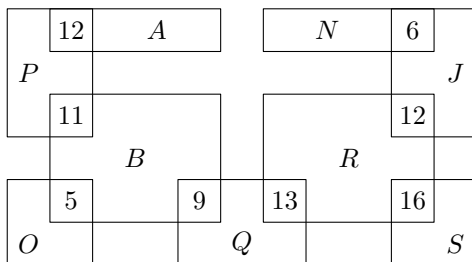


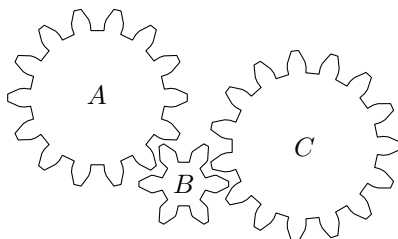
Problema 1. Literele din dreptunghiuri sunt cifre nenule și distincte. Intersecțiile dintre dreptunghiuri conțin suma celor două cifre din acestea. Determinați valoarea numărului $NABOJ$.



Răspuns. 14325

Soluție. Suma 16 se obține ca $9 + 7$. Cum $R = 9$ conduce la contradicția $J = N = 3$, obținem $S = 9$ și $R = 7$. Treptat, se obțin valorilor: $J = 5$, $N = 1$, $Q = 6$, $B = 3$, $P = 8$, $A = 4$ și $O = 2$. Obținem $NABOJ = 14325$.

Problema 2. Câte rotații complete trebuie să facă roata C pentru ca toate roțile să revină în pozițiile lor inițiale?



Răspuns. 14

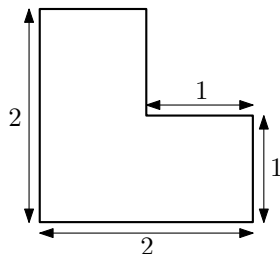
Soluție. Roata A are 14 dinți, roata B are 6, și roata C are 15. Mai întâi să determinăm cel mai mic număr de dinți pentru care toate roțile se învârt până se întorc în pozițiile inițiale, care este multiplu de 14, 6 și 15, adică 210. Roata C trebuie rotită de $210/15 = 14$ ori.

Problema 3. Care este cel mai mare număr de 10 cifre cu proprietatea că între oricare pereche de două cifre identice găsim cel puțin o cifră mai mică ca cele două identice?

Răspuns. 9 897 989 698

Soluție. Începem cu prima cifră egală cu 9 și construim numărul spre dreapta. Următoarea cifră nu poate fi 9, deci alegem 8. Apoi putem adăuga 9. Următoarea cifră nu poate fi 9 sau 8, deci vom adăuga 7. Apoi punem iar 9 și nu vom putea adăuga cifrele $\{9, 8, 7\}$, deci rămâne să adăugăm 6. Obținem numărul $n = 9\ 897\ 989\ 698$. Acesta este numărul cerut.

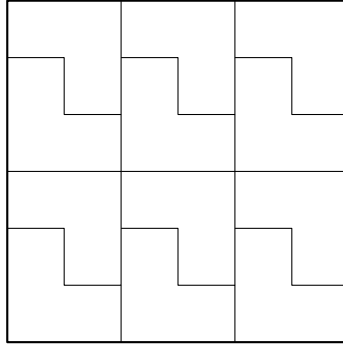
Problema 4. Care este cea mai mică posibilă valoare a lungimii laturii unui pătrat care poate fi acoperit, fără suprapuneri, cu figuri în formă de L ca cea din figură?



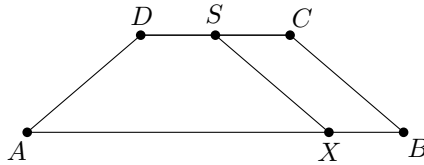
Răspuns. 6

Soluție. Aria pătratului trebuie să fie multiplu de 3, și este simplu de observat că un pătrat 3×3 nu poate fi acoperit.

Un aranjament pentru un pătrat 6×6 este prezentat în figură.



Problema 5. În trapezul isoscel $ABCD$ de baze AB și CD , avem $BC = CD = AD$. S este mijlocul laturii DC și X un punct pe AB astfel încât XS este paralelă cu BC . Știind că perimetrul lui $ABCD$ este 50 și perimetrul lui $AXSD$ este 38, determinați perimetrul paralelogramului $XBCS$.



Răspuns. 36

Soluție. Obținem $XB + CS = 2 \cdot CS = CD = 12$, deci perimetrul cerut este $12 + 12 + 6 + 6 = 36$.

Problema 6. Elaine a ales un număr de două cifre nenule și l-a înmulțit cu numărul de două cifre obținut prin scrierea cifrelor în ordine inversă, obținând un număr de patru cifre care începe cu cifra 3 și se termină cu cifra 7. Care este cel mai mare număr dintre cele două înmulțite?

Răspuns. 93

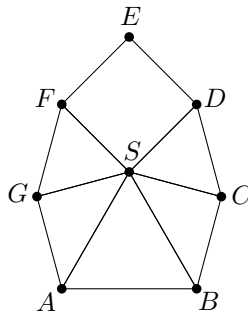
Soluție. Observăm că $1 \cdot 7 = 7$ și $3 \cdot 9 = 27$. Produsul $17 \cdot 71$ nu are ca rezultat un număr de patru cifre. $39 \cdot 93 = 3627$, deci răspunsul este 93.

Problema 7. Kurt joacă un joc cu un pachet standard de 52 de cărți. Atunci când îi vine rândul, un jucător poate să tragă o carte sau să pună jos o carte din mână care să aibă același număr sau aceeași culoare cu cartea de deasupra grămezii cărților de joc. În rundele anterioare, Kurt nu a avut noroc și atras foarte multe cărți, ceea ce l-a făcut să se întrebe: care este numărul minim de cărți N pe care trebuie să îl aibă în mână astfel încât indiferent de numărul cărților pe care le deține și indiferent de cartea de deasupra grămezii de joc, să fie sigur că poate pune cel puțin o carte din mână peste grămada de joc?

Răspuns. 37

Soluție. Dacă Kurt deține toate combinațiile de trei culori și 12 numere (în total $3 \cdot 12 = 36$ cărți), atunci este posibil ca în grămada de joc cartea de deasupra să fie din a patra culoare și din numărul lipsă. De aceea, numărul N este cel puțin egal cu 37.

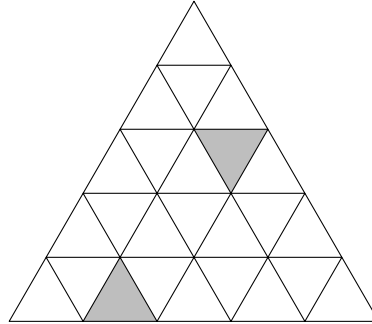
Problema 8. Heptagonul $ABCDEFG$ este compus din șase poligoane ce au în comun vârful S : trei triunghiuri echilaterale (ABS , CDS , FGS), două triunghiuri dreptunghice isoscele (BCS , GAS cu unghiurile drepte C și, respectiv G), și pătratul ($DEFS$). Determinați măsura în grade a unghiului SAE .



Răspuns. 15

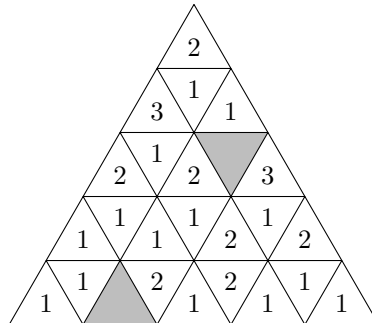
Soluție. Cum triunghiul FGS este echilateral, obținem $FS = GS$. De aceea, triunghiurile dreptunghice GAS și $EF S$ sunt congruente, deci $ES = AS$. Atunci triunghiul EAS este isoscel. Folosind $\angle ESA = 45^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 150^\circ$, obținem $\angle SAE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ESA) = 15^\circ$.

Problema 9. Câte triunghiuri care să nu conțină în interiorul lor părțile gri sunt în figură?



Răspuns. 34

Soluție. Scriem în fiecare triunghi câte triunghiuri se pot forma cu acesta și care îl conțin ca vârf sau colț (depinde de orientarea sa).



Suma numerelor este numărul de triunghiuri.

Problema 10. Numim un număr de patru cifre *interesant* dacă are următoarea proprietate: dacă cifra sutelor este înlăturată, numărul de trei cifre ce se obține este de nouă ori mai mic decât numărul inițial. Spre exemplu, numărul 2025 este interesant deoarece $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$. Determinați cel mai mare număr interesant de patru cifre.

Răspuns. 6075

Soluție. Fie $N = \overline{abcd}$ un număr interesant și fie $n = \overline{cd}$. Atunci $N = 1000a + 100b + n$ și când înlăturăm cifra sutelor, obținem numărul $M = 100a + n$. Înmulțindu-l cu 9, avem

$$9(100a + n) = 1000a + 100b + n$$

de unde

$$25(a + b) = 2n.$$

Din această egalitate afirmăm că $a + b$ este număr par mai mic ca $\frac{2 \cdot 100}{25} = 8$, deoarece $n < 100$. Acest lucru implică că $a + b$ este cel mult 6 și pentru a maximiza numărul N , alegem $a = 6$ și $b = 0$, obținând $n = 75$. Se verifică simplu că numărul $N = 6075$ satisface condiția cerută.

Problema 11. Un vapor poate transporta trei tipuri de lichide simultan: etanol, ulei și mercur. Fiecare lichid se poate transporta într-o cantitate maximă astfel: 10 tone etanol, 30 tone ulei și 60 tone mercur. În drumul său de la Praga la Hamburg, vaporul este încărcat cu 85 tone de lichide din cele trei. Pe drumul de întoarcere, vaporul este încărcat cu același număr de tone de etanol, dublul numărului de tone de ulei și o treime din numărul tonelor de mercur față de numărul tonelor din primul voiaj. Câte tone transportă vaporul la întoarcere?

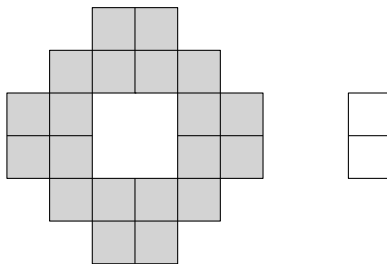
Răspuns. 60

Soluție. Cum vaporul a transporta 85 tone în primul voiaj, a trebuit să transporte cel puțin 15 tone de ulei. Dar cum, la întoarcere numărul de tone de ulei s-a dublat, vaporul putea transporta cel mult 15 tone de ulei. Din aceste motiv, vaporul putea să transporte în primul voiaj cantitatea maximă de etanol și mercur. La întoarcere vaporul a transportat

$$10 + 2 \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 60.$$

tone de marfă.

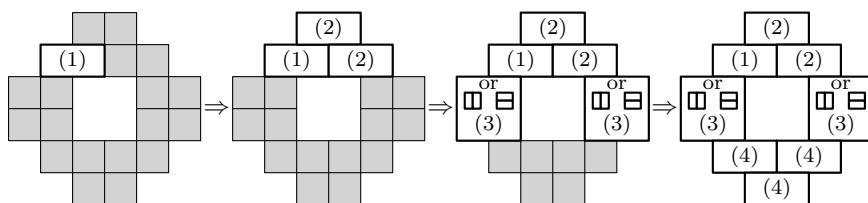
Problema 12. Determinați numărul de acoperiri, fără suprapunere, cu piese domino, ale porțiunii din desen colorată cu gri, unde fiecare piesă acoperă exact două pătrățele adiacente. O piesă domino (desenată alăturat ca un dreptunghi alb) poate fi rotită.



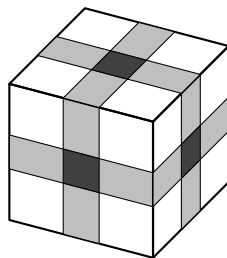
Notă: Aranjările care diferă prin rotație sau reflexie a întregii figuri sunt considerate distincte și nu se admite ca o piesă să fie pusă parțial peste zona gri.

Răspuns. 8

Soluție. Să începem să acoperim forma dintr-unul dintre colțurile interioare ca în diagrama (1); Există două moduri de a plasa un domino, dar acestea conduc în mod clar la situații complet simetrice. Prin urmare, putem selecta una dintre ele și înmulțim rezultatul cu 2. Odată ce acest domino este fixat, se stabilește o plasare a încă două plăci (2). Cele două „pătrate” din stânga și din dreapta pot fi acoperite fiecare în două moduri (3), iar restul formeii poate fi apoi acoperit în mod unic (4). Prin urmare, există $2 \cdot 2 = 4$ moduri de a continua cu această plasare în (1). Luând în considerare opțiunea simetrică, obținem $2 \cdot 4 = 8$ moduri în total.



Problema 13. Un pachet în formă de cub este înfășurat cu bandă, astfel încât lățimea benzii să fie mai mică decât marginea pachetului. Regiunile gri închis de pe suprafață (inclusiv cele care nu sunt vizibile în imagine) au o suprafață totală de 216 cm^2 . Aria zonelor gri deschis de pe suprafață este jumătate din aria zonei neacoperite de bandă. Determinați lungimea laturii cubului în centimetri.



Răspuns. 30

Soluție. Aria fiecărui pătrat gri închis este $216/6 = 36$, deci lungimea laturii sale este $\sqrt{36} = 6$. Pe fiecare față, partea neacoperită are de două ori dimensiunea părții gri deschis, ceea ce înseamnă că fiecare dreptunghi gri deschis are jumătate din dimensiunea unui pătrat alb. Obținem lungimea unui dreptunghi gri deschis egală cu 12, deci lungimea laturii cubului egală cu $12 + 6 + 12 = 30$.

Problema 14. Un magazin vinde creioane, caiete și rigle. Prețul unui caiet este egal cu suma prețurilor unui creion și a unei rigle. Dacă prețul unei rigle ar crește cu 50%, atunci prețul acesteia ar fi egal cu suma prețurilor unui caiet și al unui creion. Cu ce procent ar trebui să crească prețul unui creion pentru ca acesta să fie egal cu suma prețurilor unui caiet și a unei rigle?

Răspuns. 800%

Soluție. Fie n prețul unui caiet, r prețul unei rigle și p prețul unui creion. Avem ecuațiile $n = r + p$ și $\frac{3}{2}r = p + n = 2p + r$. Obținem $r = 4p$ și $n = 5p$. Prețul unui creion ar trebui să crească cu 800%.

Problema 15. Fie $\gcd(a, b)$ și $\text{lcm}(a, b)$ cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a și b . Determinați:

$$\text{lcm}(2025, \text{lcm}(2024, \gcd(2023, \gcd(2022, \dots \text{lcm}(4, \gcd(3, \gcd(2, 1))) \dots))).$$

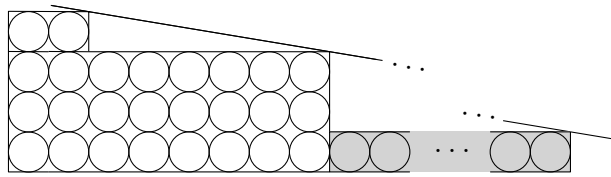
Operațiile \gcd și lcm alternează la fiecare doi pași, cu un total de 1012 de \gcd și 1012 de lcm în întreaga expresie. De exemplu, dacă ar exista doar două apariții ale fiecărei operații, expresia ar fi $\text{lcm}(5, \text{lcm}(4, \gcd(3, \gcd(2, 1))))$.

Răspuns. 4 098 600

Soluție. Observăm că $\gcd(x, x - 1) = 1$ pentru orice număr natural x , deci $\gcd(x, \gcd(x - 1, a)) = 1$ pentru orice numere naturale a și x . De aceea, expresia este egală cu

$$\text{lcm}(2025, \text{lcm}(2024, 1)) = 2025 \cdot 2024 = 4\,098\,600.$$

Problema 16. În imagine, există trei dreptunghiuri cu cercuri congruente înscrise în mod regulat și o linie care trece prin colțurile din dreapta sus ale dreptunghiurilor. Partea de mijloc a imaginii este ascunsă. Câte cercuri sunt în dreptunghiul gri?



Răspuns. 12

Soluție. Triunghiurile dreptunghice formate din regiunile dintre linia oblică și dreptunghiuri sunt asemenea, cu un raport de asemănare de 2. În consecință, lățimea dreptunghiului gri este $2 \cdot 6 = 12$, măsurată în diametre de cerc.

Problema 17. Tyler a alergat un circuit de 18 km. A început într-un ritm constant, dar, simțindu-se obosit la un moment dat, și-a încetinit ritmul cu 25% pentru restul cursei. După ce a terminat alergarea, Tyler și-a verificat ceasul inteligent și a descoperit că a petrecut de două ori mai mult timp alergând în ritm mai lent decât în ritm mai rapid. Ce distanță (în kilometri) a parcurs Tyler înainte de a încetini?

Răspuns. $7.2 = \frac{36}{5}$

Soluție. Fie v ritmul inițial al lui Tyler (în km/h) și t timpul în care a alergat în ritm rapid (în ore); atunci ritmul lui lent este $\frac{3}{4}v$ iar timpul petrecut în acest ritm este $2t$. Distanța totală este suma celor două distanțe parțiale, deci

$$18 = v \cdot t + \frac{3}{4}v \cdot 2t = \frac{5}{2}vt,$$

prin urmare

$$vt = \frac{18}{\frac{5}{2}} = 7,2,$$

care este distanța parcursă în ritm rapid.

Problema 18. Kathy, Laura, Megan, Natalie și Olivia se aranjează într-o singură linie pentru o fotografie de grup în fața unui monument uriaș Náboj. Cu toate acestea, există condiții stricte de aranjare:

- Natalie trebuie să stea în dreapta lui Kathy, Megan și Olivia,
- Megan trebuie să stea la stânga lui Kathy, Natalie și Olivia.

În câte moduri se pot aranja cele cinci doamne pentru această imagine fabuloasă?

Răspuns. 10

Soluție. Observați că Laura este total absentă în constrângeri, deci poate fi plasată oriunde. Pe de altă parte, există doar două moduri de a le aranja pe celelalte patru doamne, așa că, în total, sunt 10 opțiuni.

Problema 19. Un castel, sub forma unui pentagon, este construit cu cinci turnuri legate prin ziduri drepte, cu lungimea zidurilor măsurând 50 de coți, 70 de coți, 90 de coți, 110 de coți și 130 de coți. Zidurile pot fi aranjate în orice ordine. Care este cea mai mare lungime (în coți) a traiectoriei drepte a unei săgeți pe care un arcaș ar putea-o obține prin tragerea unei săgeți în interiorul curții castelului, având în vedere cea mai bună aranjare a zidurilor în acest scop? Notă: Grosimea zidurilor castelului și dimensiunile turnurilor sunt considerate neglijabile, iar distanța parcursă de săgeată este măsurată ca distanță în linie dreaptă orizontală.

Răspuns. 220

Soluție. Căutăm cel mai mare număr S astfel încât să fie posibilă împărțirea lungimilor zidurilor în două submulțimi, în care suma lungimilor să fie mai mare sau egală cu S . De aceea

$$S \leq \frac{50 + 70 + 90 + 110 + 130}{2} = 225$$

și cum S trebuie să fie multiplu de 10, obținem $S \leq 220$. Această valoare se poate obține împărțind lungimile zidurilor astfel $130 + 90 < 110 + 50 + 70$.

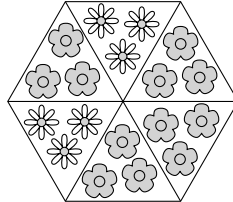
Problema 20. Pauline are 8 cartonașe, pe fiecare scrisă o cifră distinctă de la 1 la 8. Ea aranjează toate cartonașele obținând două numere de patru cifre. Care este cea mai mică posibilă diferență a celor două numere?

Răspuns. 247

Soluție. Diferența este cea mai mică atunci când numerele sunt cât mai apropiate unele de altele. În acest scop, cifra miilor poate diferi doar cu 1. Cifra sutelor trebuie să fie cât mai mică posibil pentru numărul mai mare și cât mai mare posibil pentru numărul mai mic. Odată ce cifra sutelor este fixată, același lucru se aplică și cifrei zecilor și apoi în cele din urmă cifrei unităților. Aceasta duce la numerele 5123 și 4876, a căror diferență este 247.

Problema 21. Bunica Joan a decis să planteze un aranjament hexagonal de șase paturi de flori folosind două tipuri de flori: violete și margarete. Fiecare dintre cele șase paturi poziționate într-un hexagon obișnuit poate fi plantat fie cu violete, fie cu margarete. Un astfel de aranjament este prezentat în imagine. În câte moduri poate aranja florile astfel încât să existe cel puțin o pereche de paturi adiacente cu același tip de floare?

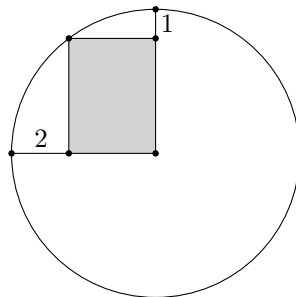
Notă: Aranjamentele care diferă prin orice simetrie (rotație sau reflexie) sunt considerate diferite. Fiecare dintre cele șase poziții ale patului de flori este tratată ca fiind distinctă.



Răspuns. 62

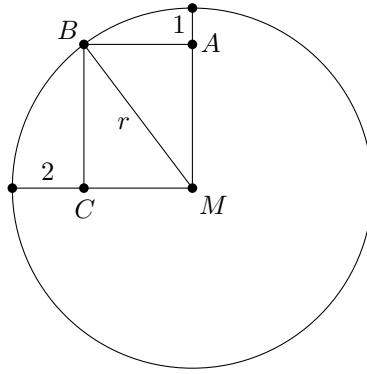
Soluție. Dacă renunțăm la condiția ca două paturi învecinate să fie plantate cu același tip de flori, atunci răspunsul este $2^6 = 64$. Din acest rezultat, scădem opțiunile în care condiția este încălcată, ceea ce este cazul când cele două tipuri de flori alternează. Cum sunt doar două opțiuni, obținem un total de aranjamente valabile de $64 - 2 = 62$.

Problema 22. Dintr-o foaie circulară de hârtie, Erich a tăiat o piesă dreptunghiulară astfel încât un colț al dreptunghiului să fie situat în centrul cercului, colțul opus să se afle pe circumferința cercului, iar celelalte două colțuri se află pe două linii radiale distincte care se extind din centru, poziționate la distanțe de 1 dm și 2 dm de-a lungul acestor linii de circumferință. Care este aria foii circulare care rămâne după tăiere (în dm^2)?



Răspuns. $25\pi - 12$

Soluție. Fie M centrul foii circulare și fie A, B, C vârfurile rămase ale dreptunghiului. Notăm raza cercului cu r .



Avem $MA = r - 1$, $MB = r$ și $MC = r - 2$, cu $AB = MC$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic ABM obținem ecuația

$$r^2 = (r - 1)^2 + (r - 2)^2,$$

care poate fi simplificată la

$$0 = r^2 - 6r + 5 = (r - 1)(r - 5).$$

Deoarece $r = 1$ duce la o configurație nevalidă, singura soluție validă este $r = 5$. Zona rămasă este $r^2\pi - 3 \cdot 4 = 25\pi - 12$ (în dm^2).

Problema 23. Marele maestru Náboicus, virtuozul de neegalat al amestecului de esențe, este pe cale să creeze legendara *Algemie* — o fuziune impecabilă a Algebrei și a Alchimiei, amestecate într-un raport perfect 1 : 1. Pentru a realiza acest lucru, el începe cu următoarele ingrediente:

- Algebră: compusă din 80% Algebră și 20% Alchimie, cu o masă totală de 10 mg,
- Alchimie: Compus din 30% Algebră și 70% Alchimie, cu o masă totală de 14 mg.

Cu aceste resurse la dispoziție, care este cantitatea maximă de *Algemie* pe care o poate produce Náboicus (în mg)?

Note: Náboicus nu poate izola componentele unui amestec în niciun moment al procesului, el poate doar amesteca în continuare substanțele disponibile.

Răspuns. $23\frac{1}{3} = \frac{70}{3}$

Soluție. Dacă amestecăm x unități ale primei substanțe și y unități din cea din urmă, amestecul rezultat conține $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y$ Algebră și $\frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$ Alchimie. Pentru a obține raportul 1 : 1, trebuie să avem

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$$

care duce la $y = \frac{3}{2}x$. Cu alte cuvinte, pentru fiecare mg de Algebră, trebuie folosit în amestec 1.5 mg de Alchimie. Prin urmare, cantitatea maximă de *Algemie* va fi produsă atunci când Náboicus folosește toate cele 14 mg din Alchimie și $\frac{2}{3} \cdot 14$ mg din Algebră, producând $\frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3}$ mg.

Problema 24. Un număr $K = n^2$ este un pătrat perfect de 4 cifre cu toate cifrele sale mai mici de 7. Dacă fiecare cifră din K este mărită cu 3, se obține un alt pătrat perfect. Găsiți n .

Răspuns. 34

Soluție. Fie $m^2 = M = K + 3333$. Cum M și K sunt pătrate perfecte de 4 cifre, obținem $32 \leq n < m \leq 99$ și de aceea

$$32 + 33 \leq m + n \leq 98 + 99$$

sau

$$65 \leq m + n \leq 197.$$

Avem

$$(m + n)(m - n) = m^2 - n^2 = M - K = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101.$$

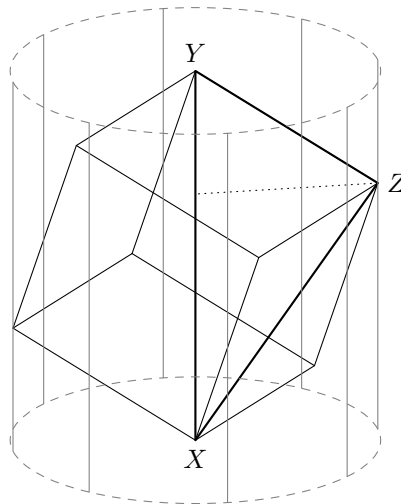
Având în vedere constrângerile de mai sus, singurii factori posibili sunt $m + n = 101$ și $m - n = 33$, rezultând soluția $m = 67$ și $n = 34$. $K = 34^2 = 1156$ are într-adevăr toate cifrele sale mai mici de 7.

Problema 25. Fie X, Y două vârfuri opuse ale unui cub cu lungimea laturii de 1 și fie C un cilindru drept a cărui suprafață conține toate vârfurile cubului, astfel încât X și Y să fie centre ale bazelor circulare ale lui C . Care este volumul cilindrului C ?

Răspuns. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Soluție. Deoarece X, Y sunt centrele bazelor cilindrului, înălțimea cilindrului este egală cu distanța lor. Deoarece X și Y sunt vârfuri opuse ale cubului, ele se află pe o diagonală de lungime $\sqrt{3}$. Pentru a determina raza cilindrului, alegem orice alt vârf Z al cubului și calculăm distanța acestuia față de diagonala XY . Triunghiul XZY este dreptunghic în Z (XZ este o diagonală a feței și YZ este o muchie a cubului), iar raza căutată este distanța de la Z la XY . Prin asemănare (sau comparații de arii), această distanță este $\sqrt{2/3}$. Prin urmare, volumul cilindrului este

$$\pi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$



Problema 26. Într-un sat de 60 de persoane, fiecare persoană aparține unuia din trei tipuri: adevărați, care spun întotdeauna adevărul; mincinoși, care mint mereu; și oameni normali, care sunt liberi să răspundă cum preferă. Toată lumea din sat cunoaște genul celorlalți. Un străin le-a pus tuturor sătenilor două întrebări:

1. “Există cel puțin 31 de adevărați?” – și a primit exact 43 de răspunsuri pozitive.
2. “Există cel puțin 31 de mincinoși?” – și a primit exact 39 de răspunsuri pozitive.

Care este numărul minim de oameni normali în sat?

Răspuns. 13

Soluție. A doua afirmație nu poate fi adevărată: dacă ar exista cel puțin 31 mincinoși, toți ar răspunde negativ la întrebare, făcând imposibilă obținerea celor 39 de răspunsuri pozitive. Prin urmare, există cel mult 30 mincinoși. Deoarece cei care spun adevărul spun întotdeauna adevărul, trebuie să fi răspuns negativ la această întrebare, ceea ce înseamnă că pot exista cel mult $60 - 39 = 21$ adevărați.

Acest lucru implică, de asemenea, că prima afirmație este falsă. Cele 43 de răspunsuri pozitive trebuie să fi venit de la toți mincinoșii plus niște oameni normali. Deoarece există cel mult 30 mincinoși, trebuie să existe cel puțin $43 - 30 = 13$ oameni normali.

Această configurație este fezabilă, deoarece distribuția 17 adevărați, 30 mincinoși și 13 oameni normali îndeplinește ambele condiții. Astfel, numărul minim de oameni normali din sat este de 13.

Problema 27. Patru echipe, A, B, C și D , au participat la un turneu round-robin în care fiecare pereche de echipe a jucat exact un meci. Câștigătorul fiecărui meci i sa acordat fie 1, fie 2 puncte, în funcție de marja victoriei, în timp ce echipa învinsă nu a obținut niciun punct. Nu au fost remize. După toate meciurile, a fost creat un tabel ca exemplul de mai jos, care arată rezultatele tuturor meciurilor. Dacă știm că o echipă a terminat cu 4 puncte, în timp ce celelalte trei echipe aveau fiecare câte un punct, câte astfel de tabele s-ar putea încadra în această distribuție finală a punctajului?

	A	B	C	D	total
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Notă: Aranjarea echipelor A , B , C și D în tabel este fixă, ceea ce înseamnă că etichetele pentru rânduri și coloane nu se schimbă.

Răspuns. 24

Soluție. În primul rând, observăm că numărul total de puncte acordate este de 7, ceea ce înseamnă că din cele 6 meciuri, exact unul a avut ca rezultat ca echipa câștigătoare să obțină două puncte, în timp ce restul au avut ca rezultat ca învingătorii să câștige doar un punct fiecare. Aceasta înseamnă că cea mai bună echipă a învins toate celelalte echipe, exact una dintre acele victorii fiind la o marjă mai mare. Meciurile dintre cele trei echipe care nu sunt de top trebuie să fi rezultat într-un “ciclu”, deoarece fiecare dintre aceste echipe a primit doar un punct și există exact două moduri de a orienta acest ciclu. În total, există $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ în care s-ar fi putut desfășura turneul.

Problema 28. Julia a scris numărul 2025 ca o sumă de M termeni, unde fiecare termen este o putere de 10 (adică 10^n , unde n este un număr natural). Termenii din sumă se pot repeta. Câte valori diferite poate lua M ?

Răspuns. 225

Soluție. În mod clar, cea mai mică valoare posibilă a lui M este 9, deoarece

$$2025 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Dacă $k \geq 1$, atunci fiecare substituție $10^k = 10 \cdot 10^{k-1}$ crește numărul de sumanzi cu 9. Aceasta implică faptul că M trebuie să fie un multiplu de 9; în plus, valorile posibile ale M formează un set consecutiv de multipli ai lui 9. Cea mai mare valoare posibilă a lui M este 2025, deoarece

$$2025 = 2025 \cdot 10^0.$$

Astfel, numărul de valori posibile pentru M este

$$\frac{2025 - 9}{9} + 1 = 225.$$

Problema 29. Max și Paul stau spate în spate pe peronul unei gări. Un tren de marfă care călătorește cu viteză constantă trece pe lângă ei. În momentul în care partea din față a trenului se aliniază cu poziția lor, atât Max, cât și Paul încep să meargă în direcții opuse cu aceeași viteză constantă. Partea din spate a trenului ajunge la Max când se află la 45 de metri de punctul său de plecare și, la scurt timp după aceea, ajunge la Paul când se află la 60 metri de punctul său de plecare. Cât de lung este trenul în metri?

Răspuns. 360

Soluție. Notăm cu S punctul de plecare al lui Max și Paul. Fie t_1 timpul scurs din momentul în care partea din față a trenului trece de Max și Paul până când partea din spate a trenului trece de Max. În mod similar, fie t_2 timpul scurs din momentul în care partea din spate a trenului trece pe lângă Max până când acesta trece pe lângă Paul. Deoarece Max și Paul merg cu aceeași viteză și în timpul t_1 , Max a reușit să parcurgă 45 metri în timp ce Paul a parcurs $60 - 45 = 15$ metri în t_2 , raportul intervalelor de timp este

$$t_1 : t_2 = 45 : 15 = 3 : 1.$$

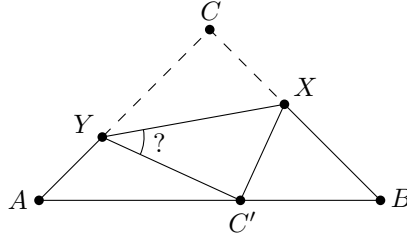
Acum, luăm în considerare mișcarea trenului. În timpul t_1 , trenul avansează cu $\ell - 45$ metri, deoarece inițial, fața lui era în punctul de întâlnire, în timp ce la sfârșitul acestui interval, spatele era încă la 45 de metri de acel punct. În timpul t_2 , partea din spate a trenului acoperă cei 105 metri dintre Max și Paul. Astfel, viteza trenului este

$$v = \frac{105}{t_2}.$$

Lungimea completă a trenului este apoi dată de

$$\ell = vt_1 + 45 = \frac{t_1}{t_2} \cdot 105 + 45 = 3 \cdot 105 + 45 = 360.$$

Problema 30. Un triunghi dreptunghic isoscel ABC cu unghiul drept în C este pliat de-a lungul unui segment XY astfel încât vârful C ajunge în punctul C' de pe latura AB . În plus, este dat că $BC' = BX$. Aflați măsura unghiului $C'YX$ în grade.



Răspuns. $33.75^\circ = \frac{135}{4}^\circ$

Soluție. Cum triunghiul $XC'B$ este isoscel, obținem că

$$\angle C'XB = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ.$$

Mai mult, din cauza îndoirii $\angle CXY = \angle YXC'$, deci

$$\angle YXC' = \frac{1}{2}(180^\circ - 67.5^\circ) = 56.25^\circ.$$

În concluzie, $\angle XC'Y = \angle YCX = 90^\circ$, de unde

$$\angle C'YX = 180^\circ - \angle XC'Y - \angle YXC' = 33.75^\circ.$$

Problema 31. Considerăm succesiunea tuturor 4-uplurilor strict crescătoare cu elemente din mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$, aranjate în ordine lexicografică:

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), (0, 1, 2, 5), \dots, (12, 13, 14, 15).$$

Adică, (a_1, a_2, a_3, a_4) apare mai devreme decât (b_1, b_2, b_3, b_4) în această secvență dacă și numai dacă

$$a_1 < b_1 \quad \text{sau} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{sau} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{sau} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2 = b_3, a_4 < b_4$$

Găsiți poziția 4-uplului $(2, 4, 7, 14)$ în succesiune.

Răspuns. 911

Soluție. Observăm că, pentru $k \leq n$, numărul tuturor k -uplurilor crescătoare cu elemente din mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ este egal cu $\binom{n}{k}$, deoarece k -uplurilor strict crescătoare corespund direct submulților de dimensiune k . Mai general, numărul tuturor k -uplurilor crescătoare cu elemente din mulțimea $\{m, m+1, \dots, n\}$ este egal cu $\binom{n-m+1}{k}$. Pentru a determina poziția 4-uplului cerut, numărăm numărul de 4-upluri anterioare în creștere, grupându-le pe baza elementelor lor cunoscute:

- $(0, *, *, *)$: există $\binom{15}{3} = 455$ astfel de 4-upluri;
- $(1, *, *, *)$: există $\binom{14}{3} = 364$ astfel de 4-upluri;
- $(2, 3, *, *)$: există $\binom{12}{2} = 66$ astfel de 4-upluri;
- $(2, 4, a, *)$ cu $a \in \{5, 6\}$: există $\binom{10}{1} + \binom{9}{1} = 19$ astfel de 4-upluri;
- $(2, 4, 7, b)$ cu $b \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$: există 6 astfel de 4-upluri.

Astfel, 4-uplul $(2, 4, 7, 14)$ apare la poziția $455 + 364 + 66 + 19 + 6 + 1 = 911$.

Problema 32. Doi fermieri, Adam și Bettina, vând mere la piață. Împreună, au adus un total de 100 de mere. Adam și-a vândut merele la un preț de a RON per măr, în timp ce Bettina le-a vândut pe ale ei la b RON pe măr. După ce și-au vândut toate merele, fiecare a câștigat aceeași sumă totală. Adam a remarcat apoi că dacă și-ar fi vândut merele la prețul Bettinei de b RON pe măr, ar fi câștigat 45 RON. Bettina a adăugat că dacă și-ar fi vândut merele la prețul lui Adam de a RON pe măr, ar fi câștigat 20 RON. Care este numărul de mere vândute de Adam?

Răspuns. 60

Soluție. Fie A și B numărul de mere aduse la piață de Adam și, respectiv, Bettina. Știm asta

$$\begin{aligned} A + B &= 100, \\ A \cdot a &= B \cdot b, \\ A \cdot b &= 45, \\ B \cdot a &= 20. \end{aligned}$$

Înlocuind $b = \frac{45}{A}$ și $a = \frac{20}{B}$ în a doua ecuație, obținem

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{20}{B} &= B \cdot \frac{45}{A}, \\ \frac{A^2}{B^2} &= \frac{45}{20} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Prin urmare, $A = \frac{3B}{2}$ și înlocuind în prima ecuație obținem $\frac{3B}{2} + B = \frac{5B}{2} = 100$, deci $B = 40$ și $A = 100 - 40 = 60$.

Problema 33. Sue a visat la un număr fascinant. Este cel mai mare număr de trei cifre cu o proprietate unică: este egal cu suma dintre cifra sutelor, pătratul cifrei zecilor și cubul cifrei unităților. Poți determina numărul la care a visat Sue?

Răspuns. 598

Soluție. Fie a , b și c cifrele sutelor, zecilor și unităților numărului de trei cifre N . Dacă $c = 9$, atunci $N > 9^3 = 729$, deci a trebuie să fie 7 sau 8. Cu toate acestea, în ambele cazuri, nu există nicio alegere ca b să facă ca ultima cifră a lui $729 + a + b^2$ să fie egală cu 9.

Apoi, luăm în considerare $c = 8$. Deoarece $8^3 = 512$, a trebuie să fie 5 sau 6, dar

$$N \leq 512 + 9^2 + 6 = 599 < 600,$$

deci a poate fi doar 5. Atunci avem nevoie de b satisfăcând

$$512 + b^2 + 5 = 8 + 10b + 500$$

sau

$$b^2 - 10b + 9 = 0,$$

ale căror soluții sunt $b = 1$ și $b = 9$. Ambele dau numere valide:

$$518 = 5 + 1^2 + 8^3 \quad \text{și} \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3.$$

(În mod echivalent, se poate observa că cifra unităților lui b^2 trebuie să fie 1.)

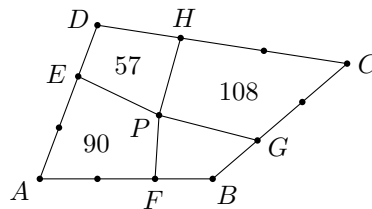
Dacă $c \leq 7$, atunci

$$N \leq 7^3 + 9^2 + 9 = 433 < 598,$$

deci cea mai mare valoare validă pentru N este de 598.

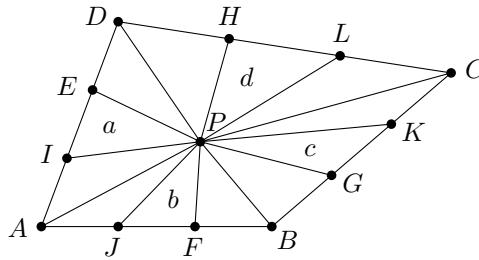
Problema 34. Fiecare latură a unui patrulater $ABCD$ este împărțită în trei părți egale prin două puncte. Mai exact: Punctul E se află pe segmentul AD , astfel încât $AE : ED = 2 : 1$. Punctul H se află pe segmentul CD , astfel încât $CH : HD = 2 : 1$. Punctul F se află pe segmentul AB , astfel încât $AF : FB = 2 : 1$. Punctul G se află pe segmentul CB , astfel încât $CG : GB = 2 : 1$.

Un punct P se află în interiorul patrulaterului, împărțindu-l în patru patrulatere mai mici. Ariile a trei dintre aceste patrulatere sunt date în diagramă. Determinați aria celui de-al patrulea patrulater, $PFBG$.



Răspuns. 42

Soluție. Unind P cu toate punctele care împart laturile patrulaterului $ABCD$ în treimi se creează douăsprezece triunghiuri.



Fiecare set de trei triunghiuri de-a lungul aceleiași laturi au ariile egale, deoarece au aceeași înălțime din punctul P și au baze de lungime egală. Fie a aria triunghiului PEI , b aria triunghiului PJF , c aria triunghiului PGK și d aria triunghiului PLH . Din informațiile date, stabilim ecuațiile

$$90 = 2a + 2b, \quad 57 = a + d, \quad 108 = 2c + 2d.$$

Aria patrulaterului $PFBG$ este dată de $b + c$. Aceasta poate fi calculată ca

$$b + c = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) - (a + d) = \frac{1}{2}(90 + 108) - 57 = 42.$$

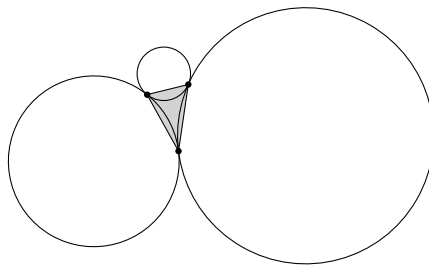
Problema 35. Un inel de douăsprezece pătrate este format prin îndepărtarea celor patru pătrate centrale de pe o tablă 4×4 . În câte moduri pot fi alese patru pătrate în inel, astfel încât cel puțin un pătrat să fie selectat de fiecare parte a inelului?

Notă: Fiecare pătrat de colț aparține celor două laturi. Opțiunile care diferă doar prin simetrie (rotații sau reflexii ale inelului) sunt considerate distincte.

Răspuns. 237

Soluție. În general, există $\binom{12}{4} = 495$ modalități de a alege 4 pătrate dintr-un inel de 12 pătrate. Pentru fiecare dintre cele patru laturi, există opt pătrate care nu aparțin acelei laturi, oferind $\binom{8}{4} = 70$ moduri de a alege patru pătrate, astfel încât această latură să fie lăsată afară. Prin urmare, ar exista $495 - 4 \cdot 70 = 215$ opțiuni, astfel încât nicio parte să nu fie lăsată în afară. Cu toate acestea, unele opțiuni au fost scăzute de două ori - și anume cele în care două părți sunt lăstate afară simultan. Acest lucru este posibil alegând 4 din 5 pătrate grupate în jurul unui colț (5 moduri pentru un colț, 20 pentru toate colțurile 4) sau 4 din 4 pătrate opuse din mijloc (în total două direcții). Acest lucru ne oferă $215 + 22 = 237$ modalități. Deoarece omiterea a trei sau patru laturi este imposibilă în această situație, acesta este răspunsul final.

Problema 36. Trei cercuri cu razele 1, 2 și, respectiv, 3, sunt tangente exterior unul la celălalt, așa cum se arată în figură. Determinați aria triunghiului format din cele trei puncte de tangență.



Răspuns. $\frac{6}{5}$

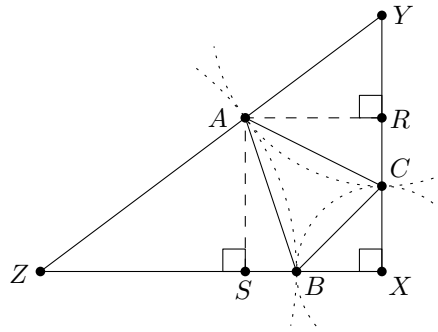
Soluție. Notăm centrele cercurilor X, Y , respectiv Z și fie mai departe A, B, C punctele de tangență ca în diagrama de mai jos. Triunghiul XYZ are lungimile laturilor $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ și $2 + 3 = 5$, care este un triplu de numere care satisface teorema lui Pitagora, deci este un triunghi dreptunghic cu unghi drept în X . Pentru a calcula aria căutată a triunghiului ABC , vom scădea ariile triunghiurilor isoscele XCB, YAC și ZBA din aria triunghiului XYZ , care este $\frac{1}{2}(3 \cdot 4) = 6$.

- Triunghiul XCB este dreptunghic, prin urmare aria sa este $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.
- Pentru a calcula aria triunghiului YAC , găsim mai întâi lungimea înălțimii sale AR . Deoarece triunghiurile RYA și XYZ sunt similare cu raportul de asemănare $YA/YZ = \frac{2}{5}$, rezultă că $AR = \frac{2}{5}ZX = \frac{8}{5}$. Prin urmare, aria triunghiului YAC este $\frac{1}{2}(\frac{8}{5} \cdot 2) = \frac{8}{5}$.

- În mod similar, pentru a obține aria triunghiului ZBA , folosim asemănarea $\triangle SAZ \sim \triangle XYZ$ cu raportul $\frac{3}{5}$ pentru a obține $AS = \frac{9}{5}$, deci aria triunghiului ZBA este $\frac{1}{2}(\frac{9}{5} \cdot 3) = \frac{27}{10}$.

În cele din urmă, putem calcula aria dorită ca

$$6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$



Problema 37. Agnes a desenat un n -gon cu $n > 3$ și a numărat diagonalele sale. A observat că numărul acestora este multiplu de 2025. Care este cea mai mică valoare a lui n care satisface această condiție?

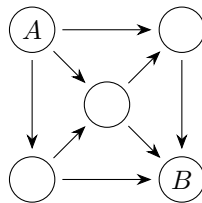
Notă: Laturile n -gonului nu se numără ca diagonale.

Răspuns. 300

Soluție. Este ușor de observat că numărul de diagonale ale unui n -gon este $\frac{1}{2}n(n-3)$. Deoarece 2025 este impar, putem analiza când este produsul $P = n(n-3)$ divizibil cu 2025. Deoarece $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, datorită coprimalității, trebuie să ne asigurăm că P este divizibil cu $3^4 = 81$ și 5^2 . Observăm că doar unul dintre factorii $n, n-3$ poate fi divizibil cu 5, deci unul dintre ei trebuie să fie divizibil cu 25. Pe de altă parte, n este divizibil cu 3 dacă și numai dacă $n-3$ este divizibil cu 3, deci ambele contribuie la puterea totală a lui 3 care îl divide pe P ; totuși, doar unul dintre $n, n-3$ poate fi divizibil cu 3^k pentru $k \geq 2$. Aceasta înseamnă că avem nevoie ca unul dintre factori să fie divizibil cu $3^3 = 27$.

Dacă unul dintre factori ar fi divizibil atât cu 25 cât și cu 27, ar fi egal cu cel puțin $25 \cdot 27 = 675$. Să verificăm dacă o valoare mai mică poate fi găsită alegând unul dintre factori (să zicem m) să fie divizibil cu 27 și celălalt ($m \pm 3$) să fie divizibil cu 25 (în acest fel fie $n = m$, fie $n = m + 3$). Prin prima condiție, avem $m = 27k$ pentru un număr întreg pozitiv k și suntem interesați de cea mai mică valoare a k astfel încât $27k \pm 3$ să fie divizibil cu 25 (pentru una dintre opțiunile de semn). Deoarece $25k$ este întotdeauna divizibil cu 25, putem verifica în mod echivalent $2k \pm 3$, care este mai întâi divizibil cu 25 pentru $k = 11$ și semnul pozitiv. Prin urmare $m = 27 \cdot 11 = 297$ și $n = m + 3 = 300$.

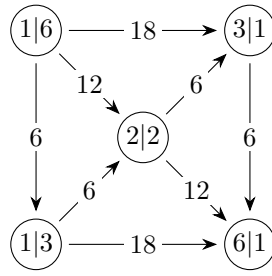
Problema 38. David pornește într-o călătorie pe căile din diagrama de mai jos. El începe la nodul A și termină la nodul B . El trebuie să urmeze direcția săgeților de pe diagramă, cu excepția unei mișcări rebele în care se deplasează în mod deliberat împotriva direcției unei săgeți. Această mișcare rebelă trebuie să apară exact o dată în timpul călătoriei sale, chiar dacă înseamnă părăsirea temporară a destinației finale. David are voie să folosească orice săgeată de mai multe ori în timp ce se deplasează pe diagramă. În câte moduri distincte își poate finaliza David călătoria în aceste condiții?



Răspuns. 84

Soluție. Pentru fiecare nod calculăm (1) numărul de căi (orientate) de la A care se termină la el, (2) numărul de căi către B începând de la acesta. În diagrama de mai jos, de exemplu, 3|1 în nodul superior indică faptul că există exact trei căi de la nodul de pornire care se termină la acest nod și doar o cale de la acest nod până la nodul final. Pentru fiecare săgeată, numărul de căi care o parcurg în direcția opusă este dat de produsul dintre primul număr la punctul final și al doilea număr la punctul de plecare, așa că calculăm acest produs pentru fiecare săgeată și însumăm.

Rezultatul este 84.



Problema 39. În calculul următor, litere diferite reprezintă cifre diferite de zero.

$$\begin{array}{r}
 N \quad N \quad N \quad N \quad N \\
 + \quad A \quad A \quad A \quad A \\
 \quad \quad + \quad B \quad B \quad B \\
 \quad \quad \quad + \quad O \quad O \\
 \quad \quad \quad \quad + \quad J \\
 - \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \\
 \hline
 = \quad N \quad A \quad B \quad O \quad J
 \end{array}$$

Determinați cea mai mare valoare posibilă a numărului de cinci cifre $NABOJ$.

Răspuns. 18249

Soluție. Putem rescrie calculul ca

$$\begin{array}{r}
 N \quad N \quad N \quad N \quad N \\
 + \quad A \quad A \quad A \quad A \\
 \quad \quad + \quad B \quad B \quad B \\
 \quad \quad \quad + \quad O \quad O \\
 \quad \quad \quad \quad + \quad J \\
 - \quad N \quad A \quad B \quad O \quad J \\
 \hline
 = \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5
 \end{array}$$

care se reduce la

$$\begin{array}{r}
 N \quad N \quad N \quad N \\
 + \quad A \quad A \quad A \\
 \quad \quad + \quad B \quad B \\
 \quad \quad \quad + \quad O \\
 \hline
 = \quad 2 \quad 0 \quad 2 \quad 5
 \end{array}$$

Rezultă că $N = 1$. În acest moment rămânem cu $\overline{AAA} + \overline{BB} + O = 2025 - 1111 = 914$, ceea ce implică $A = 8$. O reducere suplimentară $914 - 888 = 26$ are ca rezultat $B = 2$ și, în final, $O = 4$. Valoarea lui J poate fi arbitrară, dar diferită de cifrele deja utilizate, prin urmare, cea mai mare valoare posibilă a lui $NABOJ$ este 18249.

Problema 40. Cinci sute de organizatori Náboj votau problemele de competiție. Pentru fiecare problemă, fiecare organizator prezent a votat fie în favoarea, fie împotriva. Cu toate acestea, doar după prima problemă, unii organizatori care au votat în favoarea problemei au găsit procesul atât de obositor încât au decis să părăsească sala. În același timp, niciunul dintre cei care au votat împotriva primei probleme nu a plecat. La votul celei de-a doua probleme au votat în favoarea ei același număr de organizatori ca și la primul vot, dar numărul de voturi împotriva problemei a fost doar o treime din voturile împotriva primei probleme. În plus, se știe că exact 120 de organizatori au votat în favoarea ambelor probleme și 70 au votat împotriva ambelor probleme. Câți organizatori au părăsit sala după primul vot?

Răspuns. 150

Soluție. Notăm cu YN numărul de organizatori care au votat pentru la primul vot și împotriva la al doilea; definim în mod similar YY , NN și NY . În cele din urmă, fie YX numărul organizatorilor care părăsesc. Atunci avem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{aligned}
 YY + YN + NY + NN + YX &= 500 \\
 YY + YN + YX &= YY + NY \\
 NY + NN &= 3(YN + NN)
 \end{aligned}$$

Substituind $YY = 120$ și $NN = 70$, obținem

$$\begin{array}{rclcl} YN & + & NY & + & YX & = & 310 \\ YN & - & NY & + & YX & = & 0 \\ -3YN & + & NY & & & = & 140 \end{array}$$

Înmulțind a doua ecuație cu 2 și însumând toate ecuațiile, rezultă $3YX = 450$, deci $YX = 150$. Celelalte două variabile sunt egale cu $YN = 5$ și $NY = 155$.

Problema 41. Determinați numărul de perechi (a, b) de numere naturale nenule care satisfac $a \leq b$ și astfel încât $\gcd(a, b)$, a și b pot fi termeni ai unei progresii aritmetice, cu suma lor egală cu 2025.

Notă: O progresie aritmetică este o secvență de numere în care diferența dintre un număr și predecesorul său este întotdeauna aceeași. $\gcd(a, b)$ reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .

Răspuns. 12

Soluție. Fie $g = \gcd(a, b)$. Deci $a = ga'$, $b = gb'$ pentru numerele naturale a' , b' . Deoarece $g \leq a \leq b$, succesiunea celor de trei termeni este (g, a, b) sau inversul ei; în ambele cazuri, $a - g = b - a$ sau $b = 2a - g$, care devine $b' = 2a' - 1$ după împărțirea la g . Din condiția asupra sumei obținem

$$g + a + b = g(1 + a' + 2a' - 1) = 3ga' = 2025,$$

deci $ga' = 675 = 3^3 5^2$. Acest număr are $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ divizori pozitivi și rămâne de verificat dacă fiecare astfel de divizor dă o valoare validă pentru a' , adică una care poate fi completată la o pereche validă (a, b) . Într-adevăr, lăsând $b' = 2a' - 1$, $g = 675/a'$, $a = ga' = 675$, $b = gb'$, avem $a \leq b$ deoarece $ga' \leq g(2a' - 1)$ pentru orice numere naturale nenule a' , g și de asemenea

$$\gcd(a, b) = \gcd(ga', g(2a' - 1)) = g \cdot \gcd(a', 2a' - 1) = g$$

ca a' și $2a' - 1$ sunt coprime pentru orice număr natural nenul a' .

Problema 42. Fiecare echipă din Grădinița Náboj primește inițial primele 3 probleme dintr-un set de 16 probleme numerotate. Fiecare echipă are propriul set, dar toate seturile conțin aceleași 16 probleme numerotate în același mod. Când o echipă rezolvă o problemă, aceasta este înlocuită cu problema din setul de probleme al acelei echipe cu cel mai mic număr disponibil. După competiție, s-a dovedit că nicio echipă nu a rezolvat exact același număr de probleme. Care este numărul maxim de echipe care au participat la această competiție?

Răspuns. 697

Soluție. Observăm că numărul de probleme rezolvate de o echipă este pe deplin determinat de numărul de probleme nerezolvate și invers; acesta poate fi privit și ca un număr de probleme pe care echipa le-a lăsat pe masă la sfârșitul concursului, care poate fi orice număr cel mult egal cu 3. Prin urmare, există cel mult

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 697$$

echipe care concurează.

Problema 43. Fie a, b, c, d numere reale astfel încât

$$2a + 2b - ab = 2025,$$

$$2b + 2c - bc = 47,$$

$$2c + 2d - cd = 5.$$

Determinați valoarea lui $2a + 2d - ad$.

Răspuns. 51

Soluție. Folosind $(x - 2)(y - 2) = xy - 2x - 2y + 4$, obținem ecuațiile:

$$(a - 2)(b - 2) = -2021,$$

$$(b - 2)(c - 2) = -43,$$

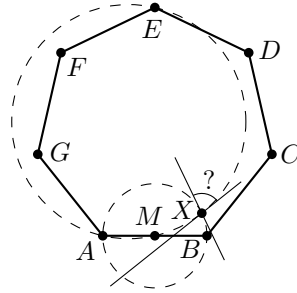
$$(c - 2)(d - 2) = -1$$

și scopul este de a determina $(a - 2)(d - 2)$. Cum $b \neq 2$ și $c \neq 2$ din a doua ecuație, expresia dorită se poate obține ca

$$(a - 2)(d - 2) = \frac{(a - 2)(b - 2)(c - 2)(d - 2)}{(b - 2)(c - 2)} = \frac{(-2021) \cdot (-1)}{-43} = -47.$$

De aceea, $2a + 2d - ad = -(-47) + 4 = 51$.

Problema 44. Fie M mijlocul laturii AB a unui heptagon obișnuit $ABCDEFG$. Cercul cu centrul în M și care trece prin A intersectează cercul circumscris al triunghiului AME într-un punct X aflat în interiorul heptagonului. Care este dimensiunea (în grade) a unghiului ascuțit dintre tangentele la cele două cercuri în X ?



Răspuns. $540^\circ/7$

Soluție. Deoarece $ABCDEFG$ este un heptagon obișnuit, unghiul AME este un unghi drept și AE este diametrul cercului mai mare. În loc să măsurăm unghiul dintre tangente în X , putem considera în mod echivalent unghiul dintre tangente în A , care este al doilea punct de intersecție al celor două cercuri. Acest unghi este la rândul său egal cu unghiul BAE dintre diametrele corespunzătoare, deoarece acestea sunt perpendiculare pe tangente. Mărimea sa, $\frac{3}{7} \cdot 180^\circ$, poate fi determinată cu ușurință din simetria heptagonului regulat sau recunoscând că este unghiul înscris corespunzător unghiului central al lui $\frac{3}{7} \cdot 360^\circ$ pe cercul circumscris al heptagonului.

Problema 45. Determinați suma valorilor posibile ale calculului $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \dots \pm 2^{99})^2$ considerând toate alegerile posibile ale celor 100 semne.

Răspuns. $\frac{2^{100} \cdot (4^{100} - 1)}{3}$

Soluție. Începem cu o observație mai generală: pentru orice număr natural n și numere reale x_1, x_2, \dots, x_n , dacă însumăm expresiile $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2$ peste toate opțiunile posibile de semne, rezultatul este întotdeauna

$$2^n (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

Pentru a vedea de ce este valabil, luăm în considerare descompunerea $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n)^2$. Fiecare descompunere constă din termeni pătrați x_i^2 , precum și din termeni amestecați de forma $\pm 2x_i x_j$ pentru $i \neq j$. Fiecare termen x_i^2 apare în fiecare descompunere posibilă, indiferent de semnele alese. Deoarece există 2^n combinații diferite de semne, acești termeni pătrați contribuie cu un factor total de 2^n . Pe de altă parte, termenii $\pm 2x_i x_j$ apar cu semn pozitiv în exact jumătate din cazuri și cu semn negativ în cealaltă jumătate, în funcție de x_i și x_j dacă au același semn sau nu. Deoarece aceste contribuții se anulează perfect pentru toate opțiunile de semne, ele nu afectează suma finală. Astfel, suma totală se simplifică la 2^n ori suma termenilor pătrați, demonstrând formula.

În cazul nostru, avem $x_k = 2^{k-1}$, iar suma dorită este egală

$$2^{100} \cdot (1 + 4^1 + \dots + 4^{99}).$$

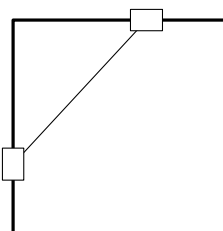
Folosind formula pentru suma unei serii geometrice,

$$1 + 4^1 + \dots + 4^{99} = \frac{4^{100} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{100} - 1}{3},$$

Obținem rezultatul final

$$\frac{2^{100} \cdot (4^{100} - 1)}{3}.$$

Problema 46. Două mașini, legate printr-o bandă de cauciuc, circulă de-a lungul unui drum de formă pătrată, așa cum se arată în imagine. Inițial, ambele mașini pornesc împreună dintr-un colț al pieței. Fiecare mașină se deplasează apoi la nesfârșit cu o viteză întregă constantă. Banda de cauciuc este extrem de elastică, dar se va rupe dacă este întinsă pe diagonala exactă a pătratului. Mașina mai lentă se deplasează cu o viteză de 24 km/h, în timp ce mașina mai rapidă se deplasează cu o viteză de n km/h, ambele în aceeași direcție. Determinați cea mai mică valoare întregă a lui n mai mare decât 24 astfel încât banda de cauciuc să nu se rupă niciodată.



Soluție. Definim un *segment* ca fiind o parte a drumului pătrat. Fie $m = 24$ și $n > m$ vitezele mașinii mai lente și, respectiv, mai rapide. Observăm că dacă banda de cauciuc se rupe vreodată depinde doar de raportul vitezelor, nu de valorile lor absolute. Astfel, fie m', n' numere întregi pozitive coprime cu $m' : n' = m : n$. Pretindem că banda nu se rupe niciodată exact când $n' - m'$ este un multiplu de 4.

Mai întâi, să analizăm cazul în care $n' - m'$ nu este un multiplu al lui 4. După ce mașina mai lentă a parcurs m' segmente, se află într-un colț. În același timp, mașina mai rapidă a parcurs n' segmente (datorită raportului de viteze), așa că este într-un colț. Deoarece $n' - m'$ nu este divizibil cu 4, aceste două colțuri nu pot coincide. Dacă se dovedesc a fi colțuri opuse, banda se rupe imediat. Dacă sunt colțuri învecinate, atunci după ce parcurg alte m' și n' segmente, mașinile ajung în colțuri opuse, provocând și ruperea benzii.

Să presupunem acum că $n' - m'$ este un multiplu al lui 4. În primul rând, reținem că mașinile nu pot fi ambele la un colț mai devreme decât atunci când mașina mai lentă a parcurs m' segmente. În caz contrar, să spunem că după câteva $s < m'$ segmente ale mașinii mai lente, mașina mai rapidă ar fi parcurs $\frac{s}{m'} \cdot n'$ segmente, care nu pot fi un număr întreg deoarece m' și n' sunt coprime. Prin urmare, prima dată când ambele mașini ajung la viraje simultan este atunci când mașina mai lentă a parcurs m' segmente și mașina mai rapidă n' . Prin presupunere, $n' - m'$ este un multiplu de 4, deci trebuie să ajungă în același colț. Odată ce coincid la un colț, întreaga situație se resetează efectiv (posibil începând dintr-un colț diferit), astfel încât banda nu se rupe niciodată.

Rămâne să găsim cel mai mic $n > 24$ care satisface condiția dată. Trebuie să avem $n' - m'$ divizibil cu 4. În acest caz, atât m' cât și n' trebuie să fie impare. Deoarece m' este un divizor al lui $m = 24$, singurele valori posibile sunt 1 și 3. Dacă $m' = 1$, cel mai mic n' care este coprime cu m' și astfel încât $n' - 1$ este un multiplu de 4 este 5. Atunci $n = \frac{24}{1} \cdot 5 = 120$. Dacă $m' = 3$, cel mai mic n' coprime la m' cu $n' - 3$ divizibil cu 4 este 7. Aici, $n = \frac{24}{3} \cdot 7 = 56$. Deoarece 56 este mai mic decât 120, concluzionăm că cea mai mică valoare dorită a lui n este de 56.

Problema 47. La o masă, 2025 jucători joacă un joc. La sfârșitul fiecărei runde, jucătorul care pierde le oferă fiecăruia dintre ceilalți jucători un număr de monede egal cu numărul pe care îl deține în prezent (astfel încât diferiți jucători pot primi sume diferite de bani). După 2025 de runde, fiecare jucător are exact 2^{3000} monede. Mai mult, niciun jucător nu a avut datorii în niciun moment în timpul jocului. Dacă fiecare jucător a pierdut exact o rundă, determinați numărul inițial de monede deținute de jucătorul care a pierdut prima rundă.

Răspuns. $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot (1 + 2025 \cdot 2^{2024})$

Soluție. Să notăm jucătorii cu numerele $1, 2, \dots, 2025$ și cantitatea de monede deținute de jucătorul p după rundele r ca $m_{p,r}$. Fără a pierde generalitatea, presupunem că jucătorul 1 a pierdut prima rundă, jucătorul 2 pe a doua și așa mai departe. Notăm $M = 2^{3000}$, numărul de monede deținute de toți jucătorii la sfârșitul jocului.

Pentru un jucător p după pierderea la p -a rundă, suma monedelor sale se dublează până ajunge la M la sfârșitul jocului; deci pentru o rundă $p \leq r$, cantitatea de monede este

$$m_{p,r} = \frac{M}{2^{2025-r}}.$$

Mai mult, deoarece jucătorul r a pierdut runda r , a pierdut un număr de monede egal cu suma deținută de toți ceilalți jucători și, deoarece suma totală de monede din joc este de $2025M$, rezultă că

$$m_{r,r} = m_{r,r-1} - \sum_{p \neq r} m_{p,r-1} = m_{r,r-1} - (2025M - m_{r,r-1}).$$

Prin rearanjarea ecuației, obținem

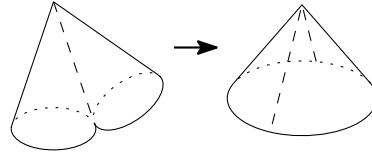
$$m_{r,r-1} = \frac{m_{r,r}}{2} + \frac{2025M}{2} = \frac{M}{2^{2026-r}} + \frac{2025M}{2}.$$

Introducând $r = 1$, obținem rezultatul dorit

$$\frac{M}{2^{2025}} + \frac{2025M}{2} = 2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot (1 + 2025 \cdot 2^{2024}).$$

Problema 48. Gleb are trei modele identice de hârtie ale suprafeței laterale a unui con drept (excluzând baza). Baza conului este un disc circular perpendicular pe axa care leagă centrul său de vârful conului, dar acest disc nu face parte din modelele de hârtie. În primul rând, Gleb a plasat două dintre suprafețele conurilor vârf la vârf, astfel încât să împărtășească un segment de linie de-a lungul suprafețelor lor laterale. El le-a tăiat pe ambele de-a lungul acestui segment și a unit cele două suprafețe pentru a crea o suprafață conică mai mare (așa cum se arată în imagine). Volumul conului complet corespunzător acestei suprafețe mai mari a fost de 10. Apoi, Gleb a unit această suprafață de

con mai mare cu a treia suprafață de con originală în același mod, așteptându-se să măsoare volumul conului rezultat. Totuși, și-a dat seama că volumul rezultat era zero. Care a fost volumul conului original?



Răspuns. $\sqrt{10}$

Soluție. Faptul că, conul final are volum zero înseamnă că unirea a trei suprafețe laterale identice are ca rezultat o formă complet plată - un cerc complet. În consecință, fiecare suprafață de con individuală, atunci când este aplatizată, corespunde unui sector circular cu un unghi central de 120° . Fie l înălțimea înclinată a conului original și r raza bazei. Din unghiul central se obține relația $l = 3r$. Observăm că înălțimea înclinată rămâne neschimbată în toate cele trei conuri, inclusiv în cel degenerat.

Conul intermediar, format prin unirea a două suprafețe laterale, are un unghi central de 240° , dându-i o rază de bază de $2r$. Aplicând formula volumului conului, găsim

$$10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Din aceasta, calculăm volumul conului original ca

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3 = \sqrt{10}.$$

Problema 49. Pentru câte numere naturale n mai mici sau egale cu 200 ecuația

$$5 \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor - n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$$

are cel puțin o soluție naturală x cu $1 \leq x \leq 200$?

Notă: Simbolul $\lfloor t \rfloor$ reprezintă cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu numărul real t .

Răspuns. 82

Soluție. Când n este un multiplu de 5, partea din stânga este un multiplu de 5; prin urmare, nu există soluții în acest caz. În plus, pentru $n = 1$, partea stângă este întotdeauna nepozitivă, deci nici aici nu există soluții. În toate celelalte cazuri, există întotdeauna o soluție dacă ignorăm constrângerea $x \leq 200$. Să rearanjăm ecuația la

$$5 \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = n \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + 1 \quad (\heartsuit)$$

pentru claritate; acum partea stângă este întotdeauna un multiplu de 5, așa că haideți să examinăm soluțiile pe baza valorii n mod 5.

Dacă $n = 5k + 4$, atunci $x = n + 1 = 5k + 5$ este o soluție (ambele părți ale lui (\heartsuit) sunt egale cu x), deci toate numerele acestei forme sunt valide (40 numere). Dacă $n = 5k + 3$, atunci pentru ca partea dreaptă să fie un multiplu de 5, avem nevoie de $\lfloor x/n \rfloor$ să fie de cel puțin 3, ceea ce nu este posibil pentru $n \geq 67$, deoarece ar necesita ca valoarea x să fie mai mare de 200. Pentru $n \leq 66$ (13 numere) punem $x = 3n + 1$, ceea ce face ca ambele părți ale lui (\heartsuit) să fie egale cu x . În mod similar, dacă $n = 5k + 2$, $\lfloor x/n \rfloor$ trebuie să fie de cel puțin 2, ceea ce nu se poate întâmpla pentru $n \geq 101$, iar pentru restul alegem $x = 2n + 1$ (20 numere). În cele din urmă, pentru $n = 5k + 1$ sunt permise doar $n \leq 50$, pentru care se utilizează $x = 4n + 1$ (10 numere, dar 1 nu produce o soluție validă, lăsând doar 9 numere valide). În total există $40 + 13 + 20 + 9 = 82$ astfel de numere n .

Problema 50. Adam are o rezervă nelimitată de zaruri cu 20 de fețe, fiecare numerotat de la 1 la 20. El aruncă un număr ales de zaruri deodată, urmărind să obțină exact un 1 sau doi de 1 într-o singură aruncare. Ce număr de zaruri ar trebui să arunce Adam pentru a-și maximiza probabilitatea de succes?

Răspuns. 28

Soluție. Probabilitatea în cauză este suma probabilității ca să existe exact un 1

$$P_1 = n \left(\frac{1}{20} \right) \left(\frac{19}{20} \right)^{n-1}$$

și probabilitatea ca să fie exact doi de 1

$$P_2 = \binom{n}{2} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(\frac{19}{20}\right)^{n-2}.$$

Suma $P_1 + P_2$ poate fi simplificată la

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot 19^2} n(n+37) \left(\frac{19}{20}\right)^n.$$

Trebuie să determinăm pentru care n obținem $a_{n+1} < a_n$ sau

$$\frac{19}{20}(n+1)(n+38) < n(n+37),$$

care se simplifică în continuare la

$$n^2 - n - 722 > 0.$$

Pentru un număr întreg pozitiv n , aceasta este echivalentă cu $n \geq 28$. Rezolvarea directă a inegalității poate fi evitată obținând mai întâi o estimare prin $n^2 > 722$ de unde rezultă $n \geq 27$, ceea ce este insuficient, dar validitatea următoarei valori nu este greu de verificat. Acest calcul arată, de asemenea, că secvența a_n este mai întâi crescătoare și apoi descrescătoare, deci 28 este într-adevăr indicele termenului său cel mai mare.

Problema 51. Fie D un punct de pe latura AC a triunghiului ABC astfel încât $AD = BC$ și $BD = CD$. În plus, $\angle BAC = 30^\circ$. Determinați măsura unghiului DBA (în grade).

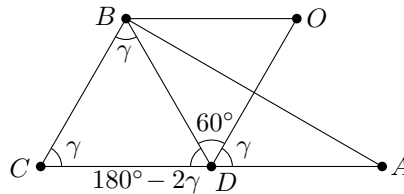
Răspuns. $30^\circ, 110^\circ$ (2 solutions)

Soluție. Fie O centrul cercului circumscris pentru $\triangle ABD$; atunci $\angle DOB = 2\angle BAD = 60^\circ$, deci $\triangle BDO$ este echilateral; în particular, $AO = DO = BD = CD$. Folosind $AD = BC$ obținem congruența triunghiurilor isoscele AOD și CDB . Notăm $\gamma = \angle ACB$; atunci $\angle CBD = \angle DAO = \angle ADO = \gamma$. Să analizăm acum trei cazuri pe baza poziției lui O față de unghiul BAC .

În primul rând, presupunem că O este în afara unghiului, fiind mai aproape de raza AB decât de AC . În acest caz, avem

$$180^\circ = \angle ADO + \angle ODB + \angle BDC = \gamma + 60^\circ + (180^\circ - 2\gamma) = 240^\circ - \gamma,$$

deci $\gamma = 60^\circ$ și obținem cu ușurință $\angle DBA = 30^\circ$.



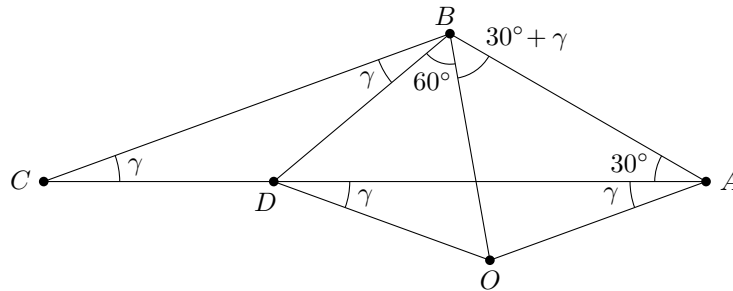
Acum să fie O în afara $\angle BAC$ și mai aproape de raza AC . Atunci $\angle OBA = \angle BAO = 30^\circ + \gamma$, deci

$$\angle CBA = \angle OBA + \angle DBO + \angle CBD = (30^\circ + \gamma) + 60^\circ + \gamma = 90^\circ + 2\gamma$$

și

$$180^\circ = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 30^\circ + (90^\circ + 2\gamma) + \gamma = 120^\circ + 3\gamma,$$

deci $\gamma = 20^\circ$. Prin urmare, $\angle DBA = 90^\circ + \gamma = 110^\circ$.



În sfârșit, să demonstrăm că O nu poate fi în interiorul unghiului BAC în condițiile date; aceasta deoarece într-un astfel de caz $\angle DOA > 120^\circ$, dar $\angle BDC < 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, prin urmare triunghiurile AOD și BDC nu pot fi congruente.

Problema 52. Fie f o funcție care atribuie un număr natural fiecărei perechi de numere naturale și este definită de următoarele condiții:

1. Pentru fiecare x : $f(x, x) = 0$.
2. Pentru fiecare x, y : $f(x, y) = f(y, x)$.
3. Pentru fiecare x, y : $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Pentru fiecare x, y : $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
5. Pentru fiecare x, y : $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Aflați suma tuturor numerelor naturale t , $t \leq 60$, satisfăcând $f(20, t) = 2$.

Răspuns. 415

Soluție. Observând proprietățile funcției, putem concluziona că $f(x, y)$ numără numărul de poziții diferite în reprezentările binare ale numerelor x și y . Într-adevăr, îl putem vedea ca un algoritm recursiv; fie $x' = \lfloor x/2 \rfloor$ și $y' = \lfloor y/2 \rfloor$, adică x' și y' sunt obținute prin eliminarea bitului cel mai puțin semnificativ din x și, respectiv, y .

- Dacă $x = y$, atunci $f(x, y) = 0$, adică nu există biți diferiți.
- Dacă ambele x și y sunt pare, biții lor cei mai puțin semnificativi se potrivesc, așa că eliminăm acel bit și calculăm $f(x', y')$.
- Dacă ambii sunt impari, biții lor cei mai puțin semnificativi se potrivesc, ducând la aceeași reducere $f(x', y')$.
- Dacă unul este par și celălalt este impar, biții lor cei mai puțin semnificativi diferă, așa că creștem numărul cu unul și continuăm din nou cu $f(x', y')$.

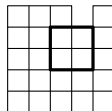
Acest proces compară efectiv cele două numere bit cu bit, crescând numărul exact atunci când biții corespunzători diferă.

Acum, trebuie să găsim suma tuturor numerelor naturale $t \leq 60$ pentru care $f(20, t) = 2$. Aceasta înseamnă că căutăm numere t cu cel mult șase cifre binare care diferă de $20 = 010100_2$ în exact două poziții (rețineți că 61, 62, 63 nu pot fi obținute prin răsturnarea exactă a doi biți în reprezentarea binară a 20). Pentru a calcula suma totală, analizăm contribuția fiecărei poziții de bit. Deoarece selectăm doi biți din șase pentru a fi inversați, există $\binom{6}{2} = 15$ astfel de numere. Fiecare bit este răsturnat exact în cinci dintre aceste numere (corespunzând cazurilor în care acest bit particular și unul dintre restul de cinci sunt răsturnați) și rămâne neschimbat în celelalte zece numere. Acum însumăm aceste contribuții.

Cinci numere au un bit cel mai puțin semnificativ inversat, contribuind cu $5 \cdot 2^0$ la suma totală, în timp ce celelalte zece numere păstrează acest bit neschimbat. În mod similar, cinci numere au un al doilea bit inversat, adăugând $5 \cdot 2^1$ la sumă. Continuând acest model, contribuțiile celorlalte poziții de biți sunt: $10 \cdot 2^2$ (deoarece acest bit contribuie în cele zece cazuri neîntors), $5 \cdot 2^3$, $10 \cdot 2^4$ și $5 \cdot 2^5$. Rezultă ușor că suma totală este dată de

$$5 \cdot (010100_2 + 111111_2) = 5 \cdot (20 + 63) = 415.$$

Problema 53. Becky a desenat o grilă 45×45 și a numărat 1×1 pătratele din ea, realizând că sunt 2025. Acest lucru a făcut-o nefericită, deoarece preferă figurile cu 2024 pătrate mici din motive personale. Pentru a remedia acest lucru, ea a eliminat un pătrat 1×1 de pe marginile grilei. Ulterior, ea a numărat toate pătratele posibile (nu neapărat 1×1) în grila ajustată. Deoarece Becky este superstițioasă și se teme de numerele divizibile cu 13, ea a tăiat un pătrat astfel încât numărul total de pătrate din grila ajustată să nu fie divizibil cu 13. Diagrama de mai jos ilustrează un exemplu: o grilă 5×5 cu un pătrat de pe marginea grilei eliminat și un 2×2 pătrat în grila ajustată. Stabiliți numărul de pătrate de pe marginea grilei pe care Becky le-ar putea îndepărta pentru a-și îndeplini condiția.



Răspuns. 152

Soluție. Numărul total de pătrate din grila originală 45×45 este dat de

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + 45^2 = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot 46 \cdot 91.$$

Când Becky elimină un singur pătrat 1×1 de la graniță, numărul total de pătrate scade cu R , numărul de pătrate care au conținut pătratul eliminat. Deoarece S este el însuși divizibil cu 13, totalul ajustat va fi divizibil cu 13 dacă și numai dacă R este divizibil cu 13. Astfel, trebuie să găsim valori de R care sunt multipli de 13.

Pentru a determina R , reținem că fiecare pătrat X care conține un pătrat de limită dat x este determinat în mod unic prin selectarea a două pătrate de colț de X de-a lungul graniței, astfel încât x să fie între ele (fiecare pătrat de colț poate coincide cu x). Prin urmare, pentru un pătrat de limită situat la poziția n de-a lungul unei laturi (numărând de la un colț), numărul acestor pătrate este:

$$R = n(46 - n).$$

Astfel, trebuie să identificăm valorile lui n astfel încât $n(46 - n)$ să fie divizibil cu 13, deoarece aceste poziții trebuie evitate. Verificând valorile pentru $1 \leq n \leq 23$ (deoarece simetria ne permite să luăm în considerare doar jumătate dintr-o latură), constatăm că divizibilitatea cu 13 apare tocmai pentru $n = 7, 13, 20$. Prin urmare, fiecare latură a grilei are șase astfel de pătrate de limită, niciunul dintre ele nefiind un colț, deci pe cele patru laturi, există $4 \cdot 6 = 24$ pătrate de limită care trebuie evitate. Numărul total de pătrate limită este $4 \cdot 44 = 176$. Astfel, numărul de opțiuni valide pentru Becky este de $176 - 24 = 152$.

Problema 54. Iepurele și broasca țestoasă concurează într-o cursă. Țestoasa merge încet, dar constant, în timp ce iepurele aleargă de 6 ori mai repede, dar de fiecare dată când aleargă 9 metri înainte, se întoarce cu 7 metri pentru a-și bate joc de țestoasă. Considerăm intervalul de timp de la începutul cursei până în ultimul moment în care se întâlnesc pe pistă. În ce fracțiune din acel timp a fost țestoasa în frunte?

Răspuns. $\frac{22}{45}$

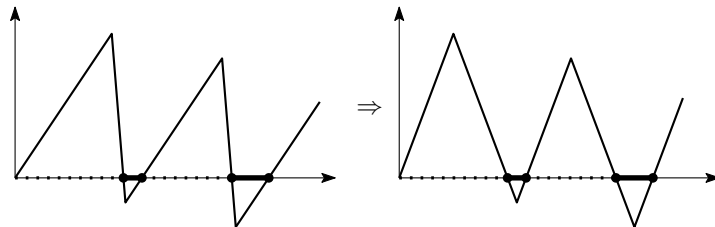
Soluție. Analizăm diferența de poziție dintre iepure și țestoasă, unde o valoare pozitivă indică că iepurele este în față. Iepurele aleargă înainte cu 9 metri, dar apoi se mișcă înapoi cu 7 metri, câștigând efectiv $9 - \frac{9}{6} = \frac{45}{6}$ metri înainte și pierzând $7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ metri înapoi. Deoarece avem nevoie doar de raportul de timp, scalăm toate distanțele cu 6 pentru calcule mai simple. Pentru a simplifica și mai mult analiza, trecem la un cadru de referință în care țestoasa este staționară. În acest cadru, iepurele se deplasează cu 45 de metri înainte și 49 de metri înapoi în fiecare dintre ciclurile sale.

În fiecare ciclu, iepurele are o anumită distanță în spatele țestoasei: 4 metri în primul ciclu, 12 metri în al doilea și așa mai departe. Fiecare ciclu acoperă 94 de metri, deci ultimul ciclu complet este al unsprezecelea, unde iepurele are 84 de metri în urmă și termină la 44 de metri în spatele țestoasei. După aceasta, iepurele mai aleargă 46 de metri până când se întâlnește cu țestoasa pentru ultima oară, cu 44 din acești metri petrecuți în urmă.

Distanța totală parcursă de iepure până la întâlnirea finală este de $11 \cdot 94 + 46 = 1080$ metri. Din aceasta, distanța petrecută în urma țestoasei este $(4 + 12 + \dots + 84) + 44 = 528$ metri. Astfel, fracțiunea de timp în care țestoasa a fost în frunte până la ultima lor întâlnire este $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$.

Iepurele aleargă înainte cu 9 metri, dar apoi se mișcă înapoi cu 7 metri, câștigând efectiv $9 - \frac{9}{6} = \frac{45}{6}$ metri înainte și pierzând $7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ metri înapoi. Pentru a simplifica analiza, trecem la un cadru de referință în care Țestoasa este staționară.

În acest nou cadru, viteza înapoi a iepurelui depășește viteza înainte. Ca urmare, timpul nu este în general proporțional cu distanța totală parcursă de iepure. Cu toate acestea, această proporționalitate se menține în intervalele care încep și se termină atunci când iepurele și broasca țestoasă se întâlnesc. Aceasta rezultă din faptul că în fiecare astfel de interval, viteza medie a iepurelui rămâne aceeași, întrucât distanțele parcurse la ambele viteze (înainte și înapoi) sunt egale. Mai mult, ajustarea mișcării iepurelui la o viteză medie constantă pe aceste intervale păstrează timpul total și distanța parcursă. Următoarele grafice distanță-timp vizualizează trecerea de la viteza reală a lui Hare la viteza medie.



În continuare, luăm în considerare *ciclurile* Hare, definite ca perioadele în care se mișcă mai întâi complet înainte și apoi complet înapoi. Pentru calcule mai ușoare, scalăm toate distanțele cu un factor de 6. În noul cadru, Hare se mișcă cu 45 de metri înainte și 49 de metri înapoi pe ciclu, petrecând o parte din fiecare ciclu urmând broasca țestoasă: 4 metri în primul ciclu, 12 metri în al doilea și așa mai departe. Fiecare ciclu acoperă 94 de metri, deci ultimul ciclu complet este al unsprezecelea, unde iepurele petrece 84 de metri în urmă și termină la 44 de metri în spatele țestoasei. După aceasta, iepurele mai aleargă 46 de metri până la întâlnirea lor finală, petrecând 44 din acești metri în urmă.

Distanța totală parcursă de iepure până la această întâlnire finală este de $11 \cdot 94 + 46 = 1080$ metri. Din aceasta, distanța petrecută în urma țestoasei este $(4 + 12 + \dots + 84) + 44 = 528$ metri. Astfel, fracțiunea de distanță pe care țestoasa a fost în frunte până la ultima lor întâlnire este $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$ și, după argumentele de mai sus, aceasta coincide cu fracțiunea de timp căutată.

Problema 55. Mark a primit un șir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, definit prin termenii inițiali $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ și relația de recurență

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

pentru toți $n \geq 2$. Cu toate acestea, termenii șirului nu sunt determinati în mod unic de această relație. Pentru a rezolva orice ambiguitate, Mark a calculat termenii pas cu pas, alegând întotdeauna cea mai mare valoare ori de câte ori au apărut mai multe posibilități. Determinați valoarea lui a_{13} .

Răspuns. 12274

Soluție. Rearanjând relația de recurență se obține

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - a_n^2 - 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n+1} + 4a_n \cdot a_{n-1} = 2n - 1,$$

care se simplifică la

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 - (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 = 2n - 1.$$

Deoarece $(a_2 - 2 \cdot a_1)^2 = (3 - 2)^2 = 1 = 1^2$ și $(n - 1)^2 + 2n - 1 = n^2$, un argument inductiv ușor arată că

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 = (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 + 2n - 1 = n^2.$$

Astfel rezultă două valori posibile ale termenului a_{n+1} :

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n \quad \text{or} \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n.$$

Deoarece Mark selectează întotdeauna valoarea mai mare, el alege în mod constant

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n.$$

Folosind această recurență în mod iterativ de la $a_1 = 1$, obținem

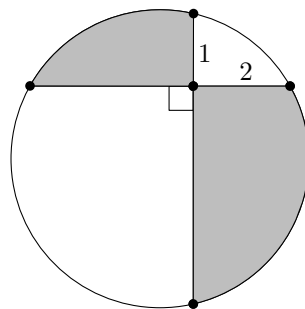
$$a_{13} = 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \dots + 12 \cdot 2^0.$$

Acest lucru poate fi simplificat în felul următor:

$$\begin{aligned} a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \dots + 12 \cdot 2^0 \\ &= 2^{12} + (2^{11} + 2^{10} + \dots + 2^0) + (2^{10} + 2^9 + \dots + 2^0) + (2^9 + 2^8 + \dots + 2^0) + \dots + (2^1 + 2^0) + 2^0 \\ &= 2^{12} + (2^{12} - 1) + (2^{11} - 1) + \dots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) \\ &= 2^{12} + (2^{13} - 1) - 13 \\ &= 4096 + 8192 - 14 = 12274. \end{aligned}$$

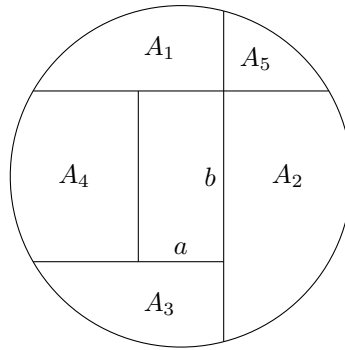
Prin urmare, valoarea lui a_{13} este 12274.

Problema 56. Diagrama prezintă un cerc împărțit de două coarde perpendiculare. Sunt furnizate două lungimi de segment (ambele mai scurte decât partea rămasă a coardei respective), împreună cu informația că raportul dintre zona gri și zona albă este $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$. Determinați raza cercului.



Răspuns. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Soluție. Considerăm simetricele celor două coarde față de centrul cercului. Să notăm câteva dintre zone și lungimi ca în diagramă.



În mod clar, $A_1 = A_3$ și $A_2 = A_4 + A_5$. Aceasta înseamnă că aria G a regiunii gri este egală cu

$$G = A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5,$$

în timp ce zona regiunii albe este

$$W = A_3 + A_4 + A_5 + ab = G + ab.$$

Luând în considerare raportul cunoscut al suprafețelor,

$$\frac{G}{W} = \frac{G}{G + ab} = \frac{5\pi - 2}{5\pi + 2},$$

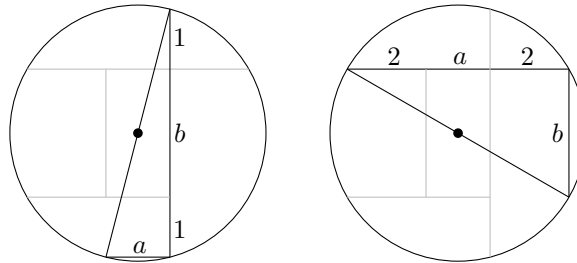
care poate fi rearanjat la

$$G = \frac{1}{4}(5\pi - 2)ab.$$

Să considerăm acum aria întregului cerc, a cărui rază o notăm cu r :

$$\pi r^2 = G + W = 2G + ab = \frac{5\pi}{2}ab$$

sau $2r^2 = 5ab$. Obținem alte două ecuații observând că putem rearanja segmentele în două moduri pentru a obține un triunghi dreptunghic înscris în cerc: Unul cu catetele a și $b + 2$, altul cu catetele $a + 4$ și b .



Așa că rămânem cu un sistem de trei ecuații

$$\begin{aligned} 2r^2 &= 5ab, \\ 4r^2 &= a^2 + (2 + b)^2, \\ 4r^2 &= (4 + a)^2 + b^2, \end{aligned}$$

care poate fi rezolvat cu ușurință – comparând ultimele două ecuații se obține $b = 2a + 3$, care poate fi înlocuit în primele două ecuații pentru a obține o ecuație pătratică în a . Una dintre soluții ($a = -\frac{5}{3}$) nu are sens în situația actuală, cealaltă duce la $a = 1$, $b = 5$ și $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Problema 57. O clădire are 160 de etaje. Holul fiecărui etaj este accesibil prin oricare dintre cele două uși principale, iar holul conține patru camere. Fiecare cameră are ușa ei, în fiecare cameră locuiește o persoană. O singură încuietorie va fi instalată pe fiecare ușă, inclusiv pe ușile holului, iar cheile vor fi distribuite pentru a se asigura că:

- Fiecare persoană poate accesa propria sa cameră, dar nu a altcuiva și
- Fiecare persoană poate accesa holul de la etaj,

- Este permis ca cineva să aibă acces la holurile de la alte etaje.

Fiecare încuietoare este asociată cu o cheie corespunzătoare unică și poate fi deschisă numai cu acea cheie. Cu toate acestea, aceeași încuietoare poate fi folosită pe mai multe uși, dacă este necesar, și pot fi făcute și distribuite orice număr de copii ale cheii corespunzătoare. Persoanele fizice pot deține câte chei sunt necesare. Compania responsabilă de instalare își propune să minimizeze costul total de producere a cheilor. Crearea unei chei noi costă 3 RON și realizarea unei copii a unei chei existente costă 2 RON. Care este costul total minim al tuturor cheilor în timp ce îndeplinesc condițiile de mai sus?

Răspuns. 2432

Soluție. Luăm în considerare o aranjare optimă din punct de vedere al costurilor a încuietorilor și a cheilor; este clar că într-un astfel de caz niciun rezident nu deține mai mult de două chei. Mai arătăm că putem presupune, fără pierderi de generalitate, că la fiecare etaj, există exact un rezident (sau echivalent, cel puțin unul, deoarece nu poate fi mai mult de unul) rezident care deține o singură cheie. Această cheie oferă acces atât la camera lor, cât și la una dintre ușile holului, în timp ce ceilalți trei rezidenți de la acel etaj folosesc cealaltă ușă a holului.

Să presupunem că nu este cazul la un etaj. Apoi, una dintre ușile holului, D , este folosită de cel mult doi dintre cei patru rezidenți – rezident a și, eventual, rezident b . Dacă niciun rezident dintre cei patru nu poate debloca D , selectăm unul dintre ei în mod arbitrar și le tratăm în continuare ca a . Modificăm sistemul de chei astfel: înlocuim încuietoarea de la usa D cu una complet nouă și instalăm aceeași încuietoare pe usa camerei lui a . Ca rezultat, a necesită acum doar o singură cheie, care costă 3, în timp ce cele două chei anterioare aveau un cost combinat de cel puțin $2 + 2 = 4$. Acest lucru reduce costul total cu cel puțin 1.

Mai mult, dacă rezident b există, le reatribuim cheia de la hol pentru a se potrivi cu cealaltă ușă de hol de la acel etaj, ceea ce nu crește costul total. Totuși, în acest fel, b ar putea ajunge la o combinație de taste care să permită accesul la o cameră de la alt etaj; pentru a remedia acest lucru, înlocuim blocarea camerei lui b cu una complet nouă, care crește costul cu cel mult 1.

Deoarece costul total nu crește prin acest proces, concluzionăm că configurația presupusă este cel puțin la fel de rentabilă ca orice alternativă. Prin urmare, în cele ce urmează, presupunem că există exact un rezident cu o singură cheie la fiecare etaj.

Astfel, problema se reduce la minimizarea costului cheilor pentru 160 de etaje unde fiecare hol are o singură intrare și trei încăperi separate. Fie n tipuri de chei distincte $1, 2, \dots, n$. Fiecare rezident primește o cheie pentru camera sa și o cheie pentru hol, iar aceste două chei nu pot fi de același tip. De asemenea, doi rezidenți nu pot avea aceeași pereche de tipuri de chei, deoarece acest lucru ar însemna că au acces la aceeași cameră. Prin urmare, numărul de perechi de chei valide este dat de $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Deoarece distribuim un total de $3 \cdot 160 = 480$ perechi de chei, determinăm limita inferioară pentru n din inegalitate

$$\frac{1}{2}n(n-1) \geq 480.$$

Obținem că $n \geq 32$. Acum, demonstrăm că este posibil să folosim exact $n = 32$ tipuri de chei distincte. Pentru a realiza acest lucru, împărțim cele 160 de etaje în 32 de grupuri a câte 5 etaje fiecare. Atribuirea cheilor se desfășoară după cum urmează (prima cheie din pereche este pentru hol și a doua pentru cameră):

- Cei 15 rezidenți din primul grup primesc perechile de chei $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 16)$.
- Celui de al doilea grup i se atribuie perechile de chei $(2, 3), (2, 4), \dots, (2, 17)$.
- Acest model continuă, al 31-lea grup primind perechile de chei $(31, 32), (31, 1), \dots, (31, 14)$.
- În cele din urmă, ultimului grup (al 32-lea) i se atribuie perechile de chei $(32, 1), (32, 2), \dots, (32, 15)$.

Este ușor de observat că această distribuție îndeplinește condițiile prezentate mai sus. Prin urmare, $n = 32$ este numărul minim de chei unice necesare, la care adăugăm copii de 928 pentru a acoperi toate cheile de $160 \cdot 3 \cdot 2 = 960$.

Luând în considerare rezidenții menționați în primul paragraf, trebuie să fie produse un total de $32 + 160 = 192$ chei unice. Astfel, costul final este calculat ca $192 \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$.