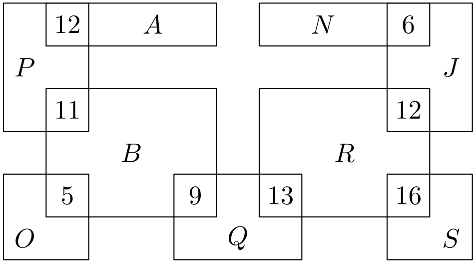
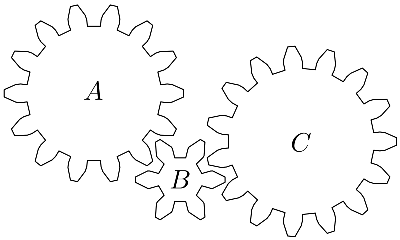
Задача 1. Буквы, записанные в прямоугольниках, соответствуют не повторяющимся ненулевым цифрам. Числа, записанные на пересечениях прямоугольников - суммы цифр, обозначенных буквами в пересекающихся прямоугольниках. Установите значение пятизначного числа $NABOJ$.

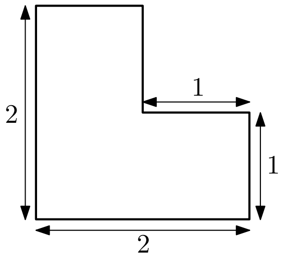


Задача 2. Сколько полных оборотов необходимо совершить шестерне C, чтобы все три шестерни вернулись в исходное положение?

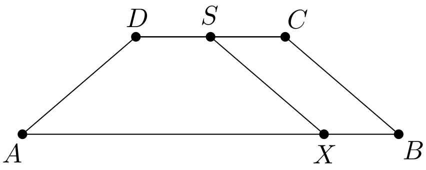


Задача 3. Найдите такое наибольшее натуральное десятизначное число, в котором каждая пара одинаковых цифр (вне зависимости от их разряда) содержит как минимум одну меньшую цифру между ними.

Задача 4. Установите длину стороны наименьшего из возможных квадратов, поверхность которого можно полностью и без наложений покрыть копиями представленного внизу L-образного сегмента.



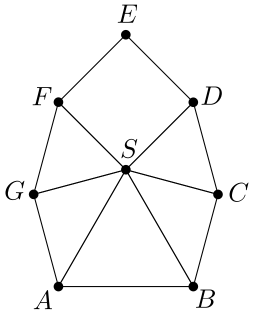
Задача 5. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD истинно $BC = CD = AD$. Известно, что S является серединой стороны DC, а точка X принадлежит стороне AB. Отрезок XS параллелен стороне BC. С условием, что периметр $ABCD$ равен 50 а периметр $AXSD$ равен 38, найдите периметр параллелограмма $XBCS$.



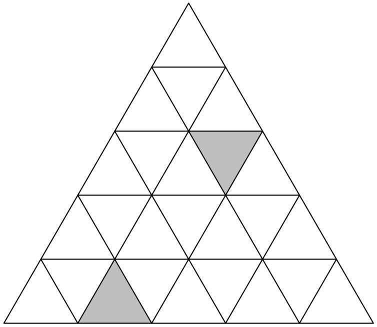
Задача 6. Элани придумала двузначное число, не содержащее нули. Результатом умножения данного числа на обратное ему (единицы и десятки меняются местами) стало четырёхзначное число, с 3 в разряде тысяч и 7 в разряде единиц. Установите значение наибольшего из умноженных чисел.

Задача 7. Курт играет в карточную игру стандартной колодой из 52 карт (13 рангов, карты 4 мастей). За один ход, игрок имеет право либо вытянуть одну карту из колоды, либо сыграть одной из карт на руках, которая имеет либо такую же масть, либо такой же ранг, как последняя сыгранная карта. В предыдущих раундах Курту не везло и он вытянул очень много карт, что заставило его задуматься о том, какое наименьшее количество N карт ему необходимо иметь, чтобы вне зависимости от карт, которые у него на руках и карты сыгранной ранее, он гарантированно смог сделать как минимум один ход.

Задача 8. Гептагон (семиугольник) $ABCDEFG$ составлен из шести многоугольников имеющих общую вершину S: трёх равносторонних треугольников (ABS, CDS, FGS), двух равнобедренных прямоугольных треугольников (BCS, GAS с прямыми углами C и G), и квадратом ($DEFS$). Найдите градусную меру угла SAE.



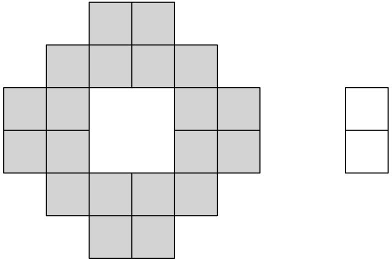
Задача 9. В представленной треугольной сетке два треугольника окрашены в серый цвет. Сколько треугольников может быть нарисовано строго по линиям представленной сетки, так, чтобы они не содержали в себе ни один из серых треугольников?



Задача 10. Четырёхзначное число именуется *интересным* если оно следует следующему правилу: если из числа удалить разряд сотен, то получившееся трёхзначное число будет равно одной девятой изначального числа. Например, число 2025 является интересным, так как $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$. Найдите наибольшее интересное четырёхзначное число.

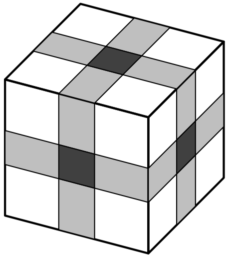
Задача 11. Танкер был спроектирован для одновременной транспортировки трёх типов жидкостей: спирта, бензина и ртути. Для каждой из жидкостей имеется максимальная возможная масса перевозки: 10 тонн спирта, 30 тонн бензина и 60 тон ртути. На маршруте Прага-Гамбург, корабль транспортировка 85 тонн груза, состоящего из жидкостей всех трёх типов. На обратном пути танкер вёз такое же количество спирта, в дважды большее количество бензина и одну треть от массы ртути, в сравнении с грузом на его пути в Прагу. Установите общую массу груза на обратном пути.

Задача 12. Найдите количество уникальных способов покрыть серую зону на представленной ниже фигуре, используя пластинки домино (пример пластинки представлен белым). Пластинку разрешено поворачивать, однако, каждая пластинка должна покрывать две соседних ячейки и не перекрывать другие пластинки.



Заметка: Расположения, отличающиеся друг от друга поворотом или симметрией, считать уникальными. Пластинки домино не могут выходить за поверхность фигуры.

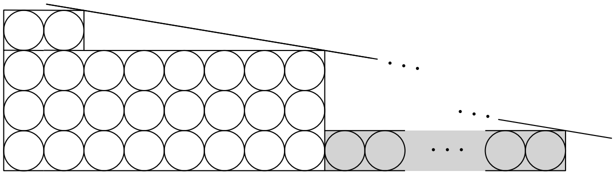
Задача 13. Упаковка кубической формы обмотана клейкой лентой, ширина которой меньше стороны упаковки. Тёмно-серые области на поверхности (включая те, которые не видно напрямую на изображении) имеют общую площадь $216\,\mathrm{cm}^2$. Площадь светло-серых областей на поверхности является половиной площади не покрытой клейкой лентой (белая поверхность). Установите длину стороны упаковки в сантиметрах.



Задача 14. Магазин торгует ручками, блокнотами и линейками. Стоимость блокнота равна суммарной стоимости ручки и линейки. Если стоимость линейки увеличить на 50%, то она будет равняться суммарной стоимости ручки и блокнота. На какое количество процентов необходимо увеличить стоимость ручки, чтобы она была равна суммарной стоимости блокнота и линейки?

Задача 15. Допустим, что НОД (a, b) и НОК (a, b) обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух натуральных чисел a и b. Установите значение следующего выражения: НОК(2025, НОК(2024, НОД(2023, НОД(2022, ... НОК(4,НОД(3,НОД(2, 1)))...))), в которой НОД и НОК последовательно чередуются каждые два этапа.

Задача 16. На картине изображены три четырёхугольника, равномерно вписанные в них равновеликие круги и линия, которая проходит через верхние углы всех трёх четырёхугольников. Средняя часть картины скрыта. Сколько кругов в сером прямоугольнике?



Задача 17. Тайлер отправился на пробежку по 18-километровому маршруту. Первые километры он бежал уверенно, однако, почувствовав усталость, он сбавил темп (скорость) на 25% до конца пробежки. После пробежки Тайлер сверился с показаниями смарт-часов и обнаружил, что бежал с меньшей скоростью в дважды дольше, чем с изначальной. Какую дистанцию он пробежал перед тем, как устал

Задача 18. Кэйти, Лаура, Меган, Натали и Оливия позируют в шеренге для группового фото на фоне огромной мемориальной доски Náboj. Однако, есть чёткие предписания для позиций девушек:

- Натали должна стоять справа от Кэйти, Меган и Оливии.
- Меган должна стоять слева от Кэйти, Натали и Оливии.

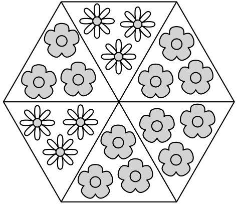
Сколько возможных поз (с точки зрения расстановки) возможны для данного исторического фото?

Задача 19. Замок состоит из пяти башен, соединённых прямыми стенами. Стены имеют следующие длины: 50, 70, 90, 110 и 130 локтей. Точное расположение стен не известно. Какова наибольшая возможная дистанция выстрела из лука внутри стен замка в локтях, учитывая, замок специально проектировался под данные цели?

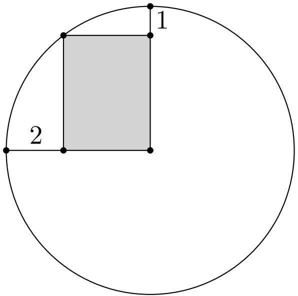
Задача 20. У Паулины на руках 8 карт, каждая с не повторяющимися цифрами от 1 до 8. Она располагает их так, чтобы получить два четырёхзначных числа. Какова наименьшая возможная разность полученных чисел?

Задача 21. Бабушка Джоан высаживает цветы на клумбе формы правильного шестиугольника, разделённой на шесть отсеков. У неё в наличии два типа цветов: фиалы и ромашки. Каждый из отсеков может быть засажен только одним из видов цветов. Возможный сценарий посадки представлен на иллюстрации ниже. Сколько всего расположений цветов возможно, если как минимум на двух соседних отеках должны находиться цветы одинакового вида?

Заметка: Расположения, отличающиеся друг от друга повтором или симметрией, считать уникальными.



Задача 22. Их круглого листа бумаги Эрих вырезал прямоугольный кусок таким образом, что один из углов прямоугольника расположен в центре круга, а противоположный - на окружности, оставшиеся два лежат на двух перпендикулярных друг к другу радиусах и отдалены на расстояние $1\,\mathrm{dm}$ и $2\,\mathrm{dm}$ от точек пересечения радиусов, на которых они лежат, с окружностью. Какова площадь оставшегося после вырезания листа бумаги (в dm^2)?



Задача 23. Знаток Нáбоикус, непревзойдённый мастер синтеза наук намеревается создать легендарную дисциплину - Алгемию. Данная наука является мастерским слиянием Алгебры и Алхимии, смешанными в точном отношении один к одному. Для того, чтобы выполнить задуманное, ему потребуются следующие ингредиенты:

- Алгебрия: Содержит 80% Алгебры и 20% Алхимии, общая масса - 10 mg,
- Алхема: Содержит 30% Алгебрыы и 70% Алхимии, общая масса - 14 mg.

Используя два ингредиента в своём распоряжении, какое наибольшее количество Алгемии может синтезировать Нáбоикус? (в mg)?

Заметка: Náboicus cannot isolate the components of a mixture at any point during the process, he can only further mix the available substances.

Задача 24. Число $K = n^2$ является четырёхзначным точным квадратом, при том все его цифры меньше 7. Если каждую из цифр числа K увеличить на 3, получится другой точный квадрат. Найдите значение n.

Задача 25. Допустим, что X, Y - две противолежащие вершины куба с длинной стороны равной 1. Так же допустим, что C - правильный цилиндр, чья поверхность содержит все вершины данного куба. Более того, X и Y являются центрами окружностей в основании цилиндра C. Чему равен объём цилиндра C?

Задача 26. В дереве с населением 60 человек каждый житель принадлежит одной из групп: правдословы - те, кто говорят только правду, лжецы - те, кто лгут в каждом утверждении и нормальные люди - у которых есть право ответить на своё усмотрение. Каждый житель деревни знает, к какой группе относится каждый другой житель деревни. Странник задал каждому из жителей деревни следующие два вопроса:

1. "В деревне живут как минимум 31 правдословов?" и получил ровно 43 положительных ответа.
2. "В деревне живут как минимум 31 лжец?" – и получил ровно 39 положительных ответов.

Какое наименьшее количество нормальных людей проживает в деревне?

Задача 27. Четыре команды, A, B, C, и D, участвуют в турнире с круговой системой, где каждая пара игроков играет ровно один матч с другой парой. Победитель каждого матча награждается одним или двумя очками, в зависимости от преимущества, проигравшая команда очков не получает. Пример турнирной таблицы с результатами всех команд (когда все игры уже сыграны) приведён снизу. Если нам известно, что одна команда по итогу турнира набрала четыре очка, в то время, как оставшиеся три - каждая по одному очку, сколько возможных турнирных таблиц возможно?

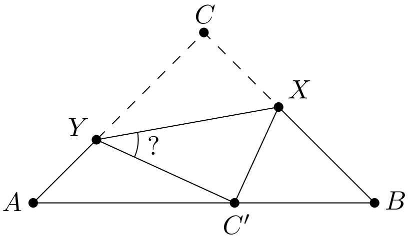
	A	B	C	D	total
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Заметка: Таблицы, отличающиеся только перестановкой команд, считать уникальными.

Задача 28. Джулия записала число 2025 как сумму M членов, где каждый член является степенью 10 (т.е., 10^n, где n является неотрицательным целым числом). С условием, что слагаемые в выражении могут повторяться, сколько возможных значений может принимать M?

Задача 29. Макс и Пауль стоят спина к спине на станции поезда. Товарный поезд проезжает мимо них с постоянной скоростью. В момент, когда поезд поравнялся с их местоположением, оба парня начинают своё движение в противоположных направлениях с равной постоянной скоростью. Конец поезда достигает Макса, в момент, когда он отошёл на 45 метров от точки начала движения, и Пауля, когда тот окажется на расстоянии 60 метров от точки начала движения. Найдите длину состава в метрах.

Задача 30. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом в точке C загнут вдоль отрезка XY таким образом, что точка C накладывается на точку C' на стороне AB. Известно, что. $BC' = BX$. Установите градусную меру угла $C'YX$.



Задача 31. Рассмотрим последовательность строго возрастающих 4-х составных одномерных матриц последовательности $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$, представленных в алфавитной последовательности:

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), (0, 1, 2, 5), \dots, (12, 13, 14, 15).$$

Таким образом, (a_1, a_2, a_3, a_4) стоит ранее (b_1, b_2, b_3, b_4) в данной последовательности тогда и только тогда, когда

$$a_1 < b_1 \quad \text{or} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{or} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{or} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 < b_4.$$

Установите место матрицы $(2, 4, 7, 14)$ в данном наборе.

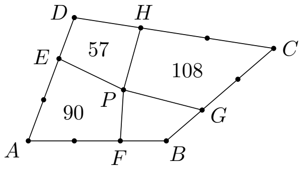
Задача 32. Два фермера, Адам и Беттина, продают яблоки на рынке. Вместе они принесли 100 яблок. Адам продал свои яблоки по цене a за штуку, Беттина - по цене b за штуку. В тот день их заработки были одинаковы. Адам подметил, что если бы он продавал яблоки по цене Беттины b за штуку, то его заработок составил бы 45 монет. Беттина добавила, что продавай она яблоки по цене Адама a - заработала бы 20 монет. Сколько яблок продал Адам?

Задача 33. Сью придумала очаровательное число ABC, известно, что $ABC = A + B^2 + C^3$. Какое число задумала Сью?

Задача 34. Каждая сторона прямоугольника $ABCD$ разделена на три равные части двумя точками. А именно:

- Точка E находится на отрезке AD, таким образом, что $AE : ED = 2 : 1$.
- Точка H находится на отрезке CD, таким образом, что $CH : HD = 2 : 1$.
- Точка F находится на отрезке AB, таким образом, что $AF : FB = 2 : 1$.
- Точка G находится на отрезке CB, таким образом, что $CG : GB = 2 : 1$.

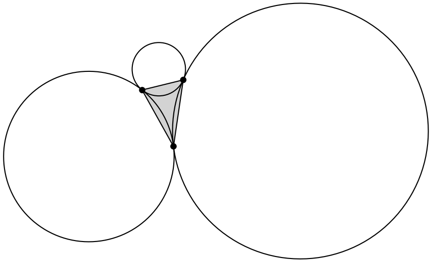
Точка P лежит внутри четырёхугольника, разделяя его на четыре более маленьких четырёхугольника. Площади данных четырёхугольников указаны на иллюстрации ниже. Установите площадь четвёртого четырёхугольника $PFBG$.



Задача 35. Рассмотрим кольцо, составленное из доски 4×4 удалением четырёх центральных полей. Каким количеством способов можно выбрать четыре клетки так, чтобы как минимум одна из клеток лежала на каждой из сторон?

Заметка: Каждый угол принадлежит обеим сторонам. Выборки клеток отличающиеся только симметрией (поворотом доски) считать уникальными.

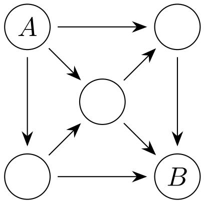
Задача 36. Три круга с радиусами 1, 2 и 3 соответственно расположены касательно относительно друг друга, как показано на изображении. Определите площадь треугольника, образованного пересечениями.



Задача 37. Агнес нарисовала правильный n-угольник такой, что $n > 3$ и посчитала его диагонали. Оказалось, что количество диагоналей кратно числу 2025. Установите наименьшее значение n, которое удовлетворяло бы данному условию.

Заметка: The sides of the n-gon are not counted as diagonals.

Задача 38. Давид отправляется в путешествие по маршрутам, изображённым на рисунке ниже. Он отправляется из вершины A и заканчивает свой путь на вершине B. Он обязан следовать направлению стрелок на диаграмме, за исключением одного раза, когда он непокорно не последовал указанию стрелки, понимая, что это может привести к тому, что он временно покинет точку назначения. Давиду позволено использовать любую стрелку более, чем один раз. Сколько возможных уникальных маршрутов мог совершить Дэвид?



Задача 39. В данном вычислении, различные буквы обозначают различные ненулевые цифры.

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A & A \\
 & & + & B & B & B \\
 & & & + & O & O \\
 & & & & + & J \\
 & - & 2 & 0 & 2 & 5 \\
\hline
= & N & A & B & O & J
\end{array}$$

Установите максимально возможное значение числа $NABOJ$.

Задача 40. Пять сотен людей, причастных к организации Náboj с помощью голосования выбирали задачи для олимпиады. Каждый присутствующий человек проголосовал за или против задачи. Однако, почти сразу после начала голосования, после первого вопроса, некоторые из организаторов, проголосовавших в пользу задачи, посчитали данный процесс настолько утомляющим, что покинули комнату, в то время как никто из голосовавших против не покинул её. В процедуре голосования за вторую задачу, такое же количество организаторов отдали свой голос в пользу задачи, как и на первом голосовании, в то время как количество голосов снизилось до одной третьей от всех изначальных. Известно, что ровно 120 организаторов проголосовали "за"в обоих случаях и ровно 70 "против"в обоих случаях. Сколько организаторов покинуло комнату после голосования за первую задачу?

Задача 41. Найдите пары положительных натуральных чисел (a, b) удовлетворяющих условию. $a \leq b$. Более того НОК(a, b), вместе с a и b, могут быть представлены в виде арифметической прогрессии с суммой членов равной 2025.

Заметка: В арифметической прогрессии разность между двумя последовательными числами постоянна

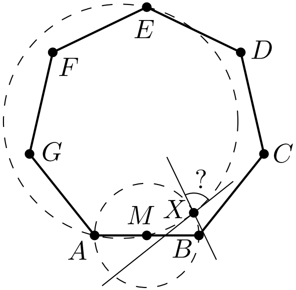
Задача 42. Каждая команда, участвующая в дет.сад. Náboj получает первые 3 задачи из банка размером 16 задач. У каждой команды собственный банк задач, однако все они содержат одинаковые задачи, одинаково последовательно пронумерованные. Как только команда предоставляет правильный ответ на одну из задач, она получает следующую из своего банка, с наименьшим из остающихся номеров. После окончания соревнования оказалось, что ни одна из команд не решила одинаковую выборку задач. Какое наибольшее количество команд могло принимать участие в соревновании?

Задача 43. Допустим, что a, b, c, d действительные числа такие, что

$$\begin{aligned} 2a + 2b - ab &= 2025, \\ 2b + 2c - bc &= 47, \\ 2c + 2d - cd &= 5. \end{aligned}$$

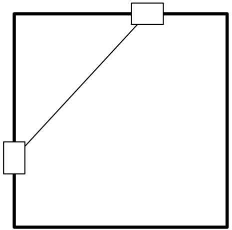
Найдите значение суммы $2a + 2d - ad$.

Задача 44. Допустим, что M является серединой стороны AB правильного семиугольника $ABCDEFG$. Окружность с центром M проходит через A и пересекает описанную окружность треугольника AME в точке X находящейся внутри данного семиугольника. Установите угловую меру острого угла пересечения касательных к двум окружностям в точке X?



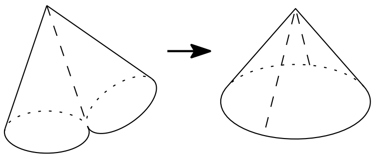
Задача 45. Вычислите сумму всех возможных значений $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \cdots \pm 2^{99})^2$, учитывая опцию выбор каждого из 100 знаков.

Задача 46. Два автомобиля, соединённые резиновым шнуром, перемещаются по квадратной траектории (иллюстрация ниже). Изначально, оба автомобиля начинают своё движение из одного из углов квадрата. Каждая машина двигается бесконечно долго с заданной неизменной целой скоростью. Шнур очень эластичен и порвётся только в случае, если будет растянут на длину диагонали квадрата. Более медленный автомобиль двигается со скоростью $24\,\mathrm{km/h}$, более быстрый - со скоростью $n\,\mathrm{km/h}$, оба в одном и том же направлении. Определите наименьшее целое значение n, большее 24, которое позволит избежать разрыва шнура.



Задача 47. 2025 игроков играют в игру. В конце каждого матча, проигравший игрок передаёт каждому из игроков количество фишек, которое у них на руках в тот момент (каждый игрок может получить уникальное количество монет). После 2025 раундов, у каждого игрока ровно 2^{3000} монет. Более того, ни один из игроков не остался никому должен. Если известно, что каждый игрок проиграл ровно один раунд, установите количество монет на руках игроков в момент начала игры.

Задача 48. У Глеба есть три идентичные развёртки внешней поверхности правильного конуса (без основания). Основание конуса является диском, перпендикулярным высоте конуса. Диск не является частью математической модели. Глеб приложил две поверхности конуса угол к углу, как показано на рисунке, образовав линию совмещения, и сделав надрез по данной линии в каждой из заготовок объединил их в больший конус. Объём получившегося конуса стал равен 10. Проделав аналогичную операцию с большим конусом в третьим маленьким конусом, Глеб ожидал увеличения объёма фигуры, в связи с увеличением плоскости поверхности. Его удивлению не было предела, когда он выяснил что объём полученной фигуры будет равен нулю. Чему равен объём изначального конуса?



Задача 49. Для какого количества положительных целых чисел n меньших или равных 200 представленное уравнение

$$5\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor - n\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$$

имеет как минимум одно целое решение x, такое, что $1 \leq x \leq 200$?

Заметка: Символ $\lfloor t \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное t.

Задача 50. У Адама неограниченный доступ к игральным костям с 20 последовательно пронумерованными сторонами. Он бросает игральные кости одновременно и желает выбросить одну или две "единицы"одновременно. Какое количество игральных костей позволят достичь максимальной вероятности на успех?

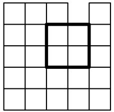
Задача 51. Предположим, что D является точкой на стороне AC треугольника ABC. Известно, что $AD = BC$, $BD = CD$, и что $\angle BAC = 30^\circ$. Найдите градусную меру угла DBA.

Задача 52. Функция f присваивает целое неотрицательное число каждой паре целых неотрицательных чисел. Она задана следующими критериями:

1. Для каждого x: $f(x, x) = 0$.
2. Для каждого x, y: $f(x, y) = f(y, x)$.
3. Для каждого x, y: $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Для каждого x, y: $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
5. Для каждого x, y: $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Найдите сумму всех неотрицательных t, $t \leq 60$, удовлетворяющие условию $f(20, t) = 2$.

Задача 53. Бекки нарисовала сетку 45×45 и посчитал количество квадратов 1×1 на ней, придя к выводу, что их 2025. Это сильно её расстроило, так как они предпочитает фигуры с 2024 небольшими квадратами по личным обстоятельствам. Чтобы исправить это, она удалила один из квадратов 1×1, расположенных с краю сетки. После чего она посчитала все (не только 1×1) квадраты в полученной сетке. Суеверная Бекки боится чисел, которые кратны 13, поэтому на вырезала квадрат таким образом, чтобы полученное при подсчёте общего количества квадратов числе не было кратно 13. На рисунке снизу проиллюстрирована сетка 5×5 с одним удалённым квадратом и 2×2 квадратом в изменённой сетке. Определите, какое количество квадратов могла убрать Бекки, чтобы полученная фигура соответствовала её требованиям.



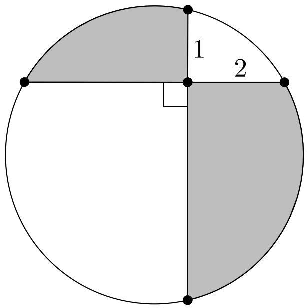
Задача 54. Заяц и Черепаха соревнуются в гонке. Черепаха ползёт медленно, но стабильно, в то время как заяц перемещается со скоростью в шесть раз большей, но каждый раз, когда он начинает опережать черепаху более, чем на 9 метров, он пробегает 7 метров назад, чтобы подразнить черепаху. Какой временной промежуток в течение их соревнования лидировала черепаха (ответ выразить отношением к общему времени)?

Задача 55. Марк получил последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ в подарок, заданную первым членом $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, и рекуррентной формулой

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

для всех $n \geq 2$. Однако, данная последовательность задана не только данным отношением. Чтобы разрешить дилемму, Марк высчитывал члены один за другим, всегда придерживаясь наибольшего значения, где это было возможно. Найдите значение 13-го члена последовательности a_{13}.

Задача 56. На представленной диаграмме изображена окружность, пересечённая двумя перпендикулярными хордами. Даны длины двух отрезков на хордах (оба больше, чем продолжение хорды до второго пересечения с окружностью), наряду с информацией, что $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$. Определите радиус круга.



Задача 57. В 160-этажном здании, в общий вестибюль каждого этажа ведут две двери, в вестибюле каждого этажа имеется 4 квартиры. В каждую квартиру - отдельная дверь, в каждой квартире живёт один человек. На каждую дверь в доме будет установлен замок. При заказе ключей необходимо соблюсти следующие три требования:

- Каждый человек имеет доступ в собственную квартиру, но ни в чью другую,
- Каждый человек имеет доступ к вестибюлю на собственном этаже,
- Иметь доступ к вестибюлям на этажах кроме собственного не запрещено.

Каждый замок соответствует уникальному ключу и может быть открыт только с помощью данного ключа. Однако, одинаковый замок может быть при необходимости использован на нескольких дверях, возможно производство неограниченного количества копий одного ключа, собственники могут иметь неограниченное количество ключей. Фирма, ответственная за реализацию заказа, стремится минимизировать общую стоимость производства всех ключей. Производство нового ключа стоит 3 ед. валюты, копии ключа - 2 ед. валюты. Какова наименьшая возможная стоимость производства всех ключей для собственников, удовлетворяющая вышеуказанным условиям?

The team has received all the problems.

Do not hand out this leaflet to the team. It is intended for review only.