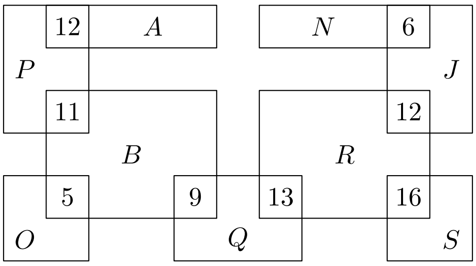
Vzorové riešenia

28. ročník Matematického Náboja

14. marca 2025

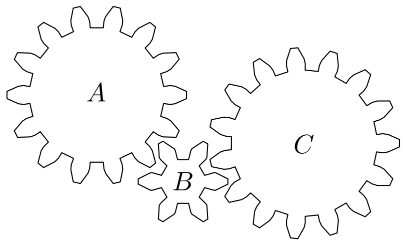
Úloha 1. Písmená v obdĺžnikoch predstavujú navzájom rôzne číslice, rôzne od nuly. V každom prieniku dvoch obdĺžnikov je zapísaný súčet príslušných písmen. Nájdite hodnotu päťciferného čísla $\overline{NABOJ}$.



Výsledok. 14325

Riešenie. Súčet 16 je možné získať iba ako $9 + 7$. Keďže $R = 9$ vedie k $J = N = 3$, čo je v spore so zadaním, potrebujeme $S = 9$ a $R = 7$. Postupne dopočítame zvyšné hodnoty: $J = 5$, $N = 1$, $Q = 6$, $B = 3$, $P = 8$, $A = 4$ a $O = 2$. Teda $NABOJ = 14325$, čo môže byť interpretované ako dátum konania Náboja 2025.

Úloha 2. Koľkokrát sa musí ozubené koleso C kompletne otočiť, aby sa všetky kolesá vrátili do svojej pôvodnej pozície?



Výsledok. 14

Riešenie. Koleso A má 14 zubov, koleso B má 6 a koleso C má 15. Najmenší počet zubov, o ktoré sa musia kolesá otočiť, aby sa všetky vrátili do pôvodnej pozície, musí byť násobkom 14, 6 aj 15. Najmenší spoločný násobok týchto čísel je 210. Koleso C sa teda musí otočiť o 210 zubov, čiže $210/15 = 14$ otočiek.

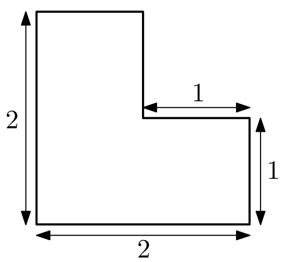
Úloha 3. Aké je najväčšie desaťciferné číslo, pre ktoré platí, že medzi každými jeho dvoma identickými ciframi sa nachádza aspoň jedna menšia cifra?

Výsledok. 9 897 989 698

Riešenie. Pozrime sa na cifru úplne vľavo. Dáme jej hodnotu 9, najväčšiu možnú hodnotu, a ďalej sa pokúsime vyskladať nami hľadané číslo pridávaním najväčšej možnej cifry vpravo tak, aby platili dané obmedzenia. Ďalšia cifra nemôže byť 9, namiesto nej teda použijeme cifru 8. Potom vieme znova použiť 9. V tomto bode nemôžeme použiť 9 ani 8, najväčšia použiteľná cifra je teda 7. Ďalej môžeme znova použiť 9, 8 a 9, no po nich nemôžeme použiť ani jednu cifru z množiny $\{9, 8, 7\}$. Použijeme teda cifru 6, potom znova môžeme použiť cifru 9 a ako poslednú, desiatu cifru, znova cifru 8. Takto sme sa dostali k číslu $n = 9\,897\,989\,698$. Tvrdíme, že to je najväčšie vhodné desaťciferné číslo.

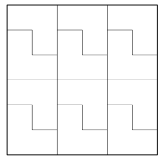
Skutočne, určime si m ako nejaké iné vhodné desaťciferné číslo a pozrime sa na cifru najviac vľavo, ktorú majú m a n rozdielnu. Keďže náš algoritmus vybral vždy najväčšiu možnú cifru na danom mieste, vždy musí platiť $m \le n$ nezávisle od ostatných cifier.

Úloha 4. Aká je najmenšia možná dĺžka strany štvorca, ktorý sa dá celý vyplniť niekoľkými kópiami pravouhlého útvaru na obrázku? Kópie sa nesmú prekrývať ani vytŕčať mimo štvorca.

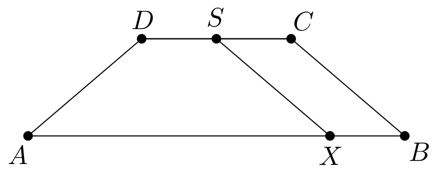


Výsledok. 6

Riešenie. Obsah štvorca musí byť deliteľný 3, keďže to je obsah útvaru na obrázku. Je ľahké vidieť, že štvorec 3×3 sa vyplniť nedá. Štvorec 6×6 sa už vyplniť dá, napríklad nasledovne:



Úloha 5. V rovnoramennom lichobežníku $ABCD$ so základňami AB a CD spĺňajú dĺžky strán rovnicu $|BC| = |CD| = |AD|$. Ďalej platí, že S je stredom úsečky DC a X je bodom na úsečke AB tak, že XS je rovnobežné s BC. Ak platí, že obvod $ABCD$ je 50 a obvod $AXSD$ je 38, vypočítajte obvod rovnobežníka $XBCS$.



Výsledok. 36

Riešenie. Rozdiel obvodov je presne $|XB| + |CS| = 2 \cdot |CS| = |CD|$, čo sa ďalej rovná $|BC|$ a $|XS|$, takže výsledok je $3 \cdot (50 - 38) = 36$.

Úloha 6. Mimi si vymyslela dvojciferné číslo $\overline{AB}$ neobsahujúce číslicu nula a vynásobila ho jeho opačným číslom $\overline{BA}$. Výsledkom bolo štvorciferné číslo, ktoré začínalo číslicou 3 a končilo číslicou 7. Aké bolo väčšie z čísel, ktoré spolu vynásobila?

Poznámka: $\overline{AB}$ značí číslo zložené z cifier A a B.

Výsledok. 93

Riešenie. Číslica na konci súčinu $\overline{AB} \cdot \overline{BA}$ je rovnaká ako číslica na konci súčinu $B \cdot A$, čiže na konci súčinu $B \cdot A$ je 7. Jediné dva spôsoby, ako to dosiahnuť, sú $1 \cdot 7 = 7$ a $3 \cdot 9 = 27$. Možnosť $17 \cdot 71$ môžeme vylúčiť, lebo jej výsledok je príliš malý, takže správna možnosť je $39 \cdot 93 = 3627$ a riešenie je 93.

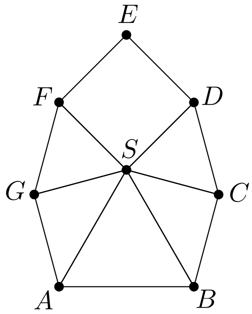
Úloha 7. Krtko hrá kartovú hru so štandardným balíčkom 52 kariet (13 hodnôt v 4 farbách). V každom ťahu si môže hráč buď potiahnuť kartu, alebo zahrať kartu zo svojej ruky, ktorá má buď rovnakú hodnotu, alebo rovnakú farbu ako karta, ktorá je na vrchu odhadzovacieho balíčka. V predošlých kolách nemal Krtko vôbec šťastie a potiahol si veľa kariet, čo ho priviedlo k myšlienke: Aký je najmenší počet kariet N, ktorý musí mať na ruke, aby bez ohľadu na to, ktorých N kariet drží na ruke a aká karta je na vrchu odhadzovacieho balíčka, vždy mohol zaručene zahrať aspoň jednu kartu?

Výsledok. 37

Riešenie. Ak Krtko drží na ruke všetky kombinácie troch farieb a dvanástich hodnôt (celkom $3 \cdot 12 = 36$ kariet), stále je možné, že karta na vrchu odhadzovacieho balíčka má práve štvrtú (chýbajúcu) farbu a trinástu (chýbajúcu) hodnotu. V tomto prípade nemôže Krtko hrať ani jednu zo svojich kariet, preto musí byť N aspoň 37.

Na druhej strane, karta na vrchu balíčka sa hodnotou zhoduje s 12 kartami a farbou s 3 kartami. Keďže celkový počet kariet je 52 a aspoň jedna z nich je na vrchu odhadzovacieho balíčka, najväčší možný počet nehrateľných kariet na Krtkovej ruke je $52 - 1 - 12 - 3 = 36$, takže ak má 37 kariet, musí vedieť zahrať aspoň jednu.

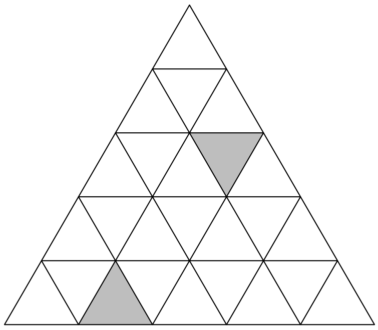
Úloha 8. Sedemuholník $ABCDEFG$ pozostáva zo šiestich mnohouholníkov, ktoré zdieľajú vrchol S: troch rovnostranných trojuholníkov (ABS, CDS, FGS), dvoch rovnoramenných trojuholníkov (BCS, GAS) s pravými uhlami pri vrcholoch C a G a štvorca ($DEFS$). Nájdite veľkosť uhla SAE v stupňoch.



Výsledok. 15

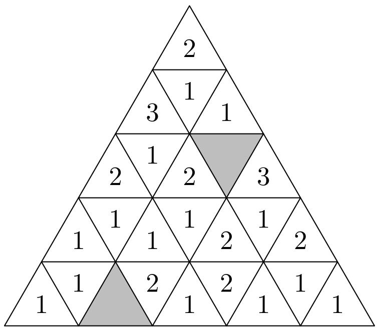
Riešenie. Keďže trojuholník FGS je rovnostranný, platí $|FS| = |GS|$. Preto sú rovnoramenné trojuholníky GAS a FSE zhodné, a teda dĺžky $|ES|$ a $|AS|$ sú rovnaké. Z toho dôvodu je trojuholník EAS je rovnoramenný. Keďže $|\sphericalangle ESA| = 45° + 60° + 45° = 150°$, tak $|\sphericalangle SAE| = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle ESA) = 15°$.

Úloha 9. Uvážme trojuholníkovú mriežku s dvomi šedými trojuholníčkami, ako na obrázku. Koľko trojuholníkov je možné nakresliť použitím čiar mriežky tak, že neobsahujú žiaden zo šedých trojuholníčkov?



Výsledok. 34

Riešenie. Napíšme do každého trojuholníčka číslo vyjadrujúce počet trojuholníkov, ktoré je možné nakresliť s daným trojuholníčkom ako vrchným rohom alebo spodným rohom (v závislosti od orientácie):



Hľadaný počet je súčet všetkých týchto hodnôt, teda 34.

Úloha 10. Štvorciferné číslo nazveme *zaujímavé*, ak má nasledujúcu vlastnosť: keď odoberieme jeho cifru na mieste stoviek, tak výsledné trojciferné číslo je deväťkrát menšie ako pôvodné štvorciferné číslo. Napríklad, číslo 2025 je zaujímavé, keďže $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$. Nájdite najväčšie zaujímavé štvorciferné číslo.

Výsledok. 6075

Riešenie. Nech $N = \overline{abcd}$ je zaujímavé číslo a nech $n = \overline{cd}$. Potom $N = 1000a + 100b + n$ a keď odoberieme cifru na mieste stoviek, dostaneme číslo $M = 100a + n$. Vynásobením rovnosti $M = \frac{1}{9}N$ číslom 9 dostaneme

$$9(100a + n) = 1000a + 100b + n$$

a následným preusporiadaním a vydelením číslom 4 dostaneme rovnosť

$$25(a + b) = 2n.$$

Z tejto rovnosti vidíme, že $a + b$ musí byť párne číslo menšie ako $\frac{2 \cdot 100}{25} = 8$, keďže $n < 100$. Z toho je zrejmé, že $a + b$ je najviac 6. Keďže treba maximalizovať číslo N, vyberieme $a = 6$ a $b = 0$, z čoho vyplýva $n = 75$. Nakoniec ľahko overíme, že $N = 6075$ spĺňa podmienky zo zadania.

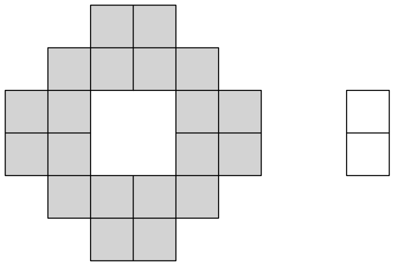
Úloha 11. Nákladná loď je navrhnutá tak, aby naraz prepravovala tri druhy tovaru: kokosy, mandarínky a slivky. Na každý tovar má samostatnú obmedzenú kapacitu: 10 ton kokosov, 30 ton mandarínok a 60 ton sliviek. Na ceste z Kokavy nad Rimavicou do Bardejova bola loď naložená celkovo 85 tonami tovaru, ktorý pozostával z týchto ovocí. Na spiatočnej ceste viezla loď rovnaké množstvo kokosov, dvojnásobné množstvo mandarínok a tretinové množstvo sliviek v porovnaní s prvou cestou. Koľko ton nákladu viezla loď na spiatočnej ceste?

Výsledok. 60

Riešenie. Keďže loď viezla na prvej ceste 85 ton nákladu a kokosy a slivky mohli spolu tvoriť najviac 70 ton, musela viezť aspoň 15 ton mandarínok. Keďže sa však množstvo mandarínok na spiatočnej ceste zdvojnásobilo, loď mohla viezť na prvej ceste najviac 15 ton mandarínok. Preto musela viezť práve 15 ton mandarínok a plnú kapacitu kokosov a sliviek. Na spiatočnej ceste môžeme celkový náklad vypočítať ako

$$10 + 2 \cdot 15 + \frac{1}{3} \cdot 60 = 60.$$

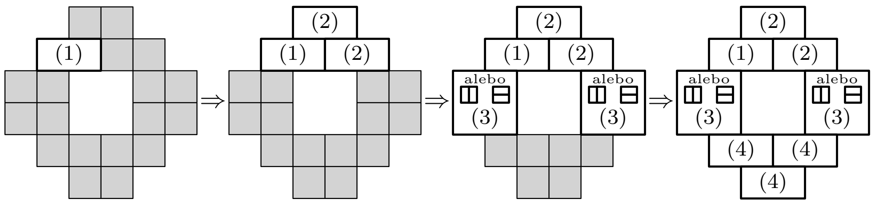
Úloha 12. Určite, koľkými rôznymi spôsobmi sa dá vyplniť sivý útvar na obrázku použitím neprekrývajúcich sa kociek domina, pričom každé domino zakrýva práve dve vedľa seba ležiace políčka. Domino (zobrazené ako biely obdĺžnik) môže byť otočené vertikálne aj horizontálne.



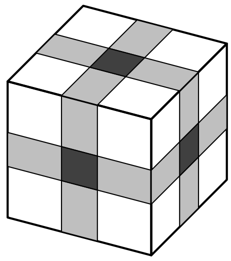
Poznámka: Uloženia, ktoré sa líšia otočením alebo preklopením celého útvaru, sa považujú za rozdielne a žiadne domino nemôže presahovať cez okraje útvaru.

Výsledok. 8

Riešenie. Útvar začnime zakrývať v jednom z jeho vnútorných rohov tak, ako je ukázané na obrázku (1). Máme dve možnosti, ako umiestniť toto domino, ale tie jasne vedú ku kompletne symetrickým možnostiam. Tým pádom si vieme vybrať jednu z týchto možností a na konci výsledok vynásobiť dvoma. Keď máme toto domino umiestnené, umiestnenie ďalších dvoch kociek je pevne dané (2). Dva veľké „štvorce“ naľavo a napravo môžu byť každé zakryté dvoma rôznymi spôsobmi (3) a zvyšok útvaru už len jedným spôsobom (4). Z toho nám vyplýva, že máme $2 \cdot 2 = 4$ spôsoby zakrytia útvaru pri položení prvej kocky ako na obrázku (1). A keď zarátame symetrické možnosti zo začiatku, dostaneme $2 \cdot 4 = 8$ spôsobov.



Úloha 13. Balík v tvare kocky je ovinutý stužkou ako na obrázku. Vieme, že jej šírka je menšia ako dĺžka hrany balíka a že čierne plochy majú dokopy obsah $216\,\text{cm}^2$. Navyše celkový obsah sivých plôch je polovičný oproti celkovému obsahu nepokrytých (bielych) plôch. Určite dĺžku hrany balíka v centimetroch.



Výsledok. 30

Riešenie. Každý čierny štvorec má obsah $216 : 6 = 36\,\text{cm}^2$, takže jeho strana je $\sqrt{36} = 6\,\text{cm}$. Na každej stene má biela plocha dvojnásobný obsah ako sivá, takže každý biely štvorec má dvojnásobný obsah ako sivý obdĺžnik. Takže na jednu hranu kocky vieme umiestniť 5 sivých obdĺžnikov, čiže celá hrana je $5 \cdot 6 = 30\,\text{cm}$.

Úloha 14. Obchod predáva perá, zošity a pravítka. Cena zošita sa rovná súčtu cien pera a pravítka. Ak by sa cena pravítka zvýšila o 50 %, rovnala by sa súčtu cien pera a zošita. O koľko percent by sa mala zvýšiť cena pera, aby sa rovnala súčtu cien zošita a pravítka?

Výsledok. 800 (%)

Riešenie. Nech n je cena zošita, r cena pravítka a p cena pera. Zo zadaných podmienok máme rovnice $n = r + p$ a $\frac{3}{2}r = p + n = 2p + r$. Z druhej rovnice vyplýva, že $r = 4p$, a dosadením do prvej rovnice dostaneme $n = 5p$. Preto by sa cena pera mala zvýšiť deväťnásobne, teda o 800 %.

Úloha 15. Nech $\mathrm{NSD}(a, b)$ a $\mathrm{nsn}(a, b)$ označujú najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok celých čísel a a b. Určte hodnotu nasledujúceho výrazu:

$$\mathrm{nsn}(2025, \mathrm{nsn}(2024, \mathrm{NSD}(2023, \mathrm{NSD}(2022, \ldots \mathrm{nsn}(4, \mathrm{NSD}(3, \mathrm{NSD}(2, 1))) \ldots)))),$$

kde sa operácie NSD a nsn striedajú každé dva kroky, čo znamená, že vo výraze sa dokopy 1012-krát vyskytne operácia NSD a 1012-krát operácia nsn. Ak by sme napríklad mali vo výraze dva výskyty každej operácie, vyzeral by nasledovne: $\mathrm{nsn}(5, \mathrm{nsn}(4, \mathrm{NSD}(3, \mathrm{NSD}(2, 1))))$.

Výsledok. 4 098 600

Riešenie.

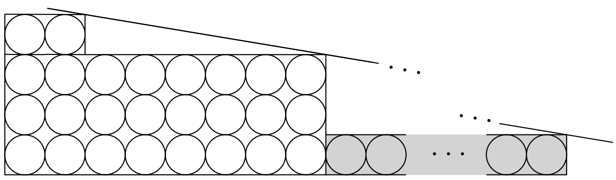
Uvedomme si, že výraz $\mathrm{NSD}(x + 1, \mathrm{NSD}(x, a))$ vlastne hľadá najväčšieho spoločného deliteľa troch čísel $x + 1$, x a a. Keďže x a $x + 1$ nemajú žiadneho spoločného deliteľa okrem 1, platí aj, že $\mathrm{NSD}(x + 1, \mathrm{NSD}(x, a)) = 1$ pre všetky prirodzené čísla a a x. Preto sa výpočet po miesto posledného výskytu dvojice funkcií NSD zjednoduší na

$$\begin{aligned}\mathrm{NSD}(2023, \mathrm{NSD}(2022, \mathrm{nsn}(2021, \mathrm{nsn}(2020, \ldots, \mathrm{nsn}(4, \mathrm{NSD}(3, \mathrm{NSD}(2, 1))) \ldots)) = \\ \mathrm{NSD}(2023, \mathrm{NSD}(2022, a)) = 1.\end{aligned}$$

Potom sa výraz zo zadania zjednoduší na $\mathrm{nsn}(2025, \mathrm{nsn}(2024, 1))$. Riešením je teda

$$\mathrm{nsn}(2025, \mathrm{nsn}(2024, 1)) = 2025 \cdot 2024 = 4\,098\,600.$$

Úloha 16. Na obrázku sú tri obdĺžniky s pravidelne vpísanými zhodnými kružnicami a priamka prechádzajúca pravými hornými rohmi obdĺžnikov. Prostredná časť obrázku je skrytá. Koľko kružníc je v sivom obdĺžniku?



Výsledok. 12

Riešenie. Pravouhlé trojuholníky vytvorené oblasťami medzi šikmou čiarou a obdĺžnikmi sú podobné s pomerom podobnosti 2. Preto je šírka sivého obdĺžnika $2 \cdot 6 = 12$, meraná v priemeroch kružníc.

Úloha 17. Filipko zabehol okruh dlhý 18 km. Začal rovnomerným tempom, ale v určitom bode prestal vládať a spomalil svoje tempo o 25% na zvyšok behu. Po dokončení behu skontroloval svoje inteligentné hodinky a zistil, že strávil dvojnásobne viac času behom pomalším tempom ako rýchlejším tempom. Akú vzdialenosť (v kilometroch) zabehol Filipko predtým, ako spomalil?

Výsledok. $7{,}2 = \frac{36}{5}$

Riešenie. Nech v je Filipkova pôvodná rýchlosť (v km/h) a t čas, ktorý bežal rýchlejším tempom (v hodinách). Potom jeho pomalšie tempo je $\frac{3}{4}v$ a čas strávený týmto tempom je $2t$. Celková vzdialenosť je súčet dvoch čiastkových vzdialeností, teda

$$18 = v \cdot t + \tfrac{3}{4}v \cdot 2t = \tfrac{5}{2}vt,$$

preto

$$vt = \frac{18}{\frac{5}{2}} = 7,2,$$

čo je vzdialenosť zabehnutá rýchlejším tempom.

Úloha 18. Kubko, Lukáš, Marek, Naťa a Oskar sa usporadúvajú do jedného radu na skupinovú fotografiu pred obrovským monumentom Náboja. Existujú však prísne podmienky týkajúce sa ich umiestnenia:

- Naťa musí stáť napravo od Kubka, Mareka a Oskara,
- Marek musí stáť naľavo od Kubka, Nate a Oskara.

Koľkými spôsobmi sa môže týchto päť vedúcich usporiadať na túto úžasnú fotografiu?

Výsledok. 10

Riešenie. Všimnime si, že Lukáš sa v obmedzeniach vôbec nevyskytuje, takže môže byť umiestnený na ľubovoľnej z 5 možných pozícií. Na druhej strane existujú iba dva spôsoby, ako usporiadať zvyšných štyroch vedúcich, takže celkovo existuje 10 možností.

Úloha 19. Polyhrad má päť veží, ktoré sú spojené rovnými hradbami, pričom dĺžky hradieb sú 50 lakťov, 70 lakťov, 90 lakťov, 110 lakťov a 130 lakťov. Hradby môžu byť usporiadané v ľubovoľnom poradí. Aká je maximálna možná dĺžka priameho výstrelu (v lakťoch), ktorú môže lukostrelec dosiahnuť vo vnútri Polyhradu, pri najlepšom usporiadaní hradieb na tento účel?

Poznámka: Hrúbka hradieb a rozmery veží sú zanedbateľne malé. Pod dĺžkou výstrelu myslíme vodorovnú vzdialenosť lukostrelca a miesta dopadu šípu.

Výsledok. 220

Riešenie. Bez ohľadu na rozostavenie hradieb, najdlhšia úsečka celá vnútri Polyhradu nie je dlhšia ako najdlhšia úsečka ℓ spájajúca dva body Polyhradu (pretože ak by niektorý z vnútorných uhlov presiahol $180°$, ℓ by mohla prechádzať aj vonkajškom Polyhradu.

Úsečka ℓ ďalej spája dve veže, pretože inak by sme ju vedeli zväčšiť tak, že ju natiahneme až do momentu, že spája dve steny, a potom ju ešte vieme jedným smerom posúvať po stene k niektorej z jej ohraničujúcich veží.

Dve veže, ktoré spája ℓ, rozdeľujú steny do dvoch skupín, pričom súčet dĺžok všetkých stien skupiny musí byť aspoň $|\ell|$. Tak dostaneme nerovnosť

$$|\ell| \leq \frac{50+70+90+110+130}{2} = 225$$

a keďže $|\ell|$ musí byť násobkom 10, dostávame $|\ell| \leq 220$. Túto hodnotu môžeme dosiahnuť rozdelením hradieb ako $130 + 90 = 220 < 110 + 50 + 70$.

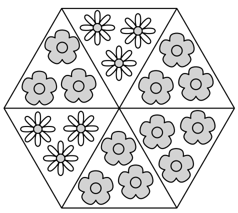
Úloha 20. Baška má 8 kariet, pričom každá je označená inou číslicou od 1 do 8. Usporiada všetky karty tak, aby vytvorila dve štvorciferné čísla. Aký je najmenší možný kladný rozdiel medzi týmito dvoma číslami?

Výsledok. 247

Riešenie. Rozdiel je najmenší, keď sú čísla najbližšie k sebe. Na tento účel sa číslice tisícok môžu líšiť iba o 1. Číslica stoviek musí byť najmenšia možná pre väčšie číslo a najväčšia možná pre menšie číslo. Keď je číslica v stovkách pevná, rovnaký princíp sa uplatňuje na desiatky a nakoniec na jednotky. Týmto spôsobom získame čísla 5123 a 4876, ktorých rozdiel je 247.

Úloha 21. Baška sa rozhodla zasadiť šesť kvetinových záhonov v šesťuholníkovom usporiadaní, pričom použije dva druhy kvetov: fialky a sedmokrásky. Každý zo šiestich záhonov, ktoré tvoria pravidelný šesťuholník, môže byť osadený buď fialkami, alebo sedmokráskami. Jeden takýto spôsob výsadby je znázornený na obrázku. Koľkými spôsobmi môže usporiadať výsadbu tak, aby existovala aspoň jedna dvojica susedných záhonov kvetmi rovnakého druhu?

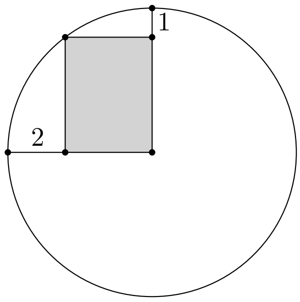
Poznámka: Usporiadania, ktoré sa líšia akoukoľvek symetriou (otočením alebo zrkadlením), sa stále považujú za odlišné. Každá zo šiestich pozícií záhonov sa považuje za jedinečnú.



Výsledok. 62

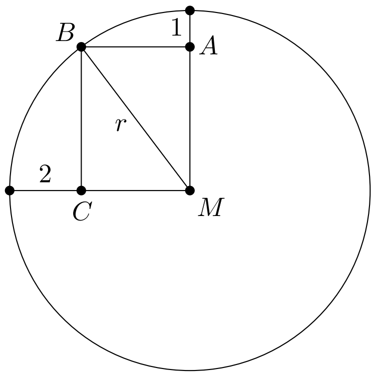
Riešenie. Ak zanedbáme podmienku, že dva susedné záhony musia byť osadené rovnakým druhom kvetov, potom celkový počet možností je $2^6 = 64$. Z tohto výsledku odčítame prípady, kde je podmienka porušená, čiže sa dva druhy kvetov pravidelne striedajú, čo sú len dve možnosti. Tým získame celkový počet platných usporiadaní $64 - 2 = 62$.

Úloha 22. Z kruhového listu papiera Miško vyrezal obdĺžnikový kus tak, že jeden roh obdĺžnika sa nachádza v strede kruhu, protiľahlý roh leží na obvode kruhu a zostávajúce dva rohy ležia na dvoch rôznych polomeroch vychádzajúcich zo stredu, pričom sú umiestnené vo vzdialenostiach 1 dm a 2 dm od obvodu pozdĺž týchto polomerov. Aká je plocha kruhového listu, ktorá zostane po vyrezaní (v dm^2)?



Výsledok. $25\pi - 12$

Riešenie. Nech M je stred kruhového listu a nech A, B, C sú ostatné vrcholy obdĺžnika. Označme polomer kruhu ako r.



Máme $MA = r - 1$, $MB = r$ a $MC = r - 2$, pričom $AB = MC$. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku ABM dostaneme rovnicu

$$r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2,$$

ktorá sa dá zjednodušiť na

$$0 = r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5).$$

Keďže $r = 1$ nevedie k možnej konfigurácii, jediným platným riešením je $r = 5$. Zostávajúca plocha kruhového listu je $r^2\pi - 3 \cdot 4 = 25\pi - 12$ (v dm^2).

Úloha 23. Majster Nábojus, neprekonaný v zmiešavaní esencií, ide vyrobiť legendárnu *Algémiu*, bezchybnú zmes Algebry a Alchýmie zmiešaných v pomere 1 : 1. Aby to docielil, začal s nasledujúcimi prísadami.

- Alchebra pozostáva z 80% Algebry a 20% Alchýmie a má celkovú hmotnosť 10 mg.
- Algýmia pozostáva z 30% Algebry a 70% Alchýmie a má celkovú hmotnosť 14 mg.

Koľko Algémie môže s týmito zdrojmi Nábojus namiešať (v mg)?

Poznámka: Nábojus nemôže izolovať komponenty zmesí v žiadnom momente procesu, môže len zmiešať zmesi, ktoré má k dispozícii.

Výsledok. $23\frac{1}{3} = \frac{70}{3}$

Riešenie. Ak zmiešame x jednotiek Alchebry a y jednotiek Algýmie, dostaneme zmes pozostávajúcu z $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y$ Algebry a $\frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$ Alchýmie. Aby sme dostali pomer 1 : 1, musí byť splnená rovnica

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y.$$

Z toho vyjadríme $y = \frac{3}{2}x$. Inými slovami na každý mg Alchebry musí Nábojus primiešať 1,5 mg Algýmie. Preto najväčšie množstvo Algémie, ktoré môže Nábojus vyrobiť, vyrobí, keď použije všetkých 14 mg Algýmie a $\frac{2}{3} \cdot 14$ mg Alchebry, čo vyprodukuje $\frac{5}{3} \cdot 14\,\text{mg} = \frac{70}{3}$ mg Algémie.

Úloha 24. Číslo $K = n^2$ je štvorciferná druhá mocnina celého čísla s ciframi menšími ako 7. Ak každú cifru čísla K zväčšíme o 3, dostaneme ďalšiu druhú mocninu celého čísla. Nájdite kladné číslo n.

Výsledok. 34

Riešenie. Nech $m^2 = M = K + 3333$. Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned} M - K &= 3333, \\ m^2 - n^2 &= 3333, \\ (m+n)(m-n) &= 3 \cdot 11 \cdot 101. \end{aligned}$$

Keďže M a K sú obe štvorciferné druhé mocniny, tak $32 \leq n < m \leq 99$, a preto

$$\begin{aligned} 32 + 33 \leq m + n &\leq 98 + 99, \\ 65 \leq m + n &\leq 197. \end{aligned}$$

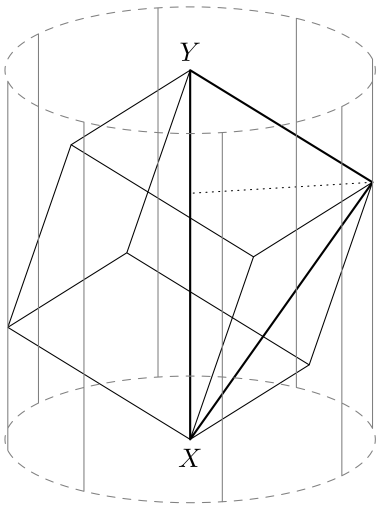
Za daných podmienok sú jediné možné činitele $m + n = 101$ a $m - n = 33$, ktoré dávajú riešenie $m = 67$ a $n = 34$. Nakoniec zostáva overiť, že $K = 34^2 = 1156$ má všetky cifry menšie ako 7, čo je pravda.

Úloha 25. Nech X a Y sú dva protiľahlé vrcholy kocky s dĺžkou hrany 1. Nech C je valec, ktorého povrch obsahuje všetky vrcholy kocky a ktorého stredy kruhových podstáv sú X a Y. Aký je objem valca C?

Výsledok. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Riešenie. Keďže X a Y sú stredmi podstáv, tak ich vzdialenosť je aj výškou valca. Vzdialenosť X a Y ako protiľahlých vrcholov kocky ich vzdialenosť je $\sqrt{3}$. Na určenie polomeru valca vyberme ľubovoľný iný vrchol kocky Z (XZ nech je uhlopriečka steny a YZ je hrana kocky) a hľadaný polomer je výška zo Z na priamku XY. Podľa podobnosti (alebo porovnania obsahov) je táto výška $\sqrt{2/3}$. Preto objem valca je

$$\pi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$



Úloha 26. Na sústredení je 60 účastníkov, ktorí tvoria tri skupiny (každý patrí do práve jednej): Ufóni vždy hovoria pravdu, práskači vždy klamú a sušiči môžu odpovedať, ako chcú. Každý na sústredení pozná identitu všetkých ostatných. Miško prišiel na sústredenie neskôr a spýtal sa účastníkov nasledujúce dve otázky:

1. „Je na sústredení aspoň 31 ufónov?“ Na túto otázku dostal práve 43 kladných odpovedí.
2. „Je na sústredení aspoň 31 práskačov?“ Na túto otázku dostal práve 39 kladných odpovedí.

Aký je najmenší možný počet sušičov na sústredení?

Výsledok. 13

Riešenie. Druhé tvrdenie nemôže byť pravdivé. Ak by bolo na sústredení aspoň 31 práskačov, tak by museli všetci odpovedať záporne, a teda by nebolo možné dostať 39 kladných odpovedí. Preto je na sústredení najviac 30 práskačov. Keďže ufóni vždy hovoria pravdu, musia na túto otázku odpovedať záporne, a preto môže byť na sústredení najviac $60 - 39 = 21$ ufónov.

To znamená, že prvé tvrdenie je tiež nepravdivé. Kladné odpovede teda museli prísť od práskačov a sušičov. Keďže práskačov je najviac 30, na sústredení muselo byť aspoň $43 - 30 = 13$ sušičov.

Konfigurácia zložená zo 16 ufónov, 30 práskačov a 13 sušičov spĺňa podmienky zo zadania. Preto najmenší možný počet sušičov na sústredení je 13.

Úloha 27. Adri, Baška, Cyril a Denys sa zúčastnili turnaja, kde každý s každým hral práve jeden zápas. Víťaz každého zápasu dostal 1 alebo 2 body podľa toho, ako tesne vyhral, a prehrávajúci nedostal žiaden bod. V turnaji nenastali žiadne remízy. Po skončení všetkých zápasov sa vypísala tabuľka (viď príklad). Vieme, že jeden zúčastnený skončil so 4 bodmi, kým ostatní mali len po 1 bode. Koľko rôznych tabuliek mohlo mať toto rozloženie bodov?

	A	B	C	D	spolu
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Poznámka: Rozloženie hráčov v tabuľke je zafixované, čo znamená, že označenia riadkov a stĺpcov A, B, C, D sa nepresúvajú.

Výsledok. 24

Riešenie. Celkový počet rozdaných bodov je 7, čo znamená, že zo šiestich zápasov práve v jednom boli udelené 2 body, kým v každom z ostatných bol udelený len 1 bod. Ďalej to znamená, že najlepší hráč porazil všetkých ostatných a v jednom zo svojich zápasov získal 2 body. Zápasy ostatných hráčov museli skončiť „cyklicky“, keďže každý z nich vyhral práve jeden zápas. Existujú práve dva orientované cykly. Sú teda 4 možnosti, ako vybrať hráča so 4 bodmi, 3 možnosti, ako vybrať hráča, ktorý bol porazený o 2 body, a 2 spôsoby, ako orientovať cyklus, a preto je $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ možností, ako mohol dopadnúť turnaj.

Úloha 28. Vítek napísal číslo 2025 ako súčet M sčítancov, kde každý sčítanec je mocnina čísla 10 (t. j. 10^n, kde n je nezáporné celé číslo). Sčítance sa v súčte môžu opakovať. Koľko rôznych hodnôt môže M nadobudnúť?

Výsledok. 225

Riešenie. Zreteľne najmenšia možná hodnota M je 9, pretože

$$2025 = 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Ak $k \geq 1$, tak každé nahradenie 10^k za $10 \cdot 10^{k-1}$ zvýši počet sčítancov o 9. Najväčšia možná hodnota M je 2025, pretože

$$2025 = 2025 \cdot 10^0.$$

Teda počet možných hodnôt M je

$$\frac{2025 - 9}{9} + 1 = 225.$$

Úloha 29. Andy a Kubko stoja chrbtom k sebe na peróne železničnej stanice. Nákladný vlak prechádza konštantnou rýchlosťou okolo nich. V okamihu, keď Andy a Kubko stoja na úrovni predného konca vlaku, začnú kráčať opačnými smermi rovnakou konštantnou rýchlosťou. Zadný koniec vlaku minie Andyho, keď bude 45 metrov od svojho východiskového bodu, a krátko nato minie Kubka, keď bude 60 metrov od svojho východiskového bodu. Aká je dĺžka vlaku v metroch?

Výsledok. 360

Riešenie. Označme t_1 čas, ktorý uplynie od okamihu, keď predný koniec vlaku minie Andyho a Kubka, do okamihu, keď zadný koniec minie Andyho. Podobne označme t_2 čas od okamihu, keď zadný koniec vlaku minie Andyho, do okamihu, keď minie Kubka. Nakoniec označme ℓ dĺžku vlaku. Keďže Andy a Kubko kráčajú rovnako rýchlo, počas t_1 prešiel Andy 45 metrov a počas t_2 prešiel Kubko $60 - 45 = 15$ metrov, pomer dĺžok týchto časových intervalov je

$$t_1 : t_2 = 45 : 15 = 3 : 1.$$

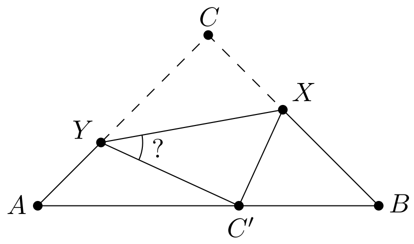
Zoberme teraz do úvahy aj pohyb vlaku. Počas t_1 sa vlak posunie o vzdialenosť $\ell - 45$, pretože na začiatku toho intervalu mal predný koniec v mieste stretnutia s Andym a Kubkom a na jeho konci mal zadný koniec 45 metrov pred tým bodom. Počas t_2 sa zadný koniec vlaku posunie o 105 metrov medzi Andym a Kubkom. Rýchlosť vlaku teda je

$$\frac{105\,\mathrm{m}}{t_2}$$

a jeho dĺžka v metroch je

$$\frac{105}{t_2} \cdot t_1 + 45 = \frac{t_1}{t_2} \cdot 105 + 45 = 3 \cdot 105 + 45 = 360.$$

Úloha 30. Rovnoramenný trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C prehneme pozdĺž úsečky XY tak, že vrchol C sa presunie do vrcholu C', ktorý sa nachádza na strane AB. Navyše platí $|BC'| = |BX|$. Určte veľkosť uhla $C'YX$ v stupňoch.



Výsledok. $33{,}75° = \frac{135}{4}°$

Riešenie. Keďže je trojuholník $XC'B$ rovnoramenný, platí

$$|\sphericalangle C'XB| = \frac{1}{2}(180° - 45°) = 67{,}5°.$$

Navyše kvôli prehnutiu platí $|\sphericalangle CXY| = |\sphericalangle YXC'|$, takže

$$|\sphericalangle YXC'| = \frac{1}{2}(180° - 67{,}5°) = 56{,}25°.$$

Nakoniec máme $|\sphericalangle XC'Y| = |\sphericalangle YCX| = 90°$, čiže

$$|\sphericalangle C'YX| = 180° - |\sphericalangle XC'Y| - |\sphericalangle YXC'| = 33{,}75°.$$

Úloha 31. Uvážme postupnosť všetkých rastúcich štvoríc s prvkami z množiny $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ usporiadaných lexikograficky:

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), (0, 1, 2, 5), \ldots, (12, 13, 14, 15).$$

V lexikografickom usporiadaní figuruje (a_1, a_2, a_3, a_4) skôr ako (b_1, b_2, b_3, b_4) práve vtedy, keď

$$a_1 < b_1 \quad \text{alebo} \quad a_1 = b_1,\ a_2 < b_2 \quad \text{alebo} \quad a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 < b_3 \quad \text{alebo} \quad a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3,\ a_4 < b_4.$$

Koľká v tejto postupnosti je štvorica $(2, 4, 7, 14)$?

Výsledok. 911

Riešenie. Pre $k \le n$ je počet rastúcich usporiadaných k-tic s prvkami z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ rovný $\binom{n}{k}$, keďže rastúce usporiadané k-tice zodpovedajú k-prvkovým množinám. Všeobecnejšie počet rastúcich usporiadaných k-tic s prvkami z množiny $\{m, m+1, \ldots, n\}$ je rovný $\binom{n-m+1}{k}$. Spočítajme štvorice, ktoré v postupnosti figurujú skôr ako $(2, 4, 7, 14)$:

- $(0, *, *, *)$: $\binom{15}{3} = 455$ štvoríc tohto tvaru,
- $(1, *, *, *)$: $\binom{14}{3} = 364$ štvoríc tohto tvaru,
- $(2, 3, *, *)$: $\binom{12}{2} = 66$ štvoríc tohto tvaru,
- $(2, 4, a, *)$, kde $a \in \{5, 6\}$: $\binom{10}{1} + \binom{9}{1} = 19$ štvoríc tohto tvaru a
- $(2, 4, 7, b)$, kde $b \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$: 6 štvoríc.

Teda ak prvky postupnosti očíslujeme kladnými celými číslami, $(2, 4, 7, 14)$ stojí na pozícii $455+364+66+19+6+1 = 911$.

Úloha 32. Denys a Štepi pestujú ananásy. Minulú sezónu sa im urodilo dovedna 100 ananásov a rozpredali ich na trhu. Denys predával svoje ananásy po d chechtákov za kus a Štepi svoje po $š$ chechtákov za kus. Vysvitlo, že predali všetky ananásy a utŕžili každý rovnaký obnos chechtákov. Denys poznamenal, že keby bol predával svoje ananásy po $š$ chechtákov za kus ako Štepi, bol by utŕžil 45 chechtákov. Keby bol Štepi predával ananásy za Denysovu cenu d chechtákov za kus, bol by utŕžil 20 chechtákov. Koľko ananásov dopestoval a predal Denys?

Výsledok. 60

Riešenie. Nech D a $\check{S}$ označujú v tomto poradí počet ananásov, ktoré predali Denys a Štepi. Známe sú vzťahy

$$D + \check{S} = 100, \qquad D \cdot d = \check{S} \cdot \check{s}, \qquad D \cdot \check{s} = 45, \qquad \check{S} \cdot d = 20.$$

Dosadením $\check{s} = \frac{45}{D}$ a $d = \frac{20}{\check{S}}$ do druhej rovnice získame

$$D \cdot \frac{20}{\check{S}} = \check{S} \cdot \frac{45}{D},$$
$$\frac{D^2}{\check{S}^2} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4}.$$

Teda $\check{S} = \frac{2D}{3}$ a po dosadení do prvej rovnice $D + \frac{2D}{3} = \frac{5D}{3} = 100$, čiže $D = 60$.

Úloha 33. Miško pred spaním počítal žirafy. Dostal sa až k najväčšiemu trojcifernému číslu, ktoré je súčtom svojej cifry na mieste stoviek, druhej mocniny svojej cifry na mieste desiatok a tretej mocniny svojej cifry na mieste jednotiek. Koľko žiráf Miško napočítal?

Výsledok. 598

Riešenie. Označme a, b a c cifry na mieste stoviek, desiatok a jednotiek v hľadanom počte žiráf, v tomto poradí. Ak $c = 9$, tak $a + b^2 + c^3 = a + b^2 + 9^3 = 729 + a + b^2$ je najmenej 730 a najviac 829, teda a musí byť 7 alebo 8. Ani pre jednu možnosť však neexistuje cifra b taká, aby posledná cifra čísla $729 + a + b^2$ bola 9.

Teraz uvážme $c = 8$. Keďže $8^3 = 512$, a musí byť 5 alebo 6, ale

$$a + b^2 + 8^3 \leq 6 + 81 + 512 = 599 < 600,$$

takže a musí byť 5. Potom od b požadujeme, aby

$$\begin{aligned} &5 + b^2 + 512 = 8 + 10b + 500, \\ &b^2 - 10b + 9 = 0, \end{aligned}$$

čo má riešenia $b = 1$ a $b = 9$. Obe dávajú vyhovujúce čísla:

$$518 = 5 + 1^2 + 8^3 \quad \text{a} \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3.$$

(Ekvivalentne si môžeme všimnúť, že b^2 musí mať na mieste jednotiek 1.)

Keby $c \leq 7$, tak

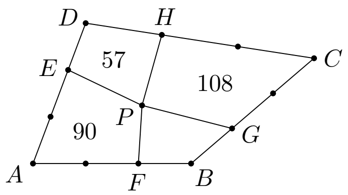
$$a + b^2 + c^3 \leq 9 + 9^2 + 7^3 = 433 < 598,$$

takže najväčšie vyhovujúce číslo je 598.

Úloha 34. Každá strana štvoruholníka $ABCD$ je dvoma bodmi rozdelená na tri rovnako dlhé časti. Vieme, že

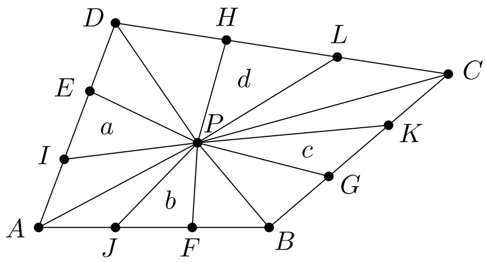
- bod E delí AD v pomere $|AE| : |ED| = 2 : 1$,
- bod F delí AB v pomere $|AF| : |FB| = 2 : 1$,
- bod G delí CB v pomere $|CG| : |GB| = 2 : 1$ a
- bod H delí CD v pomere $|CH| : |HD| = 2 : 1$.

Vnútri štvoruholníka leží bod P. Úsečky z tohto bodu do bodov E, F, G, H rozdeľujú štvoruholník na štyri menšie. Obsahy troch z nich sú znázornené na obrázku. Určte obsah štvrtého z nich, $PFBG$.



Výsledok. 42

Riešenie. Spojením bodu P so všetkými deliacimi bodmi na stranách štvoruholníka vrátane jeho vrcholov dostaneme 12 trojuholníkov ako na obrázku.



Označme a, b, c a d postupne obsahy trojuholníkov PEI, PJF, PGK a PLH. Každá trojica trojuholníkov dotýkajúca sa rovnakej strany má rovnaké obsahy, pretože majú spoločnú výšku z P a ich základne sú rovnako dlhé. Z toho už ale vieme usúdiť, že

$$90 = 2a + 2b, \quad 57 = a + d, \quad 108 = 2c + 2d.$$

Obsah štvoruholníka $PFBG$ je rovný $b + c$. To už však z vyššie uvedených rovností vieme vyjadriť ako

$$b + c = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) - (a + d) = \frac{1}{2}(90 + 108) - 57 = 42.$$

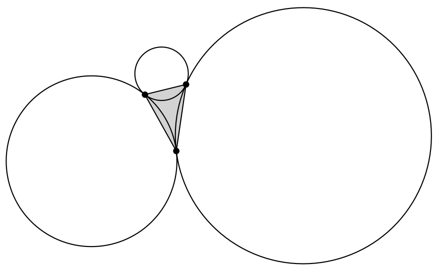
Úloha 35. Frodo konečne našiel prsteň, ktorý tak dlho hľadal. Vyzeral (prsteň, nie Frodo) ako mriežka 4×4, z ktorej odstránime štyri prostredné políčka – čiže pozostával z 12 štvorcov. Koľkými spôsobmi vie Frodo vybrať štyri z týchto 12 štvorcov tak, aby bol na každej strane prsteňa vybratý aspoň jeden štvorec?

Poznámka: Každé rohové políčko patrí na dve strany prsteňa. Aj spôsoby, ktoré sa líšia iba otočením či prevrátením, považujeme za rôzne.

Výsledok. 237

Riešenie. Na výber 4 z 12 štvorcov prsteňa máme celkovo $\binom{12}{4} = 495$ spôsobov. Pre každú zo strán máme osem štvorcov, ktoré na nej neležia. Preto máme $\binom{8}{4} = 70$ spôsobov, ako vybrať štyri štvorce, z ktorých žiaden neleží na jednej špecifickej strane. Z toho máme $495 - 4 \cdot 70 = 215$ spôsobov, v ktorých sme nevynechali žiadnu zo strán. Avšak v predošlom kroku sme niektoré spôsoby – konkrétne tie, kde sú nepoužité dve zo strán – odpočítali dvakrát. Zrejme ide o dva typy spôsobov. Prvá možnosť je, že vyberieme štyri z piatich štvorcov okolo niektorého z rohov prsteňa. Okolo jedného rohu nám to vytvára 5 spôsobov, pričom každý je jednoznačne určený štvorcom, ktorý sme nevybrali. Okolo všetkých 4 rohov je týchto spôsobov potom 20. Druhá možnosť je, že vyberieme oba stredné štvorce na dvoch protiľahlých stranách, čo sú dokopy 2 spôsoby. Tieto spôsoby potrebujeme pripočítať naspäť, čím dostaneme $215 + 22 = 237$ spôsobov. Zrejme nie je možné vyhnúť sa trom stranám prsteňa naraz, a teda sme sa dopočítali k záverečnému výsledku.

Úloha 36. Tri kružnice s polomermi postupne 1, 2 a 3 sa zvonka dotýkajú tak, ako na obrázku. Určte obsah trojuholníka, ktorého vrcholy sú dané bodmi dotyku kružníc.



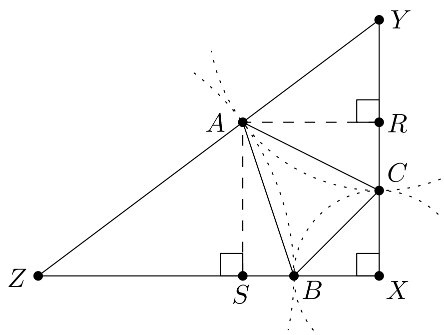
Výsledok. $\frac{6}{5}$

Riešenie. Označme X, Y, Z stredy kružníc a A, B, C body dotyku tak, ako na obrázku nižšie. Trojuholník XYZ má strany dĺžok $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$, čo je trojica spĺňajúca Pytagorovu vetu, takže daný trojuholník je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole X. Jeho obsah je $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Aby sme určili hľadaný obsah trojuholníka ABC, postupne odčítame obsahy rovnoramenných trojuholníkov XBC, YCA a ZAB.

- Trojuholník XBC je pravouhlý s obsahom $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.
- Trojuholník YAC má rameno YC dlhé 2. Jeho výšku označíme AR. Všimnime si, že je rovnobežná s XZ, takže trojuholníky YAR a YZX sú podobné s koeficientom podobnosti $|YA| : |YZ| = 2 : 5$. Takže $|AR| = \frac{2}{5} \cdot |ZX| = \frac{8}{5}$. Obsah trojuholníka tak je $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{5}$.
- Trojuholník ZAB má rameno ZB dlhé 3. Jeho výška označená AS je rovnobežná s YX, takže trojuholníky ZAS a ZYX sú podobné s koeficientom podobnosti $|ZA| : |ZY| = 3 : 5$. Takže $|AS| = \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$. Obsah trojuholníka tak je $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{5} = \frac{27}{10}$.

Výsledný obsah teda bude

$$6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$



Úloha 37. Baška si nakreslila pravidelný n-uholník, kde $n > 3$. Keď si spočítala jeho uhlopriečky, zistila, že ich počet je deliteľný číslom 2025. Určte najmenšie možné n, pre ktoré sa toto mohlo stať.

Poznámka: Strany mnohouholníka nepovažujeme za uhlopriečky.

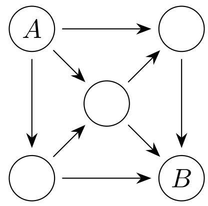
Výsledok. 300

Riešenie. Ľahko si všimneme, že počet uhlopriečok je $\frac{1}{2}n(n-3)$. Keďže číslo 2025 je nepárne, ekvivalentne nám stačí zistiť, či je súčin $n(n-3)$ deliteľný 2025. Navyše platí $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, takže (vďaka nesúdeliteľnosti) nám stačí overiť, či $n(n-3)$ je deliteľné $3^4 = 81$ a $5^2 = 25$.

Všimnime si, že najviac jedno z čísel n a $n-3$ je deliteľné piatimi. Tým pádom musí byť to, ktoré je deliteľné piatimi, deliteľné 25. Navyše n je deliteľné tromi práve vtedy, keď $n-3$ je deliteľné tromi, čiže každé z nich prispeje aspoň jednou mocninou 3 do celkového súčinu. Okrem toho, len jedno z čísel n a $n-3$ môže byť deliteľné 3^k pre $k \geq 2$, takže nutne je jedno z čísel deliteľné $3^3 = 27$.

Ak je jeden z činiteľov n a $n-3$ deliteľný aj 25, aj 27, jeho hodnota je najmenej $25 \cdot 27 = 675$. Overíme, či vieme dostať menšie číslo v prípade, že jedna hodnota je deliteľná 25 a druhá 27. Označme hodnotu deliteľnú 27 ako m. Potom $m = 27k$ a hľadáme najmenšie k, pre ktoré $27k \pm 3$ je násobok 25 (znamienko závisí od toho, či $m = n$, alebo $m = n-3$). Keďže $25k$ je vždy násobok 25, stačí nám ekvivalentne overiť, či $2k \pm 3$ je násobok 25. Toto nastane prvýkrát pre $k = 11$ $(2 \cdot 11 + 3 = 25)$. Takže $m = n - 3 = 27 \cdot 11 = 297$ a $n = 297 + 3 = 300$.

Úloha 38. David sa vybral na výpravu pozdĺž ciest v diagrame na obrázku. Začína vo vrchole A a končí vo vrchole B. Po ceste dodržiava smer šípok, až na jeden jediný rebelský pohyb, pri ktorom sa naschvál pohne v opačnom smere. Tento rebelský pohyb musí spraviť na svojej výprave práve raz, aj ak by to znamenalo, že dočasne opustí svoj cieľ. David smie použiť rovnakú šípku aj viackrát. Koľkými rôznymi spôsobmi dokáže za týchto podmienok dokončiť svoju výpravu?

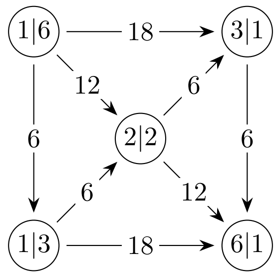


Výsledok. 84

Riešenie. V každom vrchole spočítame

1. počet (orientovaných) ciest z vrcholu A, ktoré tu končia, a
2. počet ciest do B, ktoré v danom vrchole začínajú.

Napríklad na obrázku nižšie $3 \mid 1$ v pravom hornom rohu označuje 3 cesty z A do pravého horného rohu a 1 cestu z pravého horného rohu do B. Pre každú šípku určíme počet ciest, ktoré nimi vedú v protismere, ako súčin prvého čísla na konci šípky a druhého čísla na začiatku šípky. Tieto počty už len sčítame a dostaneme výsledok 84.



Úloha 39. V nasledujúcom výpočte označujú rôzne písmená rôzne nenulové číslice.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & N & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A & A \\
 & & + & B & B & B \\
 & & & + & O & O \\
 & & & & + & J \\
 & & - & 2 & 0 & 2 & 5 \\
\hline
= & N & A & B & O & J
\end{array}
$$

Určite najväčšiu možnú hodnotu päťciferného čísla $\overline{NABOJ}$.

Výsledok. 18249

Riešenie. Výpočet vieme prepísať ako

$$\begin{array}{cccccc}
 & N & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A & A \\
 & & + & B & B & B \\
 & & & + & O & O \\
 & & & & + & J \\
- & N & A & B & O & J \\
\hline
 & = & 2 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

čo vieme zjednodušiť na

$$\begin{array}{ccccc}
 & N & N & N & N \\
 & + & A & A & A \\
 & & + & B & B \\
 & & & + & O \\
\hline
= & 2 & 0 & 2 & 5
\end{array}$$

Teraz je zrejmé, že $N = 1$. Ostáva nám $\overline{AAA} + \overline{BB} + O = 2025 - 1111 = 914$, čiže $A = 8$. Ďalšie zjednodušenie $914 - 888 = 26$ vracia $B = 2$ a nakoniec $O = 4$. J môže mať ľubovoľnú hodnotu, ale musí byť iné od už použitých číslic. Najväčšia hodnota $\overline{NABOJ}$ je teda 18249.

Úloha 40. Päťsto organizátorov Náboja hlasovalo o dni súťaže. Pri každom hlasovaní hlasoval každý prítomný organizátor buď za, alebo proti. Ako prvé sa hlasovalo o pondelku. Hneď po tomto hlasovaní sa niekoľko z organizátorov, ktorí hlasovali za, zdvihlo a odišlo. Organizátori, ktorí boli proti, zostali všetci aj na hlasovanie o utorku. Za utorok hlasovalo rovnako veľa organizátorov ako za pondelok, kým proti utorku hlasovalo trikrát menej ľudí ako proti pondelku. Navyše vieme, že 120 organizátorov hlasovalo aj za pondelok aj za utorok, kým 70 hlasovalo proti pondelku aj proti utorku. Koľko organizátorov odišlo po prvom hlasovaní?

Výsledok. 150

Riešenie. Označme AA počet organizátorov, ktorí hlasovali za pondelok aj za utorok, AN počet organizátorov, ktorí hlasovali za pondelok a proti utorku, NA počet organizátorov, ktorí hlasovali proti pondelku a za utorok, a nakoniec NN počet organizátorov, ktorý hlasovali proti pondelku aj proti utorku. Okrem toho označme O počet organizátorov, ktorí odišli po prvom hlasovaní. Tým dostávame nasledujúce rovnice:

$$\begin{aligned}
AA + AN + NA + NN + O &= 500, \\
AA + AN + O &= AA + NA, \\
NA + NN &= 3 \cdot (AN + NN).
\end{aligned}$$

Dosadením $AA = 120$ a $NN = 70$ a presunutím neznámych naľavo dostávame

$$\begin{aligned}
AN + NA + O &= 310, \\
AN - NA + O &= 0, \\
-3AN + NA &= 140.
\end{aligned}$$

Keď vynásobíme prostrednú rovnicu 2 a následne všetky rovnice sčítame, dostaneme $3O = 450$, takže $O = 150$. Zvyšné neznáme vyjdú $AN = 5$ a $NA = 155$.

Úloha 41. Určte počet usporiadaných dvojíc kladných celých čísel (a, b), ktoré spĺňajú $a \leq b$ a navyše $\mathrm{NSD}(a, b)$ tvorí spoločne s číslami a a b aritmetickú postupnosť, ktorej súčet je 2025.

Poznámka: Aritmetická postupnosť je postupnosť čísel, kde je rovnaký rozdiel medzi každými dvoma po sebe idúcimi číslami. Symbol $\mathrm{NSD}(a, b)$ označuje najväčší spoločný deliteľ čísel a a b.

Výsledok. 12

Riešenie. Označme $d = \mathrm{NSD}(a, b)$. Potom si vieme rozpísať $a = da'$ a $b = db'$ pre nejaké kladné celé a', b'. Zrejme $d \leq a \leq b$, preto a musí byť uprostred aritmetickej postupnosti, a potom pre rozdiely členov platí $a - d = b - a$, čo je to isté ako $b = 2a - d$. Po predelení d z toho dostaneme $b' = 2a' - 1$. Keďže však súčet členov má byť 2025, dostávame

$$d + a + b = d(1 + a' + 2a' - 1) = 3da' = 2025,$$

čiže $da' = 675 = 3^3 5^2$. Nakoľko 675 má $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ kladných deliteľov, ktoré môžu byť hodnotou a', ostáva nám overiť, či každý z nich vedie na validné riešenie (a, b). Ak si dopočítame $b' = 2a' - 1$, $d = 675/a'$, $a = da' = 675$, $b = db'$, nie je ťažké si všimnúť, že $a = da' \leq d(2a' - 1) = db' = b$, a navyše

$$\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}\big(da', d(2a' - 1)\big) = d \cdot \gcd(a', 2a' - 1) = d,$$

pretože a' a $2a' - 1$ sú vždy nesúdeliteľné.

Úloha 42. V súťaži Náboj Bábä riešia súťažiaci úlohy očíslované číslami 1 až 16. Každý tím má vlastnú sadu 16 úloh a tieto sady sú zhodné a rovnako očíslované. Na začiatku súťaže má každý tím k dispozícii úlohy s číslami 1, 2 a 3. Vždy, keď nejakú úlohu vyrieši, odovzdá ju a dostane novú úlohu zo svojej sady s najmenším číslom, ktorú doposiaľ neriešil. Vieme, že počas súťaže vyriešil každý tím inú množinu úloh. Koľko najviac tímov sa mohlo zúčastniť súťaže Náboj Bábä?

Výsledok. 697

Riešenie. Všimnime si, že množina úloh, ktoré tím vyriešil, je jednoznačne určená množinou úloh, ktoré tím **ne**vyriešil a naopak. Táto množina je zase jednoznačne určená množinou úloh, ktoré mal tím u seba po konci súťaže. Ak im zostali 0, 1 alebo 2 úlohy, museli vyriešiť všetky ostatné. Ak im zostali tri úlohy s číslami $x < y < z$, tak okrem týchto troch úloh nemohli vyriešiť ani žiadnu úlohu s vyšším číslom ako z. Naopak, všetky menšie vyriešiť museli. Celkový počet možných tímov tak spočítame ako

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 697.$$

Úloha 43. Nech a, b, c, d sú reálne čísla také, že

$$\begin{aligned} 2a + 2b - ab &= 2025, \\ 2b + 2c - bc &= 47, \\ 2c + 2d - cd &= 5. \end{aligned}$$

Nájdite hodnotu $2a + 2d - ad$.

Výsledok. 51

Riešenie. Použitím rovnosti $(x-2)(y-2) = xy - 2x - 2y + 4$ sa zadané rovnice dajú prepísať nasledovne:

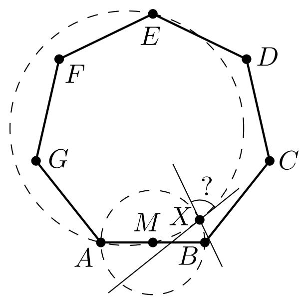
$$\begin{aligned} (a-2)(b-2) &= -2021, \\ (b-2)(c-2) &= -43, \\ (c-2)(d-2) &= -1 \end{aligned}$$

a naším cieľom je nájsť hodnotu $(a-2)(d-2)$. Keďže kvôli druhej rovnici $b \neq 2$ a $c \neq 2$, cieľový výraz sa dá získať ako

$$(a-2)(d-2) = \frac{(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)}{(b-2)(c-2)} = \frac{(-2021)\cdot(-1)}{-43} = -47.$$

Teda $2a + 2d - ad = -(-47) + 4 = 51$.

Úloha 44. Nech M je stred strany AB pravidelného sedemuholníka $ABCDEFG$. Kružnica so stredom v bode M prechádzajúca bodom A pretína opísanú kružnicu trojuholníka AME v bode X, ktorý leží vo vnútri sedemuholníka. Aká je veľkosť (v stupňoch) ostrého uhla medzi dotyčnicami k týmto dvom kružniciam v bode X?



Výsledok. 540°/7

Riešenie. Keďže $ABCDEFG$ je pravidelný sedemuholník, uhol AME je pravý a úsečka AE je priemerom väčšej kružnice. Namiesto merania uhla medzi dotyčnicami v bode X môžeme ekvivalentne uvažovať uhol medzi dotyčnicami v bode A, ktorý je druhým priesečníkom oboch kružníc. Tento uhol je potom rovný uhlu BAE medzi príslušnými priemermi, keďže tieto sú kolmé na dotyčnice. Jeho veľkosť, $\frac{3}{7} \cdot 180°$, možno jednoducho určiť zo symetrie pravidelného sedemuholníka alebo rozpoznaním, že ide o obvodový uhol zodpovedajúci stredovému uhlu $\frac{3}{7} \cdot 360°$ na opísanej kružnici sedemuholníka.

Úloha 45. Romanovi sa veľmi zapáčil výraz $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \ldots \pm 2^{99})^2$, tak si ho napísal na papier raz pre každú možnú voľbu znamienok plus a mínus. (Teda celkovo 2^{100}-krát.) Následne vypočítal ich hodnoty a všetky dokopy sčítal. Určte tento výsledný súčet.

Výsledok. $\frac{2^{100}\cdot(4^{100}-1)}{3}$

Riešenie. Začneme všeobecnejším pozorovaním: pre ľubovoľné kladné celé číslo n a reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ak sčítame výrazy $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$ pre všetky možné voľby znamienok, výsledok je vždy

$$2^n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Aby sme pochopili, prečo to platí, uvážme rozklady výrazov $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$. Každý rozklad obsahuje kvadratické členy x_i^2 a zmiešané členy tvaru $\pm 2x_ix_j$ pre $i \neq j$. Každý člen x_i^2 sa vyskytuje v každom možnom rozklade bez ohľadu na zvolené znamienka. Keďže existuje 2^n rôznych kombinácií znamienok, tieto kvadratické členy prispievajú s celkovým koeficientom 2^n. Na druhej strane, zmiešané členy $\pm 2x_ix_j$ sa vyskytujú s kladným znamienkom presne v polovici prípadov a so záporným znamienkom v druhej polovici, v závislosti od toho, či majú x_i a x_j rovnaké znamienko alebo nie. Keďže tieto príspevky sa úplne vyrušia v rámci všetkých možností znamienok, neovplyvnia konečný súčet. Celkový súčet sa teda zjednoduší na 2^n násobené súčtom kvadratických členov, čím je vzťah dokázaný.

V našom prípade máme $x_k = 2^{k-1}$ a požadovaný súčet je

$$2^{100} \cdot (1 + 4^1 + \cdots + 4^{99}).$$

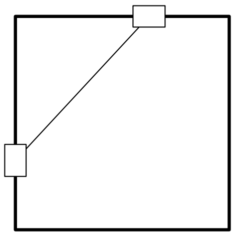
Použitím vzorca pre súčet geometrickej postupnosti,

$$1 + 4^1 + \cdots + 4^{99} = \frac{4^{100}-1}{4-1} = \frac{4^{100}-1}{3},$$

dostaneme konečný výsledok

$$\frac{2^{100}\cdot(4^{100}-1)}{3}.$$

Úloha 46. Dve autá sa pohybujú dokola po obvode štvorca ako na obrázku. Obe autá začínajú spolu v jednom rohu cesty. Potom sa každé auto nekonečne dlho pohybuje konštantnou celočíselnou rýchlosťou. Posádky áut komunikujú pomocou vysielačiek, ktoré majú celkom dobrý dosah, ale stratia spojenie, keď sa autá ocitnú presne v protiľahlých rohoch cesty. Pomalšie auto sa pohybuje rýchlosťou 24 km/h, rýchlejšie rýchlosťou n km/h tým istým smerom. Určite najmenšie celé číslo n väčšie ako 24 také, že autá nikdy nestratia vysielačkové spojenie.



Výsledok. 56

Riešenie. Definujme *úsek* ako jednu stranu štvorcovej cesty. Nech $m = 24$ a $n > m$ sú rýchlosti pomalšieho a rýchlejšieho auta v tomto poradí. Všimnime si, že to, či vysielačky niekedy stratia spojenie, závisí iba od pomeru rýchlostí, nie od ich konkrétnych hodnôt. Nech teda m', n' sú nesúdeliteľné kladné celé čísla také, že $m' : n' = m : n$. Tvrdíme, že vysielačky nikdy nestratia signál práve vtedy, keď $n' - m'$ je násobkom 4.

Najskôr rozoberme prípad, keď $n' - m'$ nie je násobkom 4. Po tom, čo pomalšie auto prešlo m' úsekov, sa nachádza v rohu. Za ten istý čas rýchlejšie auto prešlo n' úsekov (vzhľadom na pomer rýchlostí), takže je tiež v rohu. Keďže $n' - m'$ nie je deliteľné 4, tieto dva rohy nemôžu byť totožné. Ak sa ocitli v protiľahlých rohoch, vysielačky práve stratili spojenie. Ak sú v susedných rohoch, po prejdení ďalších m' a n' úsekov autá skončia v protiľahlých rohoch, čo tiež spôsobí stratu spojenia.

Teraz predpokladajme, že $n' - m'$ je násobkom 4. Najprv si všimnime, že autá nemôžu byť naraz obe v rohoch skôr, než pomalšie auto prejde m' úsekov. Ak by sa tak stalo už po tom, čo prešlo pomalšie auto $s < m'$ úsekov, tak by rýchlejšie auto dovtedy prešlo $\frac{s \cdot n'}{m'}$ úsekov, čo nemôže byť celé číslo, keďže m' a n' sú nesúdeliteľné. Prvýkrát teda obe autá dorazia do rohov súčasne v momente, keď pomalšie auto dokončí m' úsekov a rýchlejšie auto n' úsekov. Podľa predpokladu je $n' - m'$ násobkom 4, takže sa musia nachádzať v tom istom rohu. Po tom, ako sa stretnú v rohu, sa celá situácia zopakuje (možno z iného rohu), a preto sa spojenie nikdy nepreruší.

Zostáva nájsť najmenšie $n > 24$, ktoré spĺňa danú podmienku. Musíme mať $n' - m'$ deliteľné 4. V takom prípade, keďže sa jedná o nesúdeliteľné čísla, musia byť m' aj n' nepárne. Keďže m' je deliteľ $m = 24$, jediné možné hodnoty sú 1 a 3. Ak $m' = 1$, najmenšie vyhovujúce n' je 5. Potom $n = \frac{5}{1} \cdot 24 = 120$. Ak $m' = 3$, najmenšie vyhovujúce n' je 7. Tu $n = \frac{7}{3} \cdot 24 = 56$. Keďže 56 je menšie ako 120, požadovaná najmenšia možná hodnota n je 56.

Úloha 47. Pri stole hrá 2025 hráčov hru. Na konci každého kola porazený dá každému z ostatných hráčov toľko chechtákov, koľko už vlastní (čiže rôzni hráči môžu obdržať rôzne množstvá peňazí). Po 2025 kolách skončil každý hráč s 2^{3000} chechtákmi. Navyše ani jeden hráč sa neocitol počas hry v dlhu a každý hráč prehral v práve jednom kole. Zistite, koľko chechtákov mal na začiatku hry hráč porazený v prvom kole.

Výsledok. $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot \left(1 + 2025 \cdot 2^{2024}\right)$

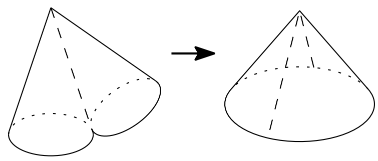
Riešenie. Celkové množstvo peňazí v hre sa nemení, teda vždy je rovnaké ako na konci hry, to jest $2025 \cdot 2^{3000}$ chechtákov. Môžeme si predstaviť, že porazený hráč nevypláca iba ostatných, ale aj samého seba. Čiže po každom kole sa všetkým hráčom zdvojnásobia majetky, čím celkové množstvo peňazí v hre stúpne z $2025 \cdot 2^{3000}$ na $2025 \cdot 2^{3001}$ chechtákov, a následne porazený hráč stratí $2025 \cdot 2^{3000}$ chechtákov, pretože on musel znášať náklady na spomínané fiktívne zvýšenie celkového množstva peňazí.

Keď si teraz priebeh hry prehráme odzadu, uvidíme, že v každom kole jednému hráčovi pribudne $2025 \cdot 2^{3000}$ chechtákov a následne sa všetkým hráčom znížia vlastnené sumy o polovicu. Hráčovi, ktorého uvidíme prehrať až na konci v prvom kole, sa teda najprv 2024-krát vydelí suma peňazí, čím klesne z 2^{3000} na 2^{976} chechtákov, potom obdrží $2025 \cdot 2^{3000}$ chechtákov a napokon ešte raz príde o polovicu svojich peňazí, čím sa dostane na sumu $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999}$ chechtákov.

Úloha 48. Michal, Mišo a Miško vlastnia tri identické papierové modely plášťa rotačného kužeľa. Jeho základňa je kruh kolmý na os spájajúcu jeho stred s vrcholom kužeľa, pričom táto základňa *nie je* súčasťou modelu. Michal a Mišo sa stretli, aby spravili rituál spolukuželenia, ktorý prebieha nasledovne:

1. Dva modely kužeľa k sebe priložia vrcholmi a zlepia pozdĺž úsečky spájajúcej vrchol s okrajom základne.
2. Rozstrihnú oba kužele pozdĺž tejto úsečky, čím vznikne nový kužeľ, ako na obrázku nižšie.

Po tomto rituáli dostali nový kužeľ, ktorého objem bol $10\,\mathrm{cm}^3$. Následne prišiel Miško a spravil s ostatnými opäť rituál spolukuželenia, pričom použili jeho pôvodný kužeľ a kužeľ, ktorý dostali pri predošlom rituáli. Výsledkom druhého rituálu bol kužeľ s objemom $0\,\mathrm{cm}^3$. Aký bol v cm^3 objem pôvodného kužeľa?



Výsledok. $\sqrt{10}$

Riešenie. Keďže kužeľ získaný druhým rituálom mal nulový objem, tak spojením trojice pôvodných plášťov dostaneme rovinný útvar – kruh. To znamená, že pôvodné plášte boli kruhovým výsekom s uhlom 120°. Označme s stranu pôvodného kužeľa (úsečku spájajúcu vrchol s podstavou na plášti) a r polomer jeho základne. Z tvaru plášťa vieme obvod podstavy vyjadriť ako $\frac{2\pi}{3} \cdot s$. Zároveň však vieme, že je to obvod kruhu, takže

$$\frac{2\pi}{3}s = 2\pi r.$$

Odtiaľ ľahko vidíme, že $s = 3r$. Všimnime si, že strana kužeľa sa pri rituáli nezmení, takže zostane rovnaká aj vo výslednom degenerovanom prípade.

Pozrime sa na kužeľ, ktorý vznikol po prvom rituáli. Jeho plášť je kruhový výsek s uhlom 240°, takže jeho základňa má dvojnásobný obvod, a teda polomer $2r$. Dosadením do vzorca na výpočet objemu kužeľa dostaneme

$$10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Objem pôvodného kužeľa je teda

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2 - r^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3 = \sqrt{10}.$$

Úloha 49. Pre koľko kladných celých čísel n neprevyšujúcich 200 má rovnica

$$5\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor - n\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1$$

aspoň jedno celočíselné riešenie x, kde $1 \le x \le 200$?

Poznámka: Symbol $\lfloor t \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo neprevyšujúce t.

Výsledok. 82

Riešenie. Keď n je násobok 5, tak ľavá strana rovnice je násobkom 5, a preto nemá riešenie. Ďalej ak $n = 1$, tak ľavá strana je záporná, takže tiež nemá riešenie. Ak sa odviažeme od podmienky $x \leq 200$, tak v ostatných prípadoch existuje riešenie. Preusporiadajme rovnicu na

$$5\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = n\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + 1. \tag{$\heartsuit$}$$

Teraz je ľavá strana násobkom 5, preto sa pozrieme na riešenia vzhľadom na hodnotu n mod 5.

- Ak $n = 5k+4$, tak potom $x = n+1 = 5k+5$ je riešenie (obe strany ($\heartsuit$) sú rovné x), takže všetkých 40 čísel nám vyhovuje.
- Ak $n = 5k+3$ a zároveň pravá strana je násobkom 5, musí $\lfloor x/n \rfloor$ byť aspoň 3 (ak by $\lfloor x/n \rfloor$ bolo 1 alebo 2, tak by pravá strana mala mať zvyšok 4, resp. 7 po delení 5), čo nie je možné pre $n \geq 67$. Znamenalo by to totiž hodnotu x väčšiu ako 200. Pre $n \leq 66$ (13 čísel) položíme $x = 3n+1$, čo bude znamenať, že obe strany ($\heartsuit$) budú rovné x.
- Podobným spôsobom, ak $n = 5k+2$, tak $\lfloor x/n \rfloor$ musí byť aspoň 2, čo nemôže nastať pre $n \geq 101$ a inak položíme $x = 2n+1$ (20 čísel).
- Nakoniec ak $n = 5k+1$, tak iba čísla $n \leq 50$ vedú k riešeniu tvaru $x = 4n+1$ (10 čísel, ale 1 nie je dovolená, preto v skutočnosti iba 9 čísel).

Dokopy je $40 + 13 + 20 + 9 = 82$ takých čísel n.

Úloha 50. Adam má neobmedzené množstvo 20-stenných kociek, pričom každá má steny očíslované číslami od 1 do 20. Adam si zvolí počet kociek, ktoré naraz hodí, pričom chce dosiahnuť presne jednu alebo dve jednotky v jednom hode. Koľkými kockami by mal Adam hádzať, aby maximalizoval pravdepodobnosť úspechu?

Výsledok. 28

Riešenie. Hľadaná pravdepodobnosť je súčet pravdepodobnosti, že padne presne jedna jednotka

$$P_1 = n\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$$

a pravdepodobnosti, že padnú presne dve jednotky

$$P_2 = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{n-2}.$$

Súčet $P_1 + P_2$ možno upraviť na

$$a_n = \frac{1}{2 \cdot 19^2} n(n+37)\left(\frac{19}{20}\right)^n.$$

Hľadáme hodnotu n, pre ktorú platí $a_{n+1} < a_n$, teda

$$\frac{19}{20}(n+1)(n+38) < n(n+37),$$

čo sa ďalej upraví na

$$n^2 - n - 722 > 0.$$

Pre kladné celé číslo n je toto ekvivalentné s $n \geq 28$. Tento výpočet zároveň ukazuje, že postupnosť a_n je najskôr rastúca a potom klesajúca, takže 28 je skutočne index jej najväčšieho člena.

Priame riešenie kvadratickej nerovnice môžeme obísť tým, že najskôr získame odhad $n^2 > 722$, čo dáva $n \geq 27$, čo však nestačí. Platnosť nerovnosti pre $n = 28$ je už však jednoduché overiť.

Úloha 51. Nech D je vnútorný bod strany AC trojuholníka ABC taký, že $|AD| = |BC|$ a $|BD| = |CD|$. Navyše platí, že $|\sphericalangle BAC| = 30°$. Určte veľkosť uhla DBA v stupňoch.

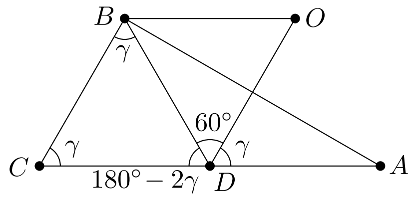
Výsledok. $30°$, $110°$ (2 riešenia)

Riešenie. Nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku ABD, potom $|\sphericalangle DOB| = 2|\sphericalangle BAD| = 60°$ (vďaka pravidlu o stredovom a obvodovom uhle v kružnici nad tetivou BD), a preto je trojuholník BDO rovnostranný, navyše platí, že $|AO| = |DO| = |BD| = |CD|$. Použitím $|AD| = |BC|$ dostaneme podobnosť trojuholníkov AOD a CDB. Označme $\gamma = |\sphericalangle ACB|$, potom tiež $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle DAO| = |\sphericalangle ADO| = \gamma$. Analyzujme tri konfigurácie na základe pozície bodu O vzhľadom k vnútornému uhlu BAC.

Najprv predpokladajme, že O leží mimo tohto uhla a je bližšie k priamke AB ako k priamke AC. V tomto prípade máme

$$180° = |\sphericalangle ADO| + |\sphericalangle ODB| + |\sphericalangle BDC| = \gamma + 60° + (180° - 2\gamma) = 240° - \gamma,$$

takže $\gamma = 60°$ a potom ľahko dostaneme $|\sphericalangle DBA| = 30°$.



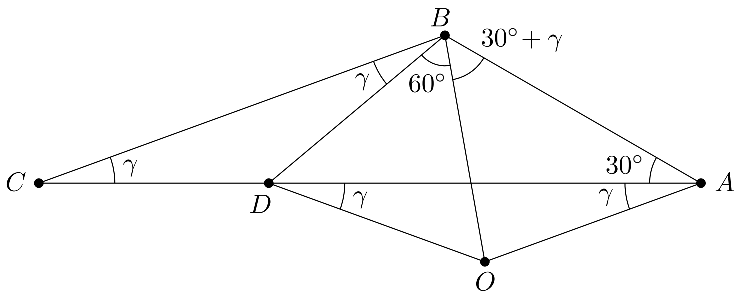
Ďalej, nech je O mimo uhla BAC a bližšie k priamke AC. Potom $|\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle BAO| = 30° + \gamma$, takže

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle OBA| + |\sphericalangle DBO| + |\sphericalangle CBD| = (30° + \gamma) + 60° + \gamma = 90° + 2\gamma.$$

Zo súčtu uhlov trojuholníka ABC dostaneme

$$180° = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ACB| = 30° + (90° + 2\gamma) + \gamma = 120° + 3\gamma,$$

z čoho vyplýva $\gamma = 20°$. Nakoniec, $|\sphericalangle DBA| = 90° + \gamma = 110°$.



Nakoniec dokážeme, že O nemôže byť vnútorným bodom uhla BAC. Ak by bol, tak pre uhly v rovnoramennom trojuholníku DAO platí $|\sphericalangle OAD| = |\sphericalangle ADO| < 30°$ a teda $|\sphericalangle DOA| > 120°$. Pre uhol BDC platí, že je doplnok súčtu uhlov ADO a ODB. Uhol ADO je väčší ako 0 a uhol ODB je 60°. Preto $|\sphericalangle BDC| = 180° - |\sphericalangle BDO| - |\sphericalangle ADO| < 180° - 60°$, teda $|\sphericalangle BDC| < 120°$, preto trojuholníky AOD a BDC nemôžu byť podobné.

Úloha 52. Nech f je funkcia, ktorá priradí nezáporné celé číslo každej dvojici nezáporných celých čísel a je definovaná nasledujúcimi podmienkami:

1. Pre každé x: $f(x, x) = 0$.
2. Pre každé x, y: $f(x, y) = f(y, x)$.
3. Pre každé x, y: $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Pre každé x, y: $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
5. Pre každé x, y: $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Nájdite súčet všetkých nezáporných celých čísel t neprevyšujúcich 60, ktoré spĺňajú $f(20, t) = 2$.

Výsledok. 415

Riešenie. Pozrime sa na to, ako sa funkcia $f(x, y)$ správa a zistíme, že počíta počet pozícií v binárnom zápise, kde sa čísla x a y líšia. Nech $x' = \lfloor x/2 \rfloor$ a $y' = \lfloor y/2 \rfloor$, teda x' a y' sú vypočítané z x a y odstránením poslednej cifry dvojkového zápisu.

- Ak $x = y$, tak $f(x, y) = 0$, teda v zápisoch nie sú rôzne cifry.
- Ak sú obe x a y párne, tak ich posledné cifry sú rovnaké, môžeme ich odstrániť a vypočítať $f(x', y')$.
- Ak sú obe x a y nepárne, tak tiež ich posledné cifry sú rovnaké, môžeme ich odstrániť a vypočítať $f(x', y')$.
- Ak je jedna cifra na poslednej pozícii párna a druhá nepárna, tak si pripočítame do počítadla 1 a znovu pokračujeme s $f(x', y')$.

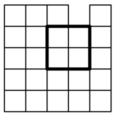
Teraz hľadáme súčet nezáporných čísel $t \leq 60$ takých, že sa od čísla $20 = 010100_2$ líšia na práve dvoch pozíciách. Všimnime si, že čísla 61, 62 a 63 nemôžeme získať z 20 zmenením dvoch binárnych cifier. Hľadáme teda čísla, ktoré majú 6 bitov (prípadne aj nuly na začiatku). Počet možností ako vybrať a zmeniť dve binárne cifry je $\binom{6}{2} = 15$. Každú cifru zmeníme pre presne 5 z týchto čísel a ostane nezmenená pre ostatných 10 čísel.

Spočítame príspevky do súčtu pre každú pozíciu. Päť čísel zmenilo poslednú cifru z 0 na 1, a teda do súčtu prispievajú $5 \cdot 2^0$. Podobne päť čísel zmenilo druhú najmenšiu cifru z 0 na 1, teda prispievajú do súčtu $5 \cdot 2^1$. Pokračujúc v úvahe dostávame príspevky do súčtu $10 \cdot 2^2$ (táto pozícia prispieva v 10 prípadoch, kedy sa cifra nemení), $5 \cdot 2^3$, $10 \cdot 2^4$ a $5 \cdot 2^5$. Nakoniec dostávame súčet

$$5 \cdot (010100_2 + 111111_2) = 5 \cdot (20 + 63) = 415.$$

Úloha 53. Baška si nakreslila štvorčekovú sieť 45×45, spočítala si štvorčeky 1×1 a zistila, že ich je 2025. To jej prišlo podozrivé, tak sa rozhodla jeden štvorček 1×1 z okraja odstrániť. Potom, ako toto spraví, by si rada spočítala *všetky* štvorce v mriežke, teda aj tie s rozmermi väčšími ako 1×1. Aby sa vyhla večnej smole, bola by rada, keby tento počet nebol deliteľný číslom 13. Koľkými spôsobmi dokáže odstrániť štvorček z okraja tak, aby táto jej podmienka platila?

Obrázok nižšie zobrazuje príklad: sieť 5×5 s jedným okrajovým štvorčekom odstráneným a štvorec 2×2 v upravenej sieti.



Výsledok. 152

Riešenie. Určíme celkový počet štvorcov v pôvodnej štvorčekovej sieti 45×45 postupne od najväčšieho (45×45) po najmenší (1×1), čím dostaneme

$$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + 45^2 = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot (45+1) \cdot (2 \cdot 45 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot 46 \cdot 91.$$

Keď Baška odstráni jeden štvorček 1×1, celkový počet štvorcov sa zníži o nejaký počet R, pričom R je počet štvorcov, v ktorých sa odstránený štvorček nachádzal. Všimnime si, že S je násobok 13 (keďže $91 = 13 \cdot 7$). Aby výsledný počet štvorcov $S - R$ nebol deliteľný 13, tak ani R nesmie byť deliteľné 13.

Pozrime sa teraz na možné hodnoty R. Uvedomme si, že každý štvorec obsahujúci odstránené krajné políčko je jednoznačne určený polohou svojich dvoch susedných rohov v mrežových bodoch tak, že odstránené políčko sa musí nachádzať medzi týmito rohmi. Ak sa odstraňovaný štvorček nachádza na n-tom mieste od kraja (kde rožný štvorček je na mieste 1), tak platí

$$R = n(46 - n).$$

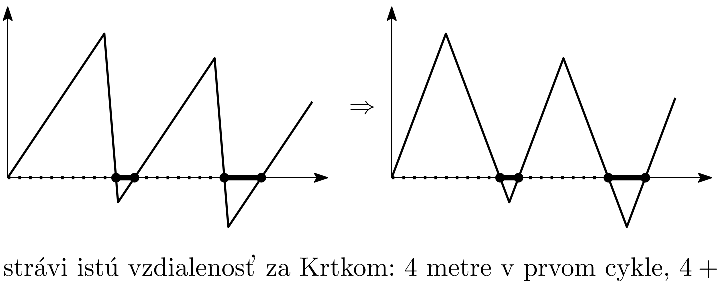
Takže nám stačí určiť n, pre ktoré $n(46-n)$ je násobok 13, aby sme sa týmto pozíciám vyhli. Vďaka symetrii nám stačí overiť možnosti pre $1 \le n \le 23$, čím zistíme, že násobky 13 dostaneme len pre $n = 7, 13, 20$. Na každej zo štyroch strán je teda 6 štvorčekov, ktorým sa chce Baška vyhnúť, pričom žiaden z nich nie je rohový (na dvoch stranách naraz). Zvyšných $4 \cdot 44 - 4 \cdot 6 = 152$ štvorčekov odstrániť môže.

Úloha 54. Matej a Matej bežia preteky. Matej Krtko vie, že pomaly ďalej zájde, zatiaľ čo Matej Zajo beží 6-krát rýchlejšie, no vždy potom, čo prebehne 9 metrov dopredu, vráti sa 7 metrov dozadu, aby vyprovokoval Mateja. Uvažujte časový úsek od začiatku pretekov až dovtedy, kým sa Matej a Matej poslednýkrát stretnú. Akú časť z tohto času bol Matej Krtko vo vedení?

Výsledok. $\frac{22}{45}$

Riešenie. Pozrime sa na (potenciálne zápornú) vzdialenosť Mateja Zaja a Mateja Krtka, pričom kladná hodnota znamená, že Matej Zajo je vo vedení. Zajo najskôr odbehne 9 metrov dopredu (zatiaľ čo Krtko odbehne $\frac{9}{6}$ metrov), ale potom sa vráti 7 metrov dozadu (zatiaľ čo Krtko odbehne ďalších $\frac{7}{6}$ metrov), čím sa vzdialenosť najskôr zvýši o $9 - \frac{9}{6} = \frac{45}{6}$ metrov a potom zníži o $7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ metrov. Keďže hľadáme pomer časov, vieme všetky vzdialenosti prenásobiť konštantou 6 a výsledok sa nezmení. Navyše sa budeme dívať na úlohu z pohľadu, akoby sa Krtko nehýbal. V takejto sústave sa Zajo v každom z cyklov pohne 45 metrov dopredu a 49 metrov dozadu.

Uvedomme si, že v tejto sústave Zajova rýchlosť dozadu presahuje jeho rýchlosť dopredu. Výsledkom je, že čas nie je priamoúmerný celkovej vzdialenosti prebehnutej Zajom. Táto priama úmera však platí na časových úsekoch, ktoré začínajú a končia stretnutiami Zaja a Krtka. Vyplýva to z toho, že v každom takomto úseku, vzhľadom k tomu, že Zajo beží rovnako veľa dopredu ako dozadu, jeho priemerná rýchlosť bude vždy rovnaká. Navyše vieme Zajov pohyb upraviť tak, akoby celý čas bežal touto priemernou rýchlosťou a nezmeniť tým prebehnutú vzdialenosť za čas medzi stretnutiami. Nasledovné grafy závislosti polohy od času zobrazujú tento prevod skutočnej Zajovej rýchlosti na priemernú.



V každom z cyklov Zajo strávi istú vzdialenosť za Krtkom: 4 metre v prvom cykle, $4 + 8 = 12$ metrov v druhom, v treťom $8 + 12 = 20$ metrov atď. Posledný ukončený cyklus je jedenásty v poradí, v ktorom Zajo strávi 84 metrov za Krtkom a skončí s odstupom 44 metrov. Potom Zajo odbehne ďalších 46 metrov (45 tam a 1 späť), kým poslednýkrát stretne Krtka, z čoho 44 metrov bol za Krtkom. Následne sa vráti $49 - 1 = 48$ metrov za Krtka, čo je vzdialenosť, ktorú už nedokáže dobehnúť.

Celková vzdialenosť, ktorú Zajo prebehne do posledného stretnutia s Krtkom, je $11 \cdot 94 + 46 = 1080$ metrov. Z toho vzdialenosť, ktorú Zajo prebehne, pričom je počas toho za Krtkom, je $(4 + 12 + \cdots + 84) + 44 = 528$ metrov. Preto požadovaný pomer je $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$.

Úloha 55. Na Vianoce Marek postúpil na vyššiu úroveň, pretože ako jeden z darčekov dostal postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorá začínala členmi $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ a pre všetky $n \geq 2$ spĺňala rekurentný predpis

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1.$$

Avšak týmto rekurentným predpisom by Marekova postupnosť nebola určená jednoznačne, preto Marek počíta ďalšie členy po jednom v poradí $a_3, a_4, a_5, \ldots$ a vždy, keď má na výber z viacerých možností, vyberie si tú najväčšiu (aby postupoval čo najrýchlejšie). Určte hodnotu a_{13}.

Výsledok. 12274

Riešenie. Najskôr prehoďme všetky členy postupnosti na ľavú stranu, čím dostaneme

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - a_n^2 - 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n+1} + 4a_n \cdot a_{n-1} = 2n - 1.$$

Teraz sa pravá strana dá upraviť na súčet štvorcov ako

$$(a_{n+1} - 2a_n)^2 - (a_n - 2a_{n-1})^2 = 2n - 1.$$

Keďže $(a_2 - 2a_1)^2 = (3 - 2)^2 = 1 = 1^2$ a $(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$, indukciou ľahko nahliadneme, že

$$(a_{n+1} - 2a_n)^2 = (a_n - 2a_{n-1})^2 + 2n - 1 = n^2,$$

čo nám dá dve možné hodnoty a_{n+1}, a to

$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad \text{alebo} \quad a_{n+1} = 2a_n - n.$$

Keďže Marek vždy vyberie väčšiu z hodnôt, vždy z týchto dvoch zvolí

$$a_{n+1} = 2a_n + n.$$

Keď s využitím tejto rekurencie a $a_1 = 1$ vyjadríme $a_2, a_3, \ldots, a_{13}$, dostaneme

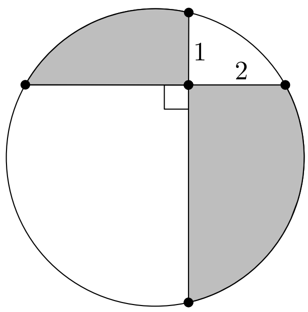
$$\begin{aligned}
a_2 &= 1 \cdot 2 + 1, \\
a_3 &= (1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 2 = 1 \cdot 2^2 + \cdot 2^1 + 2, \\
a_4 &= (1 \cdot 2^2 + \cdot 2^1 + 2) \cdot 2 + 3 = 1 \cdot 2^3 + \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 + 3, \\
&\vdots \\
a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0.
\end{aligned}$$

Potom a_{13} vieme zjednodušiť ako

$$\begin{aligned}
a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0 \\
&= 2^{12} + (2^{11} + 2^{10} + \cdots + 2^0) + (2^{10} + 2^9 + \cdots + 2^0) + (2^9 + 2^8 + \cdots + 2^0) + \cdots + (2^1 + 2^0) + 2^0 \\
&= 2^{12} + (2^{12} - 1) + (2^{11} - 1) + \cdots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) \\
&= 2^{12} + (2^{13} - 1) - 13 \\
&= 4096 + 8192 - 14 = 12274.
\end{aligned}$$

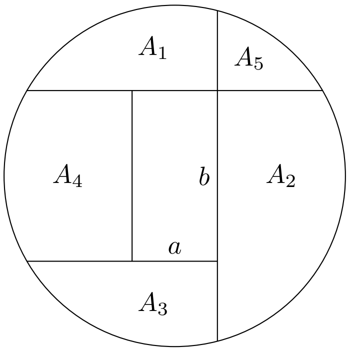
Takže hľadaná hodnota je 12274.

Úloha 56. Náčrt zobrazuje kruh rozdelený dvoma na seba kolmými tetivami. Dve kratšie časti týchto tetív majú dĺžky 1 a 2. Ďalej vieme, že pomer šedej časti k zostávajúcej bielej je $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$. Určte polomer kruhu.



Výsledok. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Riešenie. Uvažujme obrazy tetív v stredovej súmernosti cez stred kruhu. Definujme obsahy a dĺžky ako na nasledujúcom náčrte.



Zjavne musí platiť $A_1 = A_3$ a $A_2 = A_4 + A_5$. To znamená, že obsah $\check{S}$ šedej časti je rovný

$$\check{S} = A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5,$$

kým plocha bielej časti je

$$B = A_3 + A_4 + A_5 + ab = \check{S} + ab.$$

Berúc do úvahy známy pomer plôch

$$\frac{\check{S}}{B} = \frac{\check{S}}{\check{S} + ab} = \frac{5\pi - 2}{5\pi + 2}$$

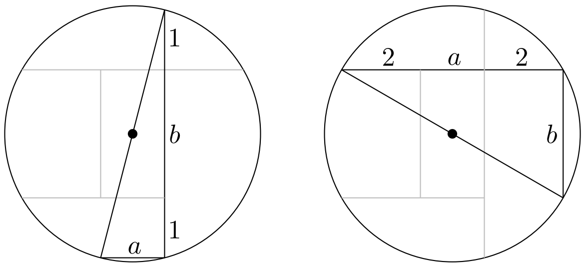
dostaneme, že

$$\check{S} = \frac{1}{4}(5\pi - 2)ab.$$

Teraz sa pozrime na obsah celého kruhu, pričom polomer označme ako r:

$$\pi r^2 = \check{S} + B = 2\check{S} + ab = \frac{5\pi}{2}ab,$$

z čoho vyplýva, že $2r^2 = 5ab$. Ďalšie dve rovnice dostaneme z pravouhlých trojuholníkov vpísaných do kruhu. Jeden s dĺžkami odvesien a a $b + 2$ a druhý s dĺžkami odvesien $a + 4$ a b.



Zostane nám systém troch rovníc

$$\begin{aligned} 2r^2 &= 5ab, \\ 4r^2 &= a^2 + (2 + b)^2, \\ 4r^2 &= (4 + a)^2 + b^2. \end{aligned}$$

Porovnaním pravých strán posledných dvoch rovníc dostaneme $b = 2a + 3$. Dosadením b a porovnaním prvej a druhej rovnice dostaneme kvadratickú rovnicu o neznámej a:

$$\begin{aligned} 10a(2a + 3) &= a^2 + (5 + 2a)^2, \\ 15a^2 + 10a - 25 &= 0. \end{aligned}$$

Táto kvadratická rovnica má dve riešenia, jedno z nich ($a = -\frac{5}{3}$) v tomto kontexte nevedie na prípustnú konfiguráciu. Druhé riešenie vedie na $a = 1$, $b = 5$ and $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Úloha 57. Stavbyvedúci postavil nový 160-poschodový mrakodrap s dvoma schodiskami. Na každom poschodí je chodba, do ktorej z každého schodiska vedú jedny chodbové dvere. Na každej chodbe sú štyri izby. Do každej izby vedú jedny izbové dvere a je obývaná práve jednou osobou. Stavbyvedúci nainštaluje do všetkých dverí (chodbových aj izbových) zámok a potom rozdá kľúče obyvateľom nasledovne:

- každý obyvateľ si vie odomknúť izbové dvere svojej izby,
- nikto nevie odomknúť izbové dvere cudzej izby,
- každý obyvateľ si vie odomknúť chodbové dvere na svojom poschodí,
- no môže byť schopný odomknúť aj chodbové dvere na inom poschodí.

V zámočníckej firme vyrábajú zámky, ktorým je priradený jedinečný kľúč, pričom zámok sa dá odomknúť len týmto kľúčom (poprípade jeho kópiou) a žiadnym iným. Firma však vie nainštalovať rovnaké zámky na viacero dvier a takisto vie vyrobiť kópie kľúčov. Obyvatelia môžu vlastniť ľubovoľný počet kľúčov. Stavbyvedúci by ako odborník na optimalizáciu rád zaplatil za výrobu kľúčov čo najmenej. Výroba nového kľúča má cenu 3 a jeho kópia 2. Aká je najmenšia možná cena všetkých kľúčov, ak chceme dodržať všetky stanovené podmienky?

Výsledok. 2432

Riešenie. Predpokladajme, že máme nejaký spôsob, ako za najlacnejšiu cenu rozdeliť kľúče. Je zrejmé, že potom žiaden z obyvateľov nemá viac ako dva kľúče. Ďalej ukážeme, že môžeme bez ujmy na všeobecnosti rátať s tým, že na každom poschodí je práve jeden obyvateľ, ktorému stačí prideliť len jeden kľúč. Týmto kľúčom vie odomknúť svoju izbu aj jedny chodbové dvere. Ľahko sa dá premyslieť, že viacerí takí na poschodí byť nemôžu. Ostatní traja následne musia používať druhé chodbové dvere.

Pre spor predpokladajme, že na nejakom poschodí by to neplatilo. Potom jedny chodbové dvere využívajú najviac dvaja obyvatelia, označme tie dvere D a obyvateľov a, b (ak existujú). Ak D nevie odomknúť nikto, budeme ďalej ako a uvažovať ktoréhokoľvek zo štyroch obyvateľov poschodia. Teraz nahradíme zámok na dverách D za úplne nový a rovnaký zámok použijeme aj na dvere izby obyvateľa a. Odteraz teda a potrebuje iba jeden kľúč v cene 3, zatiaľ čo jeho predošlé dva kľúče dokopy stáli aspoň $2 + 2 = 4$. Tým sme znížili celkovú cenu kľúčov o aspoň 1.

Ak však máme aj obyvateľa b, ktorý už teraz nevie odomknúť D, nahradíme jeho chodbový kľúč tým od druhých dvier do chodby. Tým cenu nezvýšime, keďže nový chodbový kľúč zrejme môže byť kópiou. Avšak mohlo sa stať, že b nadobudol kombináciu kľúčov, ktorá mu umožňuje prístup do cudzej izby. Aby sme tomuto zabránili, nahradíme zámok jeho izbových dvier úplne novým, čo zvýši cenu kľúča najviac o 1.

Keďže celková cena sa v priebehu procesu nezvyšuje, uvažovaná konfigurácia je aspoň tak lacná ako akákoľvek iná. Preto môžeme predpokladať, že na každom poschodí máme obyvateľa s jediným kľúčom.

Tým pádom sa nám úloha zjednoduší na hľadanie najmenšej možnej ceny kľúčov v mrakodrape so 160 poschodiami a iba jedným schodiskom, z ktorého na každé poschodie vedú jedny chodbové dvere a na každej chodbe sú iba tri izby.

Označme si n rozličných typov kľúčov číslami $1, 2, \ldots, n$. Každý obyvateľ dostane jeden z kľúčov ku svojej izbe a jeden k chodbe. Tieto kľúče nemôžu byť rovnakého typu, pretože inak by sa mu buď na izbu vedeli dostať aj zvyšní dvaja spolubývajúci z chodby alebo by sa ani nevedeli dostať do svojej chodby. Mimo toho, dvaja ubytovaní nemôžu mať rovnakú dvojicu kľúčov, pretože by tým mali prístup do rovnakej izby. Znamená to teda, že rôznym obyvateľom chceme prideliť rôzne dvojice kľúčov, ktorých počet je $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Keďže potrebujeme vyrobiť dvojice kľúčov pre $3 \cdot 160 = 480$ obyvateľov, dolný odhad na n vieme dostať z nerovnice

$$\frac{1}{2}n(n-1) \geq 480.$$

Keď ju vyriešime, prídeme na to, že $n \geq 32$. Teraz ukážeme, že s 32 rôznymi typmi kľúčov sa nám to už podarí. Na to rozdelíme 160 poschodí do 32 skupín, pričom v každej bude 5 poschodí. Priraďovanie kľúčov (prvý kľúč z páru je chodbový a druhý izbový) prebieha nasledovne:

- 15 obyvateľov v prvej skupine dostane dvojice kľúčov $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, 16)$,
- obyvateľom v druhej skupine dáme dvojice kľúčov $(2, 3), (2, 4), \ldots, (2, 17)$,
- týmto spôsobom pokračujeme až po 31. skupinu, ktorej obyvatelia dostanú $(31, 32), (31, 1), \ldots, (31, 14)$, a nakoniec
- poslednej (32.) skupine priradíme dvojice kľúčov $(32, 1), (32, 2), \ldots, (32, 15)$.

Nie je náročné vidieť, že takto splníme všetky podmienky uvedené vyššie. Preto $n = 32$ je najmenší možný počet jedinečných kľúčov. K nim vytvoríme 928 kópií, čím pokryjeme všetkých $160 \cdot 3 \cdot 2 = 960$ kľúčov.

Ešte však potrebujeme započítať obyvateľov s jediným kľúčom z prvého odseku, z čoho dostaneme, že dokopy musí firma vyrobiť $32 + 160 = 192$ jedinečných kľúčov. Preto, výsledná cena je $192 \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$.