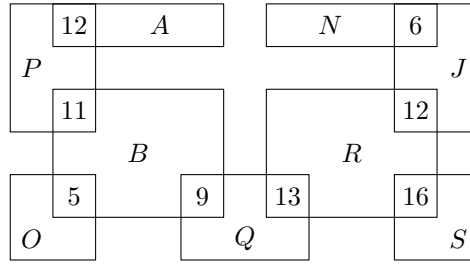


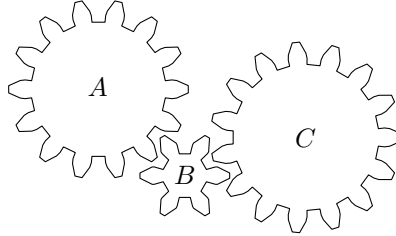
1. Feladat Az alábbi ábrán a téglalapokba írt betűk különböző, nullánál nagyobb számjegyeket jelölnek. Ahol két téglalap metszi egymást, ott a metszetbe beírtuk a két megfelelő szám összegét. Adjátok meg az ötjegyű $NABOJ$ számot!



Eredmény. 14325

Megoldás. A 16 egyféleképp állhat csak elő két különböző számjegy összegeként: $9 + 7$. Ha $R = 9$ lenne, akkor a $J = N = 3$ ellentmondáshoz jutnánk, ezért $S = 9$ és $R = 7$. Innen lépésenként meghatározhatjuk a számjegyeket: $J = 5$, $N = 1$, $Q = 6$, $B = 3$, $P = 8$, $A = 4$ és $O = 2$. Azaz $NABOJ = 14325$, amit értelmezhetünk a 2025-ös Náboj dátumaként.

2. Feladat Hány teljes fordulatot kell a C fogaskeréknek megtennie, hogy mindhárom fogaskerék visszatérjen a kiindulási pozíciójába?



Eredmény. 14

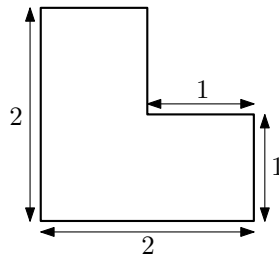
Megoldás. Az A fogaskeréknek 14, a B fogaskeréknek 6, a C fogaskeréknek pedig 15 foga van. Határozzuk meg, hány fognyit kell elfordulnia a fogaskereknek, hogy mindegyik a kiindulási helyzetébe térjen vissza! Ez a szám tehát a 14, 6 és 15 többszöröse. A legkisebb közös többszörösük a 210. Azaz a C fogaskereket 210 foggal kell elforgatni, tehát $210/15 = 14$ teljes fordulatot kell tennie.

3. Feladat Melyik a legnagyobb tízjegyű szám, melyben minden azonos számjegyekből alkotott számpár esetén van az azonos számjegyek közt legalább egy kisebb számjegy?

Eredmény. 9897989698

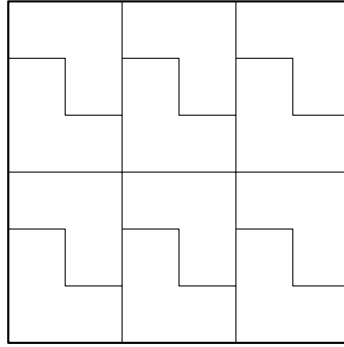
Megoldás. Építsük fel a tízjegyű számot úgy, hogy balról jobbra haladva a soron következő helyiértékre mindig a lehető legnagyobb lehetséges számjegyet választjuk, úgy, hogy a feltétel teljesüljön! Az első számjegyük legyen tehát a lehető legnagyobb, a 9. Ezután nem választhatjuk a 9-et, így ott a 8 lesz. Ismét választhatjuk a 9-et, de utána se a 9, se a 8 nem szerepelhet, ezért a 7-es lesz a következő. Ezután ismét lehet a 9, 8 és 9, de utána nem következhet a $\{9, 8, 7\}$ számjegyek egyike sem. Itt tehát a 6 lesz, majd ismét a 9, a tizedik számjegyük pedig a 8. Így az $n = 9897989698$ számhoz jutunk. Azt álltjuk, hogy ez a legnagyobb, a feltételeknek megfelelő szám. Legyen m egy másik megfelelő szám, és vizsgáljuk az első olyan számjegyet, amelyben m és n eltér. Mivel az algoritmusunk mindig a lehető legnagyobb számjegyet választotta az adott helyiértékre, $m \leq n$ a további számjegyeiktől függetlenül.

4. Feladat Milyen hosszú a legkisebb olyan négyzet oldala, amely átfedés nélkül lefedhető az ábrán látható derékszögű L alak egybevágó példányaival?

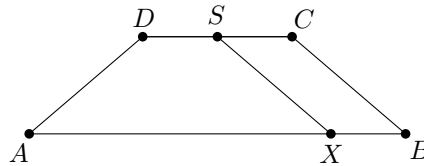


Eredmény. 6

Megoldás. A négyzet területe a triominó területének, azaz a 3-nak többszöröse. Könnyen belátható, hogy a 3×3 -as négyzet nem lefedhető, viszont a 6×6 -os négyzet lefedhető, például az alábbi módon.



5. Feladat Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz alapjai AB és CD , és az oldalaira teljesül, hogy $BC = CD = AD$. Legyen S a DC oldal középpontja, és X egy pont az AB oldalon, úgy, hogy SX párhuzamos BC -vel. Az $ABCD$ trapéz kerülete 50 és $AXSD$ kerülete 38. Adjátok meg a $XBCS$ paralelogramma kerületét!



Eredmény. 36

Megoldás. A húrtrapézok kerületeinek különbsége $XB + CS = 2 \cdot CS = CD$, ami egyenlő BC -vel és XS -el is, így az $XBCS$ paralelogramma kerülete: $3 \cdot (50 - 38) = 36$.

6. Feladat Erika kiválasztott egy kétjegyű számot, amelynek nincs 0 számjegye, és összeszorozta a megfordítottjával. Az eredmény egy négyjegyű szám, amely 3-mal kezdődik és 7-re végződik. Mi volt a szorzat két tényezője közül a nagyobbik?

Eredmény. 93

Megoldás. Legyen a szám két számjegye x és y . Megfigyelhető, hogy az Erika által kiszámolt szorzat utolsó számjegye megegyezik a két számjegy szorzatának utolsó számjegyével. Két különböző számjegy szorzataként a 7-es végződés csak kétféleképpen álltható elő: $1 \cdot 7 = 7$ és $3 \cdot 9 = 27$. Könnyen kizárhatjuk a $17 \cdot 71$ opciót, mivel a szorzat túl kicsi, azaz a helyes megoldás a $39 \cdot 93 = 3627$, a válasz pedig a 93.

7. Feladat Kartal egy hagyományos, 52 lapos francia kártyapaklival játszik, (amelyben mind a négy színből 13 lap található). Minden körben egy játékos vagy húz egy lapot, vagy kijátszik egyet a kezéből. A kijátszott lapnak színben vagy számban egyeznie kell az asztalon lévő legfelső lappal. Az eddigi körökben Kartal nagyon szerencsétlen volt, ezért sok lapot kellett húznia. Ezután gondolkozni kezdett: mi az a legkisebb N szám, amelyre igaz, hogy ha N lapot tart a kezében, akkor biztosan ki tud játszani valamit, bármi is legyen a kijátszott pakli tetején?

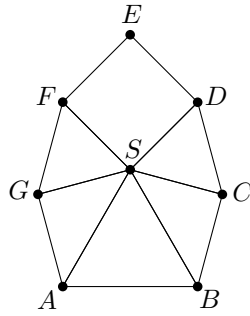
Eredmény. 37

Megoldás. Ha Kartal kezében van három szín és tizenkét szám összes kombinációja (összesen $3 \cdot 12 = 36$ lap), akkor még lehetséges, hogy a hiányzó negyedik szín vagy tizenharmadik szám van a pakli tetején. Ebben az esetben Kartal egyik lapját sem tudná kijátszani, vagyis N legalább 37.

Másfelől a pakli tetején lévő kártya színe megegyezik 12 másik kártyáéval, a száma pedig másik hároméval. Mivel összesen 52 kártya van és legalább az egyikük a kijátszott pakliban van, a Kartal kezében lévő nem kijátszható lapok maximális száma $52 - 1 - 12 - 3 = 36$, szóval 37 lappal a kezében garantáltan legalább az egyiket ki tudja játszani.

8. Feladat Az $ABCDEFGH$ hétszög hat sokszögből áll, melyeknek közös csúcsa az S pont. Ezek a sokszögek: három szabályos háromszög (ABS , CDS , FGS), két egyenlő szárú derékszögű háromszög (BCS , GAS , amelyeknek rendre

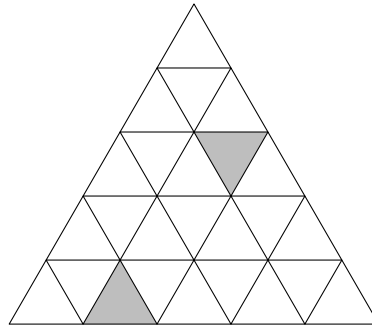
C és G pontokban van a derékszögű csúcsa) és a $DEFS$ négyzet. Határozzátok meg, hogy hány fokal az SAE szög!



Eredmény. 15

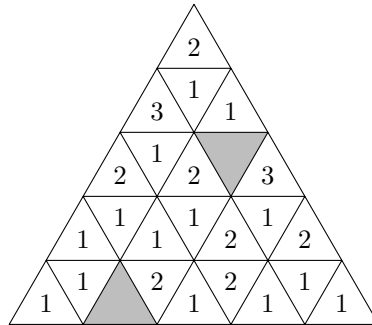
Megoldás. Mivel FGS szabályos háromszög, tudjuk, hogy $FS = GS$. Ezért a GAS és FSE egyenlő szárú derékszögű háromszögek egybevágók, amiből következik, hogy $ES = AS$. Tehát EAS egyenlő szárú háromszög. Annak ismeretében, hogy $ESA \sphericalangle = 45^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 150^\circ$, megkapjuk, hogy $SAE \sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - ESA \sphericalangle) = 15^\circ$.

9. Feladat Hány olyan háromszög olvasható ki az alábbi ábrából a rácsvonalak mentén, amely nem tartalmaz egyetlen szürke háromszöget sem?



Eredmény. 34

Megoldás. Írjuk be az összes mezőbe, hogy hány, a feltételnek megfelelő háromszög alsó, vagy felső csúcsában helyezkedik el az adott mező!



A keresett szám ezeknek a beírt értékeknek az összege.

10. Feladat Egy négyjegyű számot akkor nevezünk *érdekesnek*, ha teljesíti a következő feltételt: ha a százaski helyiértéken álló számjegyet elhagyjuk, az így keletkező háromjegyű szám pontosan az eredeti négyjegyű szám kilencede. Például a 2025 érdekes, mivel $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$. Határozzátok meg a legnagyobb érdekes négyjegyű számot!

Eredmény. 6075

Megoldás. Legyen $N = \overline{abcd}$ egy érdekes szám és $n = \overline{cd}$. Ekkor $N = 1000a + 100b + n$ és ha elhagyjuk a százaski helyiértéken lévő számjegyet, akkor megkapjuk az $M = 100a + n$ számot. Ha az $M = \frac{1}{9}N$ egyenletet megszorozzuk kilencel, megkapjuk, hogy

$$9(100a + n) = 1000a + 100b + n,$$

és átrendezés, majd négyvel való osztás után azt kapjuk, hogy

$$25(a + b) = 2n.$$

Ebből az egyenletből következik, hogy $a + b$ összege páros szám, ami kisebb, mint $\frac{2 \cdot 100}{25} = 8$, mivel $n < 100$. Ez azt jelenti, hogy $a + b$ legfeljebb 6, és ahhoz, hogy N értékét maximalizáljuk, azt kell választanunk, hogy $a = 6$ és $b = 0$, aminek eredményeképp $n = 75$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy $N = 6075$ megfelel a feladat feltételeinek.

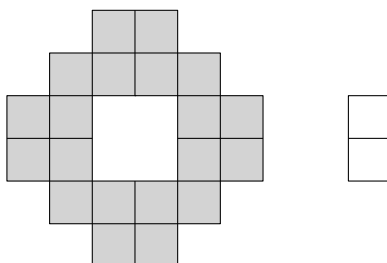
11. Feladat Egy teherhajó háromféle folyadék: etanol, olaj és higany egyidejű szállítására lett tervezve. Mindhárom folyadékból eltérő mennyiség, legfeljebb 10 tonna etanol, 30 tonna olaj, és 60 tonna higany fér el a tartályokban. A Prágától Hamburgig tartó útja során a hajó ezekből összesen 85 tonna rakományt vitt magával. A visszaúton azonos tömegű etanolt, kétszeres tömegű olajat, és harmadannyi higanyt szállított az odaúthoz képest. Összesen hány tonna rakományt szállított a teherhajó a visszaúton?

Eredmény. 60

Megoldás. Mivel a hajó rakománya az első úton 85 tonna volt, legalább 15 tonna olajat kellett, hogy szállítson. Azonban, mivel a visszaúton megduplázódott az olaj mennyisége, először legfeljebb 15 tonna olajat szállíthatott a hajó. Ezáltal tudjuk, hogy etanoltól és higanyból a maximális mennyiséget vitte odafelé. A visszaúton a teljes rakomány tömegét kiszámolhatjuk a következőképp:

$$10 + 2 \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 60.$$

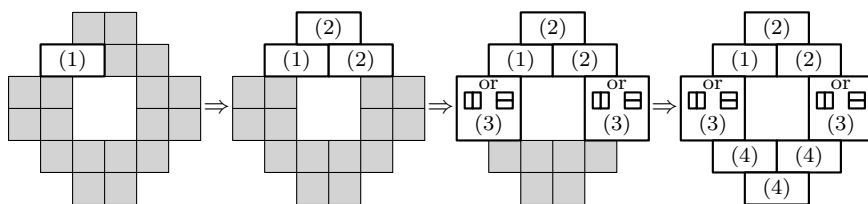
12. Feladat Határozzátok meg, hogy hány különböző módon lehet lefedni az alábbi ábrán látható szürke alakzatot dominókkal! A dominók (fehér téglalapként ábrázolva) nem fedhetik egymást, és minden dominó pontosan két szomszédos négyzetet fed le. A dominók tetszőlegesen elforgathatóak.



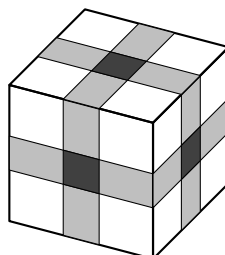
Megjegyzés: Különbözőnek tekintjük azokat a megoldásokat is, amelyek forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetők. A dominók nem lóghatnak túl az alakzat határain.

Eredmény. 8

Megoldás. Kezdjük az alakzat lefedését az egyik belső sarkától, mint ahogy az (1)-es ábrán látható! Kétféle irányba forgatva tudunk ide lerakni egy dominót, viszont ezek forgatással egymásba hozható megoldásokhoz vezetnek. Válasszuk az egyiket és a kapott eredményt szorozzuk meg 2-vel! Amint ezt a dominót elhelyezzük, a következő két dominó helyzete is adott, ahogy a (2)-es ábrán látszik. A bal és jobb oldalon látható „négyzetek” két-két módon fedhetők le (3), az ábra fennmaradó része pedig a (4)-es ábrán látható módon, egyféleképp. Tehát ennek az (1)-ben látott elhelyezésnek $2 \cdot 2 = 4$ kimenetele van. Az elforgatott elhelyezést figyelembe véve $2 \cdot 4 = 8$ -féleképp lehet lefedni az ábrát dominókkal.



13. Feladat Egy kocka alakú csomag egy olyan ragasztószalaggal van becsomagolva, melynek szélessége kisebb, mint a csomag egy élének hossza. A sötétszürkén jelölt részek összterülete (beleszámítva azokat a részeket is, amelyek az ábrán nem láthatóak) 216 cm^2 . A világosszürkén jelölt részek összterülete feleakkora, mint a ragasztószalaggal le nem fedett felszínek. Határozzátok meg a csomag egy élének hosszát!



Eredmény. 30

Megoldás. Egy sötétszürke négyzet területe $216/6 = 36$, tehát az oldalhossza $\sqrt{36} = 6$. A le nem fedett terület a csomag mindegyik oldalán a világosszürke terület kétszerese, tehát mindegyik világosszürke téglalap a fele egy fehér négyzetnek. Ez azt jelenti, hogy a csomag egy éle mentén elfér öt, egyenként 6 szélességű világosszürke téglalap, vagyis az élhossz $5 \cdot 6 = 30$.

14. Feladat Egy írószertboltban tollak, füzetek és vonalzókat kaphatók. Egy füzet ára egyenlő egy toll és egy vonalzó árának összegével. Ha egy vonalzó árát 50%-kal megemelnék, egyenlő lenne egy toll és egy füzet árának összegével. Hány százalékkal kellene egy toll árát megemelni, hogy egyenlő legyen egy füzet és egy vonalzó árával?

Eredmény. 800%

Megoldás. Legyen f egy füzet ára, v egy vonalzóé, t pedig egy tollé. Az ismert adatokból tudjuk, hogy $f = v + t$ és $\frac{3}{2}v = t + f = 2t + v$. A második egyenletből megkapjuk, hogy $v = 4t$, és ezt behelyettesítve az első egyenletbe megkapjuk, hogy $f = 5t$. Tehát a toll árát kilencszeresére kell növelnünk, vagyis 800%-kal.

15. Feladat Jelölje a és b egész számok legnagyobb közös osztóját $\text{lko}(a, b)$, és a legkisebb közös többszörösét $\text{lkkt}(a, b)$! Számítsuk ki a következő kifejezés értékét:

$$\text{lkkt}(2025, \text{lkkt}(2024, \text{lko}(2023, \text{lko}(2022, \dots \text{lkkt}(4, \text{lko}(3, \text{lko}(2, 1))) \dots))).$$

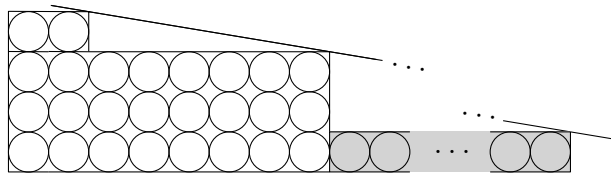
Az lko és lkkt műveletek két lépésenként váltakoznak, összesen 1012 lko és 1012 lkkt számítás szerepel a képletben. Példaképpen, ha csak kétszer fordulna elő mindkettő művelet, akkor a kifejezés $\text{lkkt}(5, \text{lkkt}(4, \text{lko}(3, \text{lko}(2, 1))))$ lenne.

Eredmény. 4 098 600

Megoldás. Vegyük észre, hogy $\text{lko}(x, x-1) = 1$ bármely x pozitív egész számra, tehát $\text{lko}(x, \text{lko}(x-1, a)) = 1$ bármely a és x pozitív egész számokra. Tehát a kifejezés értéke

$$\text{lkkt}(2025, \text{lkkt}(2024, 1)) = 2025 \cdot 2024 = 4\,098\,600.$$

16. Feladat Az alábbi ábrán három téglalap látható, amelyekben szabályosan elrendezett, egybevágó körök helyezkednek el. A téglalapok jobb felső csúcsain egy egyenes halad át, az ábra középső részét pedig helytakarékoság miatt elrejtettük. Hány kör van a szürke téglalapban?



Eredmény. 12

Megoldás. A sarkokon áthaladó egyenesből és a téglalapok oldalaiból képzett derékszögű háromszögek hasonlóak, és a hasonlóság arányszáma $2 : 1$. Tehát a szürke téglalap szélessége $2 \cdot 6 = 12$ a körök átmérőiben mérve.

17. Feladat Tamás egy 18 km-es kört futott le megállás nélkül. Stabil tempóban kezdte a futást, de egy idő után elfáradt, ezért a hátralevő szakaszt 25%-kal lassabban folytatta. A futás végén megnézte az okosóráját, és észrevette, hogy kétszer annyi ideig futott a lassabb szakaszon, mint a gyorsabb szakaszon. Mekkora távot tett meg Tamás kilométerekben mérve, mielőtt lelassított?

Eredmény. $7,2 = \frac{36}{5}$

Megoldás. Legyen v Tamás eredeti sebessége (km/h-ban számolva) és t az az idő, ameddig gyorsan futott (órában), ekkor a lassabb sebessége $\frac{3}{4}v$ és a lassabb futással töltött idő $2t$. A teljes távolság a két résztáv összege, azaz

$$18 = v \cdot t + \frac{3}{4}v \cdot 2t = \frac{5}{2}vt,$$

ezért

$$vt = \frac{18}{\frac{5}{2}} = 7,2$$

lesz az a távolság, amit gyors tempóval futott le.

18. Feladat Kata, Laura, Móni, Nati és Olívia egy közös fotót szeretnének készíteni egy hatalmas Náboj emlékmű előtt. Ehhez egy sorba állnak egymás mellé, az alábbi szigorú szabályok szerint:

- Nati jobbra áll Katától, Mónitól és Olíviától,
- Móni balra áll Katától, Natitól és Olíviától.

Hányféle sorrendben állva készíthetik el ezt a gyönyörű képet?

Eredmény. 10

Megoldás. Vegyük észre, hogy Laura kimaradt a korlátozó feltételekből, tehát ő bárhol állhat. A másik 4 lány csak kétféle sorrendben állhat (jobb oldalon Nati, középen Kata és Olívia valamilyen sorrendben, bal oldalon Móni). Így összesen 10 féle sorrendben állhatnak.

19. Feladat Egy várnak öt tornya van, melyeket egyenes falak kötnek össze. A falak 50 könyök, 70 könyök, 90 könyök, 110 könyök és 130 könyök hosszúságúak, tetszőleges sorrendben. Mekkora a leghosszabb táv könyökben mérve, amilyen messzire egy íjász egyenes vonalban ellőhet a várfalakon belül, ha a vár erre az célra legkedvezőbb módon van felépítve?

Megjegyzés: A falak vastagsága és a tornyok szélessége elhanyagolható, és az íjász által lőtt távolságot vízszintes, egyenes vonal alapján mérjük.

Eredmény. 220

Megoldás. Ha a vár alakja konkáv lenne, akkor nézzük helyette a konvex burkát. Ezzel a vár kerülete csak csökkenhetett, a váron belüli leghosszabb nyíllövés hossza csak nőhetett vagy egyenlő maradt. Most a konvex váron belüli lehető leghosszabb egyenes szakasz hosszát jelöljük ℓ -l. Be tudjuk látni, hogy akkor kapunk leghosszabb szakaszt, ha két csúcspontot kötünk össze: Ha a szakasz eredetileg nem érne el a falig, hosszabbítsuk meg a falig. Ha elér a falig, akkor valamilyen irányba tovább tudunk menni egy csúcs felé, úgy hogy az eddigi szakasszal egy tompaszöget (vagy derékszöget) zár be. Ebben az irányban található sarokpontra cseréljük le a szakasz eredeti végpontját, és így hosszabb szakaszt kapunk. Utána ugyanezt megtehetjük a szakasz másik végpontjával is, tehát végül a szakaszunk két tornyot köt össze.

A legnagyobb olyan S számot keressük, amelyre falhosszokat 2 részhalmazra lehet osztani úgy, és mindkét halmazban a hosszok összege nagyobb vagy egyenlő mint S . Tehát

$$\ell \leq S \leq \frac{50 + 70 + 90 + 110 + 130}{2} = 225$$

és mivel S 10 többszöröse lesz, így $S \leq 220$. Ezt az értéket el is lehet érni, ha így osztjuk el a falakat:

$$130 + 90 < 110 + 50 + 70.$$

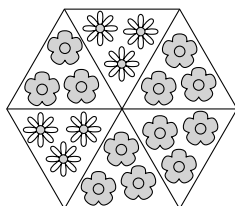
20. Feladat Panninak 8 kártyája van, mindegyik kártyán 1-től 8-ig egy-egy különböző számjegy szerepel. A számkártyáiból két négyjegyű számot alkot. Mennyi a két szám közötti lehető legkisebb különbség?

Eredmény. 247

Megoldás. A számok közti különbség akkor a legkisebb, ha a két szám a lehető legközelebb van egymáshoz. Ennek okán az ezres helyiértéken lévő számjegyek között csak 1 lehet a különbség. A százaskénti helyiértéken lévő jegy a nagyobb szám esetében a lehető legkisebb, míg a kisebb számnál a lehető legnagyobb kell, hogy legyen. Miután a százaskénti helyiértéken lévő jegyeket kiválasztjuk, ugyanezt az irányelv érvényes sorban a tízesekre, majd az egyes helyiértéken lévőkre is. Ezzel a módszerrel megkapjuk az 5123 és 4876 számokat, melyek különbsége 247.

21. Feladat Judit nagy ügy döntött, hogy hatszögletű elrendezésben, hat virágágyásba ibolyákat és százszorszépeket ültet. A szabályos hatszögben elhelyezkedő virágágyások mindegyikébe egyféle virágot ültet. Egy lehetséges elrendezés az alábbi ábrán látható. Hányféleképp ültethet virágokat úgy, hogy legalább egy olyan ágyáspár legyen, ahol a szomszédos ágyásokban azonos virág van?

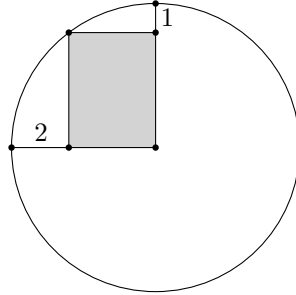
Megjegyzés: Különbözőnek tekintjük azokat a megoldásokat is, amelyek forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetők. A hat virágágyás mindegyike megkülönböztetett.



Eredmény. 62

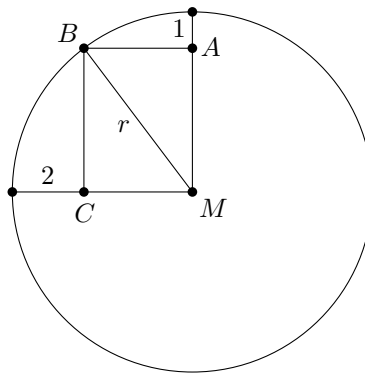
Megoldás. Ha elhagyjuk az egyforma szomszédos virágültetésre vonatkozó kitélt (tehát az összes lehetséges elrendezést keressük), akkor a válasz $2^6 = 64$. Ebből az eredményből kivonjuk azokat az eseteket, amik a fenti kitélt megszegik, vagyis amikor a kétféle virág felváltva kerül elültetésre. Mivel erre csupán két lehetőség van, a kitételnek megfelelő elrendezések száma $64 - 2 = 62$.

22. Feladat Egy kör alakú papírlapból Erik kivágott egy téglalap alakú darabot, úgy, hogy a téglalap egyik csúcsa a kör középpontjába, az ezzel szemkötti csúcsa pedig a körvonalra esik. A téglalap másik két csúcsa két különböző sugáron helyezkedik el, az egyik 1 dm-re, a másik 2 dm-re a körvonaltól. Mekkora terület maradt a körlapból dm^2 -ben mérve, miután Erik kivágta a téglalapot?



Eredmény. $25\pi - 12$

Megoldás. Legyen M a körlap középpontja és A , B és C a téglalap másik három csúcsa. A kör sugara legyen r .



Tudjuk, hogy $MA = r - 1$, $MB = r$ és $MC = r - 2$, valamint $AB = MC$. Használjuk a Pitagorasz-tételt az ABM derékszögű háromszögre, hogy megkapjuk az

$$r^2 = (r - 1)^2 + (r - 2)^2$$

egyenletet, amit a következőre egyszerűsítsünk:

$$0 = r^2 - 6r + 5 = (r - 1)(r - 5).$$

Mivel az $r = 1$ megoldás nem értelmezhető, az egyetlen helyes megoldás az $r = 5$. Így a körlap kivágás utáni megmaradt területe $r^2\pi - 3 \cdot 4 = 25\pi - 12$ (dm^2 -ben).

23. Feladat Náboicus Nagymester, az esszenciakeverés páratlan virtuózja a legendás *Algímia*, azaz az Algebra és az Alkímia tökéletes, 1:1 arányú fúziójának elkészítése előtt áll. A következő összetevők állnak rendelkezésére:

- Algebra: 80% Algebra és 20% Alkímia elegye, összesen 10 mg tömegben,
- Alkíma: 30% Algebra és 70% Alkímia elegye, összesen 14 mg tömegben.

Ezekből az összetevőkből legfeljebb hány mg Algímiát tud Náboicus kikeverni?

Megjegyzés: Náboicus, bár az egyenletek és bájitalok titkos tudója, a folyamat egyetlen pontján sem tudja a keverékeket alkotóelemeire bontani, csak továbbkeverni azokat.

Eredmény. $23\frac{1}{3} = \frac{70}{3}$

Megoldás. Ha összekeverünk x mennyiségű Algebriát és y mennyiségű Alkímrát, akkor a kapott elegy $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y$ Algebrát és $\frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$ Alkímiát tartalmaz. Ahhoz, hogy 1 : 1 arányt kapjunk, igaznak kell lennie a

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$$

egyenlőségnek, amit átrendezhetünk arra, hogy $y = \frac{3}{2}x$. Azaz minden mg Algebriához 1,5 mg Alkímrát kell hozzáadnunk. Ez azt jelenti, hogy akkor kapjuk meg a maximálisan kikeverhető Algímia mennyiségét, ha Náboicus felhasználja mind a 14 mg Alkímrát és $\frac{2}{3} \cdot 14$ mg Algebriát. Így végül $\frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3}$ mg-ot kap a legendás keverékből.

24. Feladat A $K = n^2$ szám egy négyjegyű négyzetszám, amelynek minden számjegye kisebb mint 7. Ha K minden számjegyét 3-mal megnöveljük, egy másik négyzetszámot kapunk. Határozzátok meg n értékét!

Eredmény. 34

Megoldás. Legyen $m^2 = M = K + 3333$. Mivel M és K is négyjegyű négyzetszám, tudjuk, hogy $32 \leq n < m \leq 99$, így

$$32 + 33 \leq m + n \leq 98 + 99,$$

vagyis

$$65 \leq m + n \leq 197.$$

Ugyancsak tudjuk, hogy

$$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2 = M - K = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101.$$

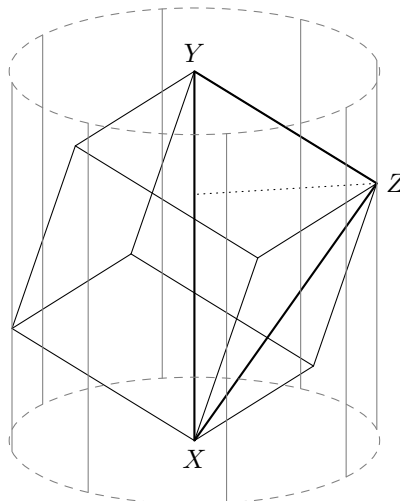
A fentiekből következik, hogy a lehetséges tényezők kizárólag $m + n = 101$ és $m - n = 33$, ami arra az eredményre vezet, hogy $m = 67$ és $n = 34$. Már csak azt kell ellenőriznünk, hogy ebben az esetben $K = 34^2 = 1156$ mindegyik számjegye 7-nél kisebb.

25. Feladat Jelölje X és Y egy 1 oldalhosszúságú kocka két egymással szemközti csúcsát, C pedig azt a hengert, amelynek felszíne tartalmazza a kocka összes csúcsát, valamint X és Y éppen C alapkörének középpontjaiba esnek. Mekkora a C henger térfogata?

Eredmény. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Megoldás. Mivel X és Y a henger alapkörének középpontjai, a henger magassága egyenlő ezek távolságával. X és Y a kocka egymással szembeni csúcsai, így a $\sqrt{3}$ hosszúságú testátló végpontjai. A henger sugarának megállapításához válasszuk a kocka bármely más Z csúcsát és számítsuk ki az XY -től való távolságát. Az XZY háromszög derékszögű Z -nél (XZ egy lapátló és YZ a kocka egyik éle) és a keresett sugár egyenlő a Z csúcs XY -től való távolságával. A hasonlóságot (vagy területarányokat) figyelembe véve ez a távolság $\sqrt{2/3}$. Így a henger térfogata

$$\pi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$



26. Feladat Egy faluban 60 ember él, mindannyian igazmondók, hazugok vagy normálisak. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazugok mindig hazudnak, míg a normálisak néha igazat mondanak, néha hazudnak. A faluban mindenki tudja mindenkiről, hogy a három közül melyik embertípusba tartozik. Egy a faluba érkező látogató az alábbi két kérdést tette fel minden falubelinek:

1. „Igaz-e, hogy a faluban legalább 31 igazmondó él?”- erre pontosan 43 igenlő válasz érkezett.
2. „Igaz-e, hogy a faluban legalább 31 hazug él?”- erre pontosan 39 igenlő válasz érkezett.

Legalább hány normális ember él a faluban?

Eredmény. 13

Megoldás. A második állítás nem lehet igaz: ha legalább 31 hazug lenne, akkor ők mind nemmel válaszolnának a kérdésre, tehát nem kaphatnánk 39 igenlő választ. Tehát legfeljebb 30 hazug van. Az igazmondók mindig igazat mondanak, ezért ők a második kérdésre nemmel válaszoltak, tehát legfeljebb $60 - 39 = 21$ igazmondó lehet.

Ebből következik, hogy az első állítás is hamis. A 43 igenlő válasz a hazugoktól és néhány normálistól érkezett. Mivel legfeljebb 30 hazug van, léteznie kell legalább $43 - 30 = 13$ normális embernek.

Teljesíti a feltételeinket, ha 17 igazmondó, 30 hazug és 13 normális van a faluban. Tehát a normális emberek minimális száma 13.

27. Feladat Egy körmérkőzésben négy csapat, A, B, C és D vett részt, bármely két csapat pontosan egy mérkőzést játszott egymással. Egy adott meccs győztese mindig 1 vagy 2 pontot kapott attól függően, hogy mennyivel nyert, míg a vesztes csapat 0 pontot kapott. Egyik mérkőzés sem lett döntetlen. Az összes meccs lejátszása után elkészítettek egy – az ábrán szereplő példához hasonló – táblázatot az eredményekről. Ha tudjuk, hogy az egyik csapat összesen 4 pontot szerzett, míg a másik három csapat mind 1 – 1 ponttal végzett, akkor hányféle lehet az elkészült táblázat?

	A	B	C	D	total
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Megjegyzés: A csapatok nevei (A, B, C, D) rögzítve vannak a táblázatban, tehát a nevek sorrendjén nem változtathatunk.

Eredmény. 24

Megoldás. Először vegyük észre, hogy a kiosztott pontok összege 7, azaz a 6 meccsből pontosan egyszer fordult elő, hogy a győztes csapat 2 pontot szerzett, minden más meccsen 1 pontot ért a győzelem. Tehát a legerősebb csapat mindenkit megvert, és ezen meccsek közül egyszer nagy különbséggel győzött. A másik három csapat közötti meccsek “körbeverést” mutatnak, hiszen mindenki 1 pontot szerzett. A kört kétféleképpen irányíthatjuk meg. Összességében $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ -féleképpen történhetett a bajnokság.

28. Feladat Júlia felírta a 2025 számot egy M tagú összegként, ahol minden tag 10-nek egy hatványa (azaz 10^n alakú, ahol n egy nemnegatív egész szám). Az összegben ugyanaz a tag többször is szerepelhet. Hány különböző M -re tehette ezt meg Júlia?

Eredmény. 225

Megoldás. Látható, hogy M lehető legkisebb értéke 9, mert

$$2025 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Ha $k \geq 1$, akkor minden $10^k = 10 \cdot 10^{k-1}$ alakú helyettesítés 9-cel növeli meg az összeadandók számát. Ebből következik, hogy M mindig osztható 9-cel, és hogy M lehetséges értékei 9 többszöröseinek egy összefüggő halmazát alkotják. M lehető legnagyobb értéke 2025, mert

$$2025 = 2025 \cdot 10^0.$$

Tehát M különböző lehetséges értékeinek száma

$$\frac{2025 - 9}{9} + 1 = 225.$$

29. Feladat Misi és Pál a hátukat egymásnak támasztva állnak egy vasútállomás peronján. Egy tehervonat állandó sebességgel elhalad mellettük. Abban a pillanatban, amikor a vonat eleje velük egy vonalba ér, mindketten elkezdnek azonos állandó sebességgel sétálni egymással ellentétes irányba. A vonat hátulja akkor ér Misivel egy vonalba, amikor ő 45 méter távolságban van a kiindulási pontjától, majd röviddel ezután a vonat hátulja egy vonalba ér Pállal, aki ekkor 60 méterre van a kiindulási pontjától. Hány méter hosszú a tehervonat?

Eredmény. 360

Megoldás. Legyen t_1 az idő onnantól, amikor a vonat eleje elhalad Misi és Pál mellett, addig a pillanatig, amikor a vonat hátulja elhalad Misi mellett. Hasonlóan, legyen t_2 az időkülönbség aközött, amikor a vonat hátulja elhalad Misi mellett, addig, amikor elhalad Pál mellett. Legyen ℓ a vonat hossza méterben. Mivel Misi és Pál azonos sebességgel sétálnak, és t_1 idő alatt Misi 45 métert tett meg, Pál pedig t_2 idő alatt $60 - 45 = 15$ métert tett meg, a két időintervallum aránya

$$t_1 : t_2 = 45 : 15 = 3 : 1.$$

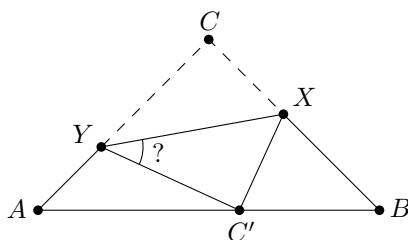
Most nézzük a vonat mozgását. Az első szakaszban t_1 idő alatt a vonat $\ell - 45$ métert haladt, hiszen kezdetben az eleje volt a Misiéknél, és az idő végén a vonat vége 45 méterrel hátrébb volt. Ezután t_2 idő alatt a vonat vége 105 métert tesz meg Misi és Pál között. Tehát a vonat sebessége

$$v = \frac{105}{t_2}.$$

A vonat teljes hossza

$$\ell = vt_1 + 45 = \frac{t_1}{t_2} \cdot 105 + 45 = 3 \cdot 105 + 45 = 360.$$

30. Feladat Egy egyenlő szárú, derékszögű ABC háromszöget, amelynek a derékszöge a C csúcsnál van, összehajtunk egy XY szakasz mentén úgy, hogy a C csúcs egy C' pontba kerül az AB oldalra. Tudjuk azt is, hogy $BC' = BX$. Hány fokok a $C'YX$ szög?



Eredmény. $33.75^\circ = \frac{135}{4}^\circ$

Megoldás. Mivel az $XC'B\triangle$ egyenlő szárú,

$$C'XB \sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67,5^\circ.$$

Továbbá $CXY \sphericalangle = YXC' \sphericalangle$ teljesül a hajtás miatt, így

$$YXC' \sphericalangle = \frac{1}{2}(180^\circ - 67,5^\circ) = 56,25^\circ.$$

Végül $XC'Y \sphericalangle = YCX \sphericalangle = 90^\circ$, azaz

$$C'YX \sphericalangle = 180^\circ - XC'Y \sphericalangle - YXC' \sphericalangle = 33,75^\circ.$$

31. Feladat Tekintsük az összes $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$ halmaz elemeiből alkotható szigorúan növekvő számnégyesek sorozatát lexikografikus sorrendben:

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), (0, 1, 2, 5), \dots, (12, 13, 14, 15).$$

Tehát (a_1, a_2, a_3, a_4) pontosan akkor előzi meg ebben a sorbarendezésben (b_1, b_2, b_3, b_4) -et, ha

$$a_1 < b_1 \quad \text{vagy} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{vagy} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 < b_4.$$

Hányadik helyen szerepel a sorozatban a $(2, 4, 7, 14)$ számnégyes?

Eredmény. 911

Megoldás. Vegyük észre, hogy $k \leq n$ -re az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz elemeiből választott szigorúan növekvő szám- k -asok száma $\binom{n}{k}$, mivel a szigorúan növekvő szám- k -asok egyértelműen megfeleltethetők a k elemű részhalmazoknak! Általánosabban, azon szigorúan növekvő szám- k -asok száma, amelyek elemei a $\{m, m+1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, pontosan $\binom{n-m+1}{k}$. Hogy meghatározzuk a keresett számnégyes helyzetét, számoljuk össze az azt sorrendben megelőző összes számnégyest, az ismert elemeik alapján rendezve:

- $(0, *, *, *)$: ilyen számnégyesből $\binom{15}{3} = 455$ van;
- $(1, *, *, *)$: ilyenből $\binom{14}{3} = 364$;
- $(2, 3, *, *)$: ilyenből $\binom{12}{2} = 66$;
- $(2, 4, a, *)$, ahol $a \in \{5, 6\}$: ilyenből $\binom{10}{1} + \binom{9}{1} = 19$;
- $(2, 4, 7, b)$, ahol $b \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$: ilyen számnégyesből pedig 6 van.

Azaz a $(2, 4, 7, 14)$ számnégyes a $455 + 364 + 66 + 19 + 6 + 1 = 911$. helyen szerepel.

32. Feladat Két gazdálkodó, Ádám és Betti almát árusított a piacon. Ketten együtt 100 almát adtak el. Ádám egy almát a pengőért, Betti pedig b pengőért árult. Miután mindketten eladták az összes almájukat, pontosan ugyanannyi pengőt kerestek meg. Ádám megállapította, hogy ha az almáit Betti árai szerint, vagyis b pengőért árusította volna, akkor 45 pengőt keresett volna. Betti azt is hozzátette, hogy ha ő a saját almáit Ádám árain árulta volna, akkor ő 20 pengőt keresett volna. Hány almát adott el Ádám?

Eredmény. 60

Megoldás. Legyen A és B rendre az Ádám és Betti által eladott almák száma! Tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} A + B &= 100, \\ A \cdot a &= B \cdot b, \\ A \cdot b &= 45, \\ B \cdot a &= 20. \end{aligned}$$

Behelyettesítve $b = \frac{45}{A}$ -t és $a = \frac{20}{B}$ -t a második egyenletbe

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{20}{B} &= B \cdot \frac{45}{A}, \\ \frac{A^2}{B^2} &= \frac{45}{20} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Ebből $A = \frac{3B}{2}$, amit az első egyenletbe visszahelyettesítve $\frac{3B}{2} + B = \frac{5B}{2} = 100$, azaz $B = 40$ és $A = 100 - 40 = 60$.

33. Feladat Zsuzsi egy elbűvölő számról álmodott. Ez a legnagyobb háromjegyű szám a következő egyedülálló tulajdonsággal: a számot megkapjuk, ha összeadjuk a százások helyén álló számjegyet, a tízesek helyén álló számjegy négyzetét és az egyesek helyén álló jegy köbét. Melyik számról álmodott Zsuzsi?

Eredmény. 598

Megoldás. Legyen a , b és c a százások, tízesek és egyesek helyén álló számjegye a háromjegyű N számnak. Ha $c = 9$, $N > 9^3 = 729$, tehát a csak 7 vagy 8 lehet, azonban egyik esetben sem találunk olyan b -t, amellyel $729 + a + b^2$ utolsó jegyét 9-cé tudnánk tenni.

A következő lehetőségünk $c = 8$. Mivel $8^3 = 512$, a -nak 5-nek vagy 6-nak kell lennie, de

$$N \leq 512 + 9^2 + 6 = 599 < 600,$$

tehát a csak 5 lehet. Ehhez olyan b -re van szükségünk, ami kielégíti a következő egyenletet:

$$512 + b^2 + 5 = 8 + 10b + 500$$

vagyis

$$b^2 - 10b + 9 = 0,$$

ennek megoldásai $b = 1$ és $b = 9$. Mindkét szám lehetséges:

$$518 = 5 + 1^2 + 8^3 \quad \text{and} \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3.$$

(Ezzel egyenértékű, ha észrevesszük, hogy b^2 egyes helyi értékén álló számnak 1-nek kell lennie.)

Ha $c \leq 7$, akkor

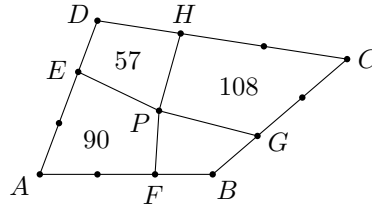
$$N \leq 7^3 + 9^2 + 9 = 433 < 598,$$

így a lehető legnagyobb N az 598.

34. Feladat Az $ABCD$ négyszög mind a négy oldalát három egyenlő részre osztja két-két rajta fekvő pontja a következőképp:

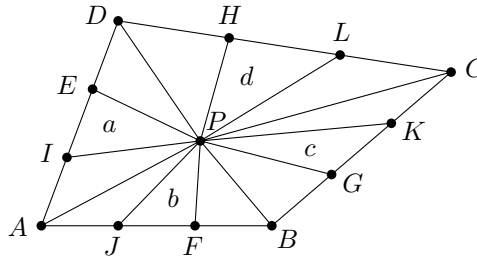
- Az E pont az AD szakaszon helyezkedik el úgy, hogy $AE : ED = 2 : 1$.
- A H pont a CD szakaszon helyezkedik el úgy, hogy $CH : HD = 2 : 1$.
- Az F pont az AB szakaszon helyezkedik el úgy, hogy $AF : FB = 2 : 1$.
- A G pont a CB szakaszon helyezkedik el úgy, hogy $CG : GB = 2 : 1$.

Egy P pont a négyszög belsejében helyezkedik el, és a P pontot az E, F, G, H pontokkal összekötve a négyszöget négy kisebb négyszögre bonthatjuk. Ezek közül három négyszög területét az ábrán megadtuk. Mekkora a negyedik négyszög, $PFBG$ területe?



Eredmény. 42

Megoldás. Ha összekötjük P -t minden ponttal, ami $ABCD$ oldalait harmadokra osztja, tizenkét háromszöget kapunk.



Az egyes oldalakhoz tartozó mindhárom háromszögnek ugyanakkora a területe, mivel ugyanaz a magasságuk P -ig, és ugyanolyan hosszú az alapjuk is. Legyen a a PEI háromszög területe, b a PJF háromszögé, c a PGK háromszögé és d a PLH -é. A megadott információk alapján a következő egyenletek írhatók fel:

$$90 = 2a + 2b, \quad 57 = a + d, \quad 108 = 2c + 2d.$$

A $PFBG$ négyszög területét $b + c$ adja meg, amit kifejezve

$$b + c = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) - (a + d) = \frac{1}{2}(90 + 108) - 57 = 42.$$

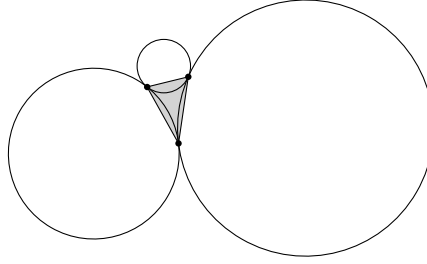
35. Feladat Egy 4×4 -es négyzetrács középső 4 négyzetét eltávolítottuk, így egy tizenkét négyzetből álló gyűrűt kaptunk. Hányféleképpen tudunk kiválasztani négy négyzetet ebből a gyűrűből, úgy, hogy a gyűrű mindegyik oldalán ki legyen választva legalább 1 négyzet?

Megjegyzés: Egy sarokmező mindkét oldalhoz hozzátartozik. Különbözőnek tekintjük azokat a megoldásokat is, amelyek forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetők.

Eredmény. 237

Megoldás. Összesen $\binom{12}{4} = 495$ -féleképpen választhatunk ki 4 mezőt egy 12 mezőt tartalmazó gyűrűből. Minden oldalra igaz, hogy nyolc olyan mező van, ami nem része az adott oldalnak, tehát $\binom{8}{4} = 70$ -féleképpen tudunk négy négyzetet úgy kiválasztani, hogy az adott oldalról ne válasszunk ki négyzetet, azaz $495 - 4 \cdot 70 = 215$ lehetőség lenne, amikor egy oldal sem marad ki. Azonban többször vontuk ki azokat az eseteket, amikor két oldalról sem választottunk ki négyzetet. Ezt úgy lehetséges megvalósítani, ha egy sarok körüli 5 mezőből választunk ki 4-et (ez sarkonként 5 lehetőség, összesen 20), vagy a két-két szemközti oldal közepéről választjuk ki a négy mezőt (összesen 2 lehetőség). Összeszámolva $215 + 22 = 237$ lehetőségünk van, és mivel három vagy négy oldalt nem tudunk egyszerre kihagyni, ez a végső válasz.

36. Feladat Három kör sugarai rendre 1, 2, 3 és páronként kívülről érintik egymást, ahogy az ábrán is látható. A három érintési pont egy háromszöget alkot. Határozzátok meg a háromszög területét!



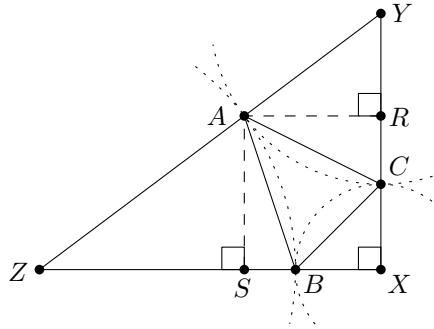
Eredmény. $\frac{6}{5}$

Megoldás. Jelölje a körök középpontját rendre X , Y és Z , továbbá legyenek az érintési pontok A , B és C a lenti ábra szerint! Az XYZ háromszög oldalai kielégítik a Pitagorasz-tételt ($1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, és $2 + 3 = 5$), így $XYZ\triangle$ derékszögű, X -nél a derékszöggel. Hogy az $ABC\triangle$ keresett területét megkapjuk, vonjuk ki $XYZ\triangle$ területéből, $\frac{1}{2}(3 \cdot 4) = 6$ -ból az XCB , YAC és ZBA egyenlő szárú háromszögek területét!

- $XCB\triangle$ derékszögű, így a területe $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.
- Hogy az $YAC\triangle$ területét megkapjuk, szükségünk van az AR magasságra. Mivel $RYA\triangle$ és $XYZ\triangle$ hasonlóak, és a hasonlóság arányszáma $YA/YZ = \frac{2}{5}$, megkapjuk, hogy $AR = \frac{2}{5}ZX = \frac{8}{5}$. Ebből $YAC\triangle$ területe $\frac{1}{2}(\frac{8}{5} \cdot 2) = \frac{8}{5}$.
- Hasonlóan kaphatjuk meg $ZBA\triangle$ területét is. Felhasználva a $SAZ\triangle \sim XYZ\triangle$ hasonlóságot $\frac{3}{5}$ arányszámmal, $AS = \frac{9}{5}$, így a $ZBA\triangle$ területe $\frac{1}{2}(\frac{9}{5} \cdot 3) = \frac{27}{10}$.

Végül kiszámíthatjuk a keresett területet:

$$6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$



37. Feladat Ágnes rajzolt egy szabályos n -szöget (ahol $n > 3$), és megszámolta az átlóit. Észrevette, hogy az átlók száma 2025 többszöröse. Mi a lehető legkisebb n , amire ez teljesül?

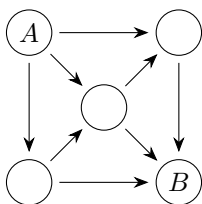
Megjegyzés: A sokszög oldalait nem számoljuk átlóknak.

Eredmény. 300

Megoldás. Könnyen belátható, hogy egy n -szög átlóinak száma $\frac{1}{2}n(n-3)$. Mivel 2025 páratlan, a feladat kérdésével egyenértékű, hogy a $P = n(n-3)$ szorzat mikor osztható 2025-tel. Mivel $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, illetve 3 és 5 (relatív) prímek, P -nek oszthatónak kell lennie $3^4 = 81$ -gyel és $5^2 = 25$ -tel. Vegyük észre, hogy csak az egyik tényező lehet osztható öttel, így annak kell 25-tel is oszthatónak lennie. Ezzel szemben n pontosan akkor osztható 3-mal, ha $n-3$ is osztható 3-mal, így mindkét tényező hozzájárul P 3-as prímtenyezőihez, viszont n és $n-3$ közül csak egy lehet osztható 3^k -nal $k \geq 2$ -re. Ez azt jelenti, hogy az egyik tényezőnek oszthatónak kell lennie $3^3 = 27$ -tel.

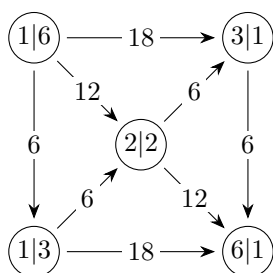
Ha az egyik tényező lenne osztható mind 25-tel, mind 27-tel, legalább $25 \cdot 27 = 675$ -nek kéne lennie. Vizsgáljuk meg, hogy találunk-e ennél kisebbet, ha az egyik tényező (m) osztható 27-tel, és a másik tényező ($m \pm 3$) osztható 25-tel (így vagy $n = m$, vagy $n = m + 3$). Az első feltétel alapján $m = 27k$ alakban felírható valamely pozitív egész k -ra, és minket k legkisebb értéke érdekel, amire $27k \pm 3$ osztható 25-tel (valamelyik előjel választása esetén). Mivel $25k$ mindig osztható 25-tel, elegendő, ha $2k \pm 3$ oszthatóságát vizsgáljuk. A legkisebb 25-tel oszthatót $k = 11$ és a pozitív előjel választása esetén kapjuk, így $m = 27 \cdot 11 = 297$ és $n = m + 3 = 300$.

38. Feladat Dávid útra kel az alábbi térképen. Az A pontból indul és a B pontban fejezi be az útját. Minden lépésben a nyilaknak megfelelő irányban halad, kivéve egyszer, amikor egy lázadó lépést tesz: ekkor a nyíllal ellentétes irányban lép két mező között. Az utazása során pontosan egyszer tesz lázadó lépést. (Azt is megteheti, hogy ideiglenesen elhagyja a célállomást.) Az útja során bármelyik nyilat akárhányszor használhatja. Hányféleképpen teheti meg Dávid a feltételeknek megfelelően ezt az utazást?



Eredmény. 84

Megoldás. Minden csúcsához kiszámíthatjuk (1) azon (irányított) utak számát, melyek A -ból az adott csúcsba vezetnek, (2) azon utak számát, amelyek az adott csúcsból B -be visznek. A lenti ábrán például a jobb felső csúcsnál $3|1$ azt jelenti, hogy pontosan három út van, amely a kezdőpontnál indul és itt végződik, és innen csak egyféleképpen juthatunk a célba. Minden nyílhoz az ellentétes irányban átmenő utak száma a végpontnál levő csúcs első számának és a kezdőpontnál levő csúcs második számának a szorzata, így ha kiszámítjuk ezeket a szorzatokat, és összeadjuk minden nyílra a hozzájuk tartozó járulékot, megkapjuk a végeredményt, ami 84.



39. Feladat Az alábbi számításban a különböző betűk különböző nemnulla számjegyeket jelölnek.

$$\begin{array}{r}
 N \quad N \quad N \quad N \quad N \\
 + \quad A \quad A \quad A \quad A \\
 \quad \quad + \quad B \quad B \quad B \\
 \quad \quad \quad + \quad O \quad O \\
 \quad \quad \quad \quad + \quad J \\
 - \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \\
 \hline
 = \quad N \quad A \quad B \quad O \quad J
 \end{array}$$

Határozzátok meg a $NABOJ$ ötjegyű szám lehető legnagyobb értékét!

Eredmény. 18249

Megoldás. Az összeadást ekvivalensen átalakíthatjuk:

$$\begin{array}{r}
 N \quad N \quad N \quad N \quad N \\
 + \quad A \quad A \quad A \quad A \\
 \quad \quad + \quad B \quad B \quad B \\
 \quad \quad \quad + \quad O \quad O \\
 \quad \quad \quad \quad + \quad J \\
 - \quad N \quad A \quad B \quad O \quad J \\
 \hline
 = \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5
 \end{array}$$

majd tovább egyszerűsíthetjük:

$$\begin{array}{r}
 N \quad N \quad N \quad N \\
 + \quad A \quad A \quad A \\
 \quad \quad + \quad B \quad B \\
 \quad \quad \quad + \quad O \\
 \hline
 = \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5
 \end{array}$$

Egyértelműen következik, hogy $N = 1$. Ezt felhasználva $\overline{AAA} + \overline{BB} + O = 2025 - 1111 = 914$, amiből $A = 8$ -ra jutunk. Tovább egyszerűsítve $914 - 888 = 26$, azaz $B = 2$ és $O = 4$. J értéke tetszőleges, a már használtaktól eltérő lehet, azaz a $NABOJ$ kifejezés legnagyobb lehetséges értéke 18249.

40. Feladat Ötszáz Náboj szervező szavazott a verseny feladataira. Minden feladat esetén minden jelen lévő szervező dönt, hogy támogatja vagy ellene szavaz. Azonban már az első feladatra való szavazás után pár szervező, akik támogatták a feladatot, fárasztónak gondolták ezt a rendszert és elhagyták a termet. A feladat ellenzői közül senki sem távozott. Amikor a második feladatról szavaztak, ugyanannyian támogatták, mint az első feladatot, viszont harmadannyi szervező szavazott ellene, mint az első feladat ellen. Tudjuk, hogy pontosan 120 szervező támogatta mindkét feladatot és 70 szervező szavazott mindkét feladat ellen. Hány szervező hagyta el a termet az első szavazás után?

Eredmény. 150

Megoldás. Jelölje IN azoknak a szervezőknek a számát, akik az első szavazás során igennel, a második szavazás során pedig nemmel szavaztak, és definiáljuk hasonlóan az II , NN és NI mennyiségeket! Ezen kívül legyen IX a távozó szervezők száma! Ekkor a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} II + IN + NI + NN + IX &= 500 \\ II + IN + IX &= II + NI \\ NI + NN &= 3(IN + NN) \end{aligned}$$

Behelyettesítve $II = 120$ -at és $NN = 70$ -et, majd átrendezve a tagokat, azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rrrrr} IN & + & NI & + & IX & = & 310 \\ IN & - & NI & + & IX & = & 0 \\ -3IN & + & NI & & & = & 140 \end{array}$$

A második egyenletet kettővel szorozva, majd mindhárom egyenletet összeadva $3IX = 450$, tehát $IX = 150$, a másik két ismeretlen pedig $IN = 5$ és $NI = 155$.

41. Feladat Határozzátok meg az olyan (a, b) párok számát, ahol $a \leq b$ pozitív egész számok, továbbá $\text{luko}(a, b)$, a és b egy számtani sorozatba rendezhetők, amelynek összege 2025.

Megjegyzés: a számtani sorozat egy olyan sorozat, ahol a szomszédos tagok közötti különbség állandó.

Eredmény. 12

Megoldás. Legyen $g = \text{luko}(a, b)$! Ekkor $a = ga'$ és $b = gb'$ valamilyen a' , b' pozitív egészekre. Mivel $g \leq a \leq b$, a háromtagú számtani sorozat (g, a, b) vagy a fordítottja; mindenesetre $a - g = b - a$, avagy $b = 2a - g$. Miután ezt leosztjuk g -vel, $b' = 2a' - 1$ -et kapjuk. Az összegre vonatkozó feltételből

$$g + a + b = g(1 + a' + 2a' - 1) = 3ga' = 2025,$$

azaz $ga' = 675 = 3^3 5^2$. Ennek a számnak $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ pozitív osztója van, és már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy minden osztóhoz tartozik-e érvényes érték a' -re, azaz tényleg tudunk belőle (a, b) párt generálni. És valóban, ha $b' = 2a' - 1$, $g = 675/a'$, $a = ga' = 675$, $b = gb'$, akkor $a \leq b$ is teljesül, mivel $ga' \leq g(2a' - 1)$ bármilyen pozitív a' , g egészekre, ezen felül

$$\text{luko}(a, b) = \text{luko}(ga', g(2a' - 1)) = g \cdot \text{luko}(a', 2a' - 1) = g,$$

mivel a' és $2a' - 1$ relatív prímek minden pozitív egész a' -re.

42. Feladat Az Óvodai Náboj versenyen 16 számozott feladat van, és minden csapat kezdetben az első három feladatot kapja meg. Minden csapatnak van egy saját feladatkupaca, de minden feladatkupac ugyanazt a 16 feladatot tartalmazza, ugyanolyan sorrendben. Amikor egy csapat megold egy feladatot, megkapják a saját feladatkupacukból a legkisebb sorszámú feladatot, amit eddig még nem osztottak ki nekik. A verseny végén azt vettük észre, hogy a megoldott feladatok halmaza minden csapatnál más volt. Mi lehetett a versenyen részt vevő csapatok maximális száma?

Eredmény. 697

Megoldás. Vegyük észre, hogy a megoldott feladatok halmaza teljesen meghatározott a nem megoldott feladatok halmaza által és fordítva; ezt pedig hasonlóan egyértelműen vizsgálhatjuk a verseny végén a csapat asztalán maradt feladatok halmazán keresztül, ami lehet bármilyen legfeljebb háromelemű halmaz. Tehát összesen legfeljebb

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 697$$

csapat versenyez.

43. Feladat Legyenek a, b, c, d valós számok, amelyekre teljesül, hogy

$$2a + 2b - ab = 2025,$$

$$2b + 2c - bc = 47,$$

$$2c + 2d - cd = 5.$$

Adjátok meg $2a + 2d - ad$ értékét!

Eredmény. 51

Megoldás. Felhasználva, hogy $(x - 2)(y - 2) = xy - 2x - 2y + 4$, a megadott feltételeket át lehet alakítani a következőképpen:

$$(a - 2)(b - 2) = -2021,$$

$$(b - 2)(c - 2) = -43,$$

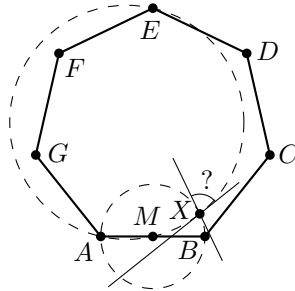
$$(c - 2)(d - 2) = -1$$

és a mi célunk, hogy megtaláljuk $(a - 2)(d - 2)$ -t. Mivel $b \neq 2$ és $c \neq 2$ a második egyenlet miatt, a keresett kifejezést megkaphatjuk a következő módon:

$$(a - 2)(d - 2) = \frac{(a - 2)(b - 2)(c - 2)(d - 2)}{(b - 2)(c - 2)} = \frac{(-2021) \cdot (-1)}{-43} = -47.$$

Így $2a + 2d - ad = -(-47) + 4 = 51$.

44. Feladat Az $ABCDEFGG$ szabályos hétszögben legyen M az AB oldal felezőpontja. Egy kör, amelynek középpontja M és átmegy az A ponton, az AME háromszög körülírt körét az X pontban metszi, ahol X a hétszög belsejében van. Az X pontban megrajzoltuk mindkét kör érintő egyenesét. Hány fokos a két érintő által bezárt hegyesszög?



Eredmény. $540^\circ/7$

Megoldás. Mivel $ABCDEFGG$ egy szabályos hétszög, AME derékszög és AE az átmérője a nagyobb körnek. Ahelyett, hogy az érintők szögét meghatároznánk X -ben, egyenértékű, ha az érintők szögét A -ban vizsgáljuk, ami a két kör másik metszéspontja. Ez a szög viszont megegyezik BAE -gel, ahogy a két átmérő találkozik, ugyanis az átmérők rendre merőlegesek az érintőkre. A szög nagysága, $\frac{3}{7} \cdot 180^\circ$ könnyen megkapható a szabályos hétszög szimmetriájából, vagy abból, ha észrevesszük, hogy az egy $\frac{3}{7} \cdot 360^\circ$ -os középponti szöghöz tartozó kerületi szög a szabályos hétszög köréírt körében.

45. Feladat Határozzátok meg a $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \dots \pm 2^{99})^2$ kifejezés összes lehetséges értékének az összegét (a $100 \pm$ előjel összes lehetséges kiértékelését nézve)!

Eredmény. $\frac{2^{100} \cdot (4^{100} - 1)}{3}$

Megoldás. Egy általánosabb megfigyeléssel indítunk: bármely pozitív egész n -re és valós $x_1, x_2, \dots, x_n$ -ekre, ha összeadjuk $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2$ összes lehetséges értékét az előjelek minden kombinációjával, az eredmény mindig

$$2^n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Hogy belássuk, hogy ez miért van így, fejtsük ki gondolatban $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2$ -et! Minden kifejtésben négyzetes x_i^2 tagok és $\pm 2x_i x_j$ alakú vegyes tagok lesznek, ahol $i \neq j$. Minden x_i^2 tag megjelenik minden lehetséges kifejtésben az előjelek választásától függetlenül, és mivel 2^n lehetséges előjel-kombináció van, ezek a négyzetes tagok 2^n -szer szerepelnek az összegben. Másrészt a $\pm 2x_i x_j$ vegyes tagok az esetek pontosan felében szerepelnek pozitív és a felében negatív előjellel, attól függően, hogy x_1 -nek és x_j -nek azonos-e az előjele. Mivel ezek a járulékok az összes

előjelkombinációra kinullázzák egymást, nem befolyásolják a végső összeget. Így a teljes összeg leegyszerűsödik 2^n -szer a négyzetes tagok összegére, ezzel igazolva a képlet helyességét.

Esetünkben $x_k = 2^{k-1}$, így a kívánt összeg

$$2^{100} \cdot (1 + 4^1 + \dots + 4^{99}).$$

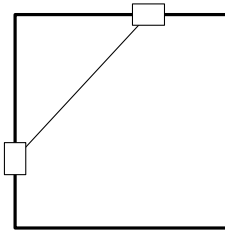
A mértani sor összegképletét felhasználva

$$1 + 4^1 + \dots + 4^{99} = \frac{4^{100} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{100} - 1}{3},$$

Így a végső eredmény

$$\frac{2^{100} \cdot (4^{100} - 1)}{3}.$$

46. Feladat Két gumiszalaggal összekötött autó mozog az ábrán látható négyzet alakú úton. Kezdetben ugyanabból a pontból, a négyzet egyik sarkából indulnak. Mindkét autó egyenletes sebességgel halad, ahol a sebességeik egész számok. A gumiszalag extrém rugalmas, de ha pontosan a négyzet átlójában van kifeszítve, akkor elszakad. A lassabb autó sebessége 24 km/h, a gyorsabb autóé pedig n km/h, és azonos irányban haladnak. Határozzátok meg a lehető legkisebb $n > 24$ egész értékét, hogy a gumiszalag sohase szakadjon el!



Eredmény. 56

Megoldás. Nevezzük *szakasznak* a négyzet alakú út egy oldalát, és legyen $m = 24$ és $n > m$ rendre a lassabb és gyorsabb autó sebességei! Megfigyelhetjük, hogy az, hogy a gumiszalag elszakad, csak a sebességek arányától függ, az abszolút értékektől nem. Így legyenek m' és n' relatív prím egészek, miközben $m' : n' = m : n$! Azt állítjuk, hogy a szalag pontosan akkor nem szakad el, amikor $n' - m'$ a 4 többszöröse.

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor $n' - m'$ nem a 4 többszöröse! Miután a lassabb autó m' szakasznit haladt, a négyzet egy sarkában van. Eközben a gyorsabb autó a sebességek aránya miatt n' szakasznit haladt, és ő is egy sarokban van. Mivel $n' - m'$ nem osztható 4-gyel, ezek a sarkok nem eshetnek egybe. Ha éppen szemközti sarkokban vannak, a gumiszalag azonnal elszakad. Ha szomszédos sarkokban vannak, újabb m' és n' szakasz megtétele után már szemközti sarkokban lesznek, és a gumiszalag ugyanúgy elszakad.

Most tegyük fel, hogy $n' - m'$ a 4 többszöröse! Először vegyük észre, hogy az autók nem lehetnek mindketten egy sarokban, mielőtt a lassabb autó m' szakaszt megtett! Ellenkező esetben egy valamilyen $s < m'$ egészre a gyorsabb autónak $\frac{s}{m'} \cdot n'$ szakaszt kéne megtennie, ami viszont nem lehet egész, mert m' és n' relatív prímek. Tehát az első alkalom, amikor mindkét autó egyszerre ér egy sarokba, az az, amikor a lassabb autó m' szakaszt tett meg, a gyorsabb pedig n' -t. Mivel feltettük, hogy $n' - m'$ a 4 többszöröse, ez a két sarok megegyezik, azaz ugyanoda érkeznek. Ezek után a folyamat előről kezdődik (esetleg egy másik sarokból), tehát a gumiszalag nem szakad el.

Már csak a legkisebb $n > 24$ -et kell megtalálnunk, ami teljesíti a fenti feltételt. Tudjuk, hogy $n' - m'$ -nek oszthatónak kell lennie 4-gyel. Ebben az esetben mind m' és n' páratlanok. Mivel m' osztója $m = 24$ -nek, a lehetséges értékei 1 és 3. Ha $m' = 1$, a legkisebb n' , ami m' -vel relatív prím, és $n' - 1$ a 4 többszöröse, az 5. Ekkor $n = \frac{24}{1} \cdot 5 = 120$. Ha $m' = 3$, a legkisebb n' , ami relatív prím m' -vel, miközben $n' - 3$ osztható 4-gyel, a 7. Ekkor $n = \frac{24}{3} \cdot 7 = 56$. Mivel 56 kisebb mint 120, arra jutottunk, hogy a legkisebb lehetséges érték n -re az 56.

47. Feladat Egy asztalnál 2025 ember ül és egy játékot játszanak. Minden kör végén a vesztes játékos a többieknek érmekeket ad, mindenkinek pontosan annyit, amennyit az adott nem vesztes játékos éppen birtokolt (azaz különböző játékosok kaphatnak különböző mennyiségű érmet). Miután lement 2025 kör, minden játékosnál pontosan 2^{3000} érme van. Egyik játékos sem került adósságba a játék során. Ha minden játékos pontosan egy kört veszített el, határozzuk meg, hány érmeje volt a játék legelején annak a játékosnak, aki az első körben veszített!

Eredmény. $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot (1 + 2025 \cdot 2^{2024})$

Megoldás. Jelöljük a játékosokat a 1, 2, ..., 2025 számokkal, és a p játékos által birtokolt érme mennyiségét r kör után $m_{p,r}$ -rel! Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy az 1-es játékos veszítette el az első kört, a 2-es a másodikot, és így tovább. Jelölje $M = 2^{3000}$ a játék végén a játékosok által birtokolt érme számát!

Egy p játékos, miután a p -edik kört elvesztette, minden további kör végén megduplázza az érméinek számát, amíg az a játék végére eléri az M értéket; így egy tetszőleges $r \geq p$ körre az érméinek száma

$$m_{p,r} = \frac{M}{2^{2025-r}}.$$

Ráadásul, miközben az r -edik játékos elveszíti az r -edik kört, pontosan annyi érmet veszít, amennyi épp a többi játékosnak van, és mivel összesen $2025M$ érme van játékban,

$$m_{r,r} = m_{r,r-1} - \sum_{p \neq r} m_{p,r-1} = m_{r,r-1} - (2025M - m_{r,r-1}).$$

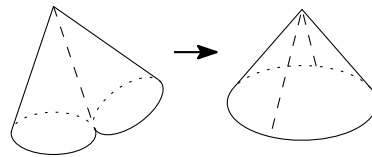
Ezt átrendezve

$$m_{r,r-1} = \frac{m_{r,r}}{2} + \frac{2025M}{2} = \frac{M}{2^{2026-r}} + \frac{2025M}{2}.$$

Ha ebbe $r = 1$ -et behelyettesítjük, megkapjuk a kívánt eredményt:

$$\frac{M}{2^{2025}} + \frac{2025M}{2} = 2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot (1 + 2025 \cdot 2^{2024}).$$

48. Feladat Gábor papírból elkészítette három darab egybevágó egyenes körkúp palástját. Egy ilyen kúp alapja egy kör, a magasságvonala merőleges az alapkörre és összeköti a kúp csúcsát a kör középpontjával. Az alapkör nem része Gábor papírmmodelljének. Először Gábor egymás mellé rakott két kúpot, úgy, hogy a csúcsaik érintkeztek, és egy közös szakaszon érintkezett a palástjuk. Utána ezen a szakaszon felvágta a palástokat és úgy ragasztotta össze őket, hogy egy nagyobb kúp felszínét adják (ahogy az ábrán látható). Az újonnan kapott kúp térfogata 10. Ezután Gábor hasonló módon hozzájuk ragasztotta a harmadik kúp palástját is, és meg akarta mérni az így kapott kúp térfogatát, azonban azt találta, hogy a térfogat nulla. Mi volt az eredeti kúp térfogata?



Eredmény. $\sqrt{10}$

Megoldás. Az a tény, hogy a végső kúp térfogata nulla, azt jelenti, hogy a három azonos palástot összeragasztva egy teljesen sík alakzatot kapunk – egy teljes kört. Ebből kifolyólag mindegyik palást egy-egy 120° -os középponti szögű körcikk, ha síkba kiterítjük őket. Legyen az eredeti kúp alkotójának a hossza a és alapkörének sugara r ! Ekkor a középponti szögből az következik, hogy $a = 3r$. Észrevehetjük, hogy az alkotó hossza a három kúp között nem változik, még az elfajult esetben sem.

A második kúp, amit két palást összeragasztásával kaptunk, 240° -os középponti szöggel rendelkezik, így alapkörének sugara $2r$. A kúp térfogatába behelyettesítve

$$10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Ebből kiszámíthatjuk az eredeti kúp térfogatát:

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3 = \sqrt{10}.$$

49. Feladat Hány olyan pozitív egész n szám létezik, melyre n kisebb vagy egyenlő mint 200, és az

$$5 \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$$

egyenletnek van legalább egy egész x megoldása, ahol $1 \leq x \leq 200$?

Megjegyzés: $\lfloor t \rfloor$ a legnagyobb egész számot jelöli, ami kisebb vagy egyenlő mint a t valós szám.

Eredmény. 82

Megoldás. Ha n az 5 többszöröse, a bal oldal is többszöröse az 5-nek; így nem kaphatunk megoldást ebben az esetben. Továbbá $n = 1$ -re a bal oldal mindig nempozitív, azaz ez sem vezet megoldáshoz. Minden más esetben lesz megoldásunk, ha eltekintünk attól a feltételtől, hogy $x \leq 200$. Rendezzük át az egyenletet az egyszerűség kedvéért a következő alakra:

$$5 \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + 1, \quad (\heartsuit)$$

ekkor a bal oldal mindig osztható lesz 5-tel. tehát vizsgáljuk a megoldásokat az n mod 5 maradékosztályok alapján!

Ha $n = 5k + 4$, akkor $x = n + 1 = 5k + 5$ megoldás (($\heartsuit$) mindkét oldala megegyezik x -szel), azaz minden ilyen alakú szám jó (40 szám). Ha $n = 5k + 3$, ahhoz, hogy a jobb oldal 5 többszöröse legyen, $\lfloor x/n \rfloor$ -nek kell legalább 3-nak lennie, ami nem lehetséges $n \geq 67$ -re, ugyanis az azt jelentené, hogy $x > 200$. $n \leq 66$ -ra (13 szám) $x = 3n + 1$, ami ($\heartsuit$) mindkét oldalát egyenlővé teszi x -szel. Hasonlóan, ha $n = 5k + 2$, $\lfloor x/n \rfloor$ -nek legalább 2-nek kell lennie, ami nem lehetséges $n \geq 101$ -re, a többi esetben pedig $x = 2n + 1$ megoldás (20 szám). Végül $n = 5k + 1$ -re csak $n \leq 50$ lehetséges, amire $x = 4n + 1$ (10 szám, de 1 nem vezet helyes megoldáshoz, azaz csak 9 jó nekünk). Összesen így $40 + 13 + 20 + 9 = 82$ megfelelő n van.

50. Feladat Ádámnak korlátlan mennyiségű 20 oldalú dobókockája van, amelyek 1-től 20-ig vannak számozva. Egyszerre dob néhány dobókockával, a célja, hogy pontosan egy vagy kettő egyes legyen a dobott számok között. Hány kockával dobjon Ádám, hogy maximalizálja a sikeres dobás valószínűségét?

Eredmény. 28

Megoldás. A kérdéses valószínűség azon valószínűségek összege, amikor pontosan egy egyest dobunk

$$P_1 = n \left(\frac{1}{20} \right) \left(\frac{19}{20} \right)^{n-1},$$

és amikor pontosan két egyest dobunk

$$P_2 = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{20} \right)^2 \left(\frac{19}{20} \right)^{n-2}.$$

A $P_1 + P_2$ összeget a következőképpen lehet egyszerűsíteni:

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot 19^2} n(n+37) \left(\frac{19}{20} \right)^n.$$

Minket az érdekel, hogy mely n -re teljesül, hogy $a_{n+1} < a_n$, vagyis

$$\frac{19}{20}(n+1)(n+38) < n(n+37),$$

ami tovább egyszerűsíthető:

$$n^2 - n - 722 > 0.$$

Pozitív egész n -ekre ez ekvivalens azzal, hogy $n \geq 28$. A másodfokú egyenlőtlenség direkt megoldását elkerülhetjük, ha n -re először egy becslést végzünk $n^2 > 722$ -vel, amiből $n \geq 27$. (Ez még nem lesz megfelelő, de a következő érték helyességét már nem nehéz igazolni.) A számolás azt is megmutatja, hogy a_n először növekszik, aztán csökken, így a 28 tényleg a legnagyobb tag indexe.

51. Feladat Az ABC háromszög AC oldalán legyen D egy belső pont, úgy, hogy $AD = BC$ és $BD = CD$, továbbá $\angle BAC = 30^\circ$ legyen. Hány fokal a DBA szög?

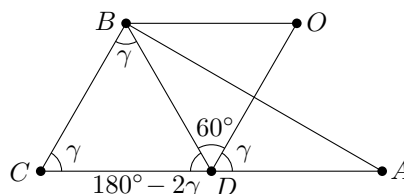
Eredmény. 30° , 110° (2 megoldás)

Megoldás. Legyen O az $ABD\Delta$ köréírt körének középpontja; ekkor $\angle DOB = 2\angle BAD = 60^\circ$, így a $BDO\Delta$ szabályos, ezen felül $AO = DO = BD = CD$. Felhasználva, hogy $AD = BC$, az AOD és CDB egyenlő szárú háromszögek egybevágók. Használjuk a $\gamma = \angle ACB$ jelölést, ekkor $\angle CBD = \angle DAO = \angle ADO = \gamma$. Most bontsuk szét a három esetet az alapján, hogy az O pont hol helyezkedik el a $\angle BAC$ -höz képest!

Először tegyük fel, hogy az O pont a szögön kívül helyezkedik el, és közelebb van az AB félegyeneshez, mint az AC -hez! Ebben az esetben

$$180^\circ = \angle ADO + \angle ODB + \angle BDC = \gamma + 60^\circ + (180^\circ - 2\gamma) = 240^\circ - \gamma,$$

így $\gamma = 60^\circ$, és ebből könnyen megkapható, hogy $\angle DBA = 30^\circ$.



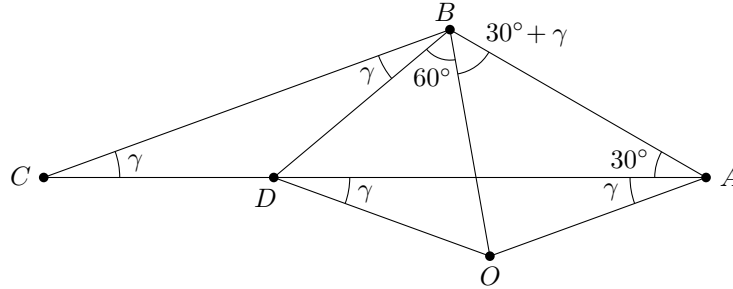
Aztán legyen O ugyanígy a $BAC\angle$ -ön kívül, de közelebb AC -hez! Ekkor $OBA\angle = BAO\angle = 30^\circ + \gamma$, amiből

$$CBA\angle = OBA\angle + DBO\angle + CBD\angle = (30^\circ + \gamma) + 60^\circ + \gamma = 90^\circ + 2\gamma$$

és

$$180^\circ = BAC\angle + CBA\angle + ACB\angle = 30^\circ + (90^\circ + 2\gamma) + \gamma = 120^\circ + 3\gamma,$$

így $\gamma = 20^\circ$. Ebből $DBA\angle = 90^\circ + \gamma = 110^\circ$.



Végül bizonyítsuk, hogy a feltételeknek megfelelően nem lehet O a $BAC\angle$ -ön belül; ebben az esetben $DOA\angle > 120^\circ$, de $BDC\angle < 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, így AOD és BDC nem lehetnének egybevágók.

52. Feladat Legyen f egy függvény, amely bármely nemnegatív egész számokból álló párhoz egy nemnegatív egész számot rendel, és teljesíti az alábbi feltételeket:

1. Minden x -re: $f(x, x) = 0$.
2. Minden x, y -ra: $f(x, y) = f(y, x)$.
3. Minden x, y esetén: $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Minden x, y esetén: $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
5. Minden x, y esetén: $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Adjátok meg az összegét az összes olyan nemnegatív egész t számnak, amelyre $t \leq 60$ és $f(20, t) = 2$.

Eredmény. 415

Megoldás. A függvény tulajdonságait áttekintve rájöhethetünk, hogy $f(x, y)$ megszámolja x és y kettes számrendszerbeli alakjában az eltérő számjegyeket. És valóban, tekinthetjük ezt egy rekurzív algoritmusként: legyen $x' = \lfloor x/2 \rfloor$ és $y' = \lfloor y/2 \rfloor$, ahol x' -t és y' -t úgy kapjuk, ha eltávolítjuk x -ből és y -ből a legkisebb helyiértékű bitet.

- Ha $x = y$, akkor $f(x, y) = 0$, azaz nincsenek eltérő bitek.
- Ha x és y párosak, a legkisebb helyiértékű bitek megegyeznek, tehát eltávolíthatjuk őket, és számolhatunk tovább $f(x', y')$ -vel.
- Ha mindkettő páratlan, a legkisebb helyiértékű bitek ugyanúgy megegyeznek, tehát hasonlóan $f(x', y')$ -re jutunk.
- Ha pedig az egyik páros, de a másik páratlan, akkor a legkisebb helyiértékű bitek eltérnek, tehát növelünk egyet a számlálón, de ezen kívül ugyanúgy számolhatunk $f(x', y')$ -vel.

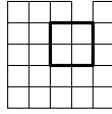
Ez a folyamat a két számot bitenként hasonlítja össze, pontosan akkor növelve a számlálót, amikor a megfelelő bitek eltérnek.

Most meg kell határoznunk azoknak a $t \leq 60$ nemnegatív egész számoknak az összegét, melyekre $f(20, t) = 2$. Ez azt jelenti, hogy olyan t számokat keresünk, melyek kettes számrendszerben legfeljebb hatjegyűek, és a $20 = 010100_2$ -től pontosan két jegyben különböznek (a 61, 62, 63 számok nem állnak elő, ha pontosan két számjegyet változtatunk meg a 20 kettes számrendszerbeli alakjában). Hogy megkapjuk a teljes összeget, tekintsük az egyes helyi értékeken levő bitek járulékát! Mivel két bitet választunk ki a hatból, amelyet megváltoztatunk, $\binom{6}{2} = 15$ ilyen szám lesz. Minden bit ezek közül pontosan öt számban lesz megváltoztatva (amikor kiválasztottuk azt a bitet és a maradék öt valamelyikét), és tízben pedig változatlanul marad. Ezeknek a járulékait fogjuk most összeadni.

Öt számban van a legkisebb helyiértékű bit egyre változtatva, ennek járuléka a teljes összeghez $5 \cdot 2^0$, míg a másik tíz számban ez a bit változatlanul 0. Hasonlóan, öt számban lesz a második bit megváltoztatva, ami $5 \cdot 2^1$ -nel járul hozzá az összeghez. Ezt a mintázatot folytatva a többi helyi érték járuléka $10 \cdot 2^2$ (mivel ez a bit a tíz nem megváltoztatott esetben rendelkezik járulékkal), $5 \cdot 2^3$, $10 \cdot 2^4$ és $5 \cdot 2^5$. Ebből könnyen következik, hogy a teljes összeg

$$5 \cdot (010100_2 + 111111_2) = 5 \cdot (20 + 63) = 415.$$

53. Feladat Becky rajzolt egy 45×45 -ös négyzetrácsot, megszámolta benne az 1×1 -es kisnégyzetek számát, és így 2025-öt kapott. Ez elszomorította, mert személyes okokból jobban kedveli a 2024 kisnégyzetet tartalmazó ábrákat. Hogy megoldja a gondot, eltávolított egy 1×1 -es négyzetet a rács széléről. Ezután megszámolt minden lehetséges négyzetet (nem csak az 1×1 -eseket) a módosított ábrán. Mivel Becky babonás és fél a 13-mal osztható számoktól, úgy vágta ki azt a négyzetet, hogy az összes négyzet száma ne legyen osztható 13-mal. Az alábbi ábra mutat egy példát, ahol egy 5×5 -ös rács széléről töröltünk egy négyzetet, és a megmaradt részben bejelöltünk egy 2×2 -es négyzetet. Határozzátok meg, hányféleképpen tudott Becky törölni egy határon lévő négyzetet úgy, hogy teljesüljön a vágya!



Eredmény. 152

Megoldás. Az eredeti 45×45 -ös rácson az összes négyzet számát a következőképpen kaphatjuk meg:

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + 45^2 = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot 46 \cdot 91.$$

Amikor Becky egy 1×1 -es négyzetet eltávolít a rács széléről, az összes négyzet száma R -rel csökken, azon négyzetek darabszámával, amelyek tartalmazták az eltávolított kis négyzetet. Mivel S maga osztható 13-mal, a módosított ábrán levő négyzetek száma pontosan akkor lesz osztható 13-mal, ha R is osztható 13-mal. Így azon R értékeket keressük, amelyek 13 többszörösei.

Hogy R értékét megkapjuk, vegyük észre, hogy minden X négyzet, amely egy, a határon levő x kis négyzetet tartalmaz, egyértelműen meghatározott, ha kiválasztunk a rács szélén két kis négyzetet, amelyek X két csúcsát fogják alkotni, úgy, hogy x közéjük esik (a csúcsoknál levő négyzetek megegyezhetnek x -szel). Ebből, ha a kivágott kis négyzet a rács sarkától számolva az n -edik, az összes megfelelő kis négyzet:

$$R = n(46 - n).$$

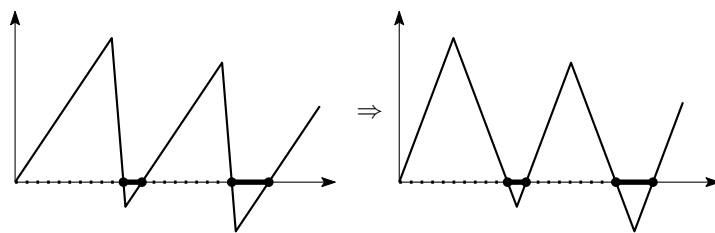
Így azt kell meghatároznunk, hogy mely n értékekre teljesül, hogy $n(46 - n)$ osztható 13-mal, és ezek lesznek azon esetek, amelyeket kerülnünk kell. Szimmetriaokokból elég az adott él mentén a közelebbi csúcsig vizsgálni ($1 \leq n \leq 23$), ekkor a 13-as oszthatóság pontosan a $n = 7, 13, 20$ helyeken teljesül. Emiatt a rács mind a négy oldalán pontosan hat olyan mező van, amit kerülnünk kell, tehát összesen 24. Az összes négyzet száma a rács széle mentén $4 \cdot 44 = 176$, így Becky $176 - 24 = 152$ mezőből tudott választani.

54. Feladat A Nyúl és a Teknős versenyeznek egymással. A Teknős lassan, de folytonosan fut, a Nyúl pedig 6-szor olyan gyorsan fut, mint a Teknős, de minden alkalommal, amikor 9 métert előre fut, utána visszafele fut 7 métert, hogy gúnyolódjon a Teknősön. Vegyük az időintervallumot a verseny kezdetétől az utolsó olyan pillanatig amikor találkoznak a pályán. Az idő mekkora hányadában volt a Teknős az élen?

Eredmény. $\frac{22}{45}$

Megoldás. Vizsgáljuk az (előjeles) távolságot a Nyúl és a Teknős helyzete között, ahol a pozitív előjel jelentse azt, hogy a nyúl van előrébb! A Nyúl előre fut kilenc métert, majd hátrafelé hetet, amivel effektíve $9 - \frac{9}{6} = \frac{45}{6}$ méter előnyt szerez, aztán elveszít $7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ métert.

Hogy egyszerűsítsük a számításokat, tekintsük a Teknőssel együtt mozgó rendszerből az egész folyamatot! Azonban ebben az új viszonyítási rendszerben a Nyúl hátrafele futási sebessége nagyobb, mint az előre futási sebessége (konkrétan előrefelé a Nyúlnak a Teknőshöz viszonyított sebessége $6 - 1 = 5$, hátrafele pedig $6 + 1 = 7$), emiatt általánosságban nézve az idők aránya nem mindig egyenlő a lefutott távolság arányával. De szerencsére egyezni fog az arány az olyan szakaszokon, aminek kezdőpillanatában és végpillanatában is a Nyúl és a Teknős találkoznak. Egy ilyen intervallumban ugyanis a Nyúl ugyanakkora távolságot fut oda és vissza, ezért az átlagsebessége mindig ugyanaz lesz. Ha módosítjuk a Nyúl sebességét az eredetiről erre az átlagsebességre, akkor az eltelt idő és a megtett távolságok összege is változatlan marad. Az alábbi távolság-idő grafikon mutatja azt a lépést, amikor áttérünk az átlagsebességre.



Nevezzük *ciklusoknak* azokat a időintervallumokat, amelyekben a Nyúl először csak előre, utána csak hátrafele fut. Átskálázhatjuk a távolságokat 6-tal az egyszerűbb számolásokért. Ebben a rendszerben a Nyúl 45 métert fut előre,

majd 49-et hátra minden ciklusban. Minden ciklusban a Nyúl egy bizonyos távolságnyt a Teknős mögött tölt: 4 métert az első ciklusban, 12-t a másodikban, és így tovább. Minden ciklus 94 méterig tart, tehát az utolsó teljes ciklus a tizenegyedik lesz, amikor a Nyúl 84 m-t tölt hátrányban, és 44 m-rel a Teknős mögött zár. Ezután a Nyúl 46 m-t fut a Teknőssel való utolsó találkozásáig, ebből 44 m-t hátrányban töltve.

A Nyúl által megtett teljes távolság az utolsó találkozásig $11 \cdot 94 + 46 = 1080$ méter. Ebből a Teknős mögött töltött $(4 + 12 + \dots + 84) + 44 = 528$ métert. Így az az időarány, amíg az utolsó találkozásukig a Teknős volt az élen, $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$.

55. Feladat Márk ajándékba kapott egy $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ sorozatot, amelynek a kezdeti elemei $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, és az

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

rekurzió teljesül rá minden $n \geq 2$ -re. Azonban ez a leírás nem határozza meg egyértelműen a sorozatot. Hogy feloldja a többértelműséget, Márk egyesével sorban kiszámolta a sorozat tagjait, mindig a legnagyobb értéket választva, ha több is volt. Határozzátok meg a_{13} értékét!

Eredmény. 12274

Megoldás. A rekurziós relációt átrendezve

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - a_n^2 - 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n+1} + 4a_n \cdot a_{n-1} = 2n - 1,$$

ami összevonható a következő alakra:

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 - (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 = 2n - 1.$$

Mivel $(a_2 - 2 \cdot a_1)^2 = (3 - 2)^2 = 1 = 1^2$ és $(n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2$, egy egyszerű indukciós gondolattal

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 = (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 + 2n - 1 = n^2.$$

Ebből két lehetséges értéket kapunk a_{n+1} -re:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n \quad \text{vagy} \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n.$$

Mivel Márk mindig a nagyobb értéket választja, mindig

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n.$$

A rekurziót iteratívan használva $a_1 = 1$ -től azt kapjuk, hogy

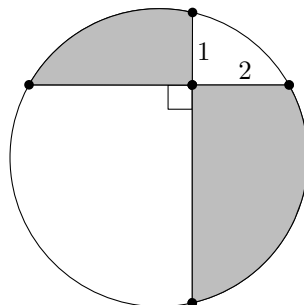
$$a_{13} = 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \dots + 12 \cdot 2^0.$$

Ezt a következőképpen lehet egyszerűsíteni:

$$\begin{aligned} a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \dots + 12 \cdot 2^0 \\ &= 2^{12} + (2^{11} + 2^{10} + \dots + 2^0) + (2^{10} + 2^9 + \dots + 2^0) + (2^9 + 2^8 + \dots + 2^0) + \dots + (2^1 + 2^0) + 2^0 \\ &= 2^{12} + (2^{12} - 1) + (2^{11} - 1) + \dots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) \\ &= 2^{12} + (2^{13} - 1) - 13 \\ &= 4096 + 8192 - 14 = 12274. \end{aligned}$$

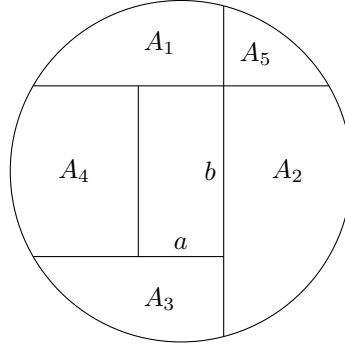
Tehát Márk értéke a_{13} -ra 12274.

56. Feladat Az alábbi ábrán egy kört felosztottunk két egymásra merőleges húrral. Két szakasz hosszát megadtuk (mindkettő rövidebb, mint a hozzá tartozó húr maradék része), továbbá tudjuk, hogy a szürke terület és a fehér terület aránya $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$. Mekkora a kör sugara?



Eredmény. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Megoldás. Tekintsük a két húrnak a kör középpontjára vett tükörképét, és jelöljünk néhány területet és hosszat az ábra szerint!



Nyilvánvaló, hogy $A_1 = A_3$ és $A_2 = A_4 + A_5$. Ez azt jelenti, hogy a szürke tartomány S területe

$$S = A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5,$$

míg a fehér tartomány területe

$$F = A_3 + A_4 + A_5 + ab = S + ab.$$

A területek ismert arányát figyelembe véve

$$\frac{S}{F} = \frac{S}{S + ab} = \frac{5\pi - 2}{5\pi + 2},$$

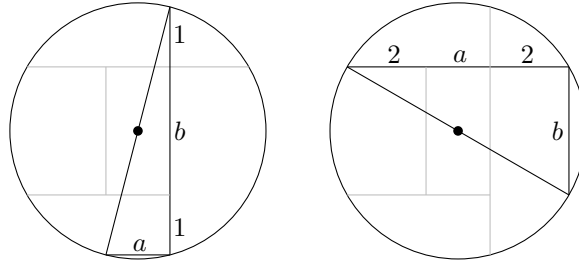
amit át lehet rendezni a következő alakra:

$$S = \frac{1}{4}(5\pi - 2)ab.$$

Most tekintsük a teljes kör területét, aminek a sugarát r -rel jelöljük:

$$\pi r^2 = S + F = 2S + ab = \frac{5\pi}{2}ab$$

vagy $2r^2 = 5ab$. Másik két egyenletet kapunk, ha megfigyeljük, hogy a szakaszokat két derékszögű háromszöggé is át tudjuk rendezni, amelyek a körbe vannak írva. Az egyik befogói a és $b + 2$, a másiké $a + 4$ és b .



Így egy három egyenletből álló egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} 2r^2 &= 5ab, \\ 4r^2 &= a^2 + (2 + b)^2, \\ 4r^2 &= (4 + a)^2 + b^2, \end{aligned}$$

amit könnyen meg lehet oldani – az utolsó két egyenletből $b = 2a + 3$ adódik, amit az első két egyenletbe behelyettesítve másodfokú egyenletet kapunk a -ra. Az egyik megoldás ($a = -\frac{5}{3}$) nem értelmes a jelen feladatban, a másik pedig $a = 1$, $b = 5$ és $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ -höz vezet.

57. Feladat Egy épület 160 szintes. Minden szint folyosójára két különböző ajtón lehet bejutni, és minden folyosón négy szoba található. Minden szobának saját ajtaja van, és minden szobának egy-egy lakója van. Minden ajtón, azaz a szobák és a folyosók ajtajain egy-egy zár lesz felszerelve, majd a lakók közt kulcsokat osztunk szét, úgy, hogy

- Minden lakó be tudjon jutni a saját szobájába, de máséba nem,
- Mindenki ki tudja nyitni a saját szobájához tartozó folyosót, és
- Megengedett, hogy más szintek folyosóihoz is hozzáférhessenek.

Minden zárhoz egy egyedi kulcs tartozik, és csak azzal a kulccsal lehet kinyitni. Azonban több ajtón is lehet azonos a zár, és a hozzá tartozó kulcsból is tetszőleges számú másolat készíthető. Egy lakó tetszőleges számú kulcsot kaphat. A záruk beszerelését végző cég minimalizálni szeretné a kulcsok legyártásának költségeit. Egy új kulcs legyártásának költsége 3, míg egy másolat készítése 2-be kerül. Mekkora a szétosztandó kulcsok minimális összköltsége, ha teljesíteni akarjuk a fenti feltételeket?

Eredmény. 2432

Megoldás. Vizsgáljuk meg a záruk és kulcsok elrendezésének legköltséghatékonyabb megoldását; egyértelmű, hogy ebben az esetben semelyik lakónak nincs kettőnél több kulcsa. Továbbá az általánosság megsértése nélkül be kell látnunk, hogy mindegyik emeleten pontosan egy (vagy ekvivalensen legalább egy, mivel nem lehet egynél több) olyan lakó van, akinek csak egyetlen kulcsa van. Ez a kulcs egyben nyitja a lakó szobáját és a folyosóra vezető egyik ajtót, míg az emelet másik három lakója a másik folyosóajtót használja.

Tegyük fel, hogy valamelyik emeleten nem ez a helyzet! Ekkor az egyik folyosóajtót, melyet nevezzünk D -nek, legfeljebb két lakó használja a négyből: az a lakó és potenciálisan a b lakó. Ha négyük közül egy lakó sem tudja kinyitni a D ajtót, tetszőlegesen kiválasztunk közülük egyet, akit a -ként kezelünk. A következőképp változtatunk a kulcsrendszeren: kicseréljük a zárat a D ajtón egy teljesen újra és ugyanezt a zárat szereljük fel az a lakó ajtajára. Ezek után az a lakónak csupán egy kulcsra van szüksége, melynek költsége 3, míg a korábbi két kulcsának együttes költsége legalább $2 + 2 = 4$ volt. Így ez a módszer legalább 1-gyel csökkenti az összköltséget.

Továbbá ha a b lakó is érintett, akkor új folyosókulcsot osztunk neki, ami a másik folyosóajtót nyitja, amivel nem növeljük a kulcsok összköltségét. Azonban ekkor lehetséges, hogy b olyan kulcspárhoz jut, ami egy másik emeleten lévő szobába ad neki bejutást; ezt elkerülvén lecseréljük a zárat b szobáján egy teljesen újra, ami legfeljebb 1-gyel növeli az összköltséget.

Mivel a kulcsok összköltsége nem növekszik ezáltal a folyamat által, arra következtethetünk, hogy a fent meghatározott konfiguráció legalább olyan költséghatékony, mint bármely alternatívája. Ezért a következőkben azt feltételezzük, hogy minden emeleten pontosan egy lakó birtokol egy darab kulcsot.

Így a probléma arra redukálódik, hogy 160 emeleten van emeletenként egy folyosóajtó és három külön szoba, és erre kell a további költségeket minimalizálni. Legyen n különböző kulcs típusunk $(1, 2, \dots, n)$! Minden lakónak kapnia kell egy kulcsot a folyosóhoz és egyet a szobájához, és ez a két kulcs nem lehet azonos típusú. Emellett semelyik két lakónak nem lehet ugyanaz a kulcspárja, mert akkor ugyanabba a szobába be tudnának menni mindketten. Ebből a kulcspárok lehetséges száma $\frac{1}{2}n(n-1)$ -nek adódik.

Mivel összesen $3 \cdot 160 = 480$ kulcspárt kell kiosztanunk, alsó korlátot kapunk n -re a következő egyenlőtlenségből:

$$\frac{1}{2}n(n-1) \geq 480.$$

Ezt pozitív egész n -ekre megoldva azt kapjuk, hogy $n \geq 32$. Most be kell látnunk, hogy megvalósítható, hogy pontosan $n = 32$ kulcs típust használjunk. Hogy ezt elérjük, a 160 emeletet 32 csoportra osztjuk ötemeletenként. A kulcsok beosztása ekkor a következőképpen alakul (a pár első kulcsa vonatkozik a folyosóra, a második a szobára):

- Az első csoportban levő 15 lakó a $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 16)$ kulcspárokat kapja.
- A második csoport 15 lakójának a $(2, 3), (2, 4), \dots, (2, 17)$ párok jutnak.
- A minta folytatódik, a 31. csoport lakói a $(31, 32), (31, 1), \dots, (31, 14)$ párokat kapják.
- Végül az utolsó (32.) csoporthoz a $(32, 1), (32, 2), \dots, (32, 15)$ párokat rendeljük.

Könnyen belátható, hogy ez az elrendezés a feladat feltételeit teljesíti, így $n = 32$ különböző típusú kulcsra van szükségünk, amihez 928 másolatot kell adnunk, hogy megkapjuk az összesen szükséges $160 \cdot 3 \cdot 2 = 960$ kulcsot.

Ha pedig az első bekezdésben külön kezelt lakókat is számoljuk, összesen $32 + 160 = 192$ különböző kulcsot kell gyártani, így a végső költség $192 \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$.