gemisch $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y$ Algebra und $\frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$ Alchemy. Um das Verhältnis 1 : 1 zu erreichen, muss die Gleichung

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$$

gelten, woraus sich $y = \frac{3}{2}x$ ergibt. Mit anderen Worten, für je 1 mg Algebry müssen 1,5 mg Alchema der Mischung beigefügt werden. Daher wird die maximale Menge an Algemy hergestellt, wenn Náboicus die gesamte Menge von 14 mg Alchema und $\frac{2}{3} \cdot 14$ mg Algebry benutzt. Auf diese Weise produziert er insgesamt $\frac{5}{3} \cdot 14\,\text{mg} = \frac{70}{3}$ mg der begehrten Mischung.

Aufgabe 24. Eine Zahl $K = n^2$ ist eine vierstellige Quadratzahl, bei der alle Ziffern kleiner als 7 sind. Wenn jede Ziffer von K um 3 erhöht wird, erhält man eine weitere Quadratzahl. Finde n.

Ergebnis. 34

Lösung. Sei $m^2 = M = K + 3333$. Da M und K 4-stellige Quadratzahlen sind, muss $32 \leq n < m \leq 99$ gelten und daher auch

$$32 + 33 \leq m + n \leq 98 + 99$$

oder

$$65 \leq m + n \leq 197.$$

Betrachtet man

$$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2 = M - K = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101,$$

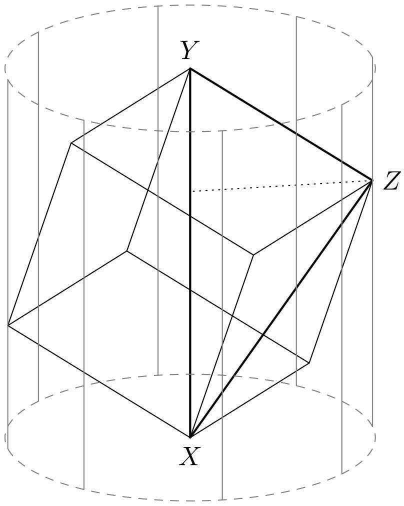
so sind aufgrund der oben genannten Einschränkungen die einzig möglichen Faktoren $m + n = 101$ und $m - n = 33$ und somit $m = 67$ und $n = 34$. Das Ausrechnen von $n^2 = 34^2 = 1156$ bestätigt, dass in diesem Fall tatsächlich alle Ziffern von K kleiner als 7 sind.

Aufgabe 25. Seien X und Y zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines Würfels mit der Seitenlänge 1 und sei $\mathcal{C}$ ein gerader Zylinder, dessen Oberfläche alle Eckpunkte des Würfels enthält, sodass X und Y die Mittelpunkte der kreisförmigen Grund- bzw. Deckfläche von $\mathcal{C}$ sind. Wie groß ist das Volumen von $\mathcal{C}$?

Ergebnis. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$

Lösung. Da X und Y die Mittelpunkte der Grund- bzw. Deckfläche des Zylinders sind, entspricht die Höhe des Zylinders ihrem Abstand. Weil X und Y gegenüberliegende Eckpunkte des Würfels sind, liegen sie auf einer Raumdiagonalen der Länge $\sqrt{3}$. Um den Radius des Zylinders zu bestimmen, kann ein beliebiger weiterer Eckpunkt Z des Würfels gewählt und dessen Abstand von der Diagonalen XY berechnet werden. Das Dreieck XZY ist rechtwinklig bei Z, die Strecke XZ ist eine Flächendiagonale und YZ ist eine Kante des Würfels. Somit ist der gesuchte Radius die Höhe von Z auf XY. Über die Ähnlichkeit des Dreiecks, das aus X, Z und dem Höhenfußpunkt gebildet wird, zum Dreieck XZY mit Ähnlichkeitsfaktor $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ ergibt sich diese Höhe zu $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Daher ist das Volumen des Zylinders

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}\,\pi = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi.$$



Aufgabe 26. In einem Dorf mit 60 Einwohnern gehört jede Person einem von drei Typen an: den Wahrheitssagern, die immer die Wahrheit sagen, den Lügnern, die immer lügen, und den normalen Personen, die frei antworten können, wie sie wollen. Jeder im Dorf kennt den Typ jeder anderen Person. Ein Außenstehender stellte allen Dorfbewohnern zwei Fragen:

1. „Gibt es mindestens 31 Wahrheitssager?“ – und er erhielt genau 43 positive Antworten.
2. „Gibt es mindestens 31 Lügner?“ – und er erhielt genau 39 positive Antworten.

Wie viele normale Menschen gibt es in diesem Dorf mindestens?

Ergebnis. 13

Lösung. Die Antworten auf die zweite Frage enthüllen Folgendes: Wenn es mindestens 31 Lügner gäbe, würden sie alle auf die zweite Frage verneinend antworten, was es unmöglich macht, 39 positive Antworten zu erhalten. Daher gibt es höchstens 30 Lügner. Da Wahrheitssager immer die Wahrheit sagen, müssen diese die zweite Frage mit einem Nein beantwortet haben. Das bedeutet, es kann höchstens $60 - 39 = 21$ Wahrheitssager geben.

Damit ist die wahrheitsgemäße Antwort auf die erste Frage „Nein“. Die 43 positiven Antworten müssen von allen Lügnern und einigen normalen Personen gekommen sein. Da es höchstens 30 Lügner gibt, muss es mindestens $43 - 30 = 13$ normale Personen geben.

Diese Zusammensetzung der Dorfbewohner ist möglich, da die Verteilung von 17 Wahrheitssagern, 30 Lügnern und 13 normalen Personen beide Bedingungen erfüllt. Somit gibt es im Dorf mindestens 13 normale Menschen.

Aufgabe 27. Vier Teams, A, B, C und D, nahmen an einem Turnier teil, bei dem jedes Team genau einmal gegen jedes andere Team spielen musste. Das Gewinnerteam jedes Spiels erhielt je nach Vorsprung beim Sieg entweder 1 oder 2 Punkte, während das Verliererteam keine Punkte erhielt. Es gab keine Unentschieden. Nach allen Spielen wurde eine Tabelle wie im unteren Beispiel erstellt, die die Ergebnisse aller Spiele veranschaulicht. Wie viele unterschiedliche Ergebnistabellen kann es geben, wenn wir wissen, dass ein Team am Ende insgesamt 4 Punkte erreicht hat, während die anderen drei Teams alle jeweils 1 Punkt erreicht haben?

	A	B	C	D	total
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Hinweis: Die Beschriftung der Tabelle mit den Teams A, B, C und D ist so festgelegt, wie sie in der Beispieltabelle in der ersten Zeile und der ersten Spalte steht.

Ergebnis. 24

Lösung. Zunächst beachten wir, dass die Gesamtzahl der vergebenen Punkte 7 beträgt, was bedeutet, dass bei den insgesamt sechs Spielen genau einmal das Gewinnerteam zwei Punkte erhalten hat und bei den restlichen Spielen das Gewinnerteam jeweils einen Punkt bekommen hat. Das bedeutet, dass das beste Team alle anderen Teams besiegt hat, wobei genau ein Spiel davon sogar mit einem großen Vorsprung gewonnen wurde. Dafür gibt es $4 \cdot 3$ Möglichkeiten. Die Spiele zwischen den drei anderen Teams müssen zu einem „Zyklus“ geführt haben, da jedes dieser Teams nur einen

Punkt erhalten hat. Es gibt genau zwei Möglichkeiten, diesen Zyklus zu durchlaufen. Insgesamt gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten, wie die Spiele des Turniers stattfinden hätten können.

Aufgabe 28. Julia hat die Zahl 2025 als Summe von M Summanden aufgeschrieben, wobei jeder dieser Summanden eine Potenz von 10 ist, also von der Form 10^n mit einer nicht-negativen ganzen Zahl n. Die Summanden in der Summe dürfen sich wiederholen. Wie viele verschiedene Werte kann M annehmen?

Ergebnis. 225

Lösung. Der kleinstmögliche Wert für M ist wegen

$$2025 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

klarerweise 9. Für $k \geq 1$ erhöht jede Ersetzung von 10^k durch zehn Summanden 10^{k-1} die Anzahl an Summanden um 9. Das bedeutet, dass M ein Vielfaches von 9 sein muss. Darüber hinaus bilden die möglichen Werte von M sogar eine Menge aus aufeinander folgenden Vielfachen von 9. Der größtmögliche Wert von M ist 2025, wie folgende Darstellung zeigt:

$$2025 = 2025 \cdot 10^0$$

Daher ist die Anzahl an möglichen Werten für M

$$\frac{2025 - 9}{9} + 1 = 225.$$

Aufgabe 29. Max und Paul stehen Rücken an Rücken an einem Bahnsteig. Ein Güterzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit an ihnen vorbei. In dem Moment als die Zugspitze die beiden erreicht, gehen Max und Paul in entgegengesetzter Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit auseinander. Das Zugende erreicht Max 45 Meter von seinem Startpunkt entfernt, kurz danach erreicht es Paul in 60 Meter Entfernung vom Startpunkt. Wie lang ist der Zug in Meter?

Ergebnis. 360

Lösung. Sei t_1 die Zeit, die vergeht von dem Augenblick, als die Zugspitze an Max und Paul vorbeifährt, bis zu dem Moment, als das Zugende Max passiert. Analog sei t_2 die Zeitspanne, die das Zugende von Max bis Paul benötigt. Schließlich sei ℓ die Länge des Zuges in Metern. Da sich Max und Paul mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, schafft Max während t_1 genau 45 Meter und legt Paul während t_2 eine Entfernung von $60 - 45 = 15$ Meter zurück. Das Verhältnis der Zeitintervalle ist also

$$t_1 : t_2 = 45 : 15 = 3 : 1.$$

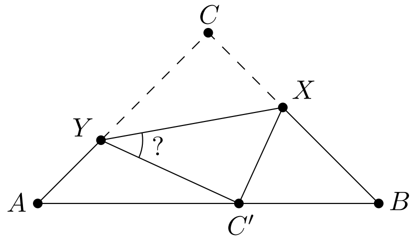
Jetzt betrachten wir die Bewegung des Zuges. Während der Zeitspanne t_1 rückt der Zug um $\ell - 45$ Meter vor, weil sich die Zugspitze zunächst am Treffpunkt befand und das Zugende am Ende dieser Zeitspanne noch 45 Meter von diesem Punkt entfernt war. Während der Zeitspanne t_2 legt das Zugende die 105 Meter zwischen Max und Paul zurück. Also ist die Geschwindigkeit des Zuges

$$v = \frac{105}{t_2}.$$

Die gesamte Länge des Zuges ergibt sich dann durch

$$\ell = vt_1 + 45 = \frac{t_1}{t_2} \cdot 105 + 45 = 3 \cdot 105 + 45 = 360.$$

Aufgabe 30. Ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird entlang der Linie XY so gefaltet, dass der Eckpunkt C auf der Seite AB im Punkt C' zu liegen kommt. Zusätzlich ist noch die Bedingung $\overline{BC'} = \overline{BX}$ gegeben. Finde die Größe des Winkels $\angle C'YX$ in Grad.



Ergebnis. $33{,}75^\circ = \frac{135}{4}^\circ$

Lösung. Aus dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC erhält man sofort $\angle CBA = 45°$. Weil das Dreieck $XC'B$ gleichschenklig ist mit Basis XC', ergibt sich

$$\angle C'XB = \tfrac{1}{2}(180° - 45°) = 67{,}5°.$$

Außerdem gilt $\angle CXY = \angle YXC'$ aufgrund des Faltens. Also ist

$$\angle YXC' = \tfrac{1}{2}(180° - 67{,}5°) = 56{,}25°.$$

Wegen des Faltens gilt $\angle XC'Y = \angle YCX = 90°$. Somit berechnet sich schließlich der gesuchte Wert zu

$$\angle C'YX = 180° - \angle XC'Y - \angle YXC' = 33{,}75°.$$

Aufgabe 31. Alle streng monoton wachsenden 4-Tupel mit Elementen aus der Menge $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$ werden in lexikographischer Ordnung aufgelistet:

$$(0, 1, 2, 3),\ (0, 1, 2, 4),\ (0, 1, 2, 5), \dots,\ (12, 13, 14, 15).$$

Das bedeutet, dass (a_1, a_2, a_3, a_4) in der Folge genau dann vor (b_1, b_2, b_3, b_4) steht, wenn

$$a_1 < b_1 \quad \text{oder} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{oder} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{oder} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 < b_4$$

gilt. Bestimme die Position des Tupels $(2, 4, 7, 14)$ in dieser Folge.

Ergebnis. 911

Lösung. Für $k \le n$ ist die Anzahl aller streng monoton wachsenden k-Tupel mit Einträgen aus der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ gleich $\binom{n}{k}$, da streng monoton wachsende k-Tupel genau den k-elementigen Teilmengen entsprechen. Allgemeiner ist die Anzahl der streng monotonen k-Tupel mit Einträgen aus der Menge $\{m, m+1, \dots, n\}$ gleich $\binom{n-m+1}{k}$. Um die Position des gegebenen Tupels zu bestimmen, wird die Anzahl der vorher stehenden 4-Tupel in der Folge, gruppiert nach ihren Einträgen, berechnet:

- $(0, *, *, *)$: Es gibt $\binom{15}{3} = 455$ solche Tupel.
- $(1, *, *, *)$: Es gibt $\binom{14}{3} = 364$ solche Tupel.
- $(2, 3, *, *)$: Es gibt $\binom{12}{2} = 66$ solche Tupel.
- $(2, 4, a, *)$ mit $a \in \{5, 6\}$: Es gibt $\binom{10}{1} + \binom{9}{1} = 19$ solche Tupel.
- $(2, 4, 7, b)$ mit $b \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$: Es gibt 6 solche Tupel.

Das Tupel $(2, 4, 7, 14)$ steht folglich an der Position $455 + 364 + 66 + 19 + 6 + 1 = 911$.

Aufgabe 32. Zwei Landleute, Adam und Bettina, verkauften Äpfel auf dem Markt. Zusammen brachten sie 100 Äpfel mit. Adam verkaufte seine Äpfel zu einem Preis von a Münzen pro Apfel, während Bettina ihre Äpfel für b Münzen pro Apfel verkaufte. Als sie alle ihre Äpfel verkauft hatten, hatten sie beide den gleichen Betrag eingenommen. Adam merkte dann an, dass er 45 Münzen eingenommen hätte, wenn er seine Äpfel zu Bettinas Preis von b Münzen pro Apfel verkauft hätte. Bettina fügte hinzu, dass sie 20 Münzen eingenommen hätte, wenn sie ihre Äpfel zu Adams Preis von a Münzen pro Apfel verkauft hätte. Wie viele Äpfel verkaufte Adam?

Ergebnis. 60

Lösung. A und B bezeichnen die Anzahlen der Äpfel, die Adam bzw. Bettina auf den Markt bringen. Folgendes ist bekannt:

$$\begin{aligned} A + B &= 100 \\ A \cdot a &= B \cdot b \\ A \cdot b &= 45 \\ B \cdot a &= 20 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $b = \dfrac{45}{A}$ und $a = \dfrac{20}{B}$ in die zweite Gleichung folgt

$$A \cdot \frac{20}{B} = B \cdot \frac{45}{A},$$

was äquivalent ist mit

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}.$$

Daraus ergibt sich $A = \frac{3}{2}B$ und Einsetzen in die erste Gleichung liefert $\frac{3}{2}B + B = \frac{5}{2}B = 100$. Folglich ist $B = 40$ und $A = 100 - 40 = 60$. Adam verkaufte also 60 Äpfel.

Aufgabe 33. Sandi träumte von einer besonderen Zahl. Es ist die größte dreistellige Zahl mit einer einzigartigen Eigenschaft: Sie ist gleich der Summe ihrer Hunderterstelle, dem Quadrat ihrer Zehnerstelle und der dritten Potenz ihrer Einerstelle. Von welcher Zahl hat Sandi geträumt?

Ergebnis. 598

Lösung. Seien a, b und c die Hunderter-, Zehner- und Einer-Stellen der dreistelligen Zahl N. Dann soll $N = a + b^2 + c^3$ sein. Da $a + b^2 \leq 9 + 9^2 = 90$ ist, wird die Größe von N wesentlich von c bestimmt.

Wäre $c = 9$, dann ist $N > 9^3 = 729$, also muss a gleich 7 oder 8 sein. In beiden Fällen gibt es jedoch keine Wahl von b, so dass die letzte Ziffer von $729 + a + b^2$ gleich 9 ist. Es müsste nämlich $a + b^2$ auf 0 enden, da aber keine Quadratzahl auf 2 oder 3 endet, gibt es in beiden Fällen keine Wahlmöglichkeit für b.

Betrachten wir nun $c = 8$. Da $8^3 = 512$ ist, muss a gleich 5 oder 6 sein. Die Möglichkeit $a = 6$ scheidet wegen

$$N \leq 512 + 9^2 + 6 = 599 < 600$$

aus, also kann a in diesem Fall nur 5 sein. Gesucht ist also ein b, das die Bedingung

$$512 + b^2 + 5 = 8 + 10b + 500$$

erfüllt, also die Bedingung

$$b^2 - 10b + 9 = 0.$$

Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $b = 1$ und $b = 9$ und beide ergeben gültige Zahlen:

$$518 = 5 + 1^2 + 8^3 \quad \text{und} \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3$$

Wenn $c \leq 7$ ist, dann ist

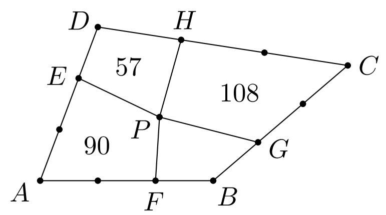
$$N \leq 7^3 + 9^2 + 9 = 433 < 598,$$

also ist der größte gültige Wert von N gleich 598.

Aufgabe 34. Jede Seite eines Vierecks $ABCD$ ist durch zwei Punkte in drei gleich lange Teile unterteilt, nämlich:

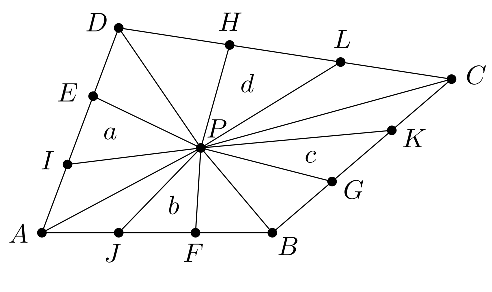
- Der Punkt E liegt auf der Seite AD mit $\overline{AE} : \overline{ED} = 2 : 1$.
- Der Punkt H liegt auf der Seite CD mit $\overline{CH} : \overline{HD} = 2 : 1$.
- Der Punkt F liegt auf der Seite AB mit $\overline{AF} : \overline{FB} = 2 : 1$.
- Der Punkt G liegt auf der Seite CB mit $\overline{CG} : \overline{GB} = 2 : 1$.

Im Inneren des Vierecks liegt ein Punkt P, der wie in der Skizze das Viereck in vier kleinere Vierecke aufteilt. Für drei von diesen sind die Maßzahlen des Flächeninhalts vorgegeben. Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks $PFBG$.



Ergebnis. 42

Lösung. Verbindet man den Punkt P mit den Eckpunkten und den gegebenen Teilungspunkten, die auf den Seiten des Vierecks $ABCD$ liegen, so entstehen zwölf Dreiecke.



Jeweils drei, die an einer Seite liegen, haben den gleichen Flächeninhalt, da sie eine gemeinsame Höhe vom Punkt P aus sowie Grundlinien gleicher Länge besitzen. Sei also a der Flächeninhalt des Dreiecks PEI, b der Flächeninhalt des Dreiecks PJF, c der Flächeninhalt des Dreiecks PGK und d der Flächeninhalt des Dreiecks PLH. Dann gilt

$$90 = 2a + 2b, \quad 57 = a + d, \quad 108 = 2c + 2d$$

und der gesuchte Flächeninhalt des Vierecks $PFBG$ ist $b + c$. Dieser kann durch

$$b + c = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) - (a + d) = \frac{1}{2}(90 + 108) - 57 = 42$$

berechnet werden.

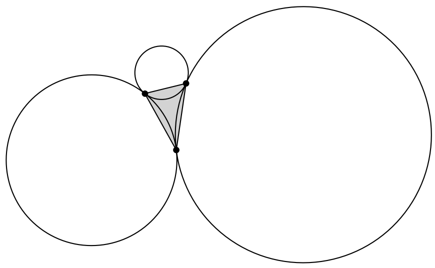
Aufgabe 35. Ein Rahmen aus zwölf Quadraten wird gebildet, indem aus einem 4×4 Quadrat die vier inneren Einheitsquadrate entfernt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier Quadrate aus dem Rahmen zu wählen, so dass mindestens ein Quadrat von jeder Seite des Rahmens gewählt wird?

Hinweis: Jedes Eckquadrat gehört zu zwei Seiten. Auswahlmöglichkeiten, die sich nur durch Symmetrie, also Drehungen oder Spiegelungen des Rahmens, unterscheiden, werden als unterschiedlich angesehen.

Ergebnis. 237

Lösung. Grundsätzlich gibt es $\binom{12}{4} = 495$ Möglichkeiten, vier Quadrate aus einem Rahmen mit zwölf Quadraten auszuwählen. Für jede der vier Seiten gibt es acht Quadrate, die nicht zu dieser Seite gehören, so dass es $\binom{8}{4} = 70$ Möglichkeiten gibt, die vier Quadrate so zu wählen, dass eine Seite ausgelassen wird. Es gibt scheinbar also $495 - 4 \cdot 70 = 215$ Auswahlmöglichkeiten, so dass keine Seite ausgelassen wird. Allerdings wurden einige Möglichkeiten zweimal subtrahiert, nämlich diejenigen, bei denen zwei Seiten auf einmal weggelassen werden. Dies ist möglich, wenn man 4 aus 5 Quadraten wählt, die um eine Ecke gruppiert sind, oder wenn man 4 aus 4 gegenüber liegenden mittleren Quadraten nimmt. Im ersten Fall gibt es pro Ecke 5 Möglichkeiten, also 20 Möglichkeiten für alle vier Ecken, und im zweiten Fall gibt es zwei Möglichkeiten. Folglich müssen 22 Möglichkeiten wieder hinzugefügt werden. Da das Weglassen von drei oder vier Seiten in der gegebenen Situation unmöglich ist, ist $215 + 22 = 237$ die Anzahl der gesuchten Möglichkeiten.

Aufgabe 36. Drei Kreise mit den Radien 1, 2 und 3 berühren einander von außen so, wie es in der Skizze zu sehen ist. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den drei Berührpunkten gebildet wird.



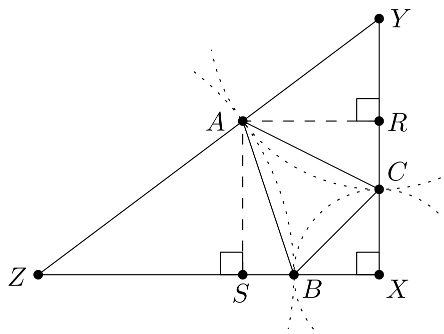
Ergebnis. $\frac{6}{5}$

Lösung. Bezeichne die Mittelpunkte der Kreise mit X, Y, Z und die Berührpunkte mit A, B, C wie in der unten stehenden Skizze. Das Dreieck XYZ besitzt die Seitenlängen $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ und $2 + 3 = 5$, welche ein Pythagoräisches Zahlentripel sind. Deshalb ist das Dreieck rechtwinklig mit rechtem Winkel bei X. Um den gesuchten Flächeninhalt von Dreieck ABC zu berechnen, werden vom Flächeninhalt des Dreiecks XYZ, der $\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 4) = 6$ ist, die Flächeninhalte der gleichschenkligen Dreiecke XCB, YAC und ZBA abgezogen.

- Das Dreieck XCB ist rechtwinklig, weshalb sein Flächeninhalt gleich $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$ ist.
- Um den Flächeninhalt von Dreieck YAC zu berechnen, muss erst die Länge der Höhe AR bestimmt werden. Da die beiden Dreiecke RYA und XYZ ähnlich sind mit Ähnlichkeitsfaktor $\overline{YA} : \overline{YZ} = 2 : 5$, folgt $\overline{AR} = \frac{2}{5}\overline{ZX} = \frac{8}{5}$. Somit ist der Flächeninhalt von Dreieck YAC gleich $\frac{1}{2} \cdot (\frac{8}{5} \cdot 2) = \frac{8}{5}$.
- Um den Flächeninhalt von Dreieck ZBA zu bestimmen, benutzt man die Ähnlichkeit $\triangle SAZ \sim \triangle XYZ$ mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{3}{5}$, um $\overline{AS} = \frac{9}{5}$ zu erhalten. Also ist der Flächeninhalt von Dreieck ZBA gleich $\frac{1}{2} \cdot (\frac{9}{5} \cdot 3) = \frac{27}{10}$.

Schließlich berechnet sich der gesuchte Flächeninhalt als

$$6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$



Aufgabe 37. Agnes zeichnete ein regelmäßiges n-Eck mit $n > 3$ und zählte seine Diagonalen. Sie stellte fest, dass die Gesamtzahl der Diagonalen ein Vielfaches von 2025 ist. Was ist der kleinstmögliche Wert von n, damit diese Bedingung erfüllt ist?

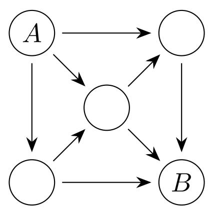
Hinweis: Die Seiten des n-Ecks zählen nicht als Diagonalen.

Ergebnis. 300

Lösung. Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks $\frac{1}{2}n(n-3)$ ist. Da 2025 ungerade ist, können wir gleichbedeutend auch untersuchen, wann das Produkt $P = n(n-3)$ durch 2025 teilbar ist. Da $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ gilt, müssen wir wegen der Teilerfremdheit von 3 und 5 sicherstellen, dass P durch $3^4 = 81$ und $5^2 = 25$ teilbar ist. Man beachte, dass nur einer der Faktoren n oder $n-3$ durch 5 und damit durch 25 teilbar sein kann. Andererseits ist n nur dann durch 3 teilbar, wenn auch $n-3$ durch 3 teilbar ist, so dass beide zur Potenz von 3, die P teilt, beitragen. Allerdings kann nur eine der Zahlen n oder $n-3$ durch 3^k für $k \geq 2$ teilbar sein. Das bedeutet, dass einer der Faktoren durch $3^3 = 27$ teilbar sein muss.

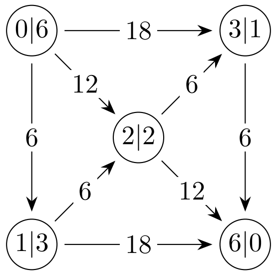
Wenn einer der Faktoren sowohl durch 25 als auch durch 27 teilbar wäre, wäre er mindestens gleich $25 \cdot 27 = 675$. Wir untersuchen, ob ein kleinerer Wert gefunden werden kann, indem man einen der Faktoren, sagen wir m, so wählt, dass er durch 27 teilbar ist, und den anderen Faktor $m \pm 3$ so, dass er durch 25 teilbar ist. Auf diese Weise ist entweder $n = m$ oder $n = m + 3$. Nach der ersten Bedingung ist $m = 27k$ für eine positive ganze Zahl k, und wir interessieren uns für den kleinsten Wert von k, für den $27k \pm 3$ für eine der Vorzeichenwahlen durch 25 teilbar ist. Da $25k$ immer durch 25 teilbar ist, können wir gleichermaßen $2k \pm 3$ untersuchen, das für $k = 11$ und das positive Vorzeichen erstmals durch 25 teilbar ist. Daher ist $m = 27 \cdot 11 = 297$ und $n = m + 3 = 300$.

Aufgabe 38. David begibt sich auf eine Reise entlang der Wege im unteren Diagramm. Er startet im Knoten A und endet im Knoten B. Er muss der Richtung der Pfeile im Diagramm folgen, mit Ausnahme einer rebellischen Bewegung, bei der er sich absichtlich entgegen der Pfeilrichtung bewegt. Diese rebellische Bewegung muss während seiner Reise genau einmal vorkommen, auch wenn das bedeuten würde, das endgültige Ziel vorübergehend wieder zu verlassen. David darf beim Navigieren entlang des Diagramms jeden Pfeil mehr als einmal verwenden. Auf wie viele verschiedene Arten kann David seine Reise unter diesen Bedingungen abschließen?



Ergebnis. 84

Lösung. Für jeden Knoten berechnen wir (1) die Anzahl der (orientierten) Pfade von A, die dort enden, und (2) die Anzahl der Pfade von dort nach B. Im Diagramm unten bedeutet beispielsweise $3|1$ im Knoten rechts oben, dass es genau drei Pfade vom Startknoten gibt, die in diesem Knoten enden, und es nur einen Pfad von diesem Knoten zum Endknoten gibt. Für jeden Pfeil kann die Anzahl der Pfade, auf denen dieser Pfeil der einzige ist, der in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, aus dem Produkt der ersten Zahl am Endpunkt und der zweiten Zahl am Startpunkt berechnet werden. Dieses Produkt wird für jeden Pfeil gebildet und anschließend über alle diese Produkte summiert. Das Ergebnis ist 84.



Aufgabe 39. In der folgenden Rechnung stehen verschiedene Buchstaben für verschiedene Ziffern ungleich Null.

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N \\
+ & & A & A & A & A \\
+ & & & B & B & B \\
+ & & & & O & O \\
+ & & & & & J \\
- & & 2 & 0 & 2 & 5 \\
\hline
= & N & A & B & O & J
\end{array}$$

Bestimme den größtmöglichen Wert der fünfstelligen Zahl $NABOJ$.

Ergebnis. 18249

Lösung. Die Rechnung kann äquivalent geschrieben werden als

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N \\
+ & & A & A & A & A \\
+ & & & B & B & B \\
+ & & & & O & O \\
+ & & & & & J \\
- & N & A & B & O & J \\
\hline
= & & 2 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

was sich noch vereinfacht zu

$$\begin{array}{ccccc}
 & N & N & N & N \\
+ & & A & A & A \\
+ & & & B & B \\
+ & & & & O \\
\hline
= & 2 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

Es folgt $N = 1$. Jetzt bleibt noch $\overline{AAA} + \overline{BB} + O = 2025 - 1111 = 914$ übrig, woraus $A = 8$ folgt. Die Umformung $914 - 888 = 26$ liefert $B = 2$ und schließlich $O = 4$. Der Wert für J kann frei gewählt werden, vorausgesetzt, er ist verschieden zu den schon verwendeten Ziffern. Der größtmögliche Wert von $NABOJ$ ist daher 18249.

Aufgabe 40. Fünfhundert Náboj-Veranstalter stimmten über Wettbewerbsaufgaben ab. Bei jeder Aufgabe stimmte jeder anwesende Organisator entweder dafür oder dagegen. Doch schon nach der ersten Aufgabe fanden einige Veranstalter, die für die Aufgabe gestimmt hatten, das Verfahren so ermüdend, dass sie den Raum verließen. Gleichzeitig verließ keiner derjenigen, die gegen die erste Aufgabe stimmten, den Raum. Bei der Abstimmung über die zweite Aufgabe stimmte die gleiche Anzahl von Veranstaltern dafür wie bei der ersten Abstimmung, aber die Anzahl der Stimmen gegen die Aufgabe betrug nur ein Drittel der Stimmen, die gegen die erste Aufgabe abgegeben worden waren. Außerdem ist bekannt, dass genau 120 Organisatoren für beide Aufgaben gestimmt haben und 70 gegen beide. Wie viele Organisatoren haben den Raum nach der ersten Abstimmung verlassen?

Ergebnis. 150

Lösung. Wir bezeichnen mit JN die Anzahl der Organisatoren, die bei der ersten Abstimmung dafür und bei der zweiten Abstimmung dagegen gestimmt haben. Auf ähnliche Weise definieren wir JJ, NN und NJ. Schließlich sei JX die Anzahl der Organisatoren, die nach der ersten Abstimmung ausgeschieden sind. Dann haben wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
JJ + JN + NJ + NN + JX &= 500 \\
JJ + JN + JX &= JJ + NJ
\end{aligned}$$

$$NJ + NN = 3(JN + NN)$$

Setzt man $JJ = 120$ und $NN = 70$ ein und ordnet die Terme um, erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcr} JN & + & NJ & + & JX & = & 310 \\ JN & - & NJ & + & JX & = & 0 \\ -3JN & + & NJ & & & = & 140 \end{array}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit 2 und addiert alle Gleichungen zusammen, so erhält man $3JX = 450$, also ist $JX = 150$ die gesuchte Anzahl. Die verbleibenden zwei Variablen sind gleich $JN = 5$ und $NJ = 155$.

Aufgabe 41. Bestimme die Anzahl der Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, die die Bedingung $a \leq b$ erfüllen und für die $\operatorname{ggT}(a, b)$ zusammen mit a und b zu einer arithmetischen Folge angeordnet werden kann, deren Summe 2025 ist.

Hinweis: Eine arithmetische Folge ist eine Folge von Zahlen, bei der die Differenz zwischen einer Zahl und der nächsten immer gleich groß ist.

Ergebnis. 12

Lösung. Es sei $g = \operatorname{ggT}(a, b)$. Schreibe $a = ga'$, $b = gb'$ mit positiven ganzen Zahlen a', b'. Wegen $g \leq a \leq b$ ist die arithmetische Dreierfolge (g, a, b) oder (b, a, g). In beiden Fällen ist $a - g = b - a$ und damit $b = 2a - g$, was nach Division durch g zu $b' = 2a' - 1$ wird. Aus der Bedingung für die Summe ergibt sich

$$g + a + b = g(1 + a' + 2a' - 1) = 3ga' = 2025,$$

also $ga' = 675 = 3^3 5^2$. Diese Zahl hat $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ positive Teiler, und es bleibt zu prüfen, ob jeder dieser Teiler einen gültigen Wert von a' ergibt, d.h. einen, der zu einem gültigen Paar (a, b) ergänzt werden kann. In der Tat, wenn man $b' = 2a' - 1$, $g = 675/a'$, $a = ga' = 675$ und $b = gb'$ setzt, ergibt sich $a \leq b$, da $ga' \leq g(2a' - 1)$ für alle positiven ganzen Zahlen a' und g gilt, und außerdem

$$\operatorname{ggT}(a, b) = \operatorname{ggT}\big(ga', g(2a' - 1)\big) = g \cdot \operatorname{ggT}(a', 2a' - 1) = g$$

da a' und $2a' - 1$ für jede positive ganze Zahl a' teilerfremd sind.

Aufgabe 42. Jede Gruppe im Kindergarten-Náboj bekommt die ersten drei aus einem Vorrat von insgesamt 16 nummerierten Aufgaben. Jedes Team hat einen eigenen Vorrat, aber mit den gleichen 16 Aufgaben in gleicher Nummerierung. Wenn eine Gruppe eine Aufgabe löst, wird sie mit der Aufgabe mit niedrigster Nummer aus dem Vorrat der Gruppe ersetzt. Nach dem Wettbewerb stellt sich heraus, dass keine zwei Gruppen genau die gleichen Mengen an Aufgaben gelöst haben. Was ist die maximale Anzahl an Gruppen, die in diesem Wettbewerb teilnehmen haben können?

Ergebnis. 697

Lösung. Die Menge an gelösten Aufgaben wird durch die Menge an ungelösten Aufgaben bestimmt und umgekehrt. Tatsächlich wird diese Menge durch die bis zu drei zum Schluss des Wettbewerbs am Tisch liegenden Aufgaben bestimmt. Daher können maximal

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 697$$

Gruppen am Wettbewerb teilgenommen haben.

Aufgabe 43. Seien a, b, c, d reelle Zahlen, so dass

$$\begin{aligned} 2a + 2b - ab &= 2025, \\ 2b + 2c - bc &= 47, \\ 2c + 2d - cd &= 5. \end{aligned}$$

Finde den Wert von $2a + 2d - ad$.

Ergebnis. 51

Lösung. Mithilfe der Formel $(x - 2)(y - 2) = xy - 2x - 2y + 4$ können die gegebenen Bedingungen in die folgenden Gleichungen umformuliert werden:

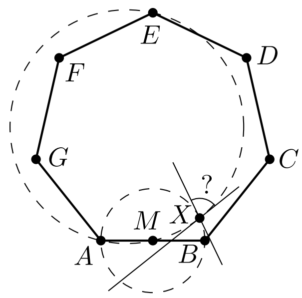
$$\begin{aligned} (a - 2)(b - 2) &= -2021, \\ (b - 2)(c - 2) &= -43, \\ (c - 2)(d - 2) &= -1. \end{aligned}$$

Das Ziel ist es nun, $(a-2)(d-2)$ zu finden. Da aufgrund der zweiten Gleichung $b \neq 2$ und $c \neq 2$ sind, kann der gewünschte Ausdruck wie folgt berechnet werden:

$$(a-2)(d-2) = \frac{(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)}{(b-2)(c-2)} = \frac{(-2021)\cdot(-1)}{-43} = -47$$

Daher ist $2a + 2d - ad = -(-47) + 4 = 51$.

Aufgabe 44. Sei M der Mittelpunkt der Seite AB eines regelmäßigen Siebenecks $ABCDEFG$. Der Kreis, dessen Mittelpunkt M ist und der durch A geht, schneidet den Umkreis des Dreiecks AME in einem Punkt X, der im Inneren des Siebenecks liegt. Wie groß ist der spitze Winkel (in Grad) zwischen den Tangenten an die beiden Kreise in X?



Ergebnis. $\frac{1}{7}\cdot 540°$

Lösung. Da $ABCDEFG$ ein regelmäßiges Siebeneck ist, ist der Winkel $\angle AME$ ein rechter Winkel und AE ist ein Durchmesser des Umkreises von AME. Anstatt den Winkel zwischen den Tangenten bei X anzusehen, kann auch der Winkel zwischen den Tangenten bei A, dem zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise, betrachtet werden. Dieser Winkel ist wiederum gleich dem Winkel $\angle BAE$ zwischen den entsprechenden Durchmessern, da letztere senkrecht auf den Tangenten stehen. Seine Größe lässt sich leicht aus der Symmetrie des regelmäßigen Siebenecks zu $\frac{3}{7}\cdot 180°$ bestimmen oder indem man erkennt, dass es sich um den Peripheriewinkel handelt, der dem Zentriwinkel von $\frac{3}{7}\cdot 360°$ im Umkreis des Siebenecks entspricht.

Aufgabe 45. Berechne die Summe der Werte $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \cdots \pm 2^{99})^2$ über alle Wahlmöglichkeiten der 100 Vorzeichen.

Ergebnis. $\frac{1}{3}\cdot 2^{100}\cdot(4^{100}-1)$

Lösung. Wir beginnen mit einer allgemeineren Beobachtung: Für jede positive ganze Zahl n und die reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist das Ergebnis, wenn wir die quadrierten Ausdrücke $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$ über alle möglichen Vorzeichenwahlen summieren, immer

$$2^n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Um dies einzusehen, kann man $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$ ausmultiplizieren. Jede Expansion eines solchen Quadrates besteht aus den Termen x_i^2 sowie gemischten Termen der Form $\pm 2x_ix_j$ für $i \neq j$. Jeder Term x_i^2 kommt in jeder möglichen Expansion vor, unabhängig von den gewählten Vorzeichen. Da es 2^n verschiedene Vorzeichenkombinationen gibt, kommt jeder der quadrierten Terme genau 2^n Mal vor. Andererseits erscheinen die gemischten Terme $\pm 2x_ix_j$ in genau der Hälfte der Fälle mit positivem Vorzeichen und in der anderen Hälfte mit negativem Vorzeichen, je nachdem, ob x_i und x_j das gleiche Vorzeichen haben oder nicht. Da sich diese Beiträge über alle Vorzeichenwahlen hinweg aufheben, haben sie keinen Einfluss auf die Endsumme. Somit vereinfacht sich die Gesamtsumme auf 2^n mal die Summe der quadrierten Terme, womit die Formel bewiesen ist.

In unserem Fall haben wir $x_k = 2^{k-1}$, und die gewünschte Summe ist gleich

$$2^{100}\cdot(1 + 4^1 + \cdots + 4^{99}).$$

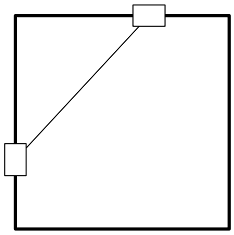
Mit der Formel für die Summe einer geometrischen Reihe,

$$1 + 4^1 + \cdots + 4^{99} = \frac{4^{100}-1}{4-1} = \frac{4^{100}-1}{3},$$

erhalten wir das Endergebnis

$$\frac{2^{100}\cdot(4^{100}-1)}{3}.$$

Aufgabe 46. Zwei Autos, die durch ein Gummiband verbunden sind, fahren auf einer quadratischen Straße, siehe Abbildung. Zu Beginn starten beide Autos gemeinsam an einer Ecke des Quadrats. Jedes Auto fährt dann unendlich lange mit einer konstanten, ganzzahligen Geschwindigkeit. Das Gummiband ist extrem elastisch, reißt aber, wenn es genau über die Diagonale des Quadrats gespannt wird. Das langsamere Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 24 km/h, während das schnellere Auto mit einer Geschwindigkeit von n km/h fährt, beide in dieselbe Richtung. Bestimme den kleinsten ganzzahligen Wert von n größer als 24, so dass das Gummiband niemals reißt.



Ergebnis. 56

Lösung. Wir definieren ein *Segment* als eine Seite der quadratischen Straße. Es seien $m = 24$ und $n > m$ die Geschwindigkeiten des langsameren bzw. schnelleren Autos. Man beachte, dass die Frage, ob das Gummiband jemals reißt, nur vom Verhältnis der Geschwindigkeiten abhängt, nicht aber von deren absoluten Werten. Seien also m', n' teilerfremde positive ganze Zahlen mit $m' : n' = m : n$. Wir behaupten, dass das Band genau dann nie reißt, wenn $n' - m'$ ein Vielfaches von 4 ist.

Analysieren wir zunächst den Fall, dass $n' - m'$ kein Vielfaches von 4 ist. Nachdem das langsamere Auto m' Segmente zurückgelegt hat, befindet es sich an einer Ecke. Zur gleichen Zeit hat das schnellere Auto aufgrund des Verhältnisses der Geschwindigkeiten n' Segmente zurückgelegt, so dass es sich ebenfalls in einer Ecke befindet. Da $n' - m'$ nicht durch 4 teilbar ist, können diese beiden Ecken nicht zusammenfallen. Wenn sie gegenüberliegende Ecken sind, reißt das Band. Wenn es sich um benachbarte Ecken handelt, landen die Wagen nach weiteren m' bzw. n' Segmenten an gegenüberliegenden Ecken, wodurch das Band ebenfalls reißt.

Wir nehmen nun an, dass $n' - m'$ ein Vielfaches von 4 ist. Zunächst ist zu beachten, dass die beiden Wagen nicht eher an je einer Ecke sein können, bevor der langsamere Wagen m' Segmente zurückgelegt hat. Angenommen, das langsamere Auto hat $s < m'$ Segmente durchfahren, dann hätte das schnellere Auto $\frac{s}{m'} \cdot n'$ Segmente durchfahren, was keine ganze Zahl sein kann, weil m' und n' teilerfremd sind. Das erste Mal, dass beide Autos gleichzeitig je eine Ecke erreichen, ist also dann, wenn das langsamere Auto m' Segmente und das schnellere Auto n' Segmente zurückgelegt hat. Ausgehend von der Annahme, dass $n' - m'$ ein Vielfaches von 4 ist, müssen sie an der gleichen Ecke landen. Sobald beide Autos an einer gemeinsamen Ecke landen, wiederholt sich die gesamte Situation, möglicherweise von einer anderen Ecke aus, so dass das Band niemals reißt.

Es bleibt, das kleinste $n > 24$ zu finden, das die gegebene Bedingung erfüllt. Wir müssen erreichen, dass $n' - m'$ durch 4 teilbar ist. In diesem Fall müssen sowohl m' als auch n' wegen der Teilerfremdheit ungerade sein. Da m' ein Teiler von $m = 24$ ist, sind die einzig möglichen Werte 1 und 3. Ist $m' = 1$, so ist das kleinste n', das zu m' teilerfremd ist und für das $n' - 1$ ein Vielfaches von 4 ist, gleich 5. Dann ist $n = \frac{24}{1} \cdot 5 = 120$. Ist $m' = 3$, so ist das kleinste zu m' teilerfremde n' mit durch 4 teilbarem $n' - 3$ gleich 7. Hier ist $n = \frac{24}{3} \cdot 7 = 56$. Da 56 kleiner als 120 ist, folgern wir, dass der gewünschte kleinste Wert $n = 56$ ist.

Aufgabe 47. An einem Tisch spielen 2025 Spieler ein Spiel. Am Ende jeder Runde gibt der Verlierer jedem der anderen Spieler die Anzahl von Münzen, die sie gerade besitzen – verschiedene Spieler können also unterschiedlich viele Münzen erhalten. Nach 2025 Runden hat jeder Spieler exakt 2^{3000} Münzen. Außerdem hatte kein Spieler zu irgendeinem Zeitpunkt des Spiels Schulden. Bestimme die Anzahl der Startmünzen des Verlierers der ersten Runde, wenn bekannt ist, dass jeder Spieler genau eine Runde verloren hat.

Ergebnis. $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot \left(1 + 2025 \cdot 2^{2024}\right)$

Lösung. Nummeriere die Spieler mit den Zahlen 1, 2, ..., 2025 und die Anzahl der Münzen im Besitz von Spieler p nach r Runden mit $m_{p,r}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass Spieler 1 die erste Runde verloren hat, Spieler 2 die zweite Runde, und so weiter. Notiere mit $M = 2^{3000}$ die Anzahl Münzen, die jeder Spieler am Schluss besitzt.

Für Spieler p verdoppelt sich nach dem Verlust in der p-ten Runde die Anzahl seiner Münzen, bis diese am Ende des Spiels M erreicht. Somit ist für die Runden $r \geq p$ die Anzahl der Münzen

$$m_{p,r} = \frac{M}{2^{2025-r}}.$$

Da Spieler r in der r-ten Runde verloren hat, hat er so viele Münzen verloren wie alle anderen Spieler zusammen besitzen. Weil die Gesamtzahl der Münzen im Spiel $2025M$ ist, folgt

$$m_{r,r} = m_{r,r-1} - \sum_{p \neq r} m_{p,r-1} = m_{r,r-1} - (2025M - m_{r,r-1}).$$

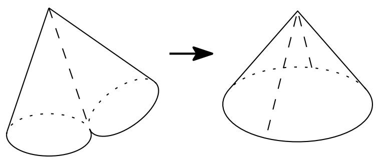
Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$m_{r,r-1} = \frac{m_{r,r}}{2} + \frac{2025M}{2} = \frac{M}{2^{2026-r}} + \frac{2025M}{2}.$$

Durch Einsetzen von $r = 1$ ergibt sich das gewünschte Resultat

$$\frac{M}{2^{2025}} + \frac{2025M}{2} = 2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot \left(1 + 2025 \cdot 2^{2024}\right).$$

Aufgabe 48. Gleb hat drei identische Papiermodelle der Mantelfläche eines geraden Kegels, also der Oberfläche ohne Grundfläche. Die Grundfläche des Kegels ist eine kreisförmige Scheibe, die senkrecht zur Achse steht, welche deren Mittelpunkt mit der Spitze des Kegels verbindet. Diese Scheibe ist aber nicht Teil der Papiermodelle. Zunächst legte Gleb zwei der Kegelflächen Scheitelpunkt an Scheitelpunkt entlang einer gemeinsamen Linie ihrer Mantelflächen zusammen. Er schnitt beide entlang dieser Linie auf und fügte die beiden Flächen zusammen, um eine größere Kegelfläche zu schaffen, wie in der Abbildung zu sehen ist. Das Volumen des vollen Kegels, der dieser größeren Mantelfläche entspricht, beträgt 10. Als nächstes verband Gleb diese größere Kegelfläche mit der dritten ursprünglichen Kegelfläche auf die gleiche Weise und wollte das Volumen des resultierenden Kegels messen. Er stellte jedoch fest, dass das resultierende Volumen gleich null war. Wie groß war das Volumen des ursprünglichen Kegels?



Ergebnis. $\sqrt{10}$

Lösung. Die Tatsache, dass der endgültige Kegel kein Volumen hat, bedeutet, dass die Verbindung von drei identischen Mantelflächen eine völlig flache Form ergibt, nämlich einen Vollkreis. Folglich entspricht jede einzelne Kegelfläche, wenn sie ausgerollt ist, einem Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 120°. Sei l die Länge einer Seitenlinie des ursprünglichen Kegels und r dessen Basisradius. Aus dem Zentriwinkel ergibt sich über die Betrachtung der Bogenlänge des Kreissektors und des Umfang der Basis des Kegels die Beziehung $l = 3r$. Man beachte, dass die Länge der Seitenlinie bei allen drei Kegeln, einschließlich des entarteten Kegels, unverändert bleibt.

Der Kegel, der durch die Verbindung der ersten beiden Mantelflächen gebildet wird, hat ausgerollt einen Zentriwinkel von 240°, was zu einem Basisradius von $2r$ führt. Wendet man die Formel für das Kegelvolumen an, so erhält man

$$10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Daraus errechnet sich das Volumen des ursprünglichen Kegels als

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3 = \sqrt{10}.$$

Aufgabe 49. Für wie viele positive ganze Zahlen n kleiner oder gleich 200 hat die Gleichung

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor - n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = 1$$

mindestens eine ganzzahlige Lösung x mit $1 \le x \le 200$?

Hinweis: Das Symbol $\lfloor t\rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich der reellen Zahl t ist.

Ergebnis. 82

Lösung. Wenn n ein Vielfaches von 5 ist, so ist die linke Seite ein Vielfaches von 5. Daher gibt es in diesem Fall keine Lösungen. Außerdem ist für $n = 1$ die linke Seite nie positiv, also gibt es auch hier keine Lösungen. In allen anderen Fällen gibt es immer eine Lösung, wenn wir die Nebenbedingung $x \le 200$ außer Acht lassen. Wir stellen dazu die Gleichung um zu

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor = n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor + 1. \qquad (\heartsuit)$$

Die linke Seite ist dann immer ein Vielfaches von 5, also untersuchen wir die Lösungen auf der Basis des Wertes von $n \bmod 5$.

Ist $n = 5k + 4$, dann ist $x = n + 1 = 5k + 5$ eine Lösung, denn beide Seiten von ($\heartsuit$) sind dann gleich x. Also sind alle Zahlen dieser Form gültig, und das sind 40 Zahlen. Wenn $n = 5k + 3$ ist, dann muss $\lfloor x/n\rfloor$ mindestens 3 sein, damit die rechte Seite ein Vielfaches von 5 ist, was für $n \geq 67$ nicht möglich ist, da dies einen Wert von x größer als 200 voraussetzen würde. Für $n \leq 66$, darunter sind 13 Zahlen der betrachteten Form, setzen wir $x = 3n + 1 = 15k + 10$, was beide Seiten von ($\heartsuit$) gleich x macht. Ähnlich verhält es sich, wenn $n = 5k + 2$ ist. In diesem Fall muss $\lfloor x/n \rfloor$ mindestens 2 sein, was für $n \geq 101$ nicht möglich ist, und für den Rest nehmen wir $x = 2n + 1 = 10k + 5$. Das trifft für 20 Zahlen zu. Für $n = 5k + 1$ muss $\lfloor x/n \rfloor$ mindestens 4 sein, wofür $n \leq 50$ gelten muss. Für solche n ist $x = 4n + 1 = 20k + 5$ eine Lösung, allerdings ergibt $n = 1$ keine gültige Lösung, so dass nur 9 gültige Zahlen übrig bleiben. Insgesamt gibt es also $40 + 13 + 20 + 9 = 82$ solcher Zahlen n.

Aufgabe 50. Erich hat einen unbegrenzten Vorrat an 20-seitigen Würfeln, deren Seiten jeweils von 1 bis 20 nummeriert sind. Er würfelt eine bestimmte Anzahl von Würfeln auf einmal und versucht, mit einem einzigen Wurf genau eine oder zwei Einsen zu erzielen. Mit wie vielen Würfeln sollte Erich würfeln, um seine Erfolgswahrscheinlichkeit zu maximieren?

Ergebnis. 28

Lösung. Die Wahrscheinlichkeit, um die es hier beim Würfeln mit n Würfeln geht, ist die Summe der Wahrscheinlichkeit, dass mit n Würfeln genau eine Eins gewürfelt wird

$$P_{n,1} = n\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1},$$

und der Wahrscheinlichkeit, dass mit n Würfeln genau zwei Einsen gewürfelt werden

$$P_{n,2} = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{n-2}.$$

Die Summe $P_n = P_{n,1} + P_{n,2}$ kann vereinfacht werden zu

$$P_n = \frac{1}{2 \cdot 19^2} n(n+37)\left(\frac{19}{20}\right)^n.$$

Gesucht ist nun dasjenige n, für welches $P_{n+1} < P_n$ eintritt, für das also

$$\frac{19}{20}(n+1)(n+38) < n(n+37)$$

gilt, was sich weiter vereinfacht zu

$$n^2 - n - 722 > 0.$$

Für eine positive ganze Zahl n ist dies äquivalent zu $n \geq 28$. Das direkte Lösen der quadratischen Ungleichung lässt sich vermeiden, indem man zunächst $n^2 > 722$ abschätzt, was $n \geq 27$ ergibt, was zwar unzureichend ist, aber die Gültigkeit der Ungleichung für den folgenden Wert ist nicht schwer zu überprüfen. Diese Berechnung zeigt auch, dass die Folge P_n erst steigend und dann fallend ist, so dass 28 tatsächlich der Index ihres größten Terms ist.

Aufgabe 51. Sei D ein innerer Punkt der Seite AC eines Dreiecks ABC, so dass $\overline{AD} = \overline{BC}$ und $\overline{BD} = \overline{CD}$ gilt. Außerdem sei $\angle BAC = 30°$. Bestimme die Größe des Winkels $\angle DBA$ in Grad.

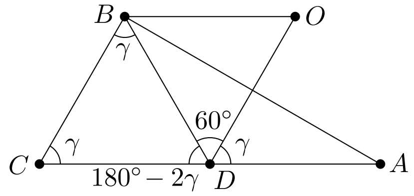
Ergebnis. $30°$, $110°$ (zwei Lösungen)

Lösung. Es bietet sich an, den gegebenen 30°-Winkel als Peripheriewinkel über der Sehne BD aufzufassen. Sei also O der Umkreismittelpunkt von Dreieck ABD. Dann ist $\angle BOD = 2\angle BAD = 60°$ als Mittelpunktswinkel, weshalb das Dreieck BDO gleichseitig ist. Insbesondere gilt $\overline{AO} = \overline{DO} = \overline{BD} = \overline{CD}$. Mit $\overline{AD} = \overline{BC}$ ergibt sich, dass die Dreiecke AOD und CDB kongruent sind. Setze abkürzend $\gamma = \angle ACB$. Dann ist auch $\angle CBD = \angle DAO = \angle ADO = \gamma$. Nun kommt es darauf an, in welcher Lage O sich in Bezug auf den Winkel $\angle BAC$ befindet. Es sind hier drei Fälle möglich.

Fall 1: O liegt außerhalb des Winkelfeldes und näher am Strahl AB als am Strahl AC.
In diesem Fall ergibt sich

$$180° = \angle ADO + \angle ODB + \angle BDC = \gamma + 60° + (180° - 2\gamma) = 240° - \gamma,$$

woraus $\gamma = 60°$ und weiter $\angle DBA = 30°$ folgt.



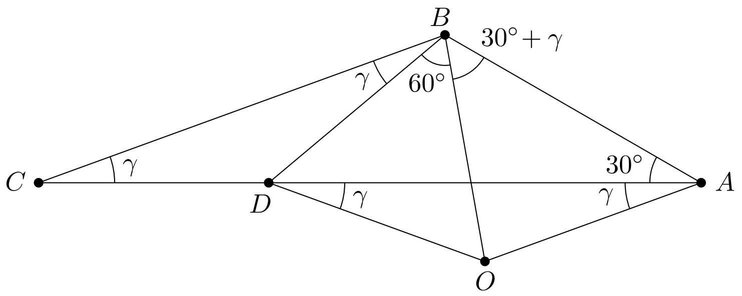
Fall 2: O liegt außerhalb des Winkelfeldes und näher am Strahl AC als am Strahl AB.
Dann ist $\angle OBA = \angle BAO = 30° + \gamma$ und es folgt

$$\angle CBA = \angle CBD + \angle DBO + \angle OBA = \gamma + 60° + (30° + \gamma) = 90° + 2\gamma$$

und über die Innenwinkelsumme im Dreieck

$$180° = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 30° + (90° + 2\gamma) + \gamma = 120° + 3\gamma,$$

woraus $\gamma = 20°$ folgt. Deshalb ist in diesem Fall $\angle DBA = 90° + \gamma = 110°$.



Fall 3: O liegt im Winkelfeld von $\angle BAC$.
Angenommen, das ist so. Dann folgt $\angle DOA = 2\angle DBA > 2 \cdot 60° = 120°$, aber es ist $\angle BDC < 180° - 60° = 120°$, so dass die beiden Dreiecke AOD und BDC nicht kongruent sein können. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

Insgesamt gibt es also die beiden Lösungen 30° und 110° für die gesuchte Größe des Winkels.

Aufgabe 52. Sei f eine Funktion, die jedem Paar von nicht-negativen ganzen Zahlen eine nicht-negative ganze Zahl zuordnet und durch die folgenden Bedingungen definiert ist:

1. Für jedes x gilt: $f(x, x) = 0$.
2. Für jedes x, y gilt: $f(x, y) = f(y, x)$.
3. Für jedes x, y gilt: $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Für jedes x, y gilt: $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
5. Für jedes x, y gilt: $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Finde die Summe aller nicht-negativen ganzen Zahlen t mit $t \leq 60$, die $f(20, t) = 2$ erfüllen.

Ergebnis. 415

Lösung. Aus den Funktionseigenschaften können wir schließen, dass $f(x, y)$ die Anzahl der unterschiedlichen Bits in den binären Darstellungen von x und y zählt. Wir können die Funktion als rekursiven Algorithmus betrachten: $x' = \lfloor x/2 \rfloor$ und $y' = \lfloor y/2 \rfloor$, d.h. x' und y' erhält man durch Entfernen des niederwertigsten Bits von x bzw. y.

- Ist $x = y$, dann ist $f(x, y) = 0$, d.h. es gibt keine unterschiedlichen Bits.
- Wenn sowohl x als auch y gerade sind, stimmen ihre niederwertigsten Bits überein, also entfernen wir dieses Bit und berechnen $f(x', y')$.
- Wenn beide ungerade sind, stimmen ihre niederwertigsten Bits immer noch überein, was zur gleichen Reduktion $f(x', y')$ führt.
- Ist eine der beiden Zahlen gerade und die andere ungerade, so unterscheiden sich ihre niederwertigsten Bits, so dass wir $f(x, y) = f(x', y') + 1$ erhalten.

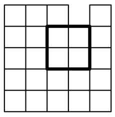
Auf diese Weise werden die beiden Zahlen Bit für Bit verglichen, wobei die Zählung genau dann erhöht wird, wenn sich die entsprechenden Bits unterscheiden.

Nun müssen wir die Summe aller nicht-negativen ganzen Zahlen $t \leq 60$ finden, für die $f(20, t) = 2$ ist. Das bedeutet, dass wir Zahlen t mit höchstens sechs binären Ziffern suchen, die sich in genau zwei Positionen von $20 = 010100_2$ unterscheiden. Man beachte, dass 61, 62, 63 nicht durch Ändern von genau zwei Bits in der binären Darstellung von 20 erhalten werden können. Um die Gesamtsumme zu berechnen, analysieren wir den Beitrag jeder Bitposition. Da wir zwei von sechs Bits zum Ändern auswählen, gibt es $\binom{6}{2} = 15$ solcher Zahlen. Jedes Bit wird in genau fünf dieser Zahlen geändert – entsprechend den Fällen, in denen dieses spezielle Bit und eines der übrigen fünf geändert werden – und bleibt in den anderen zehn Zahlen unverändert. Wir addieren nun diese Beiträge entsprechend.

Fünf Zahlen haben ein geändertes niedrigwertigstes Bit, das mit $5 \cdot 2^0$ zur Gesamtsumme beiträgt, während bei den übrigen zehn Zahlen dieses Bit unverändert bleibt. In ähnlicher Weise haben fünf Zahlen ein geändertes zweites Bit, was $5 \cdot 2^1$ zur Summe beiträgt. Wenn man dieses Muster fortsetzt, sind die Beiträge der anderen Bitpositionen $10 \cdot 2^2$, da dieses Bit in den zehn nicht geänderten Fällen gesetzt ist, $5 \cdot 2^3$, $10 \cdot 2^4$ und $5 \cdot 2^5$. Daraus folgt leicht, dass die Gesamtsumme gegeben ist durch

$$5 \cdot (010100_2 + 111111_2) = 5 \cdot (20 + 63) = 415.$$

Aufgabe 53. Becky hat ein 45×45-Gitter gezeichnet, dann darin die 1×1-Quadrate gezählt und festgestellt, dass dies 2025 sind. Da sie aus persönlichen Gründen lieber Grafiken mit 2024 kleinen Quadraten mag, entfernte sie ein 1×1-Quadrat vom Rand des Gitters. Dann zählte sie alle möglichen Quadrate, nicht nur die 1×1-Quadrate, im ausgebesserten Gitter. Weil Becky Angst vor Zahlen hat, die durch 13 teilbar sind, stellte sie zufrieden fest, dass die Gesamtzahl aller Quadrate im nun entstandenen Gitter nicht durch 13 teilbar ist. In unten stehender Abbildung ist ein auf diese Weise angepasstes Gitter dargestellt: ein 5×5-Gitter, bei dem ein Quadrat am Rand entfernt wurde und als Beispiel ein 2×2-Quadrat eingezeichnet ist. Bestimme die Anzahl möglicher Randquadrate, die Becky entfernen konnte, sodass die Anzahl der möglichen Quadrate im ausgebesserten Gitter nicht durch 13 teilbar ist.



Ergebnis. 152

Lösung. Die Gesamtzahl aller Quadrate im ursprünglichen 45×45-Gitter ist gegeben durch

$$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + 45^2 = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot 46 \cdot 91.$$

Wenn Becky ein einzelnes 1×1-Quadrat vom Rand entfernt, dann nimmt die Gesamtzahl aller Quadrate um eine Zahl R ab, nämlich um die Anzahl der Quadrate, die dieses entfernte Quadrat enthalten haben. Da S selbst durch 13 teilbar ist, ist die Gesamtzahl aller Quadrate im angepassten Gitter genau dann durch 13 teilbar, wenn R durch 13 teilbar ist. Also muss man alle Werte von R bestimmen, die durch 13 teilbar sind.

Jedes Quadrat X, das ein gegebenes Randquadrat x enthält, ist eindeutig bestimmt durch die Auswahl zweier Eckquadrate von X auf dem Rand, so dass x innerhalb dieser Eckquadrate liegt, wobei jedes Eckquadrat mit x zusammenfallen kann. Deshalb ist für ein Randquadrat an Position n einer Seite, gezählt von einer Ecke aus, die Zahl R gegeben durch

$$R = n(46 - n).$$

Also muss man diejenigen Werte von n bestimmen, für die $n(46 - n)$ durch 13 teilbar ist, da diese Positionen ja vermieden werden sollen. Aufgrund von Symmetrie muss man nur die Hälfte einer Seite betrachten, also prüft man die Werte für $1 \leq n \leq 23$ und erkennt, dass $n(46 - n)$ nur für $n = 7,\ 13$ und 20 durch 13 teilbar ist. Deshalb hat jede Seite des Gitters genau sechs solche Randquadrate, von denen keines ein Eckquadrat ist. Also gibt es an den vier Seiten $4 \cdot 6 = 24$ Randquadrate, die man vermeiden muss. Die Gesamtzahl aller Randquadrate ist $4 \cdot 44 = 176$. Folglich ist $176 - 24 = 152$ die Anzahl möglicher Randquadrate, die Becky wählen kann.

Aufgabe 54. Hase und Schildkröte liefern sich ein Wettrennen. Die Schildkröte läuft langsam, aber stetig, während der Hase sechs Mal so schnell läuft wie die Schildkröte. Aber jedes Mal, wenn der Hase 9 Meter vorwärts gelaufen ist, läuft er 7 Meter zurück, um die Schildkröte zu verspotten. Wir betrachten die Zeitspanne vom Beginn des Rennens bis zum letzten Moment, in dem sich beide auf der Strecke treffen. Welchen Anteil dieser Zeit war die Schildkröte in Führung?

Ergebnis. $\frac{22}{45}$

Lösung. Wir analysieren die (vorzeichenbehaftete) Positionsdifferenz zwischen dem Hasen und der Schildkröte, wobei ein positiver Wert anzeigt, dass sich der Hase vor der Schildkröte befindet. Um Brüche zu vermeiden, rechnen wir in Längeneinheiten (LE) statt in Metern, wobei wir 6 LE = 1 Meter setzen. Der Hase legt dann 6 LE zurück, während die Schildkröte 1 LE läuft.

Der Hase läuft $9 \cdot 6 = 54$ LE vorwärts, dann aber $7 \cdot 6 = 42$ LE zurück, wodurch er gegenüber der Schildkröte zunächst $54 - 9 = 45$ LE gewinnt und dann $42 + 7 = 49$ LE verliert. Um die Analyse weiter zu vereinfachen, wechseln wir zu einem Bezugssystem, das sich mit der Schildkröte bewegt. In diesem Bezugssystem läuft der Hase also in jedem seiner Zyklen 45 LE vorwärts und 49 LE zurück, zusammen also 94 LE.

In jedem Zyklus bleibt der Hase eine bestimmte Strecke hinter der Schildkröte zurück: 4 LE am Ende des ersten Zyklus, 12 LE im zweiten (und zwar 4 LE am Anfang und 8 LE am Ende des Zyklus), 20 LE im dritten (und zwar 8

LE am Anfang und 12 LE am Ende des Zyklus) und so weiter. Der letzte vollständige Zyklus ist der elfte, in dem der Hase 40 LE hinter der Schildkröte startet, bis 5 LE vor die Schildkröte läuft und dann 49 LE zurück, davon 44 LE hinter der Schildkröte. Im zwölften Zyklus startet der Hase 44 LE hinter der Schildkröte, läuft bis 1 LE vor die Schildkröte, kehrt um und trifft die Schildkröte nach einer weiteren LE zum letzten Mal. Danach bleibt die Schildkröte stets vor dem Hasen.

In der Zeit bis zum letzten Treffen ist der Hase $11 \cdot 94 + 46 = 1080$ LE gelaufen, davon $(4 + 12 + 20 + 28 + \cdots + 84) + 44 = 528$ LE hinter der Schildkröte. Da der Hase mit konstanter Geschwindigkeit gelaufen ist, entsprechen die Längenverhältnisse den Zeitverhältnissen. Der Anteil der Zeit, in der die Schildkröte bis zur letzten Begegnung in Führung lag, beträgt also $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$.

Aufgabe 55. Mark hat als Geschenk eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bekommen, die durch die initialen Werte $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ und die Rekursion

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

für alle $n \geq 2$ gegeben ist. Diese Folge ist jedoch nicht eindeutig bestimmt. Um die Mehrdeutigkeit zu lösen, berechnet Mark die Folgenglieder Schritt für Schritt und wählt jedes Mal, wenn es mehrere Lösungen gibt, den größten Wert. Bestimme den Wert von a_{13}.

Ergebnis. 12274

Lösung. Durch Umordnung der Rekursion erhält man

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - a_n^2 - 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n+1} + 4a_n \cdot a_{n-1} = 2n - 1.$$

Dies ergibt durch Vereinfachung

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 - (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 = 2n - 1.$$

Wegen $(a_2 - 2 \cdot a_1)^2 = (3 - 2)^2 = 1 = 1^2$ und $(n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2$ ergibt sich induktiv

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 = (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 + 2n - 1 = n^2.$$

Somit gibt es für a_{n+1} die zwei möglichen Werte

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n \quad \text{oder} \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n.$$

Da Mark jeweils den größeren Wert wählt, nimmt er immer $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n$. Unter Verwendung der Rekursion mit dem Startwert $a_1 = 1$ ist

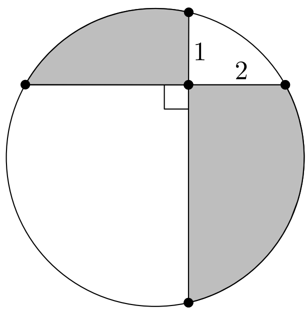
$$a_{13} = 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0.$$

Dies kann in folgender Weise vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0 \\ &= 2^{12} + (2^{11} + 2^{10} + \cdots + 2^0) + (2^{10} + 2^9 + \cdots + 2^0) + (2^9 + 2^8 + \cdots + 2^0) + \cdots + (2^1 + 2^0) + 2^0 \\ &= 2^{12} + (2^{12} - 1) + (2^{11} - 1) + \cdots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) \\ &= 2^{12} + (2^{13} - 1) - 13 \\ &= 4096 + 8192 - 14 = 12274. \end{aligned}$$

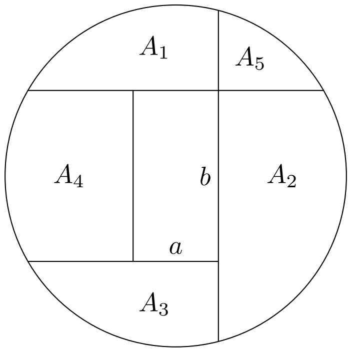
Daher ist Marks Wert von a_{13} gleich 12274.

Aufgabe 56. Die Abbildung zeigt einen Kreis, der durch zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen geteilt wird. Es sind zwei Streckenlängen angegeben, die beide kürzer als der verbleibende Teil der jeweiligen Sehne sind. Außerdem ist das Verhältnis des Flächeninhaltes der grauen Fläche zu dem der weißen Fläche $(5\pi - 2) : (5\pi + 2)$. Bestimme den Radius des Kreises.



Ergebnis. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

Lösung. Wir betrachten die Spiegelung der beiden Sehnen am Mittelpunkt des Kreises und bezeichnen einige der Flächen und Längen wie in der Abbildung.



Offensichtlich ist $A_1 = A_3$ und $A_2 = A_4 + A_5$. Das bedeutet, dass der Flächeninhalt des grauen Bereichs gleich

$$G = A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5$$

ist, während sich für den Flächeninhalt des weißen Bereichs

$$W = A_3 + A_4 + A_5 + ab = G + ab$$

ergibt. Unter Berücksichtigung des bekannten Verhältnisses

$$\frac{G}{W} = \frac{G}{G+ab} = \frac{5\pi - 2}{5\pi + 2}$$

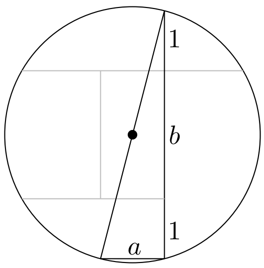
der Flächeninhalte ergibt sich nach Umstellung

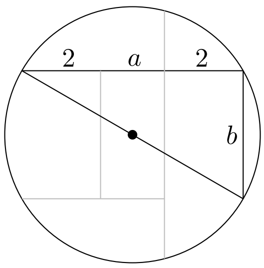
$$G = \frac{1}{4}(5\pi - 2)ab.$$

Der Flächeninhalt des gesamten Kreises, dessen Radius wir mit r bezeichnen, kann nun geschrieben werden als

$$\pi r^2 = G + W = 2G + ab = \frac{5\pi}{2}ab,$$

woraus $2r^2 = 5ab$ folgt. Wir erhalten zwei weitere Gleichungen, indem wir die Strecken auf zwei Arten neu anordnen zu rechtwinkligen Dreiecken, die dem Kreis einbeschrieben sind: eines mit den Katheten a und $b+2$, eines mit den Katheten $a+4$ und b.





Es verbleibt also ein System von drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
2r^2 &= 5ab,\\
4r^2 &= a^2 + (2+b)^2,\\
4r^2 &= (4+a)^2 + b^2,
\end{aligned}$$

das sich leicht lösen lässt. Vergleicht man die letzten beiden Gleichungen, so erhält man $b = 2a + 3$. Das kann in die ersten beiden Gleichungen eingesetzt werden, um die quadratische Gleichung $15a^2 + 10a - 25 = 0$ in a zu erhalten. Die eine Lösung $a = -\frac{5}{3}$ ergibt in der vorliegenden Situation keinen Sinn, die andere Lösung $a = 1$ führt zu $b = 5$ und $r = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Aufgabe 57. Ein Gebäude hat 160 Etagen. Der Flur jeder Etage ist über jede von zwei Flurtüren zugänglich. In jedem Flur gibt es vier Zimmer, jedes Zimmer hat einen Bewohner und eine eigene Tür. An jeder Zimmer- bzw. Flurtüre wird jeweils ein Schloss angebracht. Es sollen Schlüssel verteilt werden, um Folgendes sicherzustellen:

- Jede Person hat Zugang zu ihrem eigenen Zimmer, aber nicht zu dem einer anderen Person.
- Jede Person hat Zugang zum Flur auf ihrer Etage.
- Es ist erlaubt, dass jemand Zugang zu Fluren in anderen Etagen hat.

Zu jedem Schloss gehört ein Schlüssel, der als Original oder als Kopie davon genau dieses Schloss und weitere Kopien davon schließt. Kopien eines verwendeten Schlosses können bei Bedarf in verschiedene Türen eingebaut werden, eine beliebige Anzahl an Kopien von Schlüsseln für dieses Schloss darf hergestellt und verteilt werden. Jede Person kann so viele Schlüssel ausgehändigt bekommen, wie sie benötigt. Das für die Installation verantwortliche Unternehmen ist bestrebt, die Gesamtkosten für die Herstellung der Schlüssel zu minimieren. Die Herstellung eines neuen Schlüssels kostet 3, die einer Kopie eines vorhandenen Schlüssels kostet 2. Wie hoch sind die minimalen Gesamtkosten für alle Schlüssel unter Einhaltung der oben genannten Bedingungen?

Ergebnis. 2432

Lösung. Um die Kosten zu minimieren, ist es billiger, wenn ein Bewohner einen einzigen Schlüssel hat, der sowohl sein Zimmer als auch eine Flurtür öffnet, als zwei separate Schlüssel zu haben, selbst wenn es nur Kopien wären. Dies bedeutet jedoch, dass dann eine Flurtür für andere unzugänglich bleiben muss, da der Zugang zu dieser Tür auch den Zugang zum Zimmer jenes Bewohners ermöglichen würde.

Somit reduziert sich das Problem auf die Minimierung der Schlüsselkosten für 160 Etagen, bei denen jeder Flur nur einen Eingang und drei separate Zimmer hat. Angenommen, es werden n verschiedene Schlüsseltypen $1, 2, \ldots, n$ verwendet. Jeder Bewohner erhält einen Schlüssel für sein Zimmer und einen Schlüssel für den Flur. Diese beiden Schlüssel können nicht vom gleichen Typ sein. Wäre der Zimmerschlüssel eines Bewohners vom selben Typ wie der Flurschlüssel, würden die beiden anderen Bewohner, die sich den Flur teilen, Zugang zum Zimmer dieses Bewohners haben. Außerdem können keine zwei Bewohner das gleiche Schlüsselpaar haben, da dies bedeuten würde, dass sie Zugang zum gleichen Zimmer haben. Daher ist die Anzahl der möglichen Paare verschiedener Schlüsseltypen durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ gegeben.

Da insgesamt $3 \cdot 160 = 480$ Schlüsselpaare verteilt werden müssen, bestimmen wir die untere Grenze für n aus der Ungleichung

$$\frac{1}{2}n(n-1) \geq 480$$

zu $n \geq 32$. Wir zeigen nun, dass es möglich ist, genau $n = 32$ verschiedene Schlüsseltypen zu verwenden. Dazu teilen wir die 160 Etagen in 32 Gruppen zu je 5 Etagen auf. Die Schlüsselzuweisungen sind wie folgt, wobei der erste Schlüssel des Paares für den Flur und der zweite für das Zimmer steht:

- Die 15 Bewohner der ersten Gruppe erhalten die Schlüsselpaare $(1, 2)$, $(1, 3)$, …, $(1, 16)$.
- Die zweite Gruppe erhält die Schlüsselpaare $(2, 3), (2, 4), \ldots, (2, 17)$.
- Dieses Muster setzt sich fort, wobei die 18. Gruppe die Schlüsselpaare $(18, 19), (18, 20), \ldots, (18, 32), (18, 1)$ erhält.
- Dieses Muster setzt sich fort bis zur 31. Gruppe, welche die Schlüsselpaare $(31, 32), (31, 1), \ldots, (31, 14)$ erhält.
- Schließlich erhält die letzte, die 32. Gruppe die Schlüsselpaare $(32, 1)$, $(32, 2)$, …, $(32, 15)$.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Verteilung die oben genannten Bedingungen erfüllt. Daher ist $n = 32$ die minimale Anzahl der benötigten Schlüsseltypen, zu denen wir 32 Originale und insgesamt $2 \cdot 480 - 32 = 928$ Kopien erstellen müssen, um alle $160 \cdot 3 \cdot 2 = 960$ Schlüssel ausgeben zu können.

Unter Berücksichtigung der im ersten Absatz erwähnten 160 Bewohner müssen insgesamt $32 + 160 = 192$ Schlüssel hergestellt und 928 Kopien erstellt werden. Die endgültigen Kosten belaufen sich also auf $192 \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$.