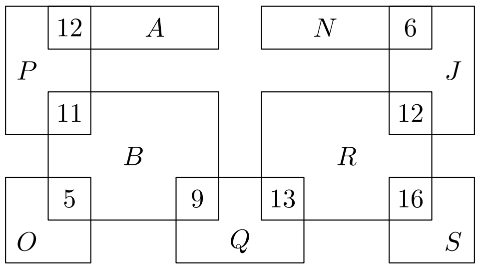
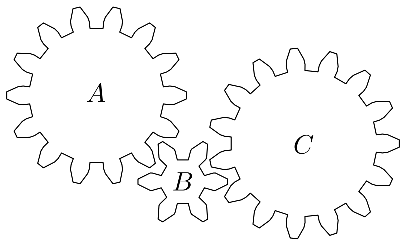
Ülesanne 1. Tähed ristkülikutes tähistavad erinevaid numbreid, millest ükski pole null. Aladesse, kus kaks ristkülikut kattuvad, on kirjutatud nendes ristkülikutes asuvate numbrite summa. Leia viiekohalise arvu $NABOJ$ väärtus.



Vastus. 14325

Lahendus. Summa 16 saab olla vaid $9+7$. Kuna $R = 9$ viib vastuoluni $J = N = 3$, siis $S = 9$ ja $R = 7$. Samm-sammult jätkates leiame, et $J = 5$, $N = 1$, $Q = 6$, $B = 3$, $P = 8$, $A = 4$ ja $O = 2$. Järelikult $NABOJ = 14325$, mis on Náboj 2025 toimumiskuupäev.

Ülesanne 2. Mitu täisringi peab tegema hammasratas C, et kõik kolm hammasratast jõuaksid tagasi oma algsesse asendisse?



Vastus. 14

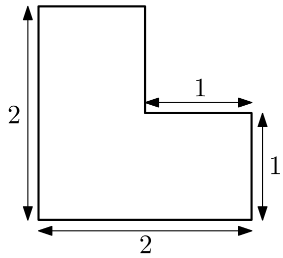
Lahendus. Hammasratastel A, B, C on vastavalt 14, 6 ja 15 hammast. Et kõik hammasrattad jõuaks tagasi algasendisse, peab pööratud hammaste arv olema kõigi nende arvude kordne. Arvude 14, 6, 15 vähim ühiskordne on 210. Pööre 210 hamba võrra vastab hammasratta C pööramisele $210/15 = 14$ täisringi võrra.

Ülesanne 3. Leia suurim võimalik kümnekohaline arv, milles kahe võrdse numbri vahel leidub alati mõni väiksem number.

Vastus. 9 897 989 698

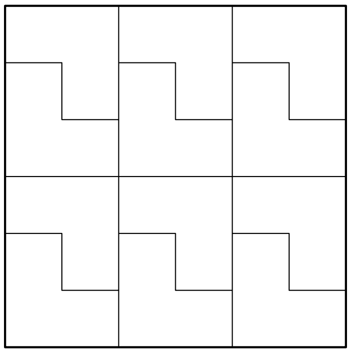
Lahendus. Alustades vasakpoolseimast numbrist ja valides igal sammul suurima võimaliku numbri, leiame kindlasti otsitava arvu. Vasakpoolseimaks numbriks valime 9, sest see on suurim võimalik. Teine number ei saa olla 9, seega olgu see 8. Kolmandale kohale saame taaskord valida 9. Neljandale kohale ei sobi ei 9 ega 8, seega olgu seal 7. Viiendale, kuuendale ja seitsmendale kohale sobivad suurimad numbrid on vastavalt 9, 8, 9. Kaheksandale kohale ei sobi ükski numbritest 9, 8, 7, seega olgu seal 6. Üheksandale ja kümnendale kohale saame jälle panna vastavalt numbrid $9, 8$. Niimoodi jõudsime arvuni $n = 9\,897\,989\,698$.

Ülesanne 4. Leia vähim ruudu küljepikkus, mille korral on võimalik ruut täpselt ära katta joonisel kujutatud kujunditega ilma kattumisteta.

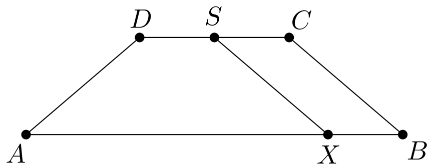


Vastus. 6

Lahendus. Antud kujundi pindala on 3, seega ka ruudu küljepikkus peab olema arvu 3 kordne. Proovides näeme kergesti, et 3×3 ruutu ei õnnestu ära katta. Ruudu mõõtmetega 6×6 saab ära katta järgnevalt.



Ülesanne 5. Võrdhaarses trapetsis $ABCD$ alustega AB ja CD kehtib $BC = CD = AD$. Olgu S külje CD keskpunkt ning X punkt küljel AB, nii et XS ja BC on paralleelsed. Teades, et $ABCD$ ümbermõõt on 50 ning $AXSD$ ümbermõõt on 38, leia $XBCS$ ümbermõõt.



Vastus. 36

Lahendus. Kuna $ABCD$ ja $AXSD$ ümbermõõtude vahe on täpselt $XB + CS = 2 \cdot CS = CD$, mis omakorda võrdub lõikude BC ja XS pikkustega, siis otsitav ümbermõõt on $3 \cdot (50 - 38) = 36$.

Ülesanne 6. Evelin valis kahekohalise arvu ning korrutas seda numbrite järjekorra vahetamisel saadava arvuga. Tulemuseks sai ta neljakohalise arvu, mille esimene number on 3 ja viimane number 7. Leia suurem kahest kokku korrutatud arvust.

Vastus. 93

Lahendus. Olgu x, y arvudes esinevad numbrid. Vastuse viimane number on sama, mis korrutise $x \cdot y$ viimane number. Viimase numbri 7 saamiseks on vaid kaks võimalust, $1 \cdot 7 = 7$ ja $3 \cdot 9 = 27$. Nendest $17 \cdot 71$ on liiga väike, seega jääb vaid variant $39 \cdot 93 = 3627$ ehk vastus on 93.

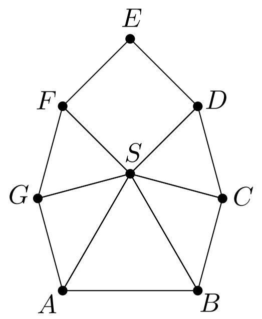
Ülesanne 7. Kaarel mängib järgnevat kaardimängu 52 kaardist koosneva pakiga (4 masti, igaühest 13 kaarti). Igal käigul võib mängija käest välja mängida kaardi, mis on viimase mängitud kaardiga kas sama masti või sama väärtusega, või kui seda teha ei õnnestu, tõmmata kaardipakist üks kaart juurde. Mis on vähim kaartide arv Kaarli käes, mille korral on kindel, et sõltumata sellest, millised kaardid on tal käes ja millised välja mängitud, saaks Kaarel oma käigul kindlasti kaardi välja mängida?

Vastus. 37

Lahendus. Kui Kaarli käes on kõikvõimalikud kaardid kolme masti ja 12 väärtuse hulgast (kokku $3 \cdot 12 = 36$ kaarti), siis võib juhtuda, et viimati välja mängitud kaart on neljandast mastist ning 13. väärtusega. Sellisel juhul ei saaks Kaarel kaarti välja mängida, seega vastus on vähemalt 37.

Teisalt aga näeme, et iga kaart omab ühist masti 12 muu kaardiga ning ühist väärtust 3 muu kaardiga. Kuna kaarte on kokku 52, siis kaarte, mis ei sobiks välja mängimiseks, on $52 - 1 - 12 - 3 = 36$. Järelikult kui Kaarli käes on 37 kaarti, siis kindlasti leidub nende hulgas üks, mille ta saab välja mängida.

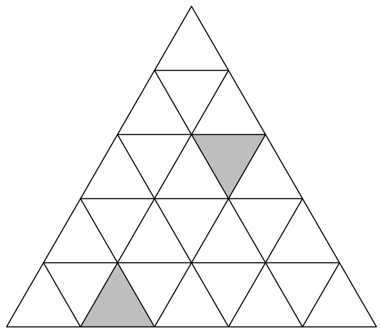
Ülesanne 8. Seitsenurk $ABCDEFG$ koosneb kuuest hulknurgast ühise tipuga S: kolm võrdkülgset kolmnurka (ABS, CDS, FGS), kaks võrdhaarset täisnurkset kolmnurka (BCS ja GAS täisnurkadega vastavalt tippude C ja G juures) ja üks ruut ($DEFS$). Leia nurga $\angle SAE$ suurus kraadides.



Vastus. $15°$

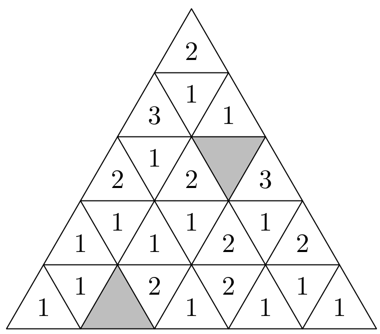
Lahendus. Võrdkülgsest kolmnurgast FGS saame $FS = GS$. Seega on kolmnurgad GAS ja FSE võrdsed, järelikult $ES = AS$. Seega kolmnurk EAS on võrdhaarne. Kuna $\angle ESA = 45° + 60° + 45° = 150°$, siis $\angle SAE = \frac{1}{2}(180° - \angle ESA) = 15°$.

Ülesanne 9. Mitu sellist kolmnurka on joonisel võimalik moodustada, mis ei sisaldaks kumbagi halli kolmnurka?



Vastus. 34

Lahendus. Kirjutame igasse väikesesse kolmnurka, kui mitmes sobivas kolmnurgas on see ülemiseks või alumiseks tipuks (sõltuvalt sellest, kumba pidi kolmnurgaga on tegemist):



Otsitav vastus on nende arvude summa.

Ülesanne 10. Nimetame neljakohalist arvu *huvitavaks*, kui tema sajaliste numbri eemaldamisel tekkiv arv on algsest arvust 9 korda väiksem. Näiteks arv 2025 on huvitav, sest $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$. Leia suurim neljakohaline huvitav arv.

Vastus. 6075

Lahendus. Olgu $N = \overline{abcd}$ huvitav arv ning $n = \overline{cd}$. Siis $N = 1000a + 100b + n$ ning sajaliste numbri eemaldamisel tekkiv arv on $M = 100a + n$. Korrutades võrrandi $M = \frac{1}{9}N$ pooli arvuga 9, saame

$$9(100a + n) = 1000a + 100b + n,$$

mille ümber kirjutamine ja poolte jagamine neljaga annab

$$25(a + b) = 2n.$$

Kuna $n < 100$, siis $a + b$ peab olema paarisarv ja $\frac{2 \cdot 100}{25} = 8$. Seega $a + b$ on maksimaalselt 6 ning maksimaalse N leidmiseks valimegi $a = 6$ ja $b = 0$, mis annab $n = 75$. Kontroll näitab, et $N = 6075$ rahuldab ülesande tingimusi.

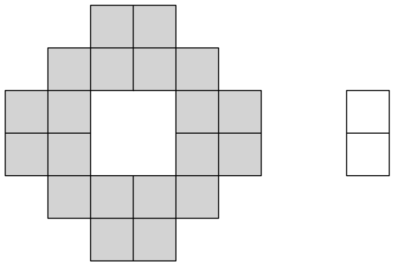
Ülesanne 11. Kaubalaev transpordib kolme tüüpi vedelikku: etanooli, naftat ja elavhõbedat, mille maksimaalsed mahutavused on vastavalt $10, 30$ ja 60 tonni. Teekonnal Prahast Hamburgi on laeval kokku 85 tonni vedelikku. Tagasiteel on laeval sama kogus etanooli, kaks korda rohkem naftat ning kolm korda vähem elavhõbedat. Mitu tonni vedelikku on laeval kokku tagasiteel?

Vastus. 60

Lahendus. Kuna laeval oli kokku 85 tonni vedelikku, pidi vähemalt 15 tonni sellest olema nafta. Teisalt, kuna tagasiteel oli laeval kaks korda rohkem naftat, võis seda olla maksimaalselt 15 tonni. Seega oli naftat täpselt 15 tonni ning maksimaalne kogus etanooli ja elavhõbedat. Tagasiteel on vedeliku kogumass seega

$$10 + 2 \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 60.$$

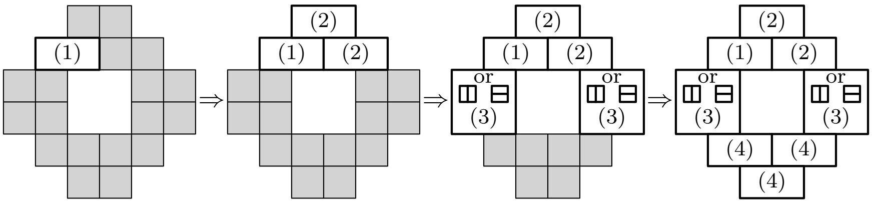
Ülesanne 12. Kui mitmel viisil saab joonisel kujutatud halli kujundi ära katta kahest ühikruudust koosnevate doominotega? Doominosid võib pöörata, kuid nad ei või kattuda ega ulatuda üle halli kujundi serva.



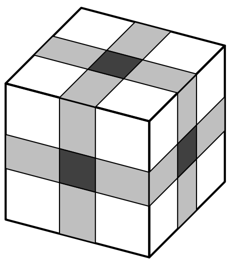
Märkus: Teineteisest pööramise või peegelduse teel saadavad katmised loetakse erinevateks.

Vastus. 8

Lahendus. Alustame paigutust ühest sisenurgast nagu joonisel (1); selle doomino saab paigutada kahtepidi, kuid tulemused on sümmeetrilised, seega vaatleme vaid ühte neist ja korrutame lõpus tulemuse kahega. Nüüd on veel kahe doomino paigutused üheselt määratud (2). Paremal ja vasakul asuvate 2×2 ruutude täitmise jaoks on kokku $2 \cdot 2 = 4$ võimalust (3) ning ülejäänud katmine on üheselt määratud (4). Seega kokku on $2 \cdot 4 = 8$ võimalust.



Ülesanne 13. Kuubikujuline saadetis on pakitud teibiga nii nagu kujutatud joonisel. Tumehallide osade (sealhulgas nende, mida joonisel näha pole) kogupindala on $216\,\mathrm{cm}^2$. Helehallide osade kogupindala on pool teibiga katmata osade kogupindalast. Leia saadetise küljepikkus sentimeetrites.



Vastus. 30

Lahendus. Ühe tumehalli ruudu pindala on $216/6 = 36$, seega teibi laius on $\sqrt{36} = 6$. Igal tahul on katmata osa pindala kaks korda suurem helehalli ala pindalast, seega on ühe helehalli ristküliku pindala poole väiksem ühe valge ruudu pindalast. Seega on valge ruudu küljepikkus kaks korda suurem teibi laiusest ning saadetise küljepikkus $(2+1+2) \cdot 6 = 30$.

Ülesanne 14. Kaupluses müüakse pliiatseid, märkmikke ja joonlaudu. Märkmiku hind on võrdne pliiatsi ja joonlaua hindade summaga. Kui joonlaua hinda suurendada 50% võrra, siis oleks see võrdne pliiatsi ja märkmiku hindade summaga. Mitme protsendi võrra peaks suurendama pliiatsi hinda, et see võrduks märkmiku ja joonlaua hindade summaga?

Vastus. 800%

Lahendus. Olgu märkmiku, joonlaua ja pliiatsi hinnad vastavalt n, r ja p. Ülesande teksti põhjal koostame võrrandid $n = r + p$ ja $\frac{3}{2}r = p + n = 2p + r$. Teisest võrrandist saame $r = 4p$ ning selle asendamisel esimesse võrrandisse saame $n = 5p$. Seega tuleb pliiatsi hinda üheksakordistada ehk suurendada 800% võrra.

Ülesanne 15. Tähistagu $\mathrm{SÜT}(a, b)$ ja $\mathrm{VÜK}(a, b)$ vastavalt arvude a ja b suurimat ühistegurit ja vähimat ühiskordset. Leia järgneva avaldise väärtus:

$$\mathrm{VÜK}(2025, \mathrm{VÜK}(2024, \mathrm{SÜT}(2023, \mathrm{SÜT}(2022, \ldots \mathrm{VÜK}(4, \mathrm{SÜT}(3, \mathrm{SÜT}(2, 1))) \ldots)))).$$

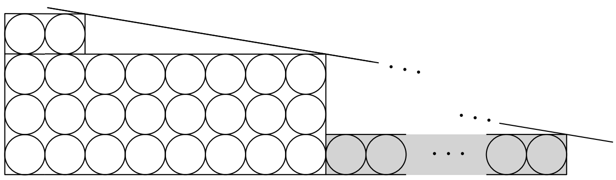
Tehted SÜT ja VÜK vahelduvad iga kahe tehte tagant, nii et kokku on mõlemat tehet 1012. Näiteks kui tehteid oleks kokku 4, siis avaldis oleks $\mathrm{VÜK}(5, \mathrm{VÜK}(4, \mathrm{SÜT}(3, \mathrm{SÜT}(2, 1))))$.

Vastus. 4 098 600

Lahendus. Kuna $\mathrm{SÜT}(x, x-1) = 1$ iga positiivse täisarvu x korral, siis $\mathrm{SÜT}(x, \mathrm{SÜT}(x-1, a)) = \mathrm{SÜT}(x, x-1, a) = 1$ kõigi positiivsete täisarvude a ja x korral. Järelikult avaldise väärtus on

$$\mathrm{VÜK}(2025, \mathrm{VÜK}(2024, 1)) = 2025 \cdot 2024 = 4\,098\,600.$$

Ülesanne 16. Joonisel on kolm ristkülikut, mille sees on võrdsed ringid, ning sirge, mis läbib kõigi kolme ristküliku ülemist paremat tippu. Mitu ringjoont mahub halli ristküliku sisse?



Vastus. 12

Lahendus. Ristkülikute ja sirge vahel moodustuvad kolmnurgad on sarnased sarnasusteguriga 2. Seega halli ristküliku laius on $2 \cdot 6 = 12$ ringi diameetrit.

Ülesanne 17. Toomas jooksis 18 km. Ta alustas ühtlase tempoga, kuid langetas mingi hetk kiirust 25% võrra ning hoidis madalamat kiirust jooksu lõpuni. Toomas veetis madalamal kiirusel kaks korda rohkem aega kui kiiremal kiirusel. Mitu kilomeetrit oli Toomas jooksnud hetkeks, kui ta oma kiirust langetas?

Vastus. $7.2 = \dfrac{36}{5}$

Lahendus. Olgu v Toomase algkiirus (ühikus km/h) t sellel kiirusel veedetud aeg (tundides); siis aeglasem kiirus on $\frac{3}{4}v$ ning sellel veedetud aeg $2t$. Seega kogu distantsi jaoks saame võrrandi

$$18 = v \cdot t + \tfrac{3}{4}v \cdot 2t = \tfrac{5}{2}vt,$$

kust

$$vt = \frac{18}{\frac{5}{2}} = 7.2$$

on algkiirusel läbitud distants.

Ülesanne 18. Kadi, Laura, Merilin, Nele ja Olivia seavad end ühte ritta grupipildi jaoks. Neil on järgmised soovid

- Nele soovib seista Kadist, Merilinist ja Oliviast paremal pool,
- Merilin soovib seista Kadist, Nelest ja Oliviast vasakul pool.

Kui mitmel viisil saavad nad end grupipildile paigutada?

Vastus. 10

Lahendus. Paneme tähele, et Laura paigutamiseks on 5 võimalust ilma piiranguteta ning ülejäänud nelja paigutamiseks ülejäänud kohtadele on kaks võimalust, seega kokku on 10 võimalust.

Ülesanne 19. Viisnurgakujulise kindluse seinade pikkused on 50, 70, 90, 110 ja 130 ühikut, kuid nende järjekord pole teada. Mis on pikim lask, mida vibulaskjal on võimalik kindluse sees sooritada?

Märkus: Lasu pikkust mõõdetakse horisontaalse sirgena. Kindluse seinade paksus on tühine. Leia vastus parima võimaliku seinade paigutuse korral.

Vastus. 220

Lahendus. Paneme tähele, et see pikim lask (pikkusega S) peab olema viisnurga kahe tipu vahel, vastasel juhul saaks lasku veelgi pikendada, liigutades lasu ühte otspunkti mõnele tipule lähemale. Paneme tähele, et mittekumera viisnurga korral on võimalik peegeldada teatud hulka külgi, et saada kumer viisnurk, kus pikim lask on vähemalt sama pikk.

Need kaks tippu jagavad seinad kaheks grupiks, millest mõlema pikkuste summa on vähemalt S. Seega

$$S \leqslant \frac{50+70+90+110+130}{2} = 225$$

ning kuna S peab olema arvu 10 kordne, siis $S \leqslant 220$. See on saavutatav, jagades seinad hulkadeks $130+90 = 220 < 110+50+70$.

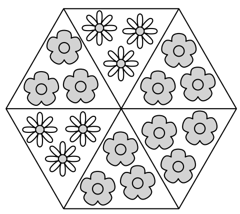
Ülesanne 20. Paulal on 8 kaarti, igaühel erinev number ühest kaheksani. Ta moodustab kaartidest kaks neljakohalist arvu. Mis on vähim võimalik neljakohaliste arvude vahe absoluutväärtus?

Vastus. 247

Lahendus. Et vahe oleks minimaalne, peab tuhendeliste numbrite vahe olema 1 1. Sajaliste number peab ühel arvul olema suurim võimalik (8) ning teisel vähim võimalik (1). Sama põhimõte kehtib seejärel kümneliste numbrite ning seejärel üheliste numbrite jaoks. Sedasi jõuame arvudeni 5123 ja 4876, mille vahe on 247.

Ülesanne 21. Vanaema otsustas istutada kuuest kolmnurgast koosnevale kuusnurgakujulisele peenrale lilli. Iga kolmnurga kohta otsustab ta, kas sinna istutada kannikesi või karikakraid. Üks võimalik paigutus on kujutatud joonisel. Kui mitu võimalust on vanaemal lillede istutamiseks, kui ta soovib, et leiduksid kaks kõrvutiasuvat kolmnurka, kuhu on istutatud samad lilled?

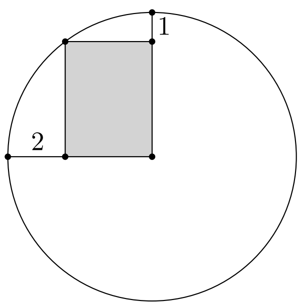
Märkus: Paigutused, mis erinevad teineteisest pöörde või peegelduse võrra, loetakse erinevaks.



Vastus. 62

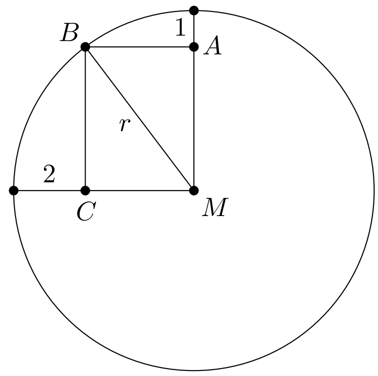
Lahendus. Kõiki võimalusi peenra täitmiseks on $2^6 = 64$. Nendest ebasobivad on vaid need, kus kahte tüüpi lilled on vaheldumisi. Selliseid võimalusi on kaks, seega sobivad võimalusi on $64 - 2 = 62$.

Ülesanne 22. Erik lõikas ringikujulisest paberitükist välja sellise ristküliku, et üks paar vastastippe asuvad vastavalt ringi keskpunktis ja ringjoonel ning teine paar vastastippe ringjoonest vastavalt 1 ja 2 dm kaugusel. Leia ristküliku välja lõikamisel allesjäänud kujundi pindala (ühikutes dm^2).



Vastus. $25\pi - 12$

Lahendus. Olgu M ringi keskpunkt ning A, B, C ristküliku ülejäänud tipud. Olgu ringi raadius r.



Siis $MA = r - 1$, $MB = r$ ja $MC = r - 2$ ning $AB = MC$. Pythagorase teoreem kolmnurgas ABM annab võrrandi

$$r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2,$$

mille saab teisendada kujule

$$0 = r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5).$$

Kuna $r = 1$ ei anna sobivat lahendit, on ainus võimalus $r = 5$. Järelikult otsitav pindala on $r^2\pi - 3 \cdot 4 = 25\pi - 12\ \mathrm{dm}^2$.

Ülesanne 23. Meister Náboicus soovib kokku segada *Algeemia*—segu Algebrast ja Alkeemiast, kus mõlemat elementi on täpselt võrdne kogus. Selleks on tal võimalik kasutada järgmist kahte koostisosa:

- Algebria: Koosneb 80% Algebrast ja 20% Alkeemiast, kogumassiga 10 mg,
- Alkeema: Koosneb 30% Algebrast ja 70% Alkeemiast, kogumassiga 14 mg.

Kasutades neid koostisosi, mitu milligrammi Algeemiat saab Náboicus maksimaalselt kokku segada?

Märkus: Náboicus ei saa koostisosi elementideks eraldada, vaid ainult kasutada neid sellisel kujul, nagu nad on.

Vastus. $23\dfrac{1}{3} = \dfrac{70}{3}$

Lahendus. Segades kokku x ühikut esimest ja y ühikut teist koostisosa, sisaldab tekkib segu $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y$ Algebrat ja $\frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$ Alkeemiat. Et saavutada $1:1$ suhe, peab kehtima

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y,$$

kust saame $y = \frac{3}{2}x$. Teisisõnu, iga mg Algebria kohta tuleb kasutada 1.5 mg Alkeemat. Seega maksimaalse koguse Algeemiat saame, kasutades ära kõik 14 mg Alkeemat ning $\frac{2}{3} \cdot 14$ mg Algebriat, andes kokku $\frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3}$ mg Algeemiat.

Ülesanne 24. Arv $K = n^2$ on neljakohaline täisruut, mille kõik numbrid on väiksemad kui 7. Suurendades arvu K kõiki numbreid 3 võrra, tekib samuti täisruut. Leia n.

Vastus. 34

Lahendus. Olgu $m^2 = M = K + 3333$. Kuna M ja K on mõlemad neljakohalised täisruudud, saame $32 \leqslant n < m \leqslant 99$ ning seega

$$32 + 33 \leqslant m + n \leqslant 98 + 99$$

ehk

$$65 \leqslant m + n \leqslant 197.$$

Teisalt aga

$$(m+n)(m-n) = m^2 - n^2 = M - K = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101.$$

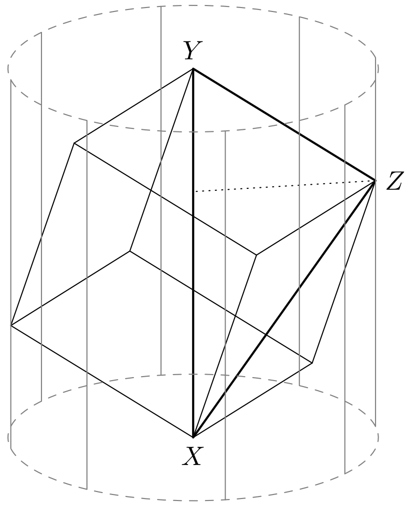
Arvestades ülalmainitud suuruse piiranguid, on ainus võimalus $m + n = 101$ ja $m - n = 33$, mis annab lahendi $m = 67$ ja $n = 34$. Jääb veenduda, et arvu $K = 34^2 = 1156$ kõik numbrid tõesti on väiksemad kui 7.

Ülesanne 25. Olgu X, Y vastastipud kuubis küljepikkusega 1 ning olgu C silinder, nii et X ja Y on tema aluste keskpunktid ning kuubi ülejäänud tipud asuvad silindri külgtahul. Leia silindri C ruumala.

Vastus. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Lahendus. Silindri kõrguseks on lõik XY, mis on kuubi diagonaal pikkusega $\sqrt{3}$. Silindri raadius on kuubi mistahes muu tipu Z kaugus diagonaalist XY. Et kolmnurgas XZY on tipu Z juures täisnurk, saame sarnaste kolmnurkade või pindalaarvutuse kaudu, et see kõrgus on $\sqrt{2/3}$. Seega silindri ruumala on

$$\pi\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2\sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$



Ülesanne 26. Külas on 60 inimest, kellest igaüks on kas tõerääkija, kes räägib alati tõtt, valetaja, kes alati valetab, või tavaline inimene, kes võib vastata nii, nagu ise soovib. Iga külaelanik teab, mitu inimest igasse kategooriasse kuulub. Juku külastab seda küla ja küsib igalt inimeselt kaks küsimust:

1. Küsimusele "Kas teie hulgas on vähemalt 31 tõerääkijat?" sai Juku 43 jaatavat vastust.
2. Küsimusele "Kas teie hulgas on vähemalt 31 valetajat?" sai Juku 39 jaatavat vastust.

Leia vähim võimalik tavaliste inimeste arv külas.

Vastus. 13

Lahendus. Teise küsimuse õige vastus ei saa olla "jah": Kui leiduks vähemalt 31 valetajat, vastaks nad kõik sellele küsimusele eitavalt ning ei saaks olla kokku 39 jaatavat vastust. Seega on maksimaalselt 30 valetajat. Järelikult vastasid tõerääkijad selle küsimusele eitavalt, mistõttu neid on maksimaalselt $60 - 39 = 21$.

Seega on ka esimese küsimuse õige vastus "ei". Järelikult kõik 43 jaatavat vastust peavad tulema tavainimeste ja valetajate hulgast. Et valetajaid on maksimaalselt 30, peab tavainimesi olema vähemalt $43 - 30 = 13$.

Ülesande tingimused on rahuldatavad, kui leidub 17 tõerääkijat, 30 valetajat ja 13 tavainimest, seega vastus on 13.

Ülesanne 27. Turniiril mängivad neli võistkonda A, B, C ja D, iga teise võistkonna vastu täpselt ühe mängu. Mängu võitja saab 1 või 2 punkti sõltuvalt edumaast kaotaja ees, kaotaja punkte ei saa. Viike ei juhtu. Mängude tulemused avaldatakse sellises tabelis, nagu on näha joonisel. On teada, et üks võistkond sai kokku neli punkti ja teised võistkonnad igaüks kokku ühe punkti. Kui mitu erinevat tabelit rahuldavad sellist punktide jaotust?

	A	B	C	D	kokku
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Märkus: Võistkondade (A, B, C ja D) paigutus tabelis (ehk ridade ja veergude tähised) on fikseeritud, neid ei saa muuta ega ümber järjestada.

Vastus. 24

Lahendus. Et mänge oli kokku 6 ja punktide kogusumma on 7, võideti täpselt üks mäng kahepunktise eduga ja ülejäänud ühepunktise eduga. Esmalt on 4 võimalust võitva võistkonna valikuks. Seejärel on 3 võimalust valida, millist võistkonda nad võitsid kahepunktise eduga. Viimaks peavad kolm ülejäänud võistkonda omavahelistest mängudest saama igaüks ühe punkti, mis on võimalik ainult siis, kui nad võitsid teineteist nö ringiratast. Selle ringi suuna valikuks on 2 võimalust. Kokku on seega $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ võimalust tabeli täitmiseks.

Ülesanne 28. Julia kirjutas arvu 2025 summana M liidetavast, nii et iga liidetav on arvu 10 aste (ehk 10^n, kus n on mittenegatiivne täisarv). Liikmed võivad korduda. Mitu erinevat võimalikku väärtust on arvul M?

Vastus. 225

Lahendus. Vähim võimalik arvu M väärtus on 9, sest

$$2025 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Kui $k \geqslant 1$, siis asendades $10^k = 10 \cdot 10^{k-1}$ suureneb liidetavate arv 9 võrra. Seega M võimalikud väärtused on arvu 9 järjestikused kordsed. Arvu M suurim võimalik väärtus on 2025, sest

$$2025 = 2025 \cdot 10^0.$$

Seega võimalike väärtuste arv on

$$\frac{2025 - 9}{9} + 1 = 225.$$

Ülesanne 29. Madis ja Päivo seisavad, seljad vastamisi, rongijaama platvormil. Konstantse kiirusega liikuv kaubarong möödub neist. Kui rongi esiots on nendega ühel joonel, hakkavad Madis ja Päivo võrdse kiirusega vastassuundades kõndima. Rongi tagaots jõuab Madiseni, kui ta on kõndinud 45 meetrit, ning Päivoni, kui tema on kõndinud 60 meetrit. Leia rongi pikkus meetrites.

Vastus. 360

Lahendus. Olgu t_1 aeg hetkest, kui rongi esiots möödus Madisest ja Päivost, hetkeni, kui rongi tagaots möödus Madisest. Olgu t_2 aeg sellest hetkest kuni hetkeni, kui rongi tagaots möödus Päivost. Viimaks olgu ℓ rongi pikkus. Kuna Madis ja Päivo kõndisid võrdse kiirusega ning ajavahemike t_1 ja t_2 jooksul läbisid nad vastavalt 45 ja $60 - 45 = 15$ meetrit, siis

$$t_1 : t_2 = 45 : 15 = 3 : 1.$$

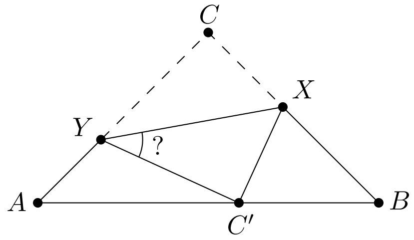
Aja t_1 jooksul liigub rong edasi $\ell - 45$, sest selle ajavahemiku alguses oli rongi esiots kõndimise algpunktis ning lõpus tagaots 45 meetri kaugusel sellest punktist. Aja t_2 jooksul läbib rong vahemaa 105 meetrit Madise ja Päivo vahel. Seega on rongi kiirus

$$v = \frac{105}{t_2}.$$

Rongi pikkus on seega

$$\ell = vt_1 + 45 = \frac{t_1}{t_2} \cdot 105 + 45 = 3 \cdot 105 + 45 = 360.$$

Ülesanne 30. Võrdhaarne täisnurkne kolmnurk ABC täisnurgaga tipu C juures volditakse üle lõigu XY nii, et punkt C läheb punktiks C' küljel AB. On teada, et $BC' = BX$. Leia nurga $\angle C'YX$ suurus kraadides.



Vastus. $33.75^\circ = \dfrac{135}{4}^\circ$

Lahendus. Võrdhaarsest kolmnurgast $XC'B$ saame

$$\angle C'XB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ.$$

Voltimise tõttu $\angle CXY = \angle YXC'$, seega

$$\angle YXC' = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 67.5^\circ) = 56.25^\circ.$$

Viimaks $\angle XC'Y = \angle YCX = 90^\circ$, seega

$$\angle C'YX = 180^\circ - \angle XC'Y - \angle YXC' = 33.75^\circ.$$

Ülesanne 31. Vaatleme kõiki rangelt kasvavaid nelikuid elementidega hulgast $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$, järjestatud kasvavas järjekorras esimese elemendi järgi, viigi korral teise elemendi järgi, ja nii edasi:

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), (0, 1, 2, 5), \ldots, (12, 13, 14, 15).$$

Teisisõnu, nelik (a_1, a_2, a_3, a_4) asub jadas enne nelikut (b_1, b_2, b_3, b_4), kui

$$a_1 < b_1 \quad \text{või} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{või} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{või} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 < b_4.$$

Leia neliku $(2, 4, 7, 14)$ järjekorranumber jadas.

Vastus. 911

Lahendus. Paneme tähele, et k-elemendilisi rangelt kasvavaid jadasid elementidega hulgast $\{m, m+1, \ldots, n\}$ on $\binom{n-m+1}{k}$, sest selles hulgas on $n - m + 1$ elementi ning igal alamhulgal leidub täpselt üks järjestus, mis annab sobiva jada. Vastuse leidmiseks loendame, mitu nelikut asub jadas enne nelikut $(2, 4, 7, 14)$:

- $(0, *, *, *)$: kokku $\binom{15}{3} = 455$ nelikut;
- $(1, *, *, *)$: kokku $\binom{14}{3} = 364$ nelikut;
- $(2, 3, *, *)$: kokku $\binom{12}{2} = 66$ nelikut;
- $(2, 4, a, *)$, kus $a \in \{5, 6\}$: kokku $\binom{10}{1} + \binom{9}{1} = 19$ nelikut;
- $(2, 4, 7, b)$, kus $b \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$: kokku 6 nelikut.

Seega neliku $(2, 4, 7, 14)$ järjekorranumber on $455 + 364 + 66 + 19 + 6 + 1 = 911$.

Ülesanne 32. Artur ja Birgit müüsid turul kahe peale kokku 100 õuna. Artur müüs õunu hinnaga a eurot õuna kohta ning Birgit hinnaga b eurot õuna kohta, kusjuures kokku teenisid nad võrdse summa. Kui Artur oleks aga müünud oma õunad hinnaga b, oleks ta teeninud kokku 45 eurot, ning kui Birgit oleks müünud oma õunad hinnaga a, oleks ta teeninud kokku 20 eurot. Mitu õuna müüs Artur?

Vastus. 60

Lahendus. Olgu A ja B vastavalt Arturi ja Birgiti poolt müüdud õunade arvud. Saame võrrandid

$$\begin{aligned} A + B &= 100, \\ A \cdot a &= B \cdot b, \\ A \cdot b &= 45, \\ B \cdot a &= 20. \end{aligned}$$

Asendades $b = \frac{45}{A}$ ja $a = \frac{20}{B}$ teise võrrandisse, saame

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{20}{B} &= B \cdot \frac{45}{A}, \\ \frac{A^2}{B^2} &= \frac{45}{20} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Seega $A = \frac{3B}{2}$, mille asendamine esimesse võrrandisse annab $\frac{3B}{2} + B = \frac{5B}{2} = 100$, järelikult $B = 40$ ja $A = 100 - 40 = 60$.

Ülesanne 33. Sandra liitis kokku kolmekohalise arvu üheliste numbri kuubi, kümneliste numbri ruudu ning sajaliste numbri. Tulemuseks sai ta arvu, millest alustas. Leia suurim võimalik selline kolmekohaline arv.

Vastus. 598

Lahendus. Olgu a, b ja c vastavalt arvu N sajaliste, kümneliste ja üheliste number. Kui $c = 9$, siis $N > 9^3 = 729$, seega a on 7 või 8. Kummalgi juhul ei leidu b väärtust, mille korral arvu $729 + a + b^2$ viimane number oleks 9.

Juhul $c = 8$ saame $8^3 = 512$, seega a on 5 või 6, kuid kuna

$$N \leq 512 + 9^2 + 6 = 599 < 600,$$

saab a tegelikult olla vaid 5. Siis b peab rahuldama võrrandit

$$512 + b^2 + 5 = 8 + 10b + 500$$

ehk

$$b^2 - 10b + 9 = 0,$$

mille lahendid on $b = 1$ ja $b = 9$. Mõlemad annavad sobiva arvu:

$$518 = 5 + 1^2 + 8^3 \quad \text{ja} \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3.$$

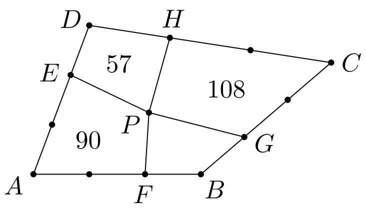
Kui $c \leq 7$, siis

$$N \leq 7^3 + 9^2 + 9 = 433 < 598,$$

seega suurim võimalik N väärtus on 598.

Ülesanne 34. Nelinurga $ABCD$ iga külg jaotatakse kahe punktiga kolmeks võrdseks osaks. Tähistame nende hulgast järgmised punktid:

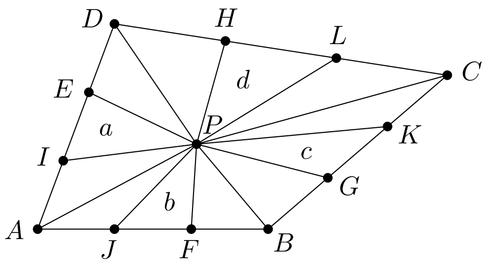
- Punkt E asub küljel AD, nii et $AE : ED = 2 : 1$.
- Punkt H asub küljel CD, nii et $CH : HD = 2 : 1$.
- Punkt F asub küljel AB, nii et $AF : FB = 2 : 1$.
- Punkt G asub küljel CB, nii et $CG : GB = 2 : 1$.



Punkt P valitakse nelinurga sisemuses ning nelinurk jaotatakse neljaks väiksemaks nelinurgaks. Nendest kolme pindalad on antud joonisel. Leia neljanda nelinurga $PFBG$ pindala.

Vastus. 42

Lahendus. Ühendades punkti P lõikude abil ka ülejäänud punktidega nelinurga $ABCD$ külgedel, tekib 12 kolmnurka.



Iga kolmik kolmnurki, mis toetuvad samale nelinurga küljele, on võrdse pindalaga, sest neil on võrdsed alus ja kõrgus. Olgu a, b, c, d vastavalt külgedele AD, AB, BC, CD toetuvate kolmnurkade pindalad. Jooniselt näeme, et

$$90 = 2a + 2b, \quad 57 = a + d, \quad 108 = 2c + 2d.$$

Nelinurga $PFBG$ pindala on $b + c$ ehk

$$b + c = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) - (a + d) = \frac{1}{2}(90 + 108) - 57 = 42.$$

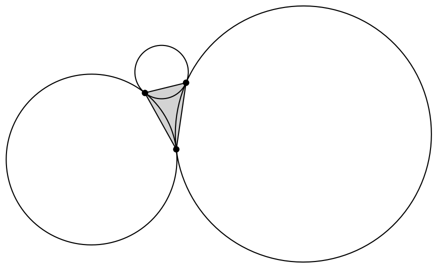
Ülesanne 35. Ruudustikus mõõtmetega 4×4 eemaldatakse keskmised neli ruutu. Kui mitmel viisil on tekkinud 12 ruudust koosnevas kujundis võimalik välja valida neli ruutu, nii et valitud on vähemalt üks ruut kujundi igalt välisküljelt?

Märkus: Nurgaruudud kuuluvad korraga kahele küljele. Variandid, mis erinevad teineteisest pööramise või peegeldamise poolest, loetakse erinevaks.

Vastus. 237

Lahendus. Kokku on nelja ruudu valimiseks $\binom{12}{4} = 495$ võimalust. Võimalus ei sobi, kui üks külg on jäetud välja, ehk kõik neli ruutu on valitud ülejäänud 8 ruudu hulgast, milleks on $\binom{8}{4} = 70$ võimalust. Kuna välja jäetava külje jaoks on neli valikut, saaksime seega $495 - 4 \cdot 70 = 215$ sobivat valikut. Kuid tegelikult me lahutasime topelt neid võimalusi, kus välja jäetakse kaks külge. Kahe vastaskülje (mille valimiseks on 2 võimalust) välja jätmiseks on vaid $\binom{4}{4} = 1$ võimalus, ning kahe lähiskülje (mille valimiseks on 4 võimalust) välja jätmiseks on $\binom{5}{4} = 5$ võimalust. Seega saame vastuseks hoopis $215 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 5 = 237$ võimalust.

Ülesanne 36. Kolm ringjoont raadiustega 1, 2 ja 3 puutuvad teineteist paarikaupa väliselt, nagu näha joonisel. Leia puutepunktidest moodustuva kolmnurga pindala.



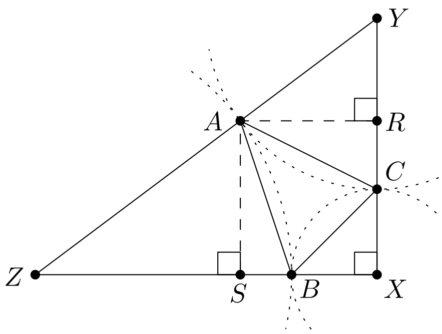
Vastus. $\dfrac{6}{5}$

Lahendus. Olgu ringjoonte keskpunktid X, Y, Z ja puutepunktid A, B, C, nagu alumisel joonisel. Kolmnurga XYZ küljepikkused on $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ ja $2 + 3 = 5$ mis on täisnurkne kolmnurk täisnurgaga X juures. Kolmnurga ABC saame, kui lahutame võrdhaarsete kolmnurkade XCB, YAC ja ZBA pindalad kolmnurga XYZ pindalast, mis on $\frac{1}{2}(3 \cdot 4) = 6$.

- Kolmnurk XCB on täisnurkne, seega tema pindala on $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.
- Kolmnurga YAC pindala leidmiseks leiame esmalt tema kõrguse AR. Kuna kolmnurgad RYA ja XYZ on sarnased teguriga $YA/YZ = \frac{2}{5}$, saame $AR = \frac{2}{5}ZX = \frac{8}{5}$. Järelikult YAC pindala on $\frac{1}{2}(\frac{8}{5} \cdot 2) = \frac{8}{5}$.
- Kolmnurga ZBA kasutame samamoodi sarnasust $\triangle SAZ \sim \triangle XYZ$ teguriga $\frac{3}{5}$, kust $AS = \frac{9}{5}$, seega ZBA pindala on $\frac{1}{2}(\frac{9}{5} \cdot 3) = \frac{27}{10}$.

Viimaks leiame, et otsitav pindala on

$$6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$



Ülesanne 37. Agnes joonistas korrapärase n-nurga, kus $n > 3$. Ta joonistas selle kõik diagonaalid ja pani tähele, et nende koguarv on arvu 2025 kordne. Leia vähim võimalik n väärtus.

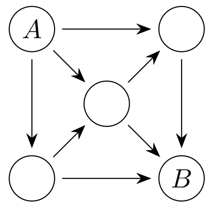
Märkus: n-nurga külgi ei loeta tema diagonaalideks.

Vastus. 300

Lahendus. Diagonaali esimeseks tipuks võib valida mistahes tipu ning teise tipu ülejäänud $n-3$ tipu hulgast. Nii loeme diagonaale topelt, seega neid on tegelikult $\frac{1}{2}n(n-3)$. Et 2025 on paaritu, peab ka arv $P = n(n-3)$ jaguma arvuga 2025. Et $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, peab P jaguma arvudega $3^4 = 81$ ja $5^2 = 25$. Kuna ainult üks arvudest n, $n-3$ saab jaguda arvuga 5, peab üks neist jaguma arvuga 25. Teisalt, kui üks arvudest n, $n-3$ jagub arvuga 3, siis jagub ka teine, kuid mõlemad ei saa korraga jaguda arvuga 9. Seega üks neist jagub arvuga $3^3 = 27$.

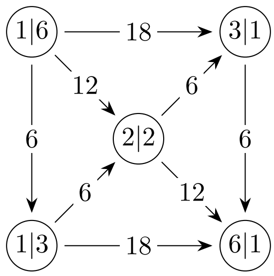
Kui üks teguritest jagub arvuga 27 (olgu see tegur $27k$) ja teine arvuga 25, saame, et arv $27k \pm 3$ jagub arvuga 25. Seega ka $2k \pm 3$ jagub arvuga 25. Vähim k väärtus, mille korral see on võimalik, on $k = 11$. See annab tegurid $11 \cdot 27 = 297$ ja $297 + 3 = 300$, seega $n = 300$, mis tõesti rahuldab ülesande tingimusi. Kui aga sama tegur jaguks arvudega 25 ja 27, oleks see vähemalt $25 \cdot 27 = 675 > 300$, seega siit väiksemat lahendit ei tule.

Ülesanne 38. Taavet liigub punktist A punkti B. Ta läbib igal käigul mõne noolega kujutatud teekonna, välja arvatud täpselt ühel käigul, kus ta liigub noolega vastupidises suunas (sealhulgas võib ta punktist B ajutiselt lahkuda). Seejuures võib Taavet kasutada sama noolt rohkem kui ühe korra. Kui mitmel erineval viisil on võimalik Taavetil liikuda punktist A punkti B?



Vastus. 84

Lahendus. Iga ringi jaoks arvutame, (1) mitmel viisil on võimalik ringist A sinna jõuda ning (2) mitmel viisil on võimalik jõuda sealt ringi B. Näiteks 3|1 joonisel ülemises parempoolses ringis tähendab, et algusest sinna leidub täpselt kolm erinevat teekonda ning et sealt lõppu leidub täpselt üks teekond. Loendame iga noole jaoks, mitu teekonda leidub, kus Taavet läbis just selle noole tagurpidi. Selleks piisab kokku korrutada teekondade arv ringist A noole lõpp-punkti ning teekondade arv noole alguspunktist ringi B. Liites kokku kõigile nooltele vastavad teekondade arvud, saame vastuseks 84.



Ülesanne 39. Järgnevas tehtes tähistavad erinevad tähed erinevaid nullist suuremaid numbreid.

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A & A \\
 & & + & B & B & B \\
 & & & + & O & O \\
 & & & & + & J \\
 & - & 2 & 0 & 2 & 5 \\
\hline
= & N & A & B & O & J
\end{array}$$

Leia viiekohalise arvu $NABOJ$ suurim võimalik väärtus.

Vastus. 18249

Lahendus. Kirjutame tehte ümber kujul

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A & A \\
 & & + & B & B & B \\
 & & & + & O & O \\
 & & & & + & J \\
- & N & A & B & O & J \\
\hline
 & = & 2 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

mis lihtsustub kujule

$$\begin{array}{ccccc} & N & N & N & N \\ & + & A & A & A \\ & & + & B & B \\ & & & + & O \\ \hline = & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

Siin ilmselgelt $N = 1$. Siis jääb alles tehe $\overline{AAA} + \overline{BB} + O = 2025 - 1111 = 914$, kust $A = 8$. Kuna $914 - 888 = 26$, siis $B = 2$ ja $O = 4$. Numbri J saame ise valida, nii et valime tema väärtuseks 9. Arvu $NABOJ$ suurim väärtus on seega 18249.

Ülesanne 40. Náboj võistluse 500 korraldajat valisid võistlusele ülesandeid. Esimese ülesande kohta hääletas iga korraldaja, kas ta on ülesande poolt või vastu. Pärast esimese ülesande hääletust lahkus osa poolt hääletanud korraldajatest hääletuselt (kuid mitte ükski vastu hääletanud korraldaja). Teise ülesande poolt hääletas sama palju korraldajaid kui esimese ülesande poolt ning teise ülesande vastu kolm korda vähem kui esimese ülesande vastu. Leidus täpselt 120 korraldajat, kes hääletasid mõlema ülesande poolt, ning 70 korraldajat, kes hääletasid mõlema ülesande vastu. Mitu korraldajat lahkus pärast esimest hääletust?

Vastus. 150

Lahendus. Tähistagu YN korraldajate arvu, kes hääletasid esimese ülesande poolt (Y) ja teise ülesande vastu (N); sarnaselt defineerime YY, NN ja NY. Olgu YX pärast esimest hääletust lahkunud korraldajate arv. Saame järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} YY + YN + NY + NN + YX &= 500 \\ YY + YN + YX &= YY + NY \\ NY + NN &= 3(YN + NN) \end{aligned}$$

Asendades $YY = 120$ ja $NN = 70$ ning liikmeid ümber paigutades, saame

$$\begin{array}{ccccccc} YN & + & NY & + & YX & = & 310 \\ YN & - & NY & + & YX & = & 0 \\ -3YN & + & NY & & & = & 140 \end{array}$$

Korrutades teise võrrandi pooli arvuga 2 ning võrrandid kokku liites saame $3YX = 450$, seega $YX = 150$.

Ülesanne 41. Kui palju leidub positiivsete täisarvude paare (a, b), nii et $a \leqslant b$ ning arvud $\text{SÜT}(a, b)$, a ja b moodustavad aritmeetilise jada summaga 2025.

Märkus: Aritmeetiliseks jadaks nimetame arvujada, kus kahe järjestikuse liikme vahe on alati üks ja sama.

Vastus. 12

Lahendus. Olgu $g = \gcd(a, b)$ ning tähistame $a = ga'$, $b = gb'$, kus a' ja b' on ühistegurita. Kuna $g \leqslant a \leqslant b$, on aritmeetilise jada järjekord (g, a, b). Siit $a - g = b - a$ ehk $b = 2a - g$, kus arvuga g läbi jagamine annab $b' = 2a' - 1$. Summa tingimusest saame

$$g + a + b = g(1 + a' + 2a' - 1) = 3ga' = 2025,$$

seega $ga' = 675 = 3^3 5^2$. Sellel arvul on $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ positiivset jagajat ning jääb veenduda, et iga jagaja sobib a' väärtuseks ehk annab sobiva lahendi (a, b). Tõepoolest, kui $b' = 2a' - 1$, $g = 675/a'$, $a = ga' = 675$, $b = gb'$, siis $a \leqslant b$ ning

$$\gcd(a, b) = \gcd\bigl(ga', g(2a' - 1)\bigr) = g \cdot \gcd(a', 2a' - 1) = g,$$

kuna a' ja $2a' - 1$ on ühistegurita.

Ülesanne 42. Lasteaia Náboj võistlusel on kokku 16 ülesannet. Iga võistkond saab esialgu kätte esimesed 3 ülesannet ning iga ülesande ära lahendamisel antakse asemele vähima numbriga seni kätte andmata ülesanne. Pärast võistlust selgub, et ei leidu kahte võistkonda, kelle ära lahendatud ülesannete hulgad oleksid identsed. Mis on maksimaalne võimalik võistkondade arv, mis võis võistlusel osaleda?

Vastus. 697

Lahendus. Paneme tähele, et ära lahendatud ülesannete hulk on üheselt määratud ülesannete hulgaga, mis jäi võistkonna lauale võistluse lõpuks. See võib aga olla ülesannte hulga mistahes alamhulk, kus on maksimaalselt 3 elementi. Seega võis võistkondi olla maksimaalselt

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 697.$$

Ülesanne 43. Rahuldagu reaalarvud a, b, c, d võrrandeid

$$\begin{aligned} 2a + 2b - ab &= 2025, \\ 2b + 2c - bc &= 47, \\ 2c + 2d - cd &= 5. \end{aligned}$$

Leia avaldise $2a + 2d - ad$ väärtus.

Vastus. 51

Lahendus. Kuna $(x - 2)(y - 2) = xy - 2x - 2y + 4$, saab võrrandid ümber kirjutada kujul

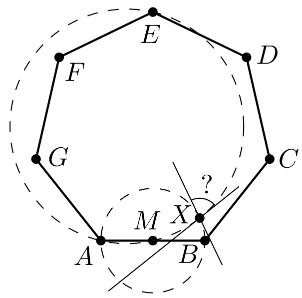
$$\begin{aligned} (a - 2)(b - 2) &= -2021, \\ (b - 2)(c - 2) &= -43, \\ (c - 2)(d - 2) &= -1. \end{aligned}$$

Meie eesmärk on leida $(a - 2)(d - 2)$. Selle saab avaldada kui

$$(a - 2)(d - 2) = \frac{(a - 2)(b - 2)(c - 2)(d - 2)}{(b - 2)(c - 2)} = \frac{(-2021) \cdot (-1)}{-43} = -47.$$

Järelikult $2a + 2d - ad = -(-47) + 4 = 51$.

Ülesanne 44. Olgu korrapärases seitsenurgas $ABCDEFG$ punkt M külje AB keskpunkt. Ringjoon keskpunktiga M läbi punkti A ning kolmnurga AME ümberringjoon lõikuvad punktis X seitsenurga sisemuses. Läbi punkti X tõmmatakse puutujad mõlemale ringjoonele. Leia puutujate vahelise teravnurga suurus kraadides.



Vastus. $77\frac{1}{7}^{\circ} = \frac{540}{7}^{\circ}$

Lahendus. Sümmeetria tõttu on AME täisnurk ehk AE teise ringjoone diameeter. Nurk ringjoonte puutujate vahel punktis X on võrdne nurgaga puutujate vahel teises lõikepunktis A. Kuna puutuja on vastava diameetriga risti, on otsitav nurk võrdne nurgaga diameetrite AE ja AB vahel. See nurk on seitsenurga korrapärasuse ja piirdenurga-kesknurga teoreemi tõttu $\frac{3}{7} \cdot 180^{\circ}$.

Ülesanne 45. Leia kõikvõimalike avaldiste $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \cdots \pm 2^{99})^2$ summa, kus iga märk sajast võib olla pluss või miinus.

Vastus. $\dfrac{2^{100} \cdot (4^{100} - 1)}{3}$

Lahendus. Paneme üldisemalt tähele, et avaldises $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$ on iga kahe liikme $x_i, x_j, i \neq j$ ees pooltel kordades sama märk ja pooltel kordadel erinev märk. Seega on pärast ruutu tõstmist liige $\pm 2x_i x_j$ pooltel kordadel pluss- ja pooltel kordadel miinusmärgiga. Järelikult kõiki avaldiste summas koonduvad need liikmed välja. Järelikult jäävad alles vaid ruutudega liikmed ehk kõikvõimalike avaldiste summa on

$$2^n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

kuna n märgi valikuks on 2^n võimalust.

Praeguses ülesandes see tähendab, et avaldise väärtus on

$$2^{100} \cdot (1 + 4^1 + \cdots + 4^{99}).$$

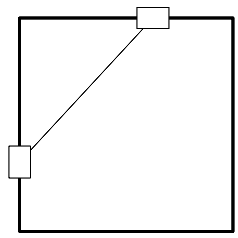
Kasutades geomeetrilise jada summa valemit

$$1 + 4^1 + \cdots + 4^{99} = \frac{4^{100} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{100} - 1}{3},$$

saame vastuse

$$\frac{2^{100} \cdot (4^{100} - 1)}{3}.$$

Ülesanne 46. Kaks kummipaelaga ühendatud autot sõidavad mööda ruudukujulist teed, nagu näidatud joonisel. Autod alustavad samast ruudu tipust ning liiguvad konstantse kiirusega samas suunas. Aeglasem auto liigub kiirusega 24 km/h ja kiirem auto kiirusega n km/h. Kummipael puruneb, kui autod asuvad ruudu vastastippudes. Leia vähim täisarvuline $n > 24$, nii et kummipael ei purune kunagi.



Vastus. 56

Lahendus. Olgu $m = 24$ ning olgu murru $\frac{m}{n}$ taandatud kuju $\frac{m'}{n'}$ (ehk m', n' on ühistegurita). Näitame, et kummipael ei purune parajasti siis, kui $n' - m'$ on arvu 4 kordne.

Kui $n' - m'$ ei ole arvu 4 kordne, siis kui kiirem auto on läbinud n' ruudu küljepikkust, on aeglasem auto läbinud m' küljepikkust ehk autod asuvad erinevates ruudu tippudes. Kui nad asuvad vastastippudes, puruneb kummipael kohe. Kui nad asuvad naabertippudes, siis pärast seda, kui kiirem auto on läbinud veel n' ruudu küljepikkust, asuvad autod ruudu vastastippudes ehk kummipael puruneb.

Kui $n' - m'$ on arvu 4 kordne, siis esimene kord pärast startimist, kui autod on üheaegselt ruudu tippudes, on siis, kui kiirem auto on läbinud n' ruudu küljepikkust ja aeglasem auto m' küljepikkust, kuna m', n' on ühistegurita. Kuna aga $n' - m'$ on arvu 4 kordne, siis on autod samas ruudu tipus. Seega on mõlemad autod üheaegselt ruudu tippudes ainult siis, kui nad on samas tipus, ehk kummipael ei purune kunagi.

Jääb vaid leida vähim $n > 24$, nii et $n' - m'$ jagub arvuga 4. Seega peab m' olema arvu $m = 24$ paaritu jagaja, ainsad võimalused milleks on 1 ja 3. Juhul $m' = 1$ saame $n' \geqslant 5$ ehk $n \geqslant \frac{24}{1} \cdot 5 = 120$. Kui $m' = 3$, sobib $n' = 7$. Siis $n = \frac{24}{3} \cdot 7 = 56$. Seega vähim sobiv n väärtus on 56.

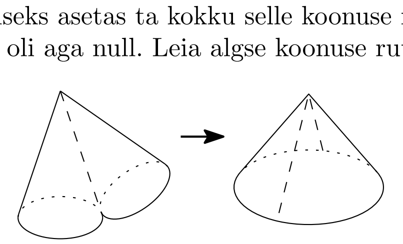
Ülesanne 47. 2025 mängijat mängivad žetoonide peale kaardimängu. Iga mänguvooru lõpus annab vooru kaotanud mängija igale teisele mängijale nii mitu žetooni, kui tollel mängijal hetkel on (ehk siis eri mängijad võivad saada erineva hulga žetoone). Mängiti 2025 vooru ning iga mängija kaotas täpselt ühe vooru. Mängu lõpuks on igal mängijal täpselt 2^{3000} žetooni. On teada, et kellelgi mängu käigus žetoonidest puudu ei jäänud. Leia, mitu žetooni oli esimese vooru kaotanud mängijal mängu alguses.

Vastus. $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot \left(1 + 2025 \cdot 2^{2024}\right)$

Lahendus. Paneme tähele, et esimese vooru kaotanud mängija žetoonide arv kahekordistus pärast iga ülejäänud vooru ehk kokku 2024 korda. Seega pidi tal pärast esimest vooru alles olema 2^{976} žetooni. Et žetoone on mängus kokku $2025 \cdot 2^{3000}$, pidid ka ülejäänud $2025 \cdot 2^{3000} - 2^{976}$ žetoonist pooled olema mängu alguses selle mängija käes. Järelikult oli tal mängu alguses žetoone kokku

$$2^{976} + \frac{2025 \cdot 2^{3000} - 2^{976}}{2} = 2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999}.$$

Ülesanne 48. Georgil on kolm identset ilma põhjata paberist koonust (ehk ainult koonuse külgpind). Ta võttis kaks neist ja asetas nad tippupidi kokku, nii et nende kokkupuutepind oli sirglõik, nagu näha joonise vasakpoolsel osal. Ta lõikas need kaks koonust mööda seda sirglõiku lahti ning ühendas nad üheks koonuseks, nagu näha joonise parempoolsel osal. Selle koonuse ruumala oli 10. Järgmiseks asetas ta kokku selle koonuse ning kolmanda koonuse ning ühendas nad samamoodi kokku. Uue koonuse ruumala oli aga null. Leia algse koonuse ruumala.



Vastus. $\sqrt{10}$

Lahendus. Ruumala 0 tähendab, et kolme külgpinna (mis on ringi sektorid) ühendamisel tekkiv pind on täisring. Teisisõnu on algse koonuse pinnalaotus ringi sektor nurgaga 120°. Olgu l selle ringi raadius ehk kõigi koonuste moodustaja ning r esialgse koonuse põhja raadius. Mitme koonuse külgpindade ühendamisel mitmekordistub põhja ümbermõõt ning järelikult ka raadius. Kuna kolme pinna ühendamisel langevad moodustaja ja põhja raadius kokku, saame $l = 3r$. Järelikult on keskmise koonuse põhja raadius $2r$. Pythagorase teoreemi ja koonuse ruumala valemi abil saame seose

$$10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Seega algse koonuse ruumala on

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3 = \sqrt{10}.$$

Ülesanne 49. Kui mitme positiivse täisarvu $n \leqslant 200$ korral leidub võrrandil

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor - n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = 1$$

vähemalt üks lahend x, nii et $1 \leqslant x \leqslant 200$?

Märkus: Tähistus $\lfloor t\rfloor$ tähendab suurimat täisarvu, mis on väiksem-võrdne reaalarvust t.

Vastus. 82

Lahendus. Kirjutame võrrandi ümber kujul

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor = n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor + 1. \tag{$\heartsuit$}$$

Võrrandi vasak pool on arvu 5 kordne, seega vaatleme võimalusi vastavalt n jäägile arvuga 5 jagamisel.

Kui n on arvu 5 kordne, annab parem pool jäägi 1 arvuga 5 jagamisel, seega lahendeid ei leidu. Kui $n = 5k + 4$, siis $x = n + 1 = 5k + 5$ sobib (võrrandi ($\heartsuit$) mõlemad pooled on võrdsed arvuga x), seega kõik 40 sellist arvu sobivad. Kui $n = 5k + 3$, siis et parem pool jaguks arvuga 5, peab $\lfloor x/n\rfloor \geqslant 3$, mis annab $n \leqslant 66$, kuna $x \leqslant 200$. Nende 13 n väärtuse jaoks sobib $x = 3n + 1$, sest võrrandi ($\heartsuit$) mõlemad pooled on võrdsed arvuga x. Sarnaselt saame juhul $n = 5k + 2$, et $\lfloor x/n\rfloor \geqslant 2$ ehk $n \leqslant 100$ ning et nende 20 arvu jaoks sobib $x = 2n + 1$. Viimaks juhul $n = 5k + 1$ saame $n \leqslant 50$ ning nende 10 arvu jaoks (välja arvatud $n = 1$) sobib $x = 4n + 1$. Kokku on seega $40 + 13 + 20 + 10 - 1 = 82$ sobivat arvu n.

Ülesanne 50. Andresel on lõpmata palju 20 tahuga täringuid, mille tahkudele on kirjutatud arvud 1 kuni 20. Ta veeretab mingi arvu täringuid korraga, lootes veeretada täpselt ühel või kahel täringul tulemuseks arvu 1. Mitut täringut peaks Andres veeretama, et tal oleks maksimaalne õnnestumise tõenäosus?

Vastus. 28

Lahendus. Täpselt ühe ühe veeretamise tõenäosus on

$$P_1 = n\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$$

Ja täpselt kahe ühe veeretamise tõenäosus on

$$P_2 = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{n-2}.$$

Nende summa saab lihtsustada kujule

$$a_n = \frac{1}{2\cdot 19^2}n(n+37)\left(\frac{19}{20}\right)^n.$$

Meid huvitab, milliste n väärtuste korral $a_{n+1} < a_n$ ehk

$$\frac{19}{20}(n+1)(n+38) < n(n+37),$$

mille saab viia kujule

$$n^2 - n - 722 > 0.$$

Lahendades ruutvõrratuse näeme, et võrratus kehtib, kui $n \geqslant 28$. Seega jada a_n kasvab kuni indeksini $n = 28$ ning peale seda kahaneb. Seega peaks Andres veeretama 28 täringut.

Ülesanne 51. Olgu kolmnurgas ABC, kus $\angle BAC = 30°$, D selline punkt lõigul AC, et $AD = BC$ ja $BD = CD$. Leia nurga $\angle DBA$ suurus kraadides.

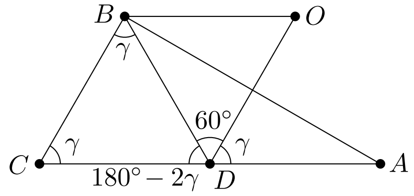
Vastus. $30°$, $110°$

Lahendus. Olgu O kolmnurga $\triangle ABD$ ümberringjoone keskpunkt. Siis $\angle DOB = 2\angle BAD = 60°$, seega kolmnurk $\triangle BDO$ on võrdkülgne. Järelikult $AO = DO = BD = CD$. Kuna $AD = BC$, on kolmnurgad AOD ja CDB võrdsed. Tähistades $\gamma = \angle ACB$, kehtib ka $\angle CBD = \angle DAO = \angle ADO = \gamma$. Vaatleme nüüd kolme juhtu sõltuvalt punkti O asendist nurga BAC suhtes.

Kui O asub väljaspool nurka $\angle BAC$ ning on lähemal sirgele AB kui sirgele AC, kehtib

$$180° = \angle ADO + \angle ODB + \angle BDC = \gamma + 60° + (180° - 2\gamma) = 240° - \gamma,$$

seega $\gamma = 60°$ ning $\angle DBA = 30°$.



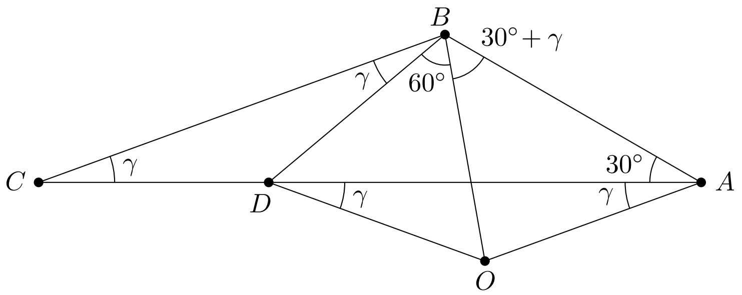
Kui O asub väljaspool nurka $\angle BAC$ ja on lähemal kiirele AC kui kiirele AB, siis $\angle OBA = \angle BAO = 30° + \gamma$, seega

$$\angle CBA = \angle OBA + \angle DBO + \angle CBD = (30° + \gamma) + 60° + \gamma = 90° + 2\gamma$$

ja

$$180° = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 30° + (90° + 2\gamma) + \gamma = 120° + 3\gamma,$$

järelikult $\gamma = 20°$. Seega $\angle DBA = 90° + \gamma = 110°$.



Viimaks paneme tähele, et O ei saa asuda nurga BAC sees, sest siis $\angle DOA > 120°$, kuid $\angle BDC < 180° - 60° = 120°$, mistõttu kolmnurgad AOD ja BDC ei saa olla võrdsed.

Ülesanne 52. Olgu f funktsioon, mis on määratud mittenegatiivsetel täisarvudel, omandab mittenegatiivseid täisarvulisi väärtusi, ning on defineeritud järgnevate seostega:

1. Iga x korral: $f(x, x) = 0$.
2. Iga x, y korral: $f(x, y) = f(y, x)$.
3. Iga x, y korral: $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Iga x, y korral: $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
5. Iga x, y korral: $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Leia mittenegatiivsete täisarvude $t \leqslant 60$ summa, mille korral $f(20, t) = 2$.

Vastus. 415

Lahendus. Paneme tähele, et $f(x, y)$ näitab, kui mitmel kohal erinevad arvude x ja y esitused kahendsüsteemis. Tähistades üheliste biti eemaldamisel tekkivaid arve kui x' ja y', veendume järgnevas:

- Kui $x = y$, siis $f(x, y) = 0$, ehk kõik vastavad bitid on võrdsed.
- Kui x ja y on mõlemad paaris või mõlemad paaritud, siis nende üheliste bitid on võrdsed, seega piisab leida $f(x', y')$.

- Kui üks neist on paaris ja teine paaritu, siis ühelist bitid on erinevad ehk piisab leida $f(x', y')$ ja liita tulemusele 1.

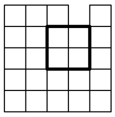
Vastuse leidmiseks peame leidma arvude t summa, mis koosnevad ülimalt kuuest bitist ning erinevad arvust $20 = 010100_2$ täpselt kahe biti võrra (paneme tähele, et arvud 61, 62, 63 pole nii saavutatavad, seega me ei pea eraldi nende peale mõtlema).

Kahe muudetava biti valimiseks on $\binom{6}{2} = 15$ võimalust. Iga konkreetne bitt on muudetud täpselt viies arvus neist ning muutmata ülejäänud kümnes arvus. Seega leiame otsitava summa bitihaaval.

Üheliste number on muudetud viies arvus, mis lisab summale $5 \cdot 2^0$, ülejäänud kümne arvu ühelised summat ei mõjuta. Sarnaselt leiame, et järgmine bitt lisab summale $5 \cdot 2^1$ ning ülejäänud bitid vastavalt $10 \cdot 2^2$ (kuna siin suurendavad summat just muutmata bitiga arvud), $5 \cdot 2^3$, $10 \cdot 2^4$ ja $5 \cdot 2^5$. Seega on otsitav summa

$$5 \cdot (010100_2 + 111111_2) = 5 \cdot (20 + 63) = 415.$$

Ülesanne 53. Hendrik eemaldas ühe ruudu 45×45 ruudustiku servalt, sest talle meeldib arv 2024 rohkem kui 2025. Seejuures on ta ebausklik ja soovis, et tekkinud kujundis ei jaguks kõigi (mitte ainult 1×1) ruutude arv arvuga 13. Joonisel on näha näidet ruudustikust, millelt on eemaldatud üks servaruut, ning 2×2 ruudust selle sees, mida peaksime loendamisel arvesse võtma. Kui mitmel viisil on Hendrikul võimalik ühikruut eemaldada?



Vastus. 152

Lahendus. Algses 45×45 ruudus on kõigi ruutude arv

$$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + 45^2 = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot 46 \cdot 91.$$

Kuna $91 = 7 \times 13$, siis S jagub arvuga 13. Seega meid huvitab, millal jagub eemaldatud ühikruutu sisaldavate ruutude arv R arvuga 13.

Paneme tähele, et ühikruutu x sisaldav ruut X on üheselt määratud ruudu X kahe nurgaruuduga, mis on valitud ruuduga x samal ruudustiku küljel ning mis asuvad erineval pool ruutu x (või kattuvad sellega). Seega, tähistades x järjekorranumbri oma reas/veerus kui n, saame, et erinevaid võimalusi X jaoks on

$$R = n(46 - n).$$

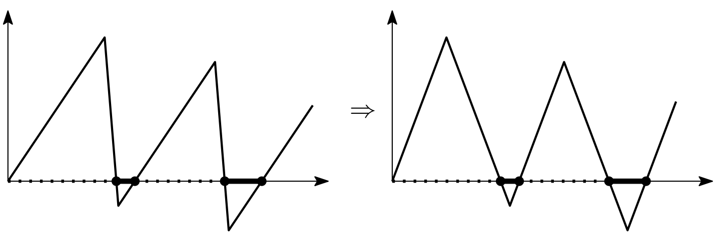
Seega sobivad kõik n väärtused peale nende, mille korral $n(46 - n)$ jagub arvuga 13. Vahemikus $1 \leqslant n \leqslant 23$ ehk poole ruudu külje peal on mittesobivad n väärtused $n = 7, 13, 20$. Seega leidub igal ruudu küljel 6 mittesobivat ruutu ehk kõigi külgede peale kokku $4 \cdot 6 = 24$ mittesobivat ruutu. Seega sobivaid ruute on $4 \cdot 44 - 24 = 152$.

Ülesanne 54. Jänes ja kilpkonn osalevad võidujooksus. Kilpkonn jookseb aeglaselt, aga ühtlase kiirusega. Jänes jookseb 6 korda kiiremini, kuid iga kord, kui ta on jooksnud 9 meetrit edasi, jookseb ja 7 meetrit tagasi, et Kilpkonna ees eputada. Vaatleme ajavahemikku võidujooksu algusest kuni viimase korrani, kui nad on samas punktis. Kui suure osa sellest ajast on Kilpkonn Jänesest eespool?

Vastus. $\dfrac{22}{45}$

Lahendus. Vaatleme ülesannet taustsüsteemis, kus Kilpkonn on paigal. Siis jookseb Jänes edasi $9 - \frac{9}{6} = \frac{45}{6}$ meetrit ja tagasi $7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ meetrit.

Selles taustsüsteemis pole Jänese kiirused edasi ja tagasi liikudes võrdsed, nagu näha esimesel joonisel. Kuid graafikule tekivad sarnased kolmnurgad, seega vastus tuleks sama ka siis, kui kiirused oleksid võrdsed, nagu näha teisel joonisel. Sellisel juhul on aeg ja vahemaa võrdelised, seega jätkame arvutamist vahemaadega, mitte aegadega.



Et arvutused oleks mugavamad, korrutame kõiki arve kuuega. Näeme, et iga edasi-tagasi liikumisega liigub Jänes edasi 45 ja tagasi 49 meetrit. Sellest veedab Jänes Kilpkonnast tagapool esimesel korral 4 meetrit, teisel 12, kolmandal 20 jne. Üheteistkümnendal korral veedab Jänes 84 meetrit Kilpkonnast tagapool ning lõpetab 44 meetrit Kilpkonnast tagapool. Siis liigub Jänes kuni viimase kohtumiseni veel 45 meetrit edasi ja 1 meetri tagasi, veetes neist 44 meetrit tagapool.

Seega läbib Jänes kuni viimase kohtumiseni kokku $11 \cdot 94 + 45 + 1 = 1080$ meetrit. Jänes veedab Kilpkonnast tagapool sellest $(4 + 12 + \cdots + 84) + 44 = 528$ meetrit. Seega otsitav vahemaade (ning järelikult ka aegade) osakaal on $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$.

Ülesanne 55. Marko uurib jada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kus $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ning mis on määratud seosega

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

iga $n \geqslant 2$ jaoks. Kahjuks pole see jada üheselt määratud. Et vältida arusaamatusi, arvutas Marko liikmed välja ükshaaval, valides igal sammul suurima võimaliku väärtuse uue liikme jaoks. Leia liikme a_{13} väärtus.

Vastus. 12274

Lahendus. Antud seose saab ümber kirjutada kujul

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - a_n^2 - 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n+1} + 4a_n \cdot a_{n-1} = 2n - 1,$$

mis lihtsustub kujule

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 - (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 = 2n - 1.$$

Kuna $(a_2 - 2 \cdot a_1)^2 = (3 - 2)^2 = 1 = 1^2$ ja $(n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2$, näeme induktsiooni teel kergesti, et

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 = (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 + 2n - 1 = n^2.$$

Seega on liikme a_{n+1} jaoks kaks võimalust:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n \quad \text{või} \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n.$$

Kuna Marko valib alati suurima võimaliku väärtuse, siis

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n.$$

Nüüd leiame järjest arvutades, et

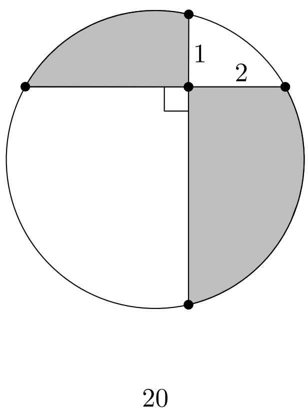
$$a_{13} = 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0.$$

Selle avaldise väärtuse leiame järgnevalt:

$$\begin{aligned}
a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0 \\
&= 2^{12} + (2^{11} + 2^{10} + \cdots + 2^0) + (2^{10} + 2^9 + \cdots + 2^0) + (2^9 + 2^8 + \cdots + 2^0) + \cdots + (2^1 + 2^0) + 2^0 \\
&= 2^{12} + (2^{12} - 1) + (2^{11} - 1) + \cdots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) \\
&= 2^{12} + (2^{13} - 1) - 13 \\
&= 4096 + 8192 - 14 = 12274.
\end{aligned}$$

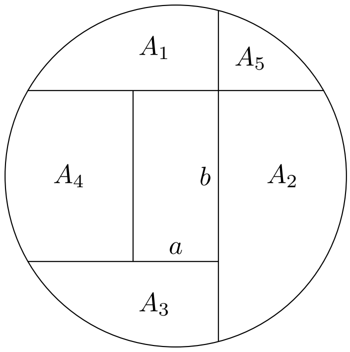
Seega Marko leitud arvu a_{13} väärtus on 12274.

Ülesanne 56. Joonisel on ring, mis on jaotatud kahe ristuva kõõluga neljaks osaks. Kahe lõigu pikkused on antud (mõlemad lühemad kui teine osa samast kõõlust). Samuti on teada, et halli ja valge ala kogupindalade suhe on $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$. Leia ringi raadius.



Vastus. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Lahendus. Peegeldame antud kõõle ringi keskpunkti suhtes ning tähistame tekkivad pindalad nagu alumisel joonisel.



Näeme, et $A_1 = A_3$ ja $A_2 = A_4 + A_5$. Seega halli ala kogupindala G on

$$G = A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5,$$

samas kui valge ala kogupindala on

$$W = A_3 + A_4 + A_5 + ab = G + ab.$$

Pannes nende suhte võrduma antud väärtusega, saame

$$\frac{G}{W} = \frac{G}{G + ab} = \frac{5\pi - 2}{5\pi + 2},$$

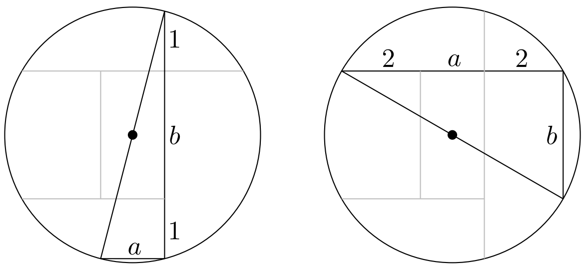
mille saab ümber kirjutada kui

$$G = \frac{1}{4}(5\pi - 2)ab.$$

Teisalt saame avaldada kogu ringi pindala tema raadiuse r kaudu:

$$\pi r^2 = G + W = 2G + ab = \frac{5\pi}{2}ab$$

ehk $2r^2 = 5ab$. Me saame veel kaks võrrandit, kui moodustame täisnurksed kolmnurgas, nagu alumisel joonisel.



Seega on meil võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} 2r^2 &= 5ab, \\ 4r^2 &= a^2 + (2 + b)^2, \\ 4r^2 &= (4 + a)^2 + b^2, \end{aligned}$$

kus viimase kahe võrrandi lahutamisel saame $b = 2a + 3$, mis annab esimeses või teises võrrandis ruutvõrrandi a suhtes. Üks lahenditest ($a = -\frac{5}{3}$) on geomeetriliselt võimatu; teine lahend annab $a = 1$, $b = 5$ ja $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Ülesanne 57. Ehitisel on 160 korrust. Igale korrusele pääseb kahest uksest ning igal korrusel on neli korterit. Igal korteril on üks uks ning igas korteris elab üks inimene. Igale uksele (nii korruste kui korterite ustele) paigaldatakse üks lukk, nii et

- Iga inimene pääseb enda korterisse, aga mitte teiste korteritesse,
- Iga inimene pääseb oma korrusele ning

- Kui inimene pääseb ka mõnele teisele korrusele, pole sellest probleemi.

Iga lukku saab avada vaid selle luku võtmega, kuid sama lukku on võimalik kasutada mitmel uksel ning võtmetest võib teha koopiaid. Igal inimesel võib olla nii mitu võtit kui vaja. Lukufirma soovib kulutada võtmete tootmisele nii vähe kui võimalik. Uue võtme loomine maksab 3 eurot ning olemasolevast võtmest koopia tegemine 2 eurot. Mis on minimaalne kõigi võtmete maksumus, mille korral on võimalik kõiki tingimusi rahuldada?

Vastus. 2432

Lahendus. On selge, et ühelgi elanikul ei ole põhjust omada rohkem kui kahte võtit. Näitame, et igal korrusel peab leiduma täpselt üks inimene, kellel on ainult üks võti. See võti avab tema korteri ukse ning ühe korruse ustest, seega ülejäänud kolm elanikku peavad kasutama teist korruse ust ehk nendel peab olema ka eraldi korterivõti, seega ei saa olla korrusel üle ühe ühe võtmega inimese.

Näitame, et kui ühe võtmega inimesi korrusel ei ole, siis on võimalik tekitada ühe võtmega inimene, nii et kulu ei tõuse. Kui mingit korruseust D saab avada vaid elanik a, siis võime ukse D luku asendada uue lukuga ning a korteriuksele paigaldada seesama uus lukk. Siis oli a võtmete vana hind vähemalt $2 + 2 = 4$ ja uus hind 3, seega koguhind väheneb vähemalt 1 võrra.

Kui mõlemat ust saavad avada kaks inimest, teeme endiselt samaoodi. Siis peame aga elanikuga a sama korruseust kasutanud elaniku b suunama teise korruseukse juurde. Siis võib juhtuda, et ta pääseks oma võtmetega mõnel muul korrusel kellegi korterisse. Selle võimaluse vältimiseks tekitame b korterile eraldi luku, mis suurendab kulu 1 võrra, kuid kogukulu ei tõuse.

Seega oleme tõestanud, et minimaalse kuluga olukord on selline, kus ühte korruseust kasutab vaid üks inimene ning sama lukku saab kasutada ka tema korteri jaoks. Teisisõnu piisab lahendada sarnane ülesanne ülejäänud kolme elaniku jaoks igal korrusel, kasutades vaid ühte korruseust igal korrusel. Olgu erinevad võtmed $1, 2, \ldots, n$. Iga elanik saab täpselt kaks erinevat võtit nende hulgast ning ükski kaks elanikku ei tohi saada sama paari, seega sobivaid võimalusi on $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Teisalt aga elanikke on $3 \cdot 160 = 480$, seega saame võrratuse

$$\frac{1}{2}n(n-1) \geqslant 480.$$

Siit $n \geqslant 32$. Näitame, et $n = 32$ korral saab ülesande tingimusi rahuldada. Jaotame 160 korrust 32 grupiks, kus igaühes on 5 korrust ehk 15 elanikku. Jaotame elanikele võtmepaarid järgnevalt (esimene võti on korruseukse ja teine korteriukse jaoks):

- Esimese grupi 15 elanikku saavad võtmepaarid $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 16)$.
- Teise grupi elanikud saavad võtmepaarid $(2, 3), (2, 4), \ldots, (2, 17)$.
- Muster jätkub, 31. grupi elanikud saavad võtmepaarid $(31, 32), (31, 1), \ldots, (31, 14)$.
- Viimase grupi elanikud saavad võtmepaarid $(32, 1), (32, 2), \ldots, (32, 15)$.

Selline võtmete jaotus sobib, selleks on vaja $n = 32$ unikaalset võtit ja $160 \cdot 3 \cdot 2 - 32 = 928$ koopiat. Lisades juurde unikaalsed 160 võtit iga korruse neljanda elaniku jaoks, saame kogumaksumuseks $(160 + 32) \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$.