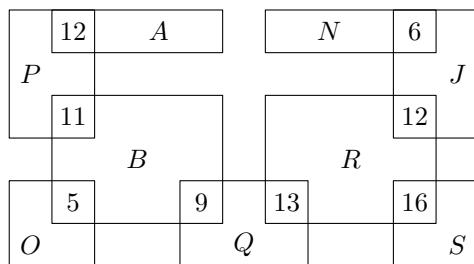


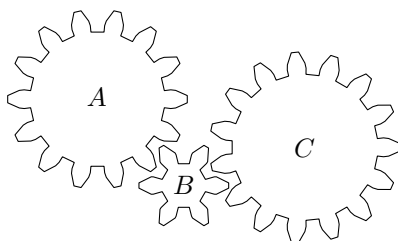
Zadanie 1. Litery znajdujące się w prostokątach odpowiadają różnym niezerowym cyfrom. W części wspólnej każdych dwóch przecinających się prostokątów wpisano sumę wpisanych w nie cyfr. Wyznacz wartość pięciocyfrowej liczby $NABOJ$.



Wynik. 14325

Rozwiązanie. Sumę 16 możemy otrzymać tylko jako $9 + 7$. Jeżeli $R = 9$, to mamy sprzeczność $J = N = 3$. Oznacza to, że $S = 9$, a $R = 7$. Licząc dalej kolejno otrzymujemy $J = 5$, $N = 1$, $Q = 6$, $B = 3$, $P = 8$, $A = 4$ oraz $O = 2$. Ostatecznie otrzymujemy, że $NABOJ = 14325$.

Zadanie 2. Ile pełnych obrotów musi wykonać koło C , aby wszystkie trzy koła wróciły do swojej początkowej pozycji?



Wynik. 14

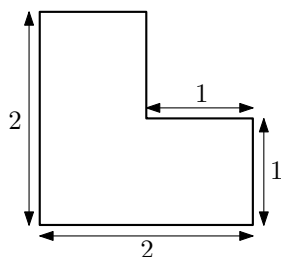
Rozwiązanie. Koło A ma 14 zębów, koło B ma 6, zaś koło C ma ich 15. Najmniejsza liczba zębów, o jakie muszą obrócić się koła by wszystkie wróciły do początkowej pozycji, jest wielokrotnością 14, 6 i 15. Najmniejszą wspólną wielokrotnością tych liczb jest 210. Koło C musi zatem obrócić się o 210 zębów, czyli wykona $210/15 = 14$ pełnych obrotów.

Zadanie 3. Jaka jest największa liczba dziesięciocyfrowa o następującej własności: pomiędzy każdymi dwiema jednakowymi cyframi znajduje się co najmniej jedna cyfra od nich mniejsza?

Wynik. 9897989698

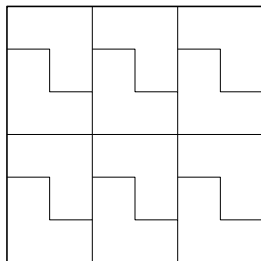
Rozwiązanie. Przyjrzyjmy się cyfrze, która znajduje się najbardziej na lewo. Przyjmijmy, że jej wartość to 9, czyli największa możliwa. Dalej, idąc od lewej do prawej, będziemy tworzyć żadaną liczbę dodając największą możliwą cyfrę tak, aby warunki zadania były spełnione. Druga cyfra od lewej nie może być równa 9, zatem niech będzie to 8. Jako kolejną cyfrę możemy wstawić ponownie 9. Po niej nie możemy umieścić ani cyfry 8, ani cyfry 9, zatem największą możliwą cyfrą na tej pozycji jest 7. Postępując dalej analogicznie możemy dać cyfry 9, 8 i 9. Po nich nie może już znaleźć się żadna cyfra ze zbioru $\{9, 8, 7\}$, więc dajemy 6. Ostatnimi cyframi mogą być 9 i 8. W ten sposób otrzymamy liczbę $n = 9897989698$. Twierdzimy, że to największa liczba dziesięciocyfrowa spełniająca warunki zadania. Istotnie, niech m będzie inną liczbą spełniającą zadane warunki. Przyjrzyjmy się pierwszej cyfrze od lewej, którymi różnią się m i n . Ponieważ nasz algorytm zawsze wybierał największą możliwą cyfrę to $m \leq n$ niezależnie od pozostałych cyfr.

Zadanie 4. Ile wynosi minimalna długość boku kwadratu, który może zostać całkowicie pokryty płytkami o kształcie pokazanym na rysunku poniżej, w taki sposób, aby żadne dwie płytki nie nachodziły na siebie?

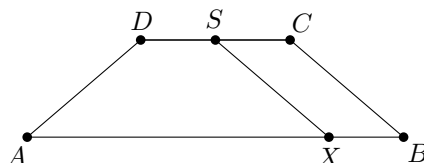


Wynik. 6

Rozwiązanie. Powierzchnia kwadratu musi być wielokrotnością 3, czyli powierzchni kafelka i łatwo zauważyć, że kwadrat 3×3 nie może zostać w całości pokryty. Kwadrat 6×6 można już jednak pokryć, a jeden z możliwych układów przedstawiono na rysunku poniżej.



Zadanie 5. Dany jest taki trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD , że $BC = CD = AD$. Punkt S jest środkiem odcinka DC , a punkt X takim punktem na odcinku AB , że odcinek XS jest równoległy do BC . Obwód czworokąta $ABCD$ jest równy 50, a obwód czworokąta $AXSD$ wynosi 38. Oblicz obwód równoległoboku $XBCS$.



Wynik. 36

Rozwiązanie. Różnica obwodów $ABCD$ i $AXSD$ jest równa dokładnie $XB + CS = 2 \cdot CS = CD$, co jest także równe BC i XS . Zatem obwód $XBCS$ jest równy $3 \cdot (50 - 38) = 36$.

Zadanie 6. Ela wybrała dwucyfrową liczbę niezawierającą cyfry zero i pomnożyła ją przez liczbę otrzymaną poprzez zamianę jej cyfr miejscami. Rezultatem była czterocyfrowa liczba zaczynająca się od 3 i kończąca się na 7. Jaka była większa z dwóch liczb, które pomnożyła?

Wynik. 93

Rozwiązanie. Niech x, y będą dwiema cyframi szukanej liczby. Zauważmy, że cyfra jedności iloczynu Eli jest taka sama jak cyfra jedności iloczynu $x \cdot y$. Istnieją tylko dwa sposoby, aby mnożąc dwie cyfry uzyskać liczbę kończącą się na 7, mianowicie $1 \cdot 7 = 7$ oraz $3 \cdot 9 = 27$. Możemy łatwo wykluczyć możliwość $17 \cdot 71$, ponieważ ten iloczyn jest zbyt mały, więc jedyna opcja to $39 \cdot 93 = 3627$, a odpowiedź to 93.

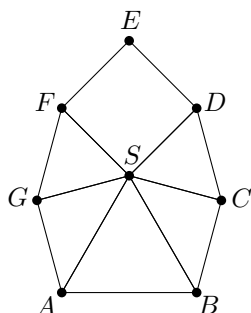
Zadanie 7. Kornel gra w karty używając standardowej talii kart (52 karty, po 13 wartości w każdym z 4 kolorów). W każdej turze, gracz może albo dobrać kartę, albo zagrać kartę z ręki o tej samej wartości lub tym samym kolorze co karta na wierzchu stosu kart. W poprzednich rundach Kornel miał dużego pecha i musiał dobrać sporo kart, co sprawiło, że zaczął się zastanawiać jaka jest minimalna liczba kart N , które musi mieć na ręce, aby niezależnie od tego, jakie N kart ma i jaka karta jest na wierzchu stosu, miał pewność zagrania co najmniej jednej karty. Ile wynosi N ?

Wynik. 37

Rozwiązanie. Jeśli Kornel ma na ręce wszystkie kombinacje dwunastu wartości w trzech kolorach (łącznie $3 \cdot 12 = 36$ kart), to może się zdarzyć, że karta na wierzchu stosu ma brakującą trzynastą wartość w czwartym z kolorów. W tym przypadku, Kornel nie mógłby zagrać karty, więc N jest równe co najmniej 37.

Z drugiej strony, karta na wierzchu stosu ma ten sam kolor co 12 innych kart w talii oraz tę samą wartość co trzy inne karty. Skoro w talii mamy 52 karty, to Kornel mógłby nie móc zagrać mając na ręce $52 - 1 - 12 - 3 = 36$ kart. W takim razie mając 37 kart, na pewno będzie w stanie zagrać co najmniej jedną z nich.

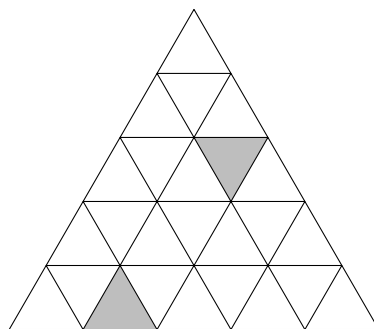
Zadanie 8. Siedmiokąt $ABCDEFG$ składa się z sześciu wielokątów o wspólnym wierzchołku S : trzech trójkątów równobocznych (ABS , CDS , FGS), dwóch równoramiennych trójkątów prostokątnych (BCS , GAS o kątach prostych odpowiednio przy wierzchołkach C i G) oraz kwadratu ($DEFS$). Wyznacz miarę kąta SAE w stopniach.



Wynik. 15

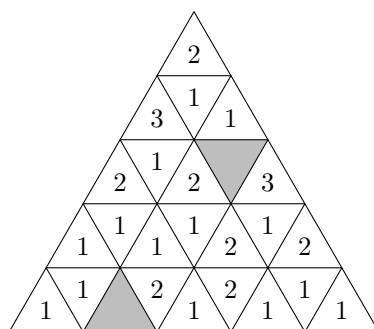
Rozwiązanie. Skoro trójkąt FGS jest równoramienny, to $FS = GS$. Zatem równoramienne trójkąty prostokątne GAS i FSE są przystające, co oznacza, że $ES = AS$. Stąd trójkąt EAS jest równoramienny. Korzystając z tego, że $\angle ESA = 45^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 150^\circ$, otrzymujemy $\angle SAE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ESA) = 15^\circ$.

Zadanie 9. Ile na poniższym diagramie jest trójkątów, które nie zawierają żadnej szarej płytki w swoim wnętrzu?



Wynik. 34

Rozwiązanie. Wpiszmy w każdą płytkę dla ilu dopuszczalnych trójkątów ta właśnie płytkę jest ich górnym lub dolnym rogami (w zależności od orientacji płytki):



Liczba, której szukamy, jest wtedy sumą wszystkich tych wartości.

Zadanie 10. Liczbę nazwiemy *intrygującą* jeśli jest czterocyfrowa oraz po usunięciu cyfry setek otrzymamy dziewięciokrotnie mniejszą od niej liczbę trzycyfrową. Na przykład liczba 2025 jest intrygująca, bo $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$. Wyznacz największą liczbę intrygującą.

Wynik. 6075

Rozwiązanie. Niech $N = \overline{abcd}$ będzie intrygującą liczbą i $n = \overline{cd}$. Wtedy $N = 1000a + 100b + n$, a po usunięciu cyfry setek otrzymamy liczbę $M = 100a + n$. Mnożąc równość $M = \frac{1}{9}N$ przez 9 otrzymujemy

$$9(100a + n) = 1000a + 100b + n,$$

co po przekształceniach i podzieleniu przez 4 daje nam

$$25(a + b) = 2n.$$

Z tej równości wnioskujemy, że liczba $a + b$ musi być parzysta i mniejsza niż $\frac{2 \cdot 100}{25} = 8$, bo $n < 100$. Z tego wynika, że liczba $a + b$ to co najwyżej 6 i aby liczba N była największa możliwa wybieramy $a = 6$ oraz $b = 0$, co daje $n = 75$. Łatwo sprawdzić, że $N = 6075$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 11. Statek towarowy został zaprojektowany w taki sposób, aby mógł transportować jednocześnie trzy rodzaje cieczy: etanol, olej i rtęć. Każda z cieczy ma inną maksymalną ładowność: 10 ton dla etanolu, 30 ton dla oleju i 60 ton dla rtęci. W czasie podróży z Gliwic do Szczecina statek transportuje 85 ton ładunku złożonego z wcześniej wspomnianych substancji. W drodze powrotnej ładunek zawiera tyle samo etanolu, dwa razy więcej oleju i jedną trzecią ilości rtęci w porównaniu do pierwszej podróży. Ile ton ładunku statek przewozi w drodze powrotnej?

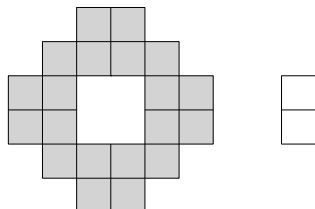
Wynik. 60

Rozwiązanie. Statek transportuje w czasie pierwszej podróży 85 ton cieczy, zatem musi zawierać przynajmniej 15 ton oleju. Jednak w drodze powrotnej ilość oleju została podwojona, więc statek mógł transportować co najwyżej 15 ton oleju. Z tego wynika, że transportował pełną ładowność etanolu i rtęci. Całkowity ładunek w drodze powrotnej może zatem być wyliczony w następujący sposób:

$$10 + 2 \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 60.$$

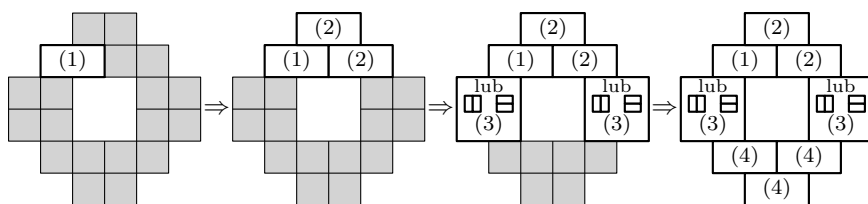
Zadanie 12. Oblicz na ile różnych sposobów można wypełnić szary obszar na diagramie używając nienachodzących na siebie jednakowych płytek. Każda płytka (przedstawiona na obrazku jako biały prostokąt) pokrywa dokładnie dwa pola. Płytki mogą być obracane.

Uwaga: Wypełnienia różniące się symetrią (obrotem lub odbiciem) są uznawane za różne. Żadna płytka nie może wystawać poza szary obszar.

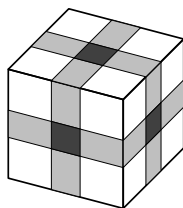


Wynik. 8

Rozwiązanie. Rozpocznijmy wypełnianie obszaru od jednego z wewnętrznych rogów obszaru (1); istnieją dwie możliwości ułożenia płytek, prowadzące do symetrycznych ustawień. Wybierzmy zatem jedno z ustawień i pomnożmy otrzymany dla niego wynik przez 2. Gdy położenie tej płytki jest ustalone, ułożenie kolejnych dwóch płytek jest także ustalone (2). Dwa „kwadraty” po lewej i prawej stronie obszaru mogą być wypełnione na dwa sposoby (3), a pozostały obszar może być wypełniony dokładnie w jeden sposób (4). Zatem po ułożeniu (1) mamy $2 \cdot 2 = 4$ możliwości wypełnienia obszaru. Biorąc pod uwagę symetryczność, otrzymujemy łącznie $2 \cdot 4 = 8$ możliwości wypełnienia szarego obszaru płytkami.



Zadanie 13. Opakowanie w kształcie sześcianu owinięto taśmą, której szerokość jest mniejsza niż długość krawędzi opakowania (jak na rysunku poniżej). Ciemnoszare obszary na ścianach opakowania (w tym te niewidoczne na rysunku) mają łączne pole równe 216 cm^2 . Natomiast łączne pole jasnoszarych obszarów na ścianach opakowania jest o połowę mniejsze od łącznego pola obszarów niepokrytych taśmą. Wyznacz długość krawędzi opakowania w centymetrach.



Wynik. 30

Rozwiązanie. Pole każdego ciemnoszarego kwadratu wynosi $216/6 = 36$, więc długość jego boku jest równa $\sqrt{36} = 6$. Na każdej ścianie jasnoszara część jest dwa razy mniejsza niż biała część niepokryta taśmą, co oznacza, że każdy jasnoszary prostokąt jest dwa razy mniejszy niż biały kwadrat. Dlatego możemy zmieścić 5 jasnoszarych prostokątów o szerokości 6 wzdłuż jednej krawędzi sześcianu, co daje długość boku krawędzi równą $5 \cdot 6 = 30 \text{ cm}$.

Zadanie 14. Sklep papieżniczy *Kajet* sprzedaje długopisy, zeszyty i linijki. Cena zeszytu jest równa łącznej cenie długopisu i linijki. Jeśli cena linijki wzrosła o 50%, to byłaby równa łącznej cenie długopisu i zeszytu. O ile procent cena długopisu powinna wzrosnąć, aby stała się równa łącznej cenie zeszytu i linijki?

Wynik. 800

Rozwiązanie. Niech z oznacza cenę zeszytu, ℓ cenę linijki, a d cenę długopisu. Z warunków podanych w zadaniu mamy $z = d + \ell$ i $\frac{3}{2}\ell = d + z = 2d + \ell$. Drugie równanie pozwala wyznaczyć $\ell = 4d$. Podstawiając to do pierwszego równania, otrzymujemy $z = 5d$. Oznacza to, że cena długopisu musi wzrosnąć dziewięciokrotnie, czyli o 800%.

Zadanie 15. Niech $\text{NWD}(a, b)$ i $\text{NWW}(a, b)$ oznaczają odpowiednio największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a i b . Oblicz wartość wyrażenia

$$\text{NWW}(2025, \text{NWW}(2024, \text{NWD}(2023, \text{NWD}(2022, \dots \text{NWW}(4, \text{NWD}(3, \text{NWD}(2, 1))) \dots))).$$

Działania NWD i NWW zmieniają się co dwa kroki, a w całym wyrażeniu występuje 1012 obliczeń NWD i 1012 obliczeń NWW . Gdyby wystąpiły tylko po dwa wystąpienia każdego z tych działań, to wyrażenie miałoby postać $\text{NWW}(5, \text{NWW}(4, \text{NWD}(3, \text{NWD}(2, 1))))$.

Wynik. 4 098 600

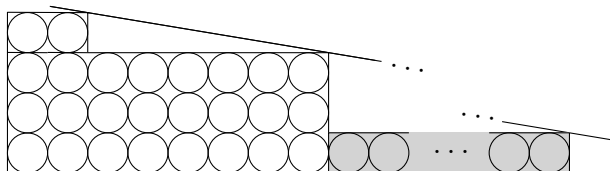
Rozwiązanie. Zauważmy, że $\text{NWD}(x, x - 1) = 1$ dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej x , a więc

$$\text{NWD}(x, \text{NWD}(x - 1, a)) = 1$$

dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a i x . Stąd otrzymujemy, że szukane wyrażenie jest równe

$$\text{NWW}(2025, \text{NWW}(2024, 1)) = 2025 \cdot 2024 = 4\,098\,600.$$

Zadanie 16. Na poniższym obrazku znajdują się trzy prostokąty, w które wpisano przystające koła, a także prosta przechodząca przez prawe górne rogi tych prostokątów. Część rysunku jest ukryta. Ile kół zawiera szary prostokąt?



Wynik. 12

Rozwiązanie. Trójkąty prostokątne utworzone z regionów pomiędzy ukośną linią a prostokątami są podobne, ze współczynnikiem podobieństwa równym 2. W takim razie, szerokość szarego prostokąta (wyrażona w średnicach kół) to $2 \cdot 6 = 12$.

Zadanie 17. Maciej przebiegł trasę długości 18 km. Początkowo biegł równym tempem, ale po pewnym czasie zmęczył się i zwolnił o 25% na pozostałą część biegu. Gdy skończył bieg, spojrzął na swój smartwatch i dowiedział się, że wolniejszym tempem biegł dwa razy dłużej niż szybszym. Jaki dystans (w kilometrach) pokonał Maciej zanim zwolnił?

Wynik. $7,2 = 7\frac{1}{5} = \frac{36}{5}$

Rozwiązanie. Oznaczmy pierwotną prędkość Macieja przez v (w km/h), a przez t czas jakim biegł szybszym tempem (w godzinach). Wtedy jego wolniejsza prędkość jest równa $\frac{3}{4}v$, a czas, który spędził biegnąc tym tempem, jest równy $2t$. Całkowity dystans jaki przebiegł jest równy sumie dwóch częściowych dystansów, więc

$$18 = v \cdot t + \frac{3}{4}v \cdot 2t = \frac{5}{2}vt.$$

Zatem

$$vt = \frac{18}{\frac{5}{2}} = \frac{36}{5},$$

co jest dystansem przebiegniętym szybkim tempem.

Zadanie 18. Martynka, Karolinka, Gabrysia, Justynka i Beata ustawiają się w jednej linii do zdjęcia grupowego przed ogromnym pomnikiem Náboja. Istnieją jednak ściśle zasady dotyczące tego, kto gdzie może stać:

- Justynka musi stać na prawo od Martynki, Gabrysi i Beatki,
- Gabrysia musi stać na lewo od Martynki, Justynki i Beatki.

Na ile sposobów pięć dziewcząt może ustawić się do tego wspaniałego zdjęcia?

Wynik. 10

Rozwiązanie. Zauważmy, że Karolinka w ogóle nie pojawia się w warunkach, więc może ustawić się gdziekolwiek. Ponadto, są jedynie dwie możliwości ustawienia pozostałych czterech dziewcząt, bo wśród nich najbardziej na lewo musi być Gabrysia, a na prawo Justynka. Zatem ostatecznie dostajemy 10 ustawień.

Zadanie 19. Dziedziniec zamku otoczony jest pięcioma wieżami połączonymi prostymi murami, których długości są równe 50 łokci, 70 łokci, 90 łokci, 110 łokci i 130 łokci, w pewnej kolejności. Ile wynosi długość (w łokciach) najdłuższego możliwego prostego strzału, jaki może oddać łucznik w obrębie dziedzińca zamku, przy najbardziej sprzyjającym ułożeniu murów i wież?

Uwaga: Grubość murów i rozmiary wież uważamy za zaniedbywalnie małe, a długość strzału mierzymy w poziomej prostej linii.

Wynik. 220

Rozwiązanie. Dla dowolnego układu murów najdłuższy prosty odcinek w obrębie dziedzińca zamku jest co najwyżej tak długi, jak najdłuższy odcinek ℓ łączący dwa punkty zamku (jeśli niektóre kąty wewnętrzne między kolejnymi murami przekraczają 180° , ℓ może nie być w całości zawarty w zamku). Odcinek ℓ musi łączyć dwie wieże, gdyż w przeciwnym razie można go wydłużyć. Te dwie wieże dzielą mury na dwie grupy, przy czym suma długości każdej grupy wynosi co najmniej S , czyli długość ℓ . W ten sposób otrzymujemy nierówność

$$S \leq \frac{50 + 70 + 90 + 110 + 130}{2} = 225.$$

Skoro S jest wielokrotnością 10, to $S \leq 220$. Ta wartość jest osiągalna przy podziale $90 + 130$ i $50 + 70 + 110$.

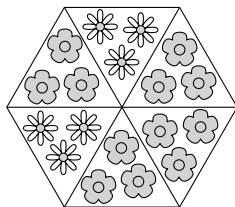
Zadanie 20. Ewa ma 8 kart oznaczonych unikalnymi cyframi od 1 do 8. Układa wszystkie karty tworząc dwie czterocyfrowe liczby. Jaka jest najmniejsza możliwa dodatnia różnica między tymi dwiema liczbami?

Wynik. 247

Rozwiązanie. Różnica jest najmniejsza, gdy liczby są tak blisko siebie, jak to tylko możliwe. W tym celu cyfry tysięcy muszą różnić się jedynie o 1. Trzycyfrowa liczba przy większej z nich musi być tak mała, jak to możliwe, a przy mniejszej z nich tak duża, jak to możliwe. Prowadzi to do liczb 5123 i 4876, których różnica wynosi 247.

Zadanie 21. Babcia Jadzia postanowiła zasadzić sześć trójkątnych grządek używając dwóch rodzajów kwiatków: fiołków i stokrotek. Grządki te ustawi w taki sposób, by tworzyły sześciokąt foremny. Każda z sześciu grządek może być wypełniona albo fiołkami albo stokrotkami. Jedno z takich ustawień pokazane jest na rysunku. Na ile sposobów może ona rozplanować posadzenie kwiatków, aby istniała przynajmniej jedna para sąsiednich grządek z tymi samymi kwiatkami?

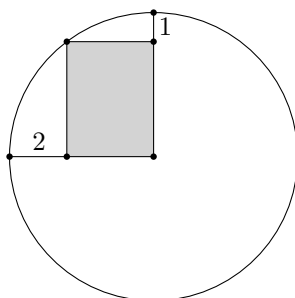
Uwaga: Ustawienia różniące się symetrią (obrotem lub odbiciem) są uznawane za różne.



Wynik. 62

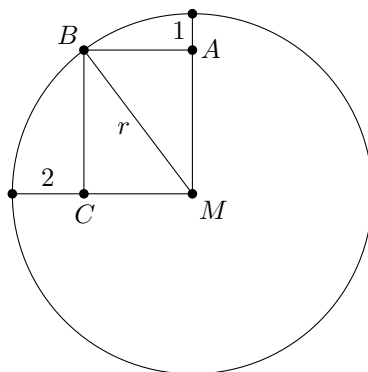
Rozwiązanie. Jeśli opuścimy warunek o dwóch sąsiadujących grządkach z tymi samymi kwiatkami, to odpowiedź wynosiłaby $2^6 = 64$. Od tego wyniku musimy odjąć opcje, gdzie warunek nie jest spełniony, czyli te, w których każda grządka sąsiaduje wyłącznie z innymi kwiatkami. Są tylko dwie takie możliwości, co prowadzi nas do łącznej liczby możliwych ustawień równej $64 - 2 = 62$.

Zadanie 22. Z okrągłej kartki papieru Andrzej wyciął prostokątny kawałek, w taki sposób, że jeden z wierzchołków prostokąta znajdował się w środku koła, a przeciwległy wierzchołek leżał na obwodzie koła. Pozostałe dwa wierzchołki leżały na promieniach koła, a ich odległość od obwodu wynosiła odpowiednio 1 dm i 2 dm. Jaka jest powierzchnia okrągłej kartki po wycięciu prostokąta (w dm^2)?



Wynik. $25\pi - 12$

Rozwiązanie. Niech M będzie środkiem okrągłej kartki, a A , B i C pozostałymi wierzchołkami prostokąta. Oznaczmy promień koła przez r .



Mamy $MA = r - 1$, $MB = r$ oraz $MC = r - 2$, gdzie $AB = MC$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego ABM otrzymujemy równanie

$$r^2 = (r - 1)^2 + (r - 2)^2,$$

które możemy uprościć do

$$0 = r^2 - 6r + 5 = (r - 1)(r - 5).$$

Wiemy, że $r > 2$, więc jedynym rozwiązaniem jest $r = 5$. Pole pozostałej części kartki wynosi $\pi r^2 - 3 \cdot 4 = 25\pi - 12$.

Zadanie 23. Mistrz Nábojkus, niezrównany wirtuoz sztuki łączenia esencji, zabiera się właśnie do stworzenia legendarnej *algemii* – doskonałego połączenia algebry i alchemii, zmieszanych dokładnie w proporcji 1 : 1. Aby tego dokonać, używa on poniższych substancji:

- algebria: składająca się w 80% z algebry i 20% z alchemii, o łącznej masie 10 mg,
- alchema: składająca się w 30% z algebry i 70% z alchemii, o łącznej masie 14 mg.

Mając te substancje do dyspozycji, jak dużo algemii jest w stanie maksymalnie wyprodukować Nábojkus (w mg)?

Uwaga: Nábojkus nie może rozdzielać elementów mikstury w żadnym momencie procesu, może tylko mieszać dostępne substancje.

Wynik. $23\frac{1}{3} = \frac{70}{3}$

Rozwiązanie. Jeśli zmieszamy x algebrii oraz y alchemy, powstała mieszanina zawiera $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y$ algebry i $\frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$ alchemii. Aby uzyskać proporcję 1 : 1, musi zachodzić

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y,$$

co możemy przekształcić do $y = \frac{3}{2}x$. Innymi słowy, na każdy miligram algebrii musimy użyć $\frac{3}{2}$ miligramu alchemy. W takim razie aby wyprodukować możliwie wiele algemii potrzebujemy zużyć całe 14 mg alchemy oraz $\frac{2}{3} \cdot 14$ mg algebrii, otrzymując łącznie $\frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3}$ mg algemii.

Zadanie 24. Czterocyfrowa liczba K ma wszystkie cyfry mniejsze od 7 i jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej n . Jeśli każdą cyfrę K zwiększymy o 3, to otrzymamy inny kwadrat liczby całkowitej. Wyznacz liczbę n .

Wynik. 34

Rozwiązanie. Niech $m^2 = M = K + 3333$. Skoro M i K są czterocyfrowymi kwadratami, to $32 \leq n < m \leq 99$ i

$$32 + 33 \leq m + n \leq 98 + 99,$$

czyli

$$65 \leq m + n \leq 197.$$

Stąd otrzymujemy

$$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2 = M - K = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101.$$

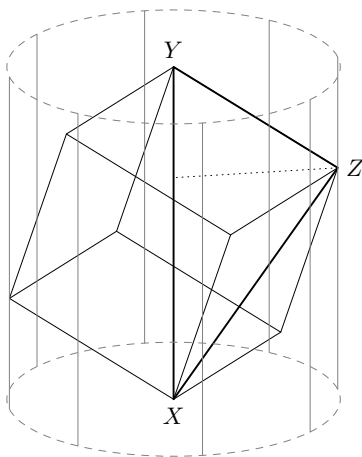
Biorąc pod uwagę te warunki, jedynymi możliwymi czynnikami są $m + n = 101$ i $m - n = 33$, prowadzące do rozwiązań $m = 67$ i $n = 34$. Pozostaje nam sprawdzić, że istotnie wszystkie cyfry $K = 34^2 = 1156$ są mniejsze niż 7 w tym przypadku.

Zadanie 25. Niech X i Y będą przeciwległymi wierzchołkami sześcianu o krawędziach długości 1, a C walcem, którego powierzchnia zawiera wszystkie wierzchołki tego sześcianu w taki sposób, że X i Y są środkami kół będących podstawami C . Ile wynosi objętość C ?

Wynik. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$

Rozwiązanie. Punkty X i Y są środkami podstaw walca, więc wysokość walca jest równa odległości między nimi. Ponieważ są to przeciwległe wierzchołki sześcianu, to leżą one na końcach przekątnej o długości $\sqrt{3}$. Aby wyznaczyć promień walca wybierzmy dowolny inny wierzchołek sześcianu Z i obliczmy jego odległość od przekątnej XY . Trójkąt XYZ ma przy wierzchołku Z kąt prosty, a szukany promień jest wysokością opuszczoną z Z na XY . Z podobieństwa (lub porównania pól) ta wysokość wynosi $\sqrt{2/3}$. Zatem objętość walca jest równa

$$\pi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$



Zadanie 26. W wiosce liczącej 60 mieszkańców każda osoba należy do jednej z trzech grup: prawdomówni zawsze mówią prawdę, kłamcy zawsze kłamią, a zwykli ludzie odpowiadają jak im się podoba. Każdy w wiosce wie do jakich grup należą pozostali mieszkańcy. Obcokrajowiec zadał wszystkim mieszkańcom następujące pytania:

- „Czy w wiosce mieszka co najmniej 31 prawdomównych?” – otrzymał dokładnie 43 odpowiedzi twierdzące.
- „Czy w wiosce mieszka co najmniej 31 kłamców?” – otrzymał dokładnie 39 odpowiedzi twierdzących.

Jaka jest najmniejsza możliwa liczba zwykłych ludzi w wiosce?

Wynik. 13

Rozwiązanie. Zauważmy, że stwierdzenie w drugim pytaniu nie może być prawdziwe – gdyby było co najmniej 31 kłamców, wszyscy odpowiedzieliby przecząco na pytanie; nie mogłoby być zatem 39 pozytywnych odpowiedzi. W wiosce mieszka więc co najwyżej 30 kłamców. Skoro prawdomówni zawsze mówią prawdę, musieli odpowiedzieć na to pytanie przecząco. W związku z tym jest co najwyżej $60 - 39 = 21$ prawdomównych w wiosce.

Oznacza to także, że odpowiedź na pierwsze pytanie jest przecząca. Zebrane pozytywne odpowiedzi musiały pochodzić od kłamców i części zwykłych ludzi. Skoro w wiosce mieszka co najwyżej 30 kłamców, musi istnieć co najmniej $43 - 30 = 13$ zwykłych ludzi.

Zauważmy, że 17 prawdomównych, 30 kłamców i 13 zwykłych ludzi spełnia obydwa warunki zadania. Zatem zwykłych ludzi mieszkających w wiosce jest co najmniej 13.

Zadanie 27. Cztery drużyny, A , B , C i D , wzięły udział w turnieju, w którym każda para drużyn rozegrała dokładnie jeden mecz między sobą. Zwycięzca każdego meczu otrzymywał 1 lub 2 punkty, w zależności od wielkości zwycięstwa, natomiast przegrana drużyna nie otrzymywała żadnych punktów. Nie było remisów. Po wszystkich meczach utworzono tabelę obrazującą wyniki wszystkich meczów (przykładowa tabela poniżej). Wyznacz ile różnych tabel może odpowiadać końcowemu rozkładowi punktów, jeśli wiadomo, że jedna drużyna zakończyła z 4 punktami, a pozostałe trzy drużyny miały po 1 punkcie.

Uwaga: Tabela ma ustalony układ drużyn (A , B , C i D), etykiety jej wierszy i kolumn nie są zmieniane.

	A	B	C	D	suma
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Wynik. 24

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że łączna liczba przyznanych punktów wynosi 7, co oznacza, że z 6 meczów dokładnie jeden zakończył się zdobyciem przez zwycięską drużynę dwóch punktów, podczas gdy pozostałe zakończyły się zdobyciem przez zwycięzców tylko jednego punktu. Oznacza to, że najlepsza drużyna pokonała wszystkie pozostałe drużyny, przy czym dokładnie jedno z tych zwycięstw było za 2 punkty. Najlepszą drużynę i tę, z którą ona wygrała za 2 punkty można wybrać na $4 \cdot 3 = 12$ sposobów. Mecze pomiędzy trzema drużynami, które zdobyły tylko po 1 punkcie musiały zakończyć się „cyklem”, który można zorientować na dokładnie dwa sposoby. W sumie istnieją $12 \cdot 2 = 24$ sposoby, w jakie turniej mógł się potoczyć.

Zadanie 28. Magda zapisała liczbę 2025 w postaci sumy M składników, z których każdy jest postaci 10^n dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej n . Składniki w tej sumie mogą się powtarzać. Ile różnych wartości może przyjąć liczba M ?

Wynik. 225

Rozwiązanie. Oczywiście najmniejszą możliwą wartością M jest 9, ponieważ

$$2025 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Jeśli $k \geq 1$, to każde podstawienie $10^k = 10 \cdot 10^{k-1}$ zwiększa liczbę składników o 9. Oznacza to, że możliwe wartości M muszą być wielokrotnościami 9, co więcej tworzą one zbiór kolejnych wielokrotności 9. Największa możliwa wartość M to 2025, ponieważ

$$2025 = 2025 \cdot 10^0.$$

W takim razie mamy $\frac{2025}{9} = 225$ możliwych wartości M .

Zadanie 29. Łukasz i Rafał stoją na peronie dworca kolejowego, plecami do siebie. Mija ich pociąg towarowy poruszający się ze stałą prędkością. Gdy początek pociągu znajduje się na ich wysokości, zaczynają iść w przeciwnych kierunkach, z jednakową stałą prędkością. Koniec pociągu mija Łukasza gdy jest on 45 metrów od punktu początkowego, Rafała zaś gdy jest on 60 metrów od punktu początkowego. Jaka była długość (w metrach) przejeżdżającego pociągu?

Wynik. 360

Rozwiązanie. Oznaczmy przez S punkt początkowy, w którym stoją Łukasz i Rafał. Niech t_1 będzie czasem, jaki upłynął od momentu, gdy przód pociągu minął Łukasza i Rafała, do momentu, gdy tył pociągu minął Łukasza. Podobnie niech t_2 będzie czasem, jaki upłynął od momentu, gdy tył pociągu minął Łukasza, do momentu, gdy minął Rafała. Rafał i Łukasz idą z taką samą prędkością. W czasie t_1 Łukasz zdołał pokonać 45 metrów, podczas gdy Rafał pokonał $60 - 45 = 15$ metrów w czasie t_2 . Stosunek czasów t_1 do t_2 wynosi

$$t_1 : t_2 = 45 : 15 = 3 : 1.$$

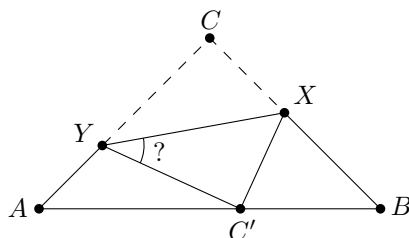
Teraz popatrzmy jak porusza się pociąg. W czasie t_1 pociąg pokonuje odległość pomiędzy punktem S a końcową pozycją Łukasza, która jest o 45 m krótsza od długości pociągu. W czasie t_2 pociąg pokonuje odległość 105 metrów, czyli odległość która dzieli Łukasza i Rafała. Oznacza to że prędkość pociągu wynosi

$$v = \frac{105}{t_2}.$$

Ostatecznie długość pociągu wynosi

$$vt_1 + 45 = \frac{t_1}{t_2} \cdot 105 + 45 = 3 \cdot 105 + 45 = 360.$$

Zadanie 30. Równoramienny trójkąt prostokątny ABC z kątem prostym przy wierzchołku C został tak zgięty wzdłuż odcinka XY , że punkt C znalazł się w punkcie C' na odcinku AB . Ponadto wiadomo, że $BC' = BX$. Znajdź miarę kąta $C'YX$ w stopniach.



Wynik. $33,75 = 33\frac{3}{4} = \frac{135}{4}$

Rozwiązanie. Skoro trójkąt $XC'B$ jest równoramienny, to

$$\angle C'XB = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67,5^\circ.$$

Ponadto, $\angle CXY = \angle YXC'$ z racji zgięcia, więc

$$\angle YXC' = \frac{1}{2}(180^\circ - 67,5^\circ) = 56,25^\circ.$$

Wreszcie $\angle XC'Y = \angle YCX = 90^\circ$, a zatem

$$\angle C'YX = 180^\circ - \angle XC'Y - \angle YXC' = 33,75^\circ.$$

Zadanie 31. Rozważmy ciąg wszystkich ostro rosnących czwórek liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$ ułożonych w porządku leksykograficznym:

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), (0, 1, 2, 5), \dots, (12, 13, 14, 15).$$

To znaczy, (a_1, a_2, a_3, a_4) pojawia się przed (b_1, b_2, b_3, b_4) w tym ciągu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 < b_1 \quad \text{lub} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{lub} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{lub} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 < b_4.$$

Podaj pozycję czwórki $(2, 4, 7, 14)$ w tym ciągu.

Uwaga: Pozycje w ciągu numerujemy od 1, przykładowo czwórka $(0, 1, 2, 5)$ jest na 3. pozycji.

Wynik. 911

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla $k \leq n$ liczba wszystkich ostro rosnących k -krotek o wartościach ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ jest równa $\binom{n}{k}$, ponieważ ostro rosnące krotki odpowiadają dokładnie podzbiорom wielkości k . Podobnie, liczba wszystkich rosnących k -krotek o wartościach ze zbioru $\{m, m+1, \dots, n\}$ jest równa $\binom{n-m+1}{k}$. Aby wyznaczyć pozycję krotki, policzmy liczbę wcześniejszych ostro rosnących czwórek grupując je zależnie od liczby na pierwszej pozycji:

- $(0, *, *, *)$: jest $\binom{15}{3} = 455$ takich czwórek;
- $(1, *, *, *)$: jest $\binom{14}{3} = 364$ takich czwórek;
- $(2, 3, *, *)$: jest $\binom{12}{2} = 66$ takich czwórek;
- $(2, 4, a, *)$ dla $a \in \{5, 6\}$: jest $\binom{10}{1} + \binom{9}{1} = 19$ takich czwórek;
- $(2, 4, 7, b)$ dla $b \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$: jest 6 takich czwórek.

Zatem czwórka $(2, 4, 7, 14)$ pojawia się na pozycji o numerze $455 + 364 + 66 + 19 + 6 + 1 = 911$.

Zadanie 32. Dwoje rolników, Dominik i Magdalena, sprzedało łącznie 100 jabłek na targu. Dominik sprzedał swoje jabłka za a złotych za sztukę, Magdalena zaś za b złotych za sztukę. Po sprzedaniu wszystkich jabłek oboje zarobili taką samą kwotę. Dominik zauważył, że gdyby sprzedawał swoje jabłka za b złotych za sztukę, tak jak Magdalena, to zarobiłby 45 złotych. Magdalena dodała, że gdyby sprzedawała swoje jabłka za a złotych za sztukę, tak jak Dominik, to zarobiłaby 20 złotych. Ile jabłek sprzedał Dominik?

Wynik. 60

Rozwiązanie. Oznaczmy przez A i B liczbę jabłek przyniesionych na targ odpowiednio przez Dominika i Magdalенę. Wiemy, że

$$\begin{aligned} A + B &= 100, \\ A \cdot a &= B \cdot b, \\ A \cdot b &= 45, \\ B \cdot a &= 20. \end{aligned}$$

Podstawiając $b = \frac{45}{A}$ i $a = \frac{20}{B}$ do drugiego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{20}{B} &= B \cdot \frac{45}{A}, \\ \frac{A^2}{B^2} &= \frac{45}{20} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Zatem $A = \frac{3}{2}B$. Podstawiając do pierwszego równania dostajemy $\frac{3}{2}B + B = 100$, więc $B = 40$, a stąd $A = 100 - 40 = 60$.

Zadanie 33. Dorocie przyśniła się fascynująca liczba. Jest to największa trzycyfrowa liczba, która jest równa sumie swojej cyfry setek, kwadratu cyfry dziesiątek i sześcienu cyfry jedności. Jaka liczba przyśniła się Dorocie?

Wynik. 598

Rozwiązanie. Oznaczmy przez a , b i c cyfry setek, dziesiątek i jedności trzycyfrowej liczby N . Jeśli $c = 9$, to $N > 9^3 = 729$, czyli a musiałoby być równe 7 lub 8. Jednakże w obu przypadkach nie można wybrać b tak, by ostatnia cyfra liczby $729 + a + b^2$ była równa 9.

Rozważmy następnie przypadek $c = 8$. Skoro $8^3 = 512$, to a musi być równe 5 lub 6, ale

$$N \leq 512 + 9^2 + 6 = 599 < 600,$$

zatem a może być równe jedynie 5. Wtedy cyfra b musi spełniać

$$512 + b^2 + 5 = 8 + 10b + 500,$$

czyli

$$b^2 - 10b + 9 = 0.$$

Stąd b może być równe 1 lub 9. Obydwie możliwości prowadzą do poprawnych liczb

$$518 = 5 + 1^2 + 8^3 \quad \text{oraz} \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3.$$

Jeśli $c \leq 7$, to

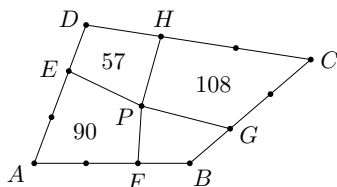
$$N \leq 7^3 + 9^2 + 9 = 433 < 598,$$

zatem największą możliwą wartością N jest 598.

Zadanie 34. Każdy bok czworokąta $ABCD$ jest podzielony dwoma punktami na trzy równe części, przy czym

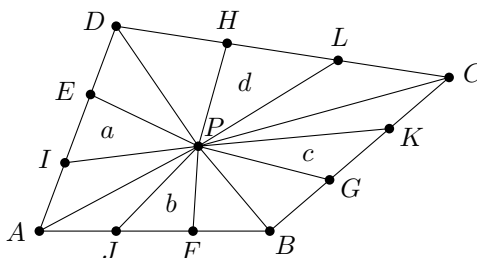
- punkt E leży na odcinku AD i zachodzi $AE : ED = 2 : 1$,
- punkt H leży na odcinku CD i zachodzi $CH : HD = 2 : 1$,
- punkt F leży na odcinku AB i zachodzi $AF : FB = 2 : 1$,
- punkt G leży na odcinku CB i zachodzi $CG : GB = 2 : 1$.

Punkt P leży we wnętrzu czworokąta $ABCD$, dzieląc go na cztery mniejsze czworokąty. Pola powierzchni trzech z nich podane są na obrazku. Wyznacz pole powierzchni czwartego z nich (czworokąta $PFBG$).



Wynik. 42

Rozwiązanie. Łącząc punkt P z wszystkimi punktami dzielącymi boki czworokąta $ABCD$ na trzy części dostajemy dwanaście trójkątów.



Trzy trójkąty leżące wzdłuż tego samego boku mają równe pola, ponieważ mają tę samą wysokość z punktu P i podstawy równej długości. Niech a będzie polem trójkąta PEI , b polem trójkąta PFI , c polem trójkąta PGK , a d polem trójkąta PLH . Na podstawie podanych informacji dostajemy równania

$$90 = 2a + 2b, \quad 57 = a + d, \quad 108 = 2c + 2d.$$

Natomiast szukane pole powierzchni czworokąta $PFBG$ jest równe $b + c$. Można je wyznaczyć następująco

$$b + c = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) - (a + d) = \frac{1}{2}(90 + 108) - 57 = 42.$$

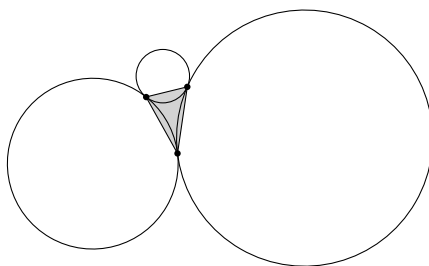
Zadanie 35. Ramka składa się z dwunastu kwadratów i powstaje poprzez usunięcie czterech środkowych kwadratów z siatki 4×4 . Na ile sposobów możemy wybrać cztery różne kwadraty z tej ramki, aby z każdego boku był wybrany co najmniej jeden kwadrat?

Uwaga: Każdy kwadrat na rogu należy do obu boków. Wybory różniące się symetrią (obrotem lub odbiciem) są uznawane za różne.

Wynik. 237

Rozwiązanie. Istnieje $\binom{12}{4} = 495$ możliwości wyboru 4 kwadratów z ramki o 12 kwadratach. Dla każdego z czterech boków jest 8 kwadratów nienależących do tego boku, co daje $\binom{8}{4} = 70$ wyborów czterech kwadratów w taki sposób, że z tej strony nic nie wybrano. Dlatego jest $495 - 4 \cdot 70 = 215$ takich wyborów, że nie istnieje bok, z którego nie wybraliśmy żadnego kwadratu. Jednakże niektóre wybory odjęliśmy podwójnie – te, w których nie wybraliśmy żadnego kwadratu z dwóch boków jednocześnie. Jest to możliwe, gdy wybierzemy cztery kwadraty z 5 skupionych wokół jednego z wierzchołków siatki (5 wyborów dla wierzchołka, 20 dla wszystkich 4 wierzchołków) lub 4 kwadraty z 4 przeciwległych środkowych kwadratów (łącznie 2 sposoby). Otrzymujemy zatem $215 + 22 = 237$ sposobów. Nie możemy tak wybrać kwadratów, by istniały trzy lub cztery boki, z których nic nie wybrano, więc jest to ostateczna odpowiedź.

Zadanie 36. Trzy okręgi o promieniach odpowiednio 1, 2 i 3 są zewnętrznie styczne (patrz rysunek poniżej). Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołki znajdują się w punktach styczności okręgów.



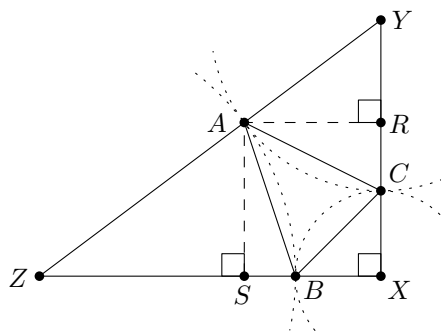
Wynik. $1,2 = 1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

Rozwiązanie. Oznaczmy środki okręgów odpowiednio przez X, Y, Z , a przez A, B, C punkty styczności okręgów (jak na rysunku poniżej). Trójkąt XYZ ma boki długości $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ oraz $2 + 3 = 5$. Zauważmy, że boki trójkąta są trójką pitagorejską, a więc trójkąt XYZ jest trójkątem prostokątnym, o kącie prostym przy wierzchołku X . Aby policzyć pole trójkąta ABC policzymy pola trójkątów równoramiennych XCB, YAC oraz ZBA i odejmiemy od pola trójkąta XYZ , które wynosi $\frac{1}{2}(3 \cdot 4) = 6$.

- Trójkąt XCB jest prostokątny, więc jego pole wynosi $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.
- Aby policzyć pole trójkąta YAC , musimy znaleźć długość wysokości AR . Trójkąty RYA oraz XYZ są podobne w skali $YA/YZ = \frac{2}{5}$, co oznacza, że $AR = \frac{2}{5}ZX = \frac{8}{5}$. Stąd pole trójkąta YAC wynosi $\frac{1}{2}(\frac{8}{5} \cdot 2) = \frac{8}{5}$.
- Analogicznie aby policzyć pole trójkąta ZBA korzystamy z podobieństwa trójkątów SAZ i XYZ w skali podobieństwa $\frac{3}{5}$, aby otrzymać $AS = \frac{9}{5}$. Stąd pole trójkąta ZBA wynosi $\frac{1}{2}(\frac{9}{5} \cdot 3) = \frac{27}{10}$.

Ostatecznie pole trójkąta ABC wynosi

$$6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$



Zadanie 37. Ula narysowała n -kąt foremny ($n > 3$) i policzyła jego przekątne. Okazało się, że łączna liczba przekątnych jest wielokrotnością 2025. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba n , dla której zachodzi ta własność?

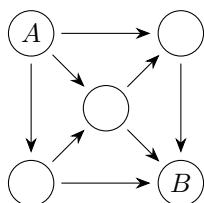
Uwaga: Boki n -kąta nie są liczone jako jego przekątne.

Wynik. 300

Rozwiązanie. Zauważmy, liczba przekątnych n -kąta foremnego wynosi $\binom{n}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-3)$. Skoro 2025 jest liczbą nieparzystą, to zadanie sprowadza się do wyznaczenia kiedy iloczyn $P = n(n-3)$ jest podzielny przez 2025. Z rozkładu $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ wynika, że potrzebujemy by P było podzielne przez $3^4 = 81$ oraz przez $5^2 = 25$. Zauważmy, że tylko jeden z czynników n , $n-3$ może być podzielny przez 5, a w takim razie musi być on podzielny przez 25. Równocześnie n będzie podzielne przez 3 wtedy i tylko wtedy gdy $n-3$ będzie podzielne przez 3, więc obie te liczby będą wliczały się w łączną potęgę trójki, która dzieli P . Jednakże tylko jedna z liczb n i $n-3$ może być podzielna przez 3^k dla $k \geq 2$. W takim razie jeden z tych czynników musi być podzielny przez 27.

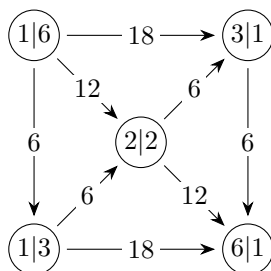
Jeśli jeden z czynników jest podzielny przez 25 i 27, to musiałby być równy co najmniej $25 \cdot 27 = 675$. Poszukajmy mniejszej wartości n wśród przykładów, w których jedna z liczb n lub $n-3$ jest podzielna przez 27 (powiedzmy że jest to m), zaś druga przez 25 (w takim razie mamy $n = m$ lub $n = m+3$). Z pierwszego założenia dostajemy $m = 27k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k i interesuje nas najmniejsza wartość k , dla której liczba $27k \pm 3$ jest podzielna przez 25 (dla pewnego wyboru znaku). Skoro $25k$ jest podzielne przez 25, to w tym przypadku równoważnie $2k \pm 3$ musi być podzielne przez 25. Najmniejsza wartość k w takim razie to $k = 11$, dla której używamy dodatniego znaku. Tak więc $m = 27 \cdot 11 = 297$ i $n = m+3 = 300$.

Zadanie 38. Michał wyrusza w podróż po ścieżkach przedstawionych na diagramie poniżej. Zaczyna w wierzchołku A i kończy w wierzchołku B . Musi poruszać się zgodnie z kierunkami strzałek na diagramie poza jednym buntowniczym ruchem, w którym celowo przemieszcza się przeciwnie do kierunku wyznaczonego przez strzałkę. Musi wykonać dokładnie jeden taki ruch podczas swojej podróży, nawet jeśli oznacza to, że chwilowo opuszcza swój cel. Michał może korzystać z każdej strzałki wielokrotnie. Na ile różnych sposobów może odbyć swoją podróż?



Wynik. 84

Rozwiązanie. Dla każdego wierzchołka policzmy (1) liczbę (skierowanych) ścieżek z A , które kończą się w danym wierzchołku oraz (2) liczbę ścieżek kończących się w B o początku w danym wierzchołku. W diagramie poniżej, przykładowo, 3|1 w prawym górnym wierzchołku oznacza, że istnieją dokładnie trzy ścieżki z początkowego wierzchołka, które kończą się w tym wierzchołku i tylko jedna ścieżka z tego wierzchołka do końcowego wierzchołka. Dla każdej strzałki liczba ścieżek, które przechodzą przez nią przeciwnie do jej kierunku jest równa iloczynowi: pierwszej liczby w wierzchołku na końcu danej strzałki i drugiej liczbie w wierzchołku na początku danej strzałki. Zatem wystarczy policzyć te iloczyny i zsumować.



Zadanie 39. W poniższym równaniu różne litery odpowiadają różnym, niezerowym cyfrom.

$$\begin{array}{r}
 N \quad N \quad N \quad N \quad N \\
 + \quad \quad A \quad A \quad A \quad A \\
 + \quad \quad \quad B \quad B \quad B \\
 + \quad \quad \quad \quad O \quad O \\
 + \quad \quad \quad \quad \quad J \\
 - \quad \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \\
 \hline
 = \quad N \quad A \quad B \quad O \quad J
 \end{array}$$

Wyznacz największą możliwą wartość pięciocyfrowej liczby $NABOJ$.

Wynik. 18249

Rozwiązanie. Możemy przekształcić równoważnie obliczenia do postaci

$$\begin{array}{rcccccc} & N & N & N & N & N \\ + & & A & A & A & A \\ + & & & B & B & B \\ + & & & & O & O \\ + & & & & & J \\ - & N & A & B & O & J \\ \hline = & & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

co upraszcza się do

$$\begin{array}{rcccc} & N & N & N & N \\ + & & A & A & A \\ + & & & B & B \\ + & & & & O \\ \hline = & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

Z tego wynika, że $N = 1$. W tym momencie zostaje nam $\overline{AAA} + \overline{BB} + O = 2025 - 1111 = 914$, co oznacza, że $A = 8$. Kolejne przekształcenie $914 - 888 = 26$ daje nam $B = 2$ oraz $O = 4$. Wartość J może być dowolna, ale różna od użytych już cyfr, więc największa możliwa wartość $NABOJ$ to 18249.

Zadanie 40. Nad zadaniami konkursowymi Náboja głosowało 500 organizatorów. W każdym głosowaniu każdy organizator głosuje „za” albo „przeciw”. Niestety, po pierwszym głosowaniu, część z organizatorów głosujących „za” uznała, że ten proces jest zbyt męczący i opuściła salę. Żadna z osób głosujących „przeciw” nie opuściła sali. W trakcie drugiego głosowania, ta sama liczba organizatorów zagłosowała „za”, co w pierwszym głosowaniu, ale liczba głosów „przeciw” w drugim głosowaniu była równa jednej trzeciej liczby głosów „przeciw” w pierwszym głosowaniu. Wiadomo dodatkowo, że dokładnie 120 organizatorów zagłosowało „za” w obu głosowaniach i 70 zagłosowało „przeciw” w obu głosowaniach. Ilu organizatorów opuściło salę po pierwszym głosowaniu?

Wynik. 150

Rozwiązanie. Oznaczmy przez TN liczbę organizatorów głosujących „za” w pierwszym głosowaniu i „przeciw” w drugim; analogicznie definiujemy TT , NN oraz NT . Przez TX oznaczmy liczbę organizatorów, którzy opuścili salę. Otrzymujemy wtedy następujący układ równań

$$\begin{aligned} TT + TN + NT + NN + TX &= 500 \\ TT + TN + TX &= TT + NT \\ NT + NN &= 3(TN + NN) \end{aligned}$$

Podstawiając $TT = 120$ i $NN = 70$ oraz porządkując składniki, otrzymujemy

$$\begin{array}{rcccl} TN & + & NT & + & TX & = & 310 \\ TN & - & NT & + & TX & = & 0 \\ -3TN & + & NT & & & = & 140 \end{array}$$

Mnożąc drugie równanie przez 2 i sumując wszystkie równania razem otrzymujemy $3TX = 450$, więc $TX = 150$. Wtedy $TN = 5$ i $NT = 155$.

Zadanie 41. Wyznacz liczbę par (a, b) liczb całkowitych dodatnich spełniających $a \leq b$, dla których liczby $\text{NWD}(a, b)$, a i b można uporządkować w ciąg arytmetyczny, którego suma wynosi 2025.

Uwaga: Ciąg arytmetyczny to ciąg liczb, w którym różnica między dwoma kolejnymi wyrazami jest zawsze taka sama.

Wynik. 12

Rozwiązanie. Niech $g = \text{NWD}(a, b)$. Wtedy $a = ga'$, $b = gb'$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a' , b' . Skoro $g \leq a \leq b$, to ciąg arytmetyczny jest w kolejności g, a, b . Oznacza to, że $a - g = b - a$, czyli $b = 2a - g$, co po podzieleniu przez g daje $b' = 2a' - 1$. Z warunku dotyczącego sumy ciągu otrzymujemy

$$g + a + b = g(1 + a' + 2a' - 1) = 3ga' = 2025,$$

stąd $ga' = 675 = 3^3 5^2$. Liczba ta ma $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ dodatnich dzielników. Pozostaje tylko sprawdzić, czy każdy taki dzielnik daje prawidłową wartość a' , tj. taką, którą można uzupełnić do pary (a, b) spełniającej warunki zadania. Rzeczywiście, przyjmując $b' = 2a' - 1$, $g = 675/a'$, $a = ga' = 675$, $b = gb'$, mamy $a \leq b$, ponieważ $ga' \leq g(2a' - 1)$ dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a' i g , a także

$$\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(ga', g(2a' - 1)) = g \cdot \text{NWD}(a', 2a' - 1) = g,$$

ponieważ a' i $2a' - 1$ są względnie pierwsze dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej a' .

Zadanie 42. Organizatorzy Nábója postanowili przeprowadzić konkurs w przedszkolu. Uproszczone zasady prezentują się następująco. Na początku drużyna otrzymuje pierwsze 3 zadania z puli 16 ponumerowanych zadań. Dla każdej drużyny przygotowany jest zestaw takich samych zadań ułożonych w tej samej kolejności. Gdy drużyna rozwiąże zadanie, zostaje ono zastąpione następnym – tym o najniższym dostępnym numerze z puli zadań tej drużyny. Po zakończeniu zawodów okazało się, że żadne dwie drużyny nie rozwiązały dokładnie takiego samego zbioru zadań. Jaka jest maksymalna liczba drużyn biorących udział w konkursie?

Wynik. 697

Rozwiązanie. Zauważmy, że zestaw zadań, które są rozwiązane przez dany zespół jest w pełni ustalony przez zestaw zadań nierozwiązanych i na odwrót. Możemy więc popatrzeć na to w ten sposób, że każda drużyna powinna mieć co najwyżej trzy różne zadania zostawione na stole na koniec zawodów. W takim razie mamy co najwyżej

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 697$$

drużyn biorących udział w zawodach.

Zadanie 43. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$2a + 2b - ab = 2025,$$

$$2b + 2c - bc = 47,$$

$$2c + 2d - cd = 5.$$

Wyznacz wartość wyrażenia $2a + 2d - ad$.

Wynik. 51

Rozwiązanie. Korzystając z równania $(x - 2)(y - 2) = xy - 2x - 2y + 4$ podane warunki można przekształcić do następujących równań

$$(a - 2)(b - 2) = -2021,$$

$$(b - 2)(c - 2) = -43,$$

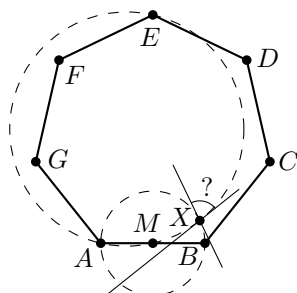
$$(c - 2)(d - 2) = -1,$$

a naszym celem jest znalezienie wartości $4 - (a - 2)(d - 2)$. Korzystając z drugiego równania otrzymujemy, że $b \neq 2$ oraz $c \neq 2$ i dostajemy

$$(a - 2)(d - 2) = \frac{(a - 2)(b - 2)(c - 2)(d - 2)}{(b - 2)(c - 2)} = \frac{(-2021) \cdot (-1)}{-43} = -47.$$

Stąd $2a + 2d - ad = 4 - (-47) = 51$.

Zadanie 44. Niech M będzie środkiem boku AB w siedmiokącie foremnym $ABCDEFG$. Okrąg o środku w M przechodzący przez A przecina okrąg opisany na trójkącie AME w punkcie X leżącym we wnętrzu siedmiokąta. Ile wynosi miara kąta ostrego (w stopniach) między stycznymi do obu okręgów w punkcie X ?



Wynik. $77\frac{1}{7} = \frac{540}{7}$

Rozwiązanie. Siedmiokąt $ABCDEFG$ jest foremny a kąt AME jest prosty, więc AE jest średnicą większego z okręgów. Zamiast mierzyć kąt między stycznymi przy X , równoważnie (z symetrii) możemy mierzyć kąt między stycznymi przy A , który jest drugim punktem przecięcia naszych okręgów. Ten kąt jest równy kątowi BAE między odpowiednimi średnicami, gdyż są one prostopadłe do interesujących nas stycznych. Jego miara, $\frac{3}{7} \cdot 180^\circ$, może być nietrudno wyznaczona z symetrii siedmiokąta foremnego, bądź z faktu że będzie ona połową $\frac{3}{7} \cdot 360^\circ$ – miary kąta środkowego opartego na łuku BE w okręgu opisanym na siedmiokącie.

Zadanie 45. Wyznacz sumę wartości wyrażeń $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \dots \pm 2^{99})^2$ powstałych z każdego możliwego wyboru stu znaków $\pm$.

Wynik. $\frac{2^{100} \cdot (4^{100} - 1)}{3}$

Rozwiązanie. Zaczniemy od ogólniejszej obserwacji: dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n oraz liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$, jeśli zsumujemy wyrażenia $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2$ dla każdego możliwego wyboru znaków to wynik będzie zawsze równy

$$2^n (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Aby to udowodnić, zauważmy, że rozwinięcie $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2$ składa się z wyrazów będących kwadratami x_i^2 oraz iloczynów mieszanych postaci $\pm 2x_i x_j$ dla $i \neq j$. Każdy wyraz x_i^2 pojawia się w każdym możliwym rozwinięciu, niezależnie od wyboru znaków. Ponieważ mamy 2^n możliwych opcji wybrania znaku to każdy wyraz będący kwadratem pojawia się dokładnie 2^n razy. Z drugiej strony, iloczyny mieszane $\pm 2x_i x_j$ pojawią się z plusem w dokładnie połowie przypadków i z minusem w drugiej połowie, zależnie od tego, czy x_i oraz x_j są tego samego znaku. Skoro takie wyrażenia idealnie się skracają po przejściu przez wszystkie kombinacje znaków, to nie wpływają na ostateczną sumę. Zatem całkowita suma upraszcza się do 2^n razy suma kwadratów poszczególnych liczb, co dowodzi wspomniany wzór.

W naszym przypadku mamy $x_i = 2^{i-1}$ dla $i = 1, 2, \dots, 100$, a szukana suma wynosi

$$2^{100} \cdot (1 + 4^1 + \dots + 4^{99}).$$

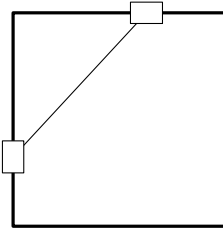
Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego dostajemy

$$1 + 4^1 + \dots + 4^{99} = \frac{4^{100} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{100} - 1}{3},$$

co daje ostateczny wynik

$$\frac{2^{100} \cdot (4^{100} - 1)}{3}.$$

Zadanie 46. Dwa samochody połączone gumową liną poruszają się po drodze w kształcie kwadratu przedstawionej na rysunku. Na początku oba auta startują jednocześnie w tym samym rogu kwadratu. Każdy z samochodów porusza się ze stałą prędkością. Lina jest niesamowicie elastyczna, ale pęknie jeśli zostanie rozciągnięta wzdłuż przekątnej kwadratu. Wolniejszy samochód porusza się z prędkością 24 km/h, a szybszy z prędkością n km/h, oba w tym samym kierunku. Wyznacz najmniejszą całkowitą wartość n , większą niż 24, dla której lina nigdy nie pęknie.



Wynik. 56

Rozwiązanie. Przez *odcinek* będziemy rozumieć jeden bok kwadratowej drogi. Niech $m = 24$ i $n > m$ oznaczają odpowiednio prędkości wolniejszego i szybszego samochodu. Zauważmy, że pęknięcie liny zależy jedynie od stosunku prędkości, a nie ich wartości. Niech m' i n' będą takimi względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $m' : n' = m : n$. Pokażemy, że lina nie pęka dokładnie wtedy, gdy $n' - m'$ jest wielokrotnością 4.

Najpierw przeanalizujmy przypadek gdy $n' - m'$ nie jest wielokrotnością 4. Po przejechaniu m' odcinków wolniejszy samochód znajdzie się w rogu. W tym samym czasie szybszy samochód pokona n' odcinków (ze względu na stosunek prędkości), więc również znajdzie się w rogu. Ponieważ $n' - m'$ nie jest podzielne przez 4, muszą to być dwa różne wierzchołki kwadratu. Jeśli okaże się, że są to wierzchołki naprzeciwległe lina pęknie natychmiast. Natomiast, jeśli będą to wierzchołki sąsiednie, to po przejechaniu kolejnych m' i n' odcinków samochody znajdą się w przeciwnych wierzchołkach, co również spowoduje pęknięcie liny.

Założmy teraz, że $n' - m'$ jest wielokrotnością 4. Najpierw zauważmy, że oba samochody znajdą się w rogu nie wcześniej niż gdy wolniejszy samochód pokona m' odcinków. W przeciwnym wypadku po pokonaniu $s < m'$ odcinków przez samochód wolniejszy, szybszy pokonałby $\frac{s}{m'} \cdot n'$ odcinków, co nie może być liczbą całkowitą, ponieważ m' i n' są względnie pierwsze. Zatem pierwszy raz oba auta znajdą się jednocześnie w rogach, gdy wolniejszy samochód pokona m' , a szybszy n' odcinków. Założyliśmy, że $n' - m'$ jest wielokrotnością 4, zatem oba samochody znajdą się w tym samym wierzchołku. Możemy na tą sytuację patrzeć tak, jakby cała trasa zaczynała się od nowa (możliwe, że z innego wierzchołka), zatem lina nigdy nie pęknie.

Pozostaje znaleźć najmniejszą wartość $n > 24$, dla której różnica $n' - m'$ jest podzielna przez 4. Skoro m' i n' są względnie pierwsze, to nie mogą być równocześnie parzyste, więc muszą być nieparzyste. Ponieważ m' jest dzielnikiem

$m = 24$, więc jedynymi możliwymi wartościami są 1 i 3. Jeśli $m' = 1$, to najmniejszą liczbą, dla której $n' - 1$ jest wielokrotnością 4 jest $n' = 5$. Wtedy $n = \frac{24}{1} \cdot 5 = 120$. Jeśli $m' = 3$, to najmniejszą liczbą względnie pierwszą z 3, dla której $n' - 3$ dzieli się przez 4 jest 7. W tym przypadku $n = \frac{24}{3} \cdot 7 = 56$. Skoro 56 jest mniejsze niż 120, to szukaną najmniejszą wartością n jest 56.

Zadanie 47. Przy okrągłym stole 2025 graczy gra w grę. Pod koniec każdej rundy gracz, który przegrał oddaje każdemu z pozostałych 2024 graczy liczbę monet równą liczbie monet, którą tamten obecnie posiada (zatem różni gracze mogą otrzymać różną liczbę monet). Po 2025 rundach każdy gracz posiada dokładnie 2^{3000} monet. Co więcej, żaden z graczy nie był zadłużony w trakcie trwania gry. Wyznacz ile monet posiadał gracz, który przegrał w pierwszej rundzie, jeśli każdy z graczy przegrał dokładnie jedną rundę.

Wynik. $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999}$

Rozwiązanie. Oznaczmy graczy numerami $1, 2, \dots, 2025$, a liczbę monet posiadanych przez gracza p po r rundach jako $m_{p,r}$. Bez straty ogólności, załóżmy, że gracz 1 przegrał w pierwszej rundzie, gracz 2 w drugiej, i tak dalej. Oznaczmy przez $M = 2^{3000}$ liczbę monet posiadanych przez wszystkich graczy pod koniec gry.

Od przegranej w p -tej rundzie, liczba monet posiadanych przez gracza p podwaja się aż osiągnie M pod koniec gry. Zatem w rundach $r \geq p$, liczba monet wynosi

$$m_{p,r} = \frac{M}{2^{2025-r}}.$$

Skoro gracz r przegrał w rundzie o numerze r , to stracił wtedy liczbę monet równą liczbie monet posiadanych przez pozostałych graczy. Łączna liczba monet w grze jest równa $2025M$, więc

$$m_{r,r} = m_{r,r-1} - \sum_{p \neq r} m_{p,r-1} = m_{r,r-1} - (2025M - m_{r,r-1}).$$

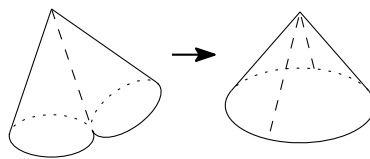
Przekształcając równanie, otrzymujemy

$$m_{r,r-1} = \frac{m_{r,r}}{2} + \frac{2025M}{2} = \frac{M}{2^{2026-r}} + \frac{2025M}{2}.$$

Podstawiając $r = 1$, otrzymujemy szukany wynik

$$\frac{M}{2^{2025}} + \frac{2025M}{2} = 2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot (1 + 2025 \cdot 2^{2024}).$$

Zadanie 48. Kacper ma trzy identyczne papierowe modele powierzchni bocznej stożka. Podstawą każdego stożka jest koło prostopadłe do osi łączącej jego środek z wierzchołkiem stożka, przy czym to koło nie jest częścią papierowych modeli. Kacper umieścił dwie powierzchnie stożka wierzchołkami przy wierzchołku w taki sposób, aby współdzieliły tworzącą stożka, a następnie przeciął oba modele wzdłuż tej tworzącej i połączył je tworząc większą powierzchnię boczną stożka (jak pokazano na rysunku). Objętość utworzonego pełnego stożka wynosiła 10. Następnie Kacper połączył w taki sam sposób tę większą powierzchnię boczną stożka z trzecim modelem, chcąc zmierzyć objętość stożka, który powstanie. Okazało się, że objętość powstałego stożka wynosi zero. Jaka była objętość oryginalnego stożka?



Wynik. $\sqrt{10}$

Rozwiązanie. Fakt, że ostateczny stożek ma zerową objętość oznacza, że połączenie trzech identycznych powierzchni bocznych daje całkowicie płaski kształt – pełne koło. Oznacza to, że każda pojedyncza powierzchnia boczna stożka, po spłaszczeniu, odpowiada wycinkowi koła o kącie środkowym 120° . Niech l będzie długością tworzącej oryginalnego stożka, a r promieniem jego podstawy. Skoro kąt środkowy ma miarę 120° , to $l = 3r$.

Powierzchnia boczna stożka pośredniego, utworzonego przez połączenie dwóch modeli, jest wycinkiem koła o kącie środkowym 240° , czyli ma promień podstawy $2r$. Stosując wzór na objętość stożka i twierdzenie Pitagorasa dostajemy

$$10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Dzięki temu obliczamy objętość pierwotnego stożka jako

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3 = \sqrt{10}.$$

Zadanie 49. Dla ilu dodatnich liczb całkowitych $n \leq 200$ równanie

$$5 \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie x będące liczbą całkowitą, gdzie $1 \leq x \leq 200$?

Uwaga: Symbol $\lfloor t \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą mniejszą bądź równą liczbie rzeczywistej t .

Wynik. 82

Rozwiązanie. Jeżeli n jest wielokrotnością 5, to lewa strona równania jest wielokrotnością 5, więc w takim przypadku nie mamy rozwiązań. Co więcej, dla $n = 1$, lewa strona równania jest zawsze nieujemna, więc również nie daje nam to rozwiązań. We wszystkich innych przypadkach, jeśli zignorujemy ograniczenie $x \leq 200$, rozwiązanie zawsze istnieje. Przekształćmy równanie do postaci

$$5 \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + 1. \quad (\heartsuit)$$

Teraz lewa strona jest zawsze wielokrotnością 5, możemy więc przeanalizować rozwiązania na podstawie wartości n mod 5.

Jeśli $n = 5k + 4$, to $x = n + 1 = 5k + 5$ jest rozwiązaniem (obie strony $(\heartsuit)$ są równe x), czyli wszystkie liczby tej postaci są poprawne (40 liczb). Jeśli $n = 5k + 3$, to prawa strona równania jest wielokrotnością 5 i potrzebujemy $\lfloor x/n \rfloor \geq 3$, co nie jest możliwe dla $n \geq 67$, ponieważ wymagałoby to wartości x większej niż 200. Dla $n \leq 66$ (13 liczb) bierzemy $x = 3n + 1$, co sprawia, że obie strony $(\heartsuit)$ są równe x . W podobny sposób, jeśli $n = 5k + 2$, to potrzebujemy $\lfloor x/n \rfloor \geq 2$, co nie jest możliwe dla $n \geq 101$, a dla pozostałych przypadków bierzemy $x = 2n + 1$ (20 liczb). Ostatecznie, jeśli $n = 5k + 1$, to jedynie wartości $n \leq 50$ są dopuszczone, a dla nich $x = 4n + 1$ (10 liczb, ale 1 nie daje poprawnego wyniku, zostawiając 9 poprawnych liczb). Łącznie mamy więc $40 + 13 + 20 + 9 = 82$ takich wartości.

Zadanie 50. Adam ma nieograniczoną liczbę symetrycznych dwudziestościennych kostek, których ścianki są ponumerowane od 1 do 20. Rzuca jednocześnie wybraną liczbą kostek, chcąc uzyskać dokładnie jedną lub dwie jedynki w jednym rzucie. Ile kostek powinien wybrać, aby zmaksymalizować prawdopodobieństwo sukcesu?

Wynik. 28

Rozwiązanie. Prawdopodobieństwo, o którym mowa w zadaniu, jest sumą prawdopodobieństw, że wypadnie dokładnie jedna jedynka

$$P_1 = n \left(\frac{1}{20} \right) \left(\frac{19}{20} \right)^{n-1}$$

oraz prawdopodobieństwa, że wypadną dokładnie dwie jedynki

$$P_2 = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{20} \right)^2 \left(\frac{19}{20} \right)^{n-2}.$$

Sumę $P_1 + P_2$ możemy uprościć do

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot 19^2} n(n+37) \left(\frac{19}{20} \right)^n.$$

Interesuje nas dla jakiego n otrzymamy $a_{n+1} < a_n$ czyli

$$\frac{19}{20}(n+1)(n+38) < n(n+37),$$

co możemy uprościć do wyrażenia

$$n^2 - n - 722 > 0.$$

Dla dodatnich liczb całkowitych n otrzymujemy, że $n \geq 28$. Możemy uniknąć bezpośredniego rozwiązywania równania kwadratowego szacując $(n - \frac{1}{2})^2 > 722$, co daje $n \geq 28$. To wykazuje, że ciąg a_n najpierw rośnie, a później maleje, a jego największą wartością jest 28.

Zadanie 51. Punkt D leży na boku AC trójkąta ABC w taki sposób, że $AD = BC$ oraz $BD = CD$. Ponadto $\angle BAC = 30^\circ$. Wyznacz wszystkie możliwe miary kąta DBA w stopniach.

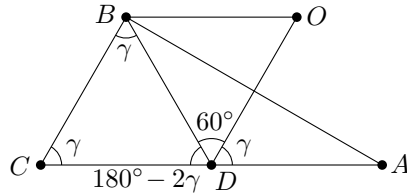
Wynik. 30 oraz 110

Rozwiązanie. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD . Wtedy $\angle DOB = 2\angle BAD = 60^\circ$, więc trójkąt BDO jest równoboczny. W szczególności, $AO = DO = BD = CD$. Używając $AD = BC$ dostajemy przystawanie równoramiennych trójkątów AOD i CDB . Oznaczając $\gamma = \angle ACB$, dostajemy $\angle CBD = \angle DAO = \angle ADO = \gamma$. Przeanalizujemy teraz trzy przypadki, w zależności od położenia punktu O względem kąta BAC .

Najpierw przyjmijmy, że O leży poza tym kątem, bliżej półprostej AB niż AC . W tym przypadku mamy

$$180^\circ = \angle ADO + \angle ODB + \angle BDC = \gamma + 60^\circ + (180^\circ - 2\gamma) = 240^\circ - \gamma,$$

zatem $\gamma = 60^\circ$ i nietrudno otrzymujemy $\angle DBA = 30^\circ$.



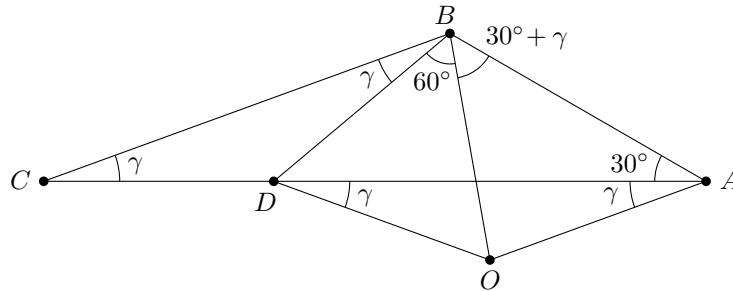
Teraz niech O leży poza kątem $\angle BAC$, bliżej półprostej AC . Wtedy $\angle OBA = \angle BAO = 30^\circ + \gamma$, a zatem

$$\angle CBA = \angle OBA + \angle DBO + \angle CBD = (30^\circ + \gamma) + 60^\circ + \gamma = 90^\circ + 2\gamma$$

oraz

$$180^\circ = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 30^\circ + (90^\circ + 2\gamma) + \gamma = 120^\circ + 3\gamma,$$

więc $\gamma = 20^\circ$. Stąd $\angle DBA = 90^\circ + \gamma = 110^\circ$.



Wreszcie udowodnimy, że O nie może leżeć we wnętrzu kąta BAC przy danych założeniach. Istotnie, w takim przypadku mielibyśmy $\angle DOA > 120^\circ$, ale $\angle BDC < 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, więc trójkąty AOD i BDC nie mogłyby być przystające.

Zadanie 52. Niech f będzie funkcją, która przypisuje każdej parze nieujemnych liczb całkowitych nieujemną liczbę całkowitą i która jest określona przez następujące warunki:

- Dla każdego x : $f(x, x) = 0$.
- Dla każdych x, y : $f(x, y) = f(y, x)$.
- Dla każdych x, y : $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
- Dla każdych x, y : $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
- Dla każdych x, y : $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Wyznacz sumę wszystkich nieujemnych liczb całkowitych $t \leq 60$, dla których $f(20, t) = 2$.

Wynik. 415

Rozwiązanie. Przyglądając się własnościom funkcji dochodzimy do wniosku, że $f(x, y)$ zlicza liczbę różniących się pozycji w zapisie dwójkowym liczb x i y . Istotnie, możemy patrzeć na jej działanie jak na algorytm rekursywny; niech $x' = \lfloor x/2 \rfloor$ i $y' = \lfloor y/2 \rfloor$, to jest x' i y' otrzymujemy przez usunięcie ostatniej cyfry (jedności) x i y , odpowiednio.

- Jeśli $x = y$, to $f(x, y) = 0$, co oznacza, że nie ma różniących się bitów.
- Jeśli zarówno x i y są parzyste, to ich ostatnie cyfry są sobie równe, zatem usuwamy je i obliczamy $f(x', y')$.
- Jeśli obie te liczby są nieparzyste, to ich ostatnie cyfry dalej są sobie równe, co pozwala nam na takie same usunięcie ostatniej cyfry i pozostawia $f(x', y')$.
- Jeśli jedna liczba jest parzysta, a druga nieparzysta to ich ostatnie cyfry są różne, zatem zwieszamy licznik o jeden i ponownie otrzymujemy $f(x', y')$.

Ten proces sprowadza się do porównywania liczb bit po bicie i zwiększaniu licznika dokładnie wtedy, gdy odpowiadające sobie bity się różnią.

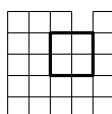
Teraz pozostaje nam znaleźć sumę wszystkich nieujemnych liczb całkowitych $t \leq 60$, dla których $f(20, t) = 2$. To oznacza, że szukamy liczb t o co najwyżej sześciu cyfrach w zapisie binarnym, które różnią się od $20 = 010100_2$ na dokładnie dwóch pozycjach (zauważmy, że 61, 62, 63 nie można otrzymać przez zmianę dokładnie dwóch bitów w zapisie

dwójkowym 20). Aby obliczyć całkowitą sumę przeanalizujemy jaki wkład w nią mają poszczególne bity. Ponieważ wybieramy dwa bity do zmiany spośród sześciu to mamy $\binom{6}{2} = 15$ takich liczb. Każdy bit jest zmieniony w dokładnie pięciu spośród tych sześciu liczb (odpowiadających przypadkom, gdy ten konkretny bit i pewien z pozostałych pięciu są zmienione) i pozostaje taki sam w pozostałych dziesięciu liczbach. Teraz zliczymy wkład poszczególnych zmian.

Pięć liczb ma zmieniony ostatni bit, co wnosi $5 \cdot 2^0$ do szukanej sumy, a pozostałe dziesięć liczb nie zmienia tego bitu. Podobnie, pięć liczb ma zmieniony drugi bit, dodając $5 \cdot 2^1$ do sumy. Kontynuując w ten sposób widzimy, że wkład kolejnych bitów to: $10 \cdot 2^2$ (ten bit wnosi coś do sumy w dziesięciu przypadkach, gdy nie jest zmieniony), $5 \cdot 2^3$, $10 \cdot 2^4$ oraz $5 \cdot 2^5$. Stąd łatwo wynika, że całkowita suma to

$$5 \cdot (010100_2 + 111111_2) = 5 \cdot (20 + 63) = 415.$$

Zadanie 53. Marzena narysowała siatkę 45×45 i policzyła w niej kwadraciki 1×1 uświadamiając sobie, że jest ich 2025. To bardzo ją zmartwiło, bo z powodów osobistych woli kształty składające się z 2024 kwadracików. Aby to naprawić, chce usunąć jeden kwadracik z brzegu siatki, a następnie policzyć wszystkie możliwe kwadraty (niekoniecznie 1×1) w uzyskanej siatce. Marzena jest przesądna i obawia się liczb podzielnych przez 13, więc chce tak wyciąć ten kwadracik, żeby całkowita liczba kwadratów w uzyskanej siatce nie była podzielna przez 13. Rysunek poniżej ilustruje przykład: siatka 5×5 z usuniętym jednym brzegowym kwadracikiem i kwadrat 2×2 w uzyskanej siatce. Na ile sposobów Marzena może wybrać usuwany brzegowy kwadracik, aby spełnić swoje warunki?



Wynik. 152

Rozwiązanie. Całkowita liczba kwadratów w oryginalnej siatce 45×45 jest wyrażona przez

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + 45^2 = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot 46 \cdot 91.$$

Kiedy Marzena zabiera jeden kwadracik 1×1 z brzegu, całkowita liczba kwadratów maleje o R , czyli liczbę kwadratów zawierających usunięty kwadracik. Skoro S dzieli się przez 13, to liczba pozostałych kwadratów dzieli się przez 13 wtedy i tylko wtedy, gdy R dzieli się przez 13. Musimy zatem sprawdzić, kiedy wartości R dzielą się przez 13.

Aby wyznaczyć R zauważmy, że każdy kwadrat X zawierający dany kwadracik brzegowy x jest jednoznacznie wyznaczony przez taki wybór dwóch narożnych kwadracików X leżących wzdłuż brzegu, że x leży pomiędzy nimi (kwadraciki narożne mogą się pokrywać z x). Dla kwadraciku brzegowego na pozycji n wzdłuż jednego boku (licząc od wierzchołka) liczba wszystkich kwadratów zawierających go wynosi zatem

$$R = n(46 - n).$$

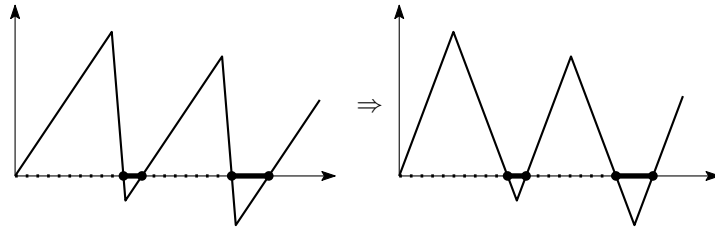
Musimy więc wyznaczyć te wartości n , dla których wartość wyrażenia $n(46 - n)$ jest podzielna przez 13, żeby wiedzieć których pozycji należy unikać. Po sprawdzeniu dla $1 \leq n \leq 23$ (symetria pozwala nam rozważać tylko połowę boku), otrzymujemy podzielność rozważanego wyrażenia przez 13 dla $n = 7, 13$ i 20 . Zatem na każdym boku siatki znajduje się sześć takich kwadratów i żaden z nich nie znajduje się na rogu, więc cała siatka zawiera $4 \cdot 6 = 24$ kwadraty brzegowe, których należy unikać. Całkowita liczba kwadratów brzegowych wynosi $4 \cdot 44 = 176$, zatem Marzena może wybierać spośród $176 - 24 = 152$ kwadratów do usunięcia.

Zadanie 54. Zając i Żółw uczestniczą w wyścigu. Żółw porusza się wolno ze stałą prędkością. Zając porusza się 6 razy szybciej, ale za każdym razem, gdy poruszy się 9 metrów do przodu, wraca się o 7 metrów. Rozważmy czas od rozpoczęcia wyścigu do momentu kiedy po raz ostatni spotkają się na trasie. Przez jaki ułamek tego czasu Żółw prowadził w wyścigu?

Wynik. $\frac{22}{45}$

Rozwiązanie. Zając biegnie do przodu 9 metrów, ale potem cofa się o 7 metrów, zyskując w efekcie $9 - \frac{9}{6} = \frac{45}{6}$ metrów do przodu i tracąc $7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ metrów do tyłu. Aby uprościć analizę, rozważmy układ odniesienia, w którym Żółw jest nieruchomy.

W tym nowym układzie, prędkość wsteczna Zająca przewyższa jego prędkość do przodu. W rezultacie czas nie jest generalnie proporcjonalny do całkowitej odległości przebytej przez Zająca. Jednak ta proporcjonalność obowiązuje w przedziałach, które zaczynają się i kończą, gdy Zając i Żółw spotykają się. Wynika to z faktu, że w każdym takim przedziale średnia prędkość Zająca pozostaje taka sama, ponieważ odległości pokonane przy obu prędkościach (do przodu i do tyłu) są równe. Co więcej, dostosowanie ruchu Zająca do stałej średniej prędkości w tych przedziałach zachowuje całkowity czas i pokonaną odległość. Poniższe wykresy odległości do czasu wizualizują przesunięcie od rzeczywistej do średniej prędkości Zająca.



Następnie rozważamy *cykle* Zająca, zdefiniowane jako okresy, w których najpierw porusza się całkowicie do przodu, a następnie całkowicie do tyłu. Dla łatwiejszych obliczeń skalujemy wszystkie odległości przez współczynnik 6. Po przeskalowaniu Zając porusza się 45 metrów do przodu i 49 metrów do tyłu na cykl, spędzając pewną część każdego cyklu za Żółciem: 4 metry w pierwszym cyklu, 12 metrów w drugim, itd. Każdy cykl obejmuje 94 metry, więc ostatni pełny cykl jest jedenastym, w którym Zając spędza 84 metry za Żółciem i kończy 44 metry za Żółciem. Po tym Zając biegnie jeszcze 46 metrów do ich ostatniego spotkania, spędzając 44 metry z nich za nim.

Całkowity dystans pokonany przez Zająca do tego ostatniego spotkania wynosi $11 \cdot 94 + 46 = 1080$ metrów. Z tego dystansu spędzony za Żółciem wynosi $(4 + 12 + \dots + 84) + 44 = 528$ metrów. Tak więc ułamek dystansu, jaki Żółw przebył na prowadzeniu do ich ostatniego spotkania, wynosi $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$, a zgodnie z powyższymi argumentami pokrywa się to z poszukiwanym ułamkiem czasu.

Zadanie 55. Kuba otrzymał w prezencie ciąg liczbowy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach początkowych $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, spełniający zależność rekurencyjną

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

dla każdego $n \geq 2$. Jednakże ciąg ten nie jest jednoznacznie zdefiniowany przez tę zależność. Aby rozwiązać tę niejednoznaczność, Kuba obliczał wyrazy ciągu jeden po drugim, zawsze wybierając największą z wartości, jeśli jest więcej niż jedna możliwość. Ile wynosi a_{13} ?

Wynik. 12274

Rozwiązanie. Przekształcając zależność rekurencyjną, otrzymujemy

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - a_n^2 - 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n+1} + 4a_n \cdot a_{n-1} = 2n - 1,$$

co można uprościć następująco

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 - (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 = 2n - 1.$$

Skoro $(a_2 - 2 \cdot a_1)^2 = (3 - 2)^2 = 1 = 1^2$ i $(n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2$, to łatwo można pokazać, że

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 = (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 + 2n - 1 = n^2.$$

Otrzymujemy dwie możliwe wartości a_{n+1}

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n \quad \text{lub} \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n.$$

Skoro Kuba zawsze wybiera największą możliwą wartość, zawsze wybiera

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n.$$

Używając zależności rekurencyjnej od $a_1 = 1$, otrzymujemy

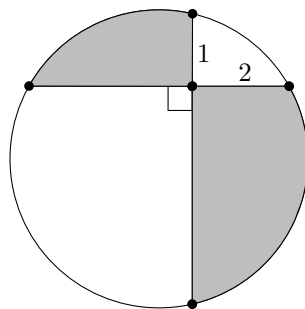
$$a_{13} = 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \dots + 12 \cdot 2^0.$$

To równanie upraszczamy następująco

$$\begin{aligned} a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \dots + 12 \cdot 2^0 \\ &= 2^{12} + (2^{11} + 2^{10} + \dots + 2^0) + (2^{10} + 2^9 + \dots + 2^0) + (2^9 + 2^8 + \dots + 2^0) + \dots + (2^1 + 2^0) + 2^0 \\ &= 2^{12} + (2^{12} - 1) + (2^{11} - 1) + \dots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) \\ &= 2^{12} + (2^{13} - 1) - 13 \\ &= 4096 + 8192 - 14 = 12274. \end{aligned}$$

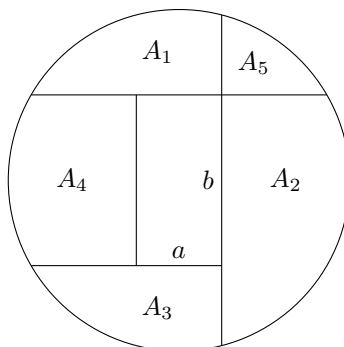
Zatem wartość a_{13} jest równa 12274.

Zadanie 56. Na rysunku przedstawiono okrąg oraz dwie jego cięciwy, które są do siebie prostopadłe. Długości dwóch odcinków zostały zaznaczone (każdy z tych odcinków jest krótszy od pozostałej części odpowiadającej mu cięciwy). Ponadto stosunek szarego pola do białego pola to $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$. Wyznacz długość promienia tego okręgu.



Wynik. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Rozwiązanie. Rozważmy odbicie obu cięciw względem środka okręgu. Wprowadźmy oznaczenia na odpowiednie pola i długości odcinków, jak na rysunku.



Widać, że $A_1 = A_3$ i $A_2 = A_4 + A_5$. Oznacza to, że pole szarej części jest równe

$$G = A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5,$$

a pole białej

$$W = A_3 + A_4 + A_5 + ab = G + ab.$$

Biorąc pod uwagę znany stosunek pól

$$\frac{G}{W} = \frac{G}{G + ab} = \frac{5\pi - 2}{5\pi + 2},$$

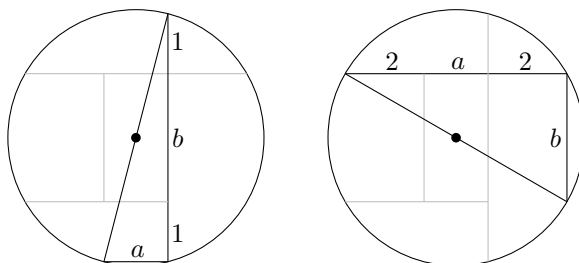
możemy zapisać

$$G = \frac{1}{4}(5\pi - 2)ab.$$

Rozważmy teraz pole całego okręgu, którego promień oznaczamy przez r :

$$\pi r^2 = G + W = 2G + ab = \frac{5\pi}{2}ab$$

lub $2r^2 = 5ab$. Dwa kolejne równania otrzymujemy, zauważając, że możemy przemieścić odcinki na dwa sposoby, tworząc trójkąty prostokątne wpisane w okrąg.



Dostajemy więc układ równań:

$$\begin{aligned} 2r^2 &= 5ab, \\ 4r^2 &= a^2 + (2 + b)^2, \\ 4r^2 &= (4 + a)^2 + b^2, \end{aligned}$$

który może być łatwo rozwiązany. Poprzez porównanie ostatnich dwóch równań mamy $b = 2a + 3$, co można wstawić do pierwszych dwóch równań, otrzymując równanie kwadratowe z niewiadomą a . Jedno z rozwiązań ($a = -\frac{5}{3}$) nie ma sensu w kontekście zadania, co daje rozwiązanie $a = 1$, $b = 5$ oraz $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Zadanie 57. Na każdym ze 160 pięter drapacza chmur znajdują się cztery mieszkania oraz prowadzący do nich korytarz, który ma dwoje niezależnych drzwi wejściowych. Każde z mieszkań ma jedno drzwi i mieszka w nim jedna osoba. We wszystkich drzwiach zostaną zamontowane zamki, a klucze do nich rozdysponowane w taki sposób, aby każdy mieszkaniec miał dostęp do swojego mieszkania (w tym prowadzącego do niego korytarza), ale nie miał dostępu do żadnego innego mieszkania. Dopuszczone jest posiadanie dostępu do innych korytarzy. Każdy z zamków ma pasujący do niego klucz. Można zamontować taki sam zamek w wielu drzwiach, a dowolna liczba kopii pasujących do niego kluczy może zostać rozdysponowana pomiędzy mieszkańców. Każdy z mieszkańców może posiadać dowolną liczbę kluczy. Firma montująca zamki chce zminimalizować koszty produkcji kluczy. Wyprodukowanie nowego klucza kosztuje 3 zł, a jego kopii 2 zł. Jaki jest minimalny koszt wyprodukowania wszystkich kluczy, aby powyższe warunki były spełnione?

Wynik. 2432

Rozwiązanie. Rozważmy optymalny pod względem kosztów układ zamków i kluczy; jasne jest, że w takim przypadku żaden mieszkaniec nie posiada więcej niż dwóch kluczy. Pokażemy ponadto, że możemy założyć bez utraty ogólności, że na każdym piętrze jest dokładnie jeden (lub równoważnie, co najmniej jeden, ponieważ nie może być więcej niż jeden) mieszkaniec, który posiada tylko jeden klucz. Ten klucz zapewnia dostęp zarówno do jego mieszkania, jak i do jednych z drzwi na korytarz, podczas gdy pozostali trzej mieszkańcy tego piętra korzystają z drugich drzwi na korytarz.

Założmy, że nie jest tak na pewnym piętrze. Wtedy jedno z drzwi wejściowych na korytarz, D , są używane przez co najwyżej dwóch z czterech mieszkańców – mieszkańca a i ewentualnie mieszkańca b . Jeśli żaden z czterech mieszkańców nie może otworzyć D , wybieramy jednego z nich arbitralnie i traktujemy dalej jako a . Modyfikujemy system kluczy w następujący sposób: wymieniamy zamek w drzwiach D na zupełnie nowy i instalujemy ten sam zamek w drzwiach pokoju a . W rezultacie a potrzebuje teraz tylko jednego klucza, który kosztuje 3, podczas gdy poprzednie dwa klucze miały łączny koszt co najmniej $2 + 2 = 4$. To zmniejsza całkowity koszt o co najmniej 1.

Co więcej, jeśli mieszkaniec b istnieje, przypisujemy mu klucz do korytarza tak, aby pasował do innych drzwi korytarza na tym piętrze, co nie zwiększa całkowitego kosztu. Jednak w ten sposób b może skończyć z kombinacją kluczy umożliwiającą dostęp do mieszkania na innym piętrze; aby to naprawić, wymieniamy zamek w mieszkaniu b na zupełnie nowy, co zwiększa koszt maksymalnie o 1.

Ponieważ całkowity koszt nie wzrasta w trakcie tego procesu, wnioskujemy, że założona konfiguracja jest co najmniej tak opłacalna, jak każda inna. Dlatego w dalszej części zakładamy, że na każdym piętrze jest dokładnie jeden mieszkaniec z jednym kluczem.

W ten sposób problem sprowadza się do minimalizacji kosztu klucza dla 160 pięter, gdzie każdy korytarz ma tylko jedno wejście i trzy oddzielne mieszkania. Niech będzie n różnych typów kluczy $1, 2, \dots, n$. Każdy mieszkaniec otrzymuje jeden klucz do swojego mieszkania i jeden klucz do korytarza, a te dwa klucze nie mogą być tego samego typu. Ponadto, dwaj mieszkańcy nie mogą mieć tej samej pary typów kluczy, ponieważ oznaczałoby to, że mają dostęp do tego samego pokoju. Dlatego liczba prawidłowych par kluczy wynosi $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Ponieważ rozprowadzamy łącznie $3 \cdot 160 = 480$ par kluczy, wyznaczamy dolne oszacowanie dla n z nierówności

$$\frac{1}{2}n(n-1) \geq 480.$$

Rozwiązując równanie dla dodatniej liczby całkowitej n , znajdujemy $n \geq 32$. Teraz pokażemy, że możliwe jest użycie dokładnie $n = 32$ różnych typów kluczy. Aby to osiągnąć, dzielimy 160 pięter na 32 grupy po 5 pięter każda. Przypisanie kluczy przebiega następująco (pierwszy klucz w parze jest dla korytarza, a drugi dla mieszkania):

- W pierwszej grupie 15 mieszkańców otrzymuje następujące pary kluczy: $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 16)$.
- W drugiej grupie przypisujemy pary kluczy: $(2, 3), (2, 4), \dots, (2, 17)$.
- Kontynuujemy rozdawanie kluczy w taki sposób jak powyżej, wtedy mieszkańcy z grupy 31 otrzymują pary kluczy: $(31, 32), (31, 1), \dots, (31, 14)$.
- Ostatnia (32 grupa) otrzymuje następujące pary kluczy: $(32, 1), (32, 2), \dots, (32, 15)$.

Łatwo zauważyć, że ten rozkład spełnia podane powyżej warunki. Dlatego $n = 32$ jest minimalną wymaganą liczbą unikalnych kluczy, do której dodajemy 928 kopii, aby mieć wszystkie $160 \cdot 3 \cdot 2 = 960$ kluczy.

Uwzględniając mieszkańców posiadających tylko jeden klucz, należy wyprodukować łącznie $32 + 160 = 192$ unikalne klucze. Tak więc ostateczny koszt wynosi $192 \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$.