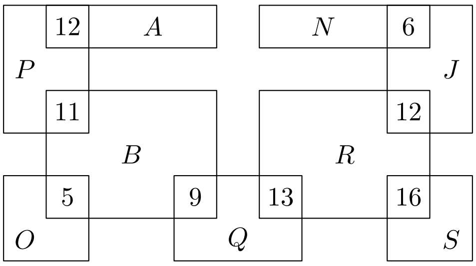
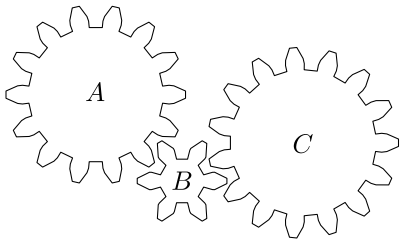
Naloga 1. Naj bodo črke v pravokotnikih različne neničelne števke. Vsako presečišče dveh pravokotnikov vsebuje vsoto pripadajočih črk. Določite vrednost petmestnega števila $NABOJ$.



Rezultat. 14325

Rešitev. Vsoto 16 je mogoče dobiti le kot $9 + 7$. Ker $R = 9$ vodi v protislovje $J = N = 3$, dobimo $S = 9$ in $R = 7$. Korak za korakom določimo preostale vrednosti: $J = 5$, $N = 1$, $Q = 6$, $B = 3$, $P = 8$, $A = 4$ in $O = 2$. Zato zaključimo, da je $NABOJ = 14325$, kar lahko interpretiramo kot datum tekmovanja Náboj 2025.

Naloga 2. Koliko celih obratov mora narediti zobnik C, da se vsi trije zobniki vrnejo v svoje začetne položaje?



Rezultat. 14

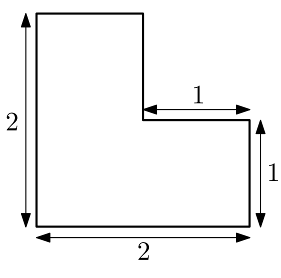
Rešitev. Zobnik A ima 14 zob, zobnik B jih ima 6, zobnik C pa 15. Najprej poiščimo najmanjše število zob, za katere se morajo zobniki zavrteti, da se vsi vrnejo v začetni položaj; to število mora biti večkratnik števil 14, 6 in 15. Najmanjši skupni večkratnik teh števil je 210. Zobnik C se mora zato zavrteti za 210 zob in posledično opraviti $210/15 = 14$ obratov.

Naloga 3. Katero je največje desetmestno število, v katerem ima vsak par enakih števk vsaj eno manjšo števko med njima?

Rezultat. 9 897 989 698

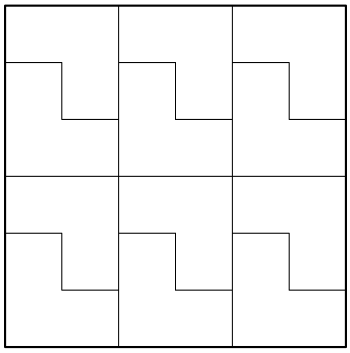
Rešitev. Poglejmo si najbolj levo števko. Nastavimo jo na 9, največjo možno vrednost, in poskušajmo zgraditi željeno število tako, da vedno dodamo največjo možno števko na desni, da bo dan pogoj izpolnjen. Nadaljnja števka ne more biti 9, zato uporabimo 8. Nato lahko spet dodamo 9. Zdaj ne moremo nadaljevati z 8 ali 9, zato je največja možna vrednost 7. Nadalje lahko spet zapišemo 9, 8 in 9, vendar potem ne moremo nadaljevati več s števko iz množice $\{9, 8, 7\}$. Po postavitvi 6 lahko spet dodamo 9 in nato kot deseto števko še 8. Na opisan način dobimo število $n = 9\,897\,989\,698$. Trdimo, da je to največje dovoljeno desetmestno število. Naj bo namreč m drugo število in poglejmo najbolj levo števko, kjer se m in n razlikujeta. Ker je naš algoritem izbral največjo razpoložljivo števko na tem mestu, imamo $m \leq n$, ne glede na preostale števke.

Naloga 4. Katera je najkrajša dolžina stranice kvadrata, ki ga je mogoče popolnoma pokriti brez prekrivanja z več kopijami lika oblike črke L, prikazanega spodaj?

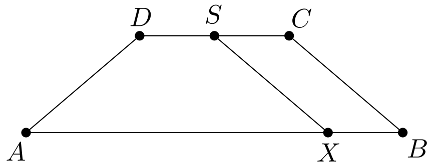


Rezultat. 6

Rešitev. Ploščina kvadrata mora biti večkratnik števila 3, ki je ploščina triomine, in enostavno je videti, da 3×3 kvadrata ni mogoče v celoti prekriti. Lahko pa prekrijemo 6×6 kvadrat, ena izmed možnih razporeditev je prikazana spodaj.



Naloga 5. V enakokrakem trapezu $ABCD$ z osnovnicama AB in CD stranski dolžini zadoščata pogoju $BC = CD = AD$. Naj bo S razpolovišče daljice DC, točka X pa leži na osnovnici AB, tako da je XS vzporedna z BC. Če veste, da je obseg trapeza $ABCD$ enak 50, obseg štirikotnika $AXSD$ pa 38, določite obseg paralelograma $XBCS$.



Rezultat. 36

Rešitev. Razlika obsegov je natanko $XB + CS = 2 \cdot CS = CD$, ki pa je enake dolžine kot stranici BC in XS, zato je rezultat: $3 \cdot (50 - 38) = 36$.

Naloga 6. Elena je izbrala dvomestno število brez ničel in ga pomnožila s številom, ki ima enaki števki, a zamenjan njun vrstni red. Rezultat je bilo štirimestno število, katerega prva števka je bila 3, zadnja pa 7. Katero je bilo večje izmed obeh števil, ki ju je pomnožila?

Rezultat. 93

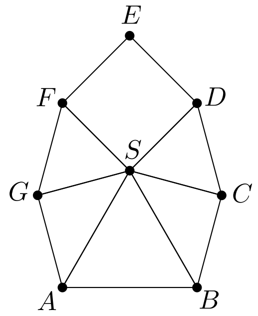
Rešitev. Naj bosta x in y dve števki števila, ki ga je izbrala Elena. Opazimo, da je enica v produktu, ki ga je dobila, enaka enici v produktu $x \cdot y$. Obstajata le dva načina, da zmnožimo dve števki in dobimo število, ki se konča s 7, in sicer $1 \cdot 7 = 7$ in $3 \cdot 9 = 27$. Možnost $17 \cdot 71$ lahko enostavno izločimo, saj je ta produkt premajhen, zato je pravilna možnost $39 \cdot 93 = 3627$, kar pomeni, da je odgovor 93.

Naloga 7. Gorazd igra igro s kartami s standardnim kompletom 52 kart, ki ga sestavlja 13 kart različnih vrednosti vsakega od 4 simbolov (srce, karo, križ, pik). V vsaki potezi lahko igralec bodisi potegne novo karto bodisi odigra s svojo karto, ki ima ali enak simbol ali enako vrednost kot karta na vrhu igralnega kupa. V prejšnjih krogih je imel Gorazd veliko smole in je moral vleči veliko kart, zaradi česar se je vprašal: Katero je najmanjše število kart N, ki jih mora imeti v roki, da bo, ne glede na to, katere karte ima in katera karta je na vrhu igralnega kupa, zagotovo lahko odigral vsaj eno svojo karto?

Rezultat. 37

Rešitev. Če ima Gorazd v roki po dvanajst kart vsakega od treh različnih simbolov (skupaj $3 \cdot 12 = 36$ kart), potem je mogoče, da karta na vrhu igralnega kupa pripada ravno manjkajočemu četrtemu simbolu in manjkajoči trinajsti karti enega od prvih treh simbolov. V tem primeru Gorazd ne bi mogel uporabiti nobene izmed svojih kart, zato je N vsaj 37. Po drugi strani pa ima karta, ki je na vrhu kupa, enak simbol kot še 12 drugih kart in enako vrednost kot še 3 preostale karte. Ker je skupno število kart 52, in je vsaj ena od njih na kupu, je največje število neodigranih kart v Gorazdovi roki $52 - 1 - 12 - 3 = 36$, zato bo pri 37 kartah zagotovo lahko odigral vsaj eno od njih.

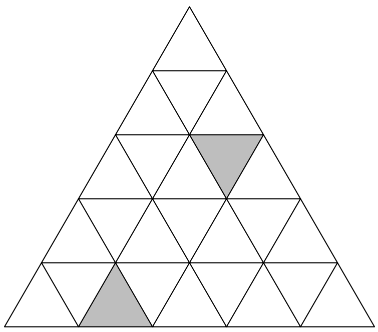
Naloga 8. Sedemkotnik $ABCDEFG$ je razdeljen na naslednjih šest večkotnikov, ki si delijo skupno oglišče S: trije enakostranični trikotniki (ABS, CDS, FGS), dva enakokraka pravokotna trikotnika (BCS s pravim kotom pri C in GAS s pravim kotom pri G) in kvadrat ($DEFS$). Določite velikost kota SAE v stopinjah.



Rezultat. 15

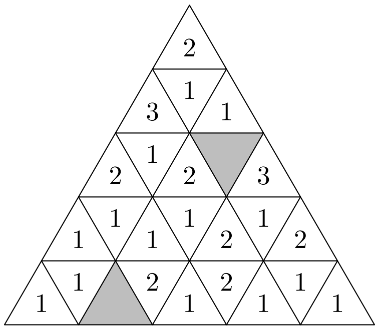
Rešitev. Ker je trikotnik FGS enakostraničen, dobimo $FS = GS$. Od tod sledi, da sta enakokraka pravokotna trikotnika GAS in FSE skladna, kar pomeni, da je $ES = AS$. Tako je trikotnik EAS enakokrak. Z uporabo $\angle ESA = 45° + 60° + 45° = 150°$, dobimo $\angle SAE = \frac{1}{2}(180° - \angle ESA) = 15°$.

Naloga 9. Dana je spodnja trikotna mreža, ki vsebuje dva sivo obarvana trikotnika. Koliko trikotnikov, ki ne vsebujejo nobenega sivega trikotnika, lahko narišete vzdolž mrežnih črt?



Rezultat. 34

Rešitev. V vsako ploščico zapišemo koliko dovoljenih trikotnikov ima to ploščico kot svoj zgornji ali spodnji vogal (odvisno od orientacije ploščice):



Iskano število je preprosto vsota vseh teh vrednosti.

Naloga 10. Štirimestno število je *zanimivo*, če ima naslednjo lastnost: ko odstranimo števko iz mesta za stotice je dobljeno trimestno število enako eni devetini prvotnega štirimestnega števila. Na primer, število 2025 je zanimivo, saj je $225 = \frac{1}{9} \cdot 2025$. Poiščite največje štirimestno zanimivo število.

Rezultat. 6075

Rešitev. Naj bo $N = \overline{abcd}$ zanimivo število in naj bo $n = \overline{cd}$. Potem je $N = 1000a + 100b + n$ in ko odstranimo števko na mestu stotic, dobimo število $M = 100a + n$. Če sedaj enačbo $M = \frac{1}{9}N$ pomnožimo z 9, dobimo

$$9(100a + n) = 1000a + 100b + n.$$

Z nadaljnjim preoblikovanjem in deljenjem s 4 pa dobimo

$$25(a + b) = 2n.$$

Iz te enakosti lahko sklepamo, da mora biti vsota $a+b$ sodo število, ki je manjše od $\frac{2\cdot 100}{25}=8$, ker je $n<100$. Od tod sledi, da je $a+b$ največ 6 in da bi maksimizirali število N izberemo $a=6$ in $b=0$, posledično je $n=75$. Enostavno lahko preverimo, da število $N=6075$ zadošča pogojem iz začetne trditve.

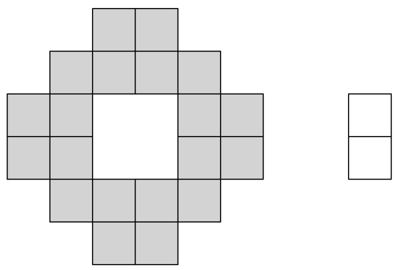
Naloga 11. Tovorna ladja je zasnovana tako, da lahko sočasno prevaža tri tipe tekočin: etanol, olje in živo srebro. Za vsako od tekočin veljajo naslednje maksimalne kapacitete: 10 ton etanola, 30 ton olja in 60 ton živega srebra. Na poti iz Prage v Hamburg prevaža ladja 85 ton tovora, ki sestoji iz omenjenih tekočin. Na poti nazaj prevaža ladja enako količino etanola, a dvakrat več olja in tretjino živega srebra v primerjavi s prvo potjo. Koliko ton tovora prevaža ladja na poti nazaj?

Rezultat. 60

Rešitev. Ker je imela ladja na prvi poti 85 ton tovora, je morala prevažati vsaj 15 ton olja. Ker pa se je količina olja na drugi poti podvojila, je ladja morala na prvi poti vsebovati največ 15 ton olja. Posledično je na prvi poti imela maksimalno količino etanola in živega srebra. Za drugo poti lahko skupno količino tovora izračunamo kot

$$10+2\cdot 15+\frac{1}{3}\cdot 60=60.$$

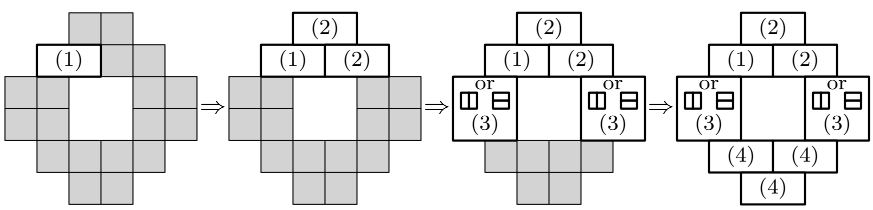
Naloga 12. Na koliko različnih načinov lahko pokrijemo sivo obarvani lik na sliki z dominami, ki se ne prekrivajo, pri čemer vsaka domina pokrije natanko dva sosednja kvadratka. Posamezno domino (prikazano na spodnji sliki v beli barvi) lahko tudi zarotiramo.



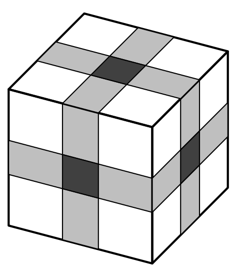
Opomba: Razporeditve, ki jih dobimo z rotacijo ali zrcaljenjem celotnega sivega lika, obravnavamo kot različne in nobena domina ne sme segati čez rob lika.

Rezultat. 8

Rešitev. Lik na sliki bomo začeli prekrivati v enem izmed notranjih oglišč, kot je prikazano na spodnji sliki (1); domino lahko postavimo na dva načina, ki pa vodita do simetrične situacije. Zato lahko izberemo enega izmed njih in končno rešitev pomnožimo z 2. Ko je ta domina postavljena, je postavitev še dveh domin določena (2). Vsakega od dveh 'kvadratov' na levi in desni strani lahko sedaj prekrijemo na dva različna načina (3), preostanek pa lahko prekrijemo samo na en način (4). Torej imamo $2\cdot 2=4$ načine, kako prekriti lik, glede na začetno postavitev (1). Z upoštevanjem simetrične situacije (za (1)) pa dobimo $2\cdot 4=8$ skupnih možnosti.



Naloga 13. Paket v obliki kocke je zavit s trakom, ki je po širini ožji od roba paketa. Temno siva polja na ploskvah paketa (vključno s tistimi, ki se ne vidijo na sliki) imajo skupno površino $216\,\mathrm{cm}^2$. Površina svetlo sivih polj na ploskvah pa je enaka polovici površine, ki ni prekrita s trakom. Določite dolžino roba paketa v centimetrih.



Rezultat. 30

Rešitev. Površina vsakega izmed temno sivih kvadratov je enaka $216/6 = 36$, torej je stranica temno sivega kvadrata enaka $\sqrt{36} = 6$. Na vsaki ploskvi je ploščina nepokritega dela enaka dvokratniku ploščine svetlo sivega dela, kar pomeni, da vsak svetlo siv pravokotnik zavzame polovico površine belega kvadrata. Torej lahko ob en rob paketa postavimo 5 svetlo sivih pravokotnikov z eno stranico dolžine 6. Posledično je dolžina roba paketa enaka $5 \cdot 6 = 30$.

Naloga 14. Trgovina prodaja svinčnike, zvezke in ravnila. Cena zvezka je enaka vsoti cen svinčnika in ravnila. Če bi ravnilu zvišali ceno za 50%, bi bila njegova cena enaka vsoti cen svinčnika in zvezka. Za koliko odstotkov bi morali povišati ceno svinčnika, da bi ta bila enaka vsoti cen zvezka in ravnila?

Rezultat. 800%

Rešitev. Označimo z z ceno zvezka, z r ceno ravnila in s s ceno svinčnika. Iz danih pogojev dobimo enačbe $z = r + s$ in $\frac{3}{2}r = s + z = 2s + r$. Iz druge enačbe sedaj dobimo $r = 4s$ in če to vstavimo v prvo enačbo, dobimo $z = 5s$. Zato bi morala biti nova cena svinčnika enaka devetkratniku prvotne cene, kar pomeni 800% zvišanje.

Naloga 15. Naj $D(a, b)$ označuje največji skupni delitelj in $v(a, b)$ najmanjši skupni večkratnik števil a in b. Izračunajte vrednost naslednjega izraza

$$v(2025, v(2024, D(2023, D(2022, \ldots v(4, D(3, D(2, 1))) \ldots)))).$$

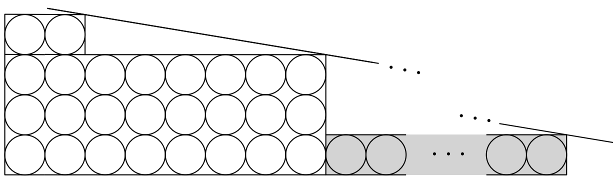
Operaciji D in v se izmenjujeta po dveh ponovitvah, pri čemer je v celotnem izrazu skupno 1012 izračunov za D in 1012 izračunov za v. Na primer, če bi bili prisotni le dve ponovitvi vsake operacije, bi bil zgornji izraz oblike $v(5, v(4, D(3, D(2, 1))))$.

Rezultat. 4 098 600

Rešitev. Opazimo, da je $D(x, x - 1) = 1$ za poljubno naravno število x, torej je $D(x, D(x - 1, a)) = 1$ za poljubni naravni števili a in x. Zato je zgornji izraz enak izrazu

$$v(2025, v(2024, 1)) = 2025 \cdot 2024 = 4\,098\,600.$$

Naloga 16. Na sliki so trije pravokotniki s pravilno včrtanimi skladnimi krožnicami in premico, ki poteka skozi zgornje desno oglišče pravokotnikov. Srednji del slike je skrit. Koliko krožnic je v sivem pravokotniku?



Rezultat. 12

Rešitev. Pravokotna trikotnika, ki nastaneta med pravokotniki in črto, sta podobna in sta v razmerju 1 : 2. Posledično je širina sivega pravokotnika enaka $2 \cdot 6 = 12$ premerom včrtanih krogov.

Naloga 17. Tine je tekel po 18 km dolgi progi. Tekel je z enakomerno hitrostjo, vendar se je na neki točki utrudil in upočasnil svoj tempo za 25% do konca proge. Po koncu teka je Tine preveril svojo pametno uro in ugotovil, da je s počasnejšim tempom tekel dvakrat toliko časa kot s hitrejšim tempom. Kolikšno razdaljo (v kilometrih) je Tine pretekel, preden je upočasnil tempo?

Rezultat. $7.2 = \frac{36}{5}$

Rešitev. Označimo z v (hitrejši) tempo (v km/h), ki ga je imel Tine na začetku in s t koliko časa (v urah), je tekel v tem tempu. Potem je njegov počasnejši tempo enak $\frac{3}{4}v$ in tako je tekel $2t$ časa. Skupna razdalja je vsota obeh delnih razdalj, torej je

$$18 = v \cdot t + \tfrac{3}{4}v \cdot 2t = \tfrac{5}{2}vt,$$

in posledično je

$$vt = \frac{18}{\frac{5}{2}} = 7.2,$$

kar je enako razdalji, pretečeni v hitrejšem tempu.

Naloga 18. Katja, Laura, Maja, Natalija in Olivija se morajo postaviti v vrsto za skupinsko fotografijo pred ogromnim spomenikom Náboj. Pri tem morajo upoštevati naslednje pogoje:

- Natalija mora stati desno od Katje, Maje in Olivije,
- Maja mora stati levo od Katje, Natalije in Olivije.

Na koliko načinov se lahko pet deklet razvrsti za to imenitno fotografijo?

Rezultat. 10

Rešitev. Opazimo, da Laura ni omenjena v pogojih, zato se lahko postavi kamorkoli. Za razvrstitev ostalih štirih deklet pa imamo samo dva načina. Zato je skupaj 10 možnih postavitev.

Naloga 19. Grad obsega pet stolpov, ki so povezani z ravnim obzidjem, pri čemer dolžine zidov merijo 50 komolcev, 70 komolcev, 90 komolcev, 110 komolcev in 130 komolcev. Zidovi so lahko razporejeni v poljubnem vrstnem redu. Kolikšna je dolžina (v komolcih) najdaljšega možnega ravnega strela, ki bi ga lokostrelec lahko naredil znotraj gradu, glede na najboljšo razporeditev obzidja za ta namen?

Opomba: Debelina zidov gradu in dimenzije stolpov se štejejo za zanemarljive, razdalja strela pa se meri kot horizontalna razdalja po ravni črti.

Rezultat. 220

Rešitev. Pri poljubni postavitvi zidov gradu je najdaljša možna daljica znotraj gradu tako dolga, kot je dolga daljica ℓ, ki povezuje dve točki gradu (če je notranji kot med dvema zaporednima segmentoma zidov večji od $180°$, se lahko zgodi da daljica ℓ ni v celoti vsebovana znotraj obzidja).Krajišči daljice ℓ morata biti stolpa; sicer bi jo lahko podaljšali tako, da bi razdaljo od vsakega krajišča najprej podaljšali v ravni črti do zidu in nato dalje, ob zidu, do ustreznega stolpa. Ta dva stolpa torej razdelita obzidje na dve množici, od katerih ima vsaka vsoto razdaljih vsaj S, kar ustreza dolžini daljice ℓ. Zato dobimo neenakost

$$S \leq \frac{50+70+90+110+130}{2} = 225$$

in ker mora biti S večkratnik 10, dobimo $S \leq 220$. To vrednost je mogoče doseči z naslednjo razdelitvijo zidov: $130 + 90 < 110 + 50 + 70$.

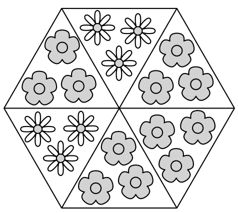
Naloga 20. Pavlina ima 8 kart, vsaka je označena z števko od 1 do 8, vsaka števka je uporabljena natanko enkrat. Vse karte razporedi tako, da ustvari dve štirimestni števili. Kolikšna je najmanjša možna pozitivna razlika med tema dvema številoma?

Rezultat. 247

Rešitev. Razlika je najmanjša, ko sta številki čim bližje druga drugi. V ta namen se sme tisočica razlikovati le za 1. Stotica mora biti čim manjša za večje število in čim večja za manjše število. Ko je števka stotic določena, velja enako za števko desetic in nato končno za števko enic. To vodi do števil 5123 in 4876, katerih razlika je 247.

Naloga 21. Babica Jana se je odločila zasaditi šestkotni aranžma sestavljen iz šestih gredic. V vsako od šestih gredic, postavljenih v pravilen šestkotnik, lahko posadi vijolice ali marjetice. Ena od takih ureditev je prikazana na sliki. Na koliko načinov lahko uredi zasaditve, da bo vsaj en par sosednjih gredic vseboval isto vrsto rož?

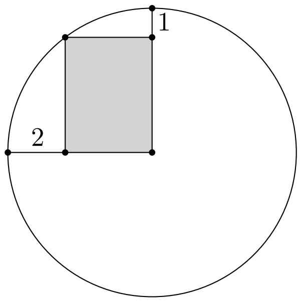
Opomba: Razporeditve, ki se razlikujejo po kakršni koli simetriji (rotacija ali zrcaljenje) veljajo za različne. Vseh šest pozicij gredic se obravnava kot različne.



Rezultat. 62

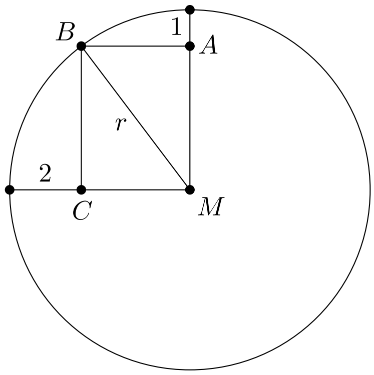
Rešitev. Če opustimo pogoj, da morata biti dve sosednji gredici zasajeni z isto vrsto rož, potem je odgovor $2^6 = 64$. Od tega rezultata odštejemo možnosti, kjer je pogoj kršen, kar je v primeru, ko se dve vrsti rož izmenjujeta. Ker sta to samo dve možnosti, to vodi do skupnih $64 - 2 = 62$ možnih zasaditev.

Naloga 22. Iz lista papirja v obliki kroga je Erik izrezal pravokoten kos tako, da je eno oglišče pravokotnika v središču kroga, nasprotno oglišče na obodu kroga, preostali dve oglišči pa ležita na dveh različnih polmerih na razdalji 1 dm in 2 dm od krožnice. Kolikšna je površina lista, ki ostane po rezu (v dm^2)?



Rezultat. $25\pi - 12$

Rešitev. Naj bo M središče lista v obliki kroga, A, B in C pa naj označujejo preostala oglišča pravokotnika. Polmer kroga označimo z r.



Imamo $MA = r - 1$, $MB = r$ in $MC = r - 2$, pri čemer je $AB = MC$. Z uporabo Pitagorovega izreka v pravokotnem trikotniku ABM dobimo enačbo

$$r^2 = (r-1)^2 + (r-2)^2,$$

kar je mogoče poenostaviti na

$$0 = r^2 - 6r + 5 = (r-1)(r-5).$$

Ker $r = 1$ vodi do neveljavne konfiguracije, je edina veljavna rešitev $r = 5$. Preostala površina lista je torej $r^2\pi - 3 \cdot 4 = 25\pi - 12$ (v dm^2).

Naloga 23. Veliki mojster Nábojan, neprimerljivi virtuoz mešanja esenc, bo kmalu izdelal legendarno *algemijo* – brezhibno fuzijo algebre in alkimije, mešanih v popolnem razmerju 1 : 1. Da bi to dosegel, začne z naslednjimi sestavinami:

- Algebrat: sestavljeno iz 80% algebre in 20% alkimije, s skupno maso 10 mg,
- Alkema: sestavljeno iz 30% algebre in 70% alkimije, s skupno maso 14 mg.

Največ koliko algemije lahko Nábojan proizvede s sestavinami, ki so mu na voljo (v mg)?

Opomba: Nábojan ne more izolirati komponent zmesi na kateri koli točki med postopkom, lahko samo dodatno meša razpoložljive sestavine.

Rezultat. $23\frac{1}{3} = \frac{70}{3}$

Rešitev. Če zmešamo x enot prve snovi in y druge, nastala zmes vsebuje $\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y$ algebre in $\frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y$ alkimije. Da bi dobili razmerje 1 : 1, mora veljati

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{10}y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{10}y,$$

kar lahko preuredimo v $y = \frac{3}{2}x$. Z drugimi besedami, za vsak mg Algebrata je treba v mešanici uporabiti 1,5 mg Alkeme. Zato bo največja količina Algemije proizvedena, ko bo Nábojan uporabil vseh 14 mg Alkeme in $\frac{2}{3} \cdot 14$ mg Algebrata, kar bo skupaj proizvedlo $\frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3}$ mg iskane mešanice.

Naloga 24. Število $K = n^2$ je 4-mestni popoln kvadrat, katerega vse števke so manjše od 7. Če vsako števko iz K povečamo za 3, dobimo še en popoln kvadrat. Poiščite n.

Rezultat. 34

Rešitev. Naj bo $m^2 = M = K+3333$. Ker sta števili M in K obe 4-mestna popolna kvadrata, dobimo $32 \leq n < m \leq 99$ in torej

$$32 + 33 \leq m + n \leq 98 + 99$$

oziroma

$$65 \leq m + n \leq 197.$$

Sedaj je

$$(m+n)(m-n) = m^2 - n^2 = M - K = 3333 = 3 \cdot 11 \cdot 101.$$

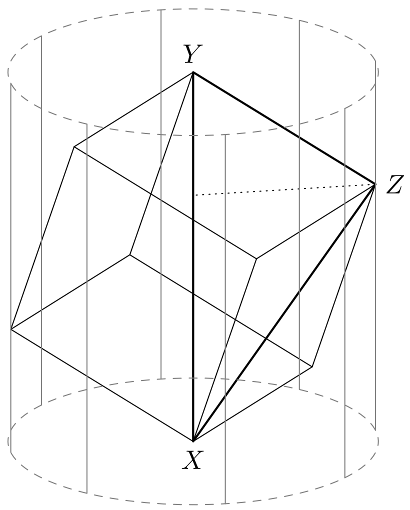
Glede na zgornje omejitve sta edina možna faktorja $m + n = 101$ in $m - n = 33$, kar daje rešitev $m = 67$ in $n = 34$. Preverimo še, da ima $K = 34^2 = 1156$ res vse števke manjše od 7.

Naloga 25. Točki X in Y sta nasprotni oglišči kocke s stranico dolžine 1. Kocka je vsebovana v pokončnem valju C tako, da se vsa oglišča kocke dotikajo površine valja in sta točki X ter Y središči osnovnih ploskev valja C. Kolikšna je prostornina C?

Rezultat. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Rešitev. Ker sta X in Y središči osnovnih ploskev valja, je višina valja enaka njuni razdalji. Ker sta X in Y nasprotni oglišči kocke, ležita na prostorski diagonali dolžine $\sqrt{3}$. Za določiti polmer valja, izberemo katero koli drugo oglišče kocke Z in izračunamo njegovo oddaljenost od diagonale XY. Trikotnik XZY je pravokoten, s pravim tokom pri oglišču Z (XZ je diagonala ploskve in YZ je rob kocke), iskani polmer pa je višina od Z na XY. Zaradi podobnosti (ali primerjave ploščin) je ta višina $\sqrt{2/3}$. Zato je prostornina valja

$$\pi \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$



Naloga 26. V vasi s 60 prebivalci vsaka oseba pripada eni izmed treh vrst: vitezi, ki vedno govorijo resnico; oprode, ki vedno lažejo; in normalni ljudje, ki lahko odgovarjajo kakor želijo. Vsi v vasi vedo katere vrste so drugi vaščani. Tujec je vsem vaščanom zastavil naslednji vprašanji:

1. "Ali obstaja vsaj 31 vitezov?" – in prejel natanko 43 pozitivnih odgovorov.
2. "Ali obstaja vsaj 31 oprod?" – in prejel natanko 39 pozitivnih odgovorov.

Kolikšno je minimalno število normalnih ljudi v vasi?

Rezultat. 13

Rešitev. Druga trditev ne more biti resnična: če bi bilo vsaj 31 oprod, bi vsi na vprašanje odgovorili negativno, zaradi česar bi bilo nemogoče imeti 39 pozitivnih odgovorov. Zato je največ 30 oprod. Ker vitezi vedno govorijo resnico, so morali na to vprašanje odgovoriti negativno, kar pomeni, da je lahko največ $60 - 39 = 21$ vitezov.

To tudi pomeni, da je prva trditev napačna. Pozitivni odgovori v višini 43 so zagotovo prišli od vseh oprod in nekaj normalnih ljudi. Ker je oprod največ 30, mora obstajati vsaj $43 - 30 = 13$ normalnih ljudi.

Ta porazdelitev je mogoča, saj 17 vitezov, 30 oprod in 13 normalnih ljudi izpolnjuje oba pogoja. Tako je najmanjše število normalnih ljudi v vasi 13.

Naloga 27. Štiri ekipe, A, B, C in D, so sodelovale na turnirju, kjer je vsak par ekip igral natanko eno tekmo. Zmagovalec vsake tekme je prejel 1 ali 2 točki, odvisno od tega, za kolikšno razliko je zmagal. Poražena ekipa ni prejela nobene točke, neodločenih izidov ni bilo. Po končanih vseh tekmah je bila ustvarjena tabela, ki prikazuje rezultate vseh tekem. Primer take tabele je prikazan spodaj. Če vemo, da je ena ekipa končala s 4 točkami, preostale tri ekipe pa so imele vsaka po 1 točko, koliko različnih tabel bi ustrezalo taki končni razdelitvi točk?

	A	B	C	D	total
A		1	0	2	3
B	0		0	0	0
C	2	1		2	5
D	0	1	0		1

Opomba: Razvrstitev ekip (A, B, C in D) v tabeli je fiksna, kar pomeni, da se oznake vrstic in stolpcev ne spreminjajo.

Rezultat. 24

Rešitev. Najprej opazimo, da je skupno število podeljenih točk 7, kar pomeni, da je od 6 tekem natanko ena bila takšna, da je zmagovalna ekipa prejela dve točki, pri preostalih pa so zmagovalci prejeli le eno točko. To pomeni, da je najboljša ekipa premagala vse druge ekipe, pri čemer je bila natanko ena od teh zmag z večjo razliko. Tekme med tremi ne-najboljšimi ekipami so morale privesti do "cikla", saj je vsaka od teh ekip prejela samo eno točko in obstajata natanko dva načina za usmeritev tega cikla. Skupaj obstaja $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ načinov, na katere bi se turnir lahko razpletel.

Naloga 28. Julija je zapisala število 2025 kot vsoto M členov, kjer je vsak člen potenca števila 10 (tj. 10^n, kjer je n nenegativno celo število). Členi se v vsoti lahko ponavljajo. Koliko različnih vrednosti M lahko imamo?

Rezultat. 225

Rešitev. Očitno je najmanša vrednost M enaka 9, saj je

$$2025 = 10^3 + 10^3 + 10^1 + 10^1 + 10^0 + 10^0 + 10^0 + 10^0 + 10^0.$$

Če je $k \geq 1$, potem z vsako zamenjavo $10^k = 10 \cdot 10^{k-1}$ povečamo število členov za 9. Sledi, da mora biti M večkratni števila 9; Še več, vse možne vrednosti M tvorijo množico večkratnikov števila 9. Največja možna vrednosti števila M je 2025, saj

$$2025 = 2025 \cdot 10^0.$$

Sledi, da je število vseh možnih vrednosti M enako

$$\frac{2025 - 9}{9} + 1 = 225.$$

Naloga 29. Maks in Pavel stojita na peronu na železniški postaji s hrbtoma obrnjena drug proti drugemu. Z enakomerno hitrostjo se mimo njiju pripelje tovorni vlak. V trenutku, ko se sprednji del vlaka poravna z njuno pozicijo, začneta hoditi vsak v svojo smer z enako enakomerno hitrostjo. Zadnji del vlaka doseže Maksa, ko je ta prehodil 45 metrov od začetne točke, kmalu za tem pa doseže še Pavla, ko je prehodil 60 metrov od začetne točke. Koliko metrov meri vlak?

Rezultat. 360

Rešitev. Naj t_1 označuje čas, ki je pretekel od trenutka ko je bil vlak poravnan s pozicijo Maksa in Pavla, do trenutka, ko je zadnji del vlaka dosegel Maksa. Podobno, naj t_2 označuje čas, ki je pretekel od trenutka, ko je zadnji del vlaka dosegel Maksa do trenutka, ko je dosegel Pavla. Ker sta Maks in Pavel hodila z enako hitrostjo in ker je med časom t_1 Maks prehodil 45 metrov, med časom t_2 pa je Pavel prehodil $60 - 45 = 15$ metrov, je razmerje med intervaloma enako

$$t_1 : t_2 = 45 : 15 = 3 : 1.$$

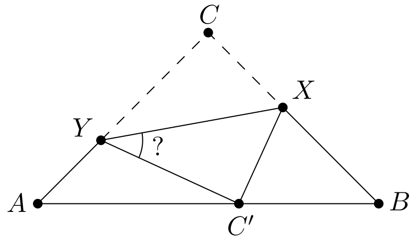
Poglejmo še gibanje vlaka. Med t_1 je vlak prevozil $\ell - 45$ metrov, ker je najprej sprednji del vlaka sovpadal s pozicijo Maksa in Pavla, na koncu tega intervala pa je bil zadnji del vlaka še 45 metrov stran od te točke. Med t_2, pa je zadnji del vlaka prevozil 105 metrov med Maksom in Pavlom. Sledi, da je hitrost vlaka enaka

$$v = \frac{105}{t_2}.$$

Celotna dolžina vlaka je podana z

$$vt_1 + 45 = \frac{t_1}{t_2} \cdot 105 + 45 = 3 \cdot 105 + 45 = 360.$$

Naloga 30. Enakokrak pravokoten trikotnik ABC s pravim kotom pri oglišču C prepognemo vzdolž daljice XY tako, da se oglišče C preslika v točko C' na stranici AB. Vemo še, da je $BC' = BX$. Poiščite velikost kota $C'YX$ v stopinjah.



Rezultat. $33.75^\circ = \frac{135}{4}^\circ$

Rešitev. Ker je trikotnik $XC'B$ enakokrak, imamo

$$\angle C'XB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ.$$

Zaradi prepogiba je kot $\angle CXY = \angle YXC'$, sledi

$$\angle YXC' = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 67.5^\circ) = 56.25^\circ.$$

Potem, $\angle XC'Y = \angle YCX = 90^\circ$, torej

$$\angle C'YX = 180^\circ - \angle XC'Y - \angle YXC' = 33.75^\circ.$$

Naloga 31. Obravnavamo zaporedje vseh strogo naraščajočih štirimestnih naborov števil iz množice $\{0, 1, 2, \ldots, 15\}$, urejenih leksikografsko:

$$(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 4), (0, 1, 2, 5), \ldots, (12, 13, 14, 15).$$

Nabor (a_1, a_2, a_3, a_4) se v tem zaporedju pojavi pred naborom (b_1, b_2, b_3, b_4) če in samo če

$$a_1 < b_1 \quad \text{ali} \quad a_1 = b_1, a_2 < b_2 \quad \text{ali} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 < b_3 \quad \text{ali} \quad a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_4 < b_4.$$

Kateri po vrsti bo nabor $(2, 4, 7, 14)$?

Rezultat. 911

Rešitev. Opazimo, da je za $k \leq n$, število vseh naraščajočih naborov velikosti k enako $\binom{n}{k}$, saj strogo naraščajoči nabori velikosti k ustrezajo podmnožicam velikosti k. Bolj splošno, število vseh naraščajočih naborov velikosti k z elementi iz množice $\{m, m+1, \ldots, n\}$ je enako $\binom{n-m+1}{k}$. Za določitev pozicije nabora, preštejemo število vseh leksikografsko manjših naraščajočih naborov velikosti 4, ki jih združimo glede na njihove že znane elemente:

- $(0, *, *, *)$: imamo $\binom{15}{3} = 455$ takšnih naborov;
- $(1, *, *, *)$: imamo $\binom{14}{3} = 364$ takšnih naborov;
- $(2, 3, *, *)$: imamo $\binom{12}{2} = 66$ takšnih naborov;
- $(2, 4, a, *)$ z $a \in \{5, 6\}$: imamo $\binom{10}{1} + \binom{9}{1} = 19$ takšnih naborov;
- $(2, 4, 7, b)$ z $b \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}$: imamo 6 takšnih naborov.

Sledi, da se nabor $(2, 4, 7, 14)$ pojavi na mestu $455 + 364 + 66 + 19 + 6 + 1 = 911$.

Naloga 32. Kmeta Adam in Beti prodajata jabolka na tržnici. Skupaj sta prinesla 100 jabolk. Adam prodaja svoja jabolka po ceni a kovancev za jabolko, Beti pa prodaja svoja jabolka po ceni b kovancev za jabolko. Ko sta prodala vsa jabolka, sta zaslužila enako. Adam je opazil, da bi, če bi prodajal svoja jabolka po enaki ceni kot Beti, zaslužil 45 kovancev. Beti pa je pripomnila, da bi, če bi prodajala svoja jabolka po Adamovi ceni, zaslužila 20 kovancev. Koliko jabolk je prodal Adam?

Rezultat. 60

Rešitev. Z A označimo število jabolk, ki jih je prodal Adam, z B pa število jabolk, ki jih je prodala Beti. Vemo, da

$$\begin{aligned} A + B &= 100, \\ A \cdot a &= B \cdot b, \\ A \cdot b &= 45, \\ B \cdot a &= 20. \end{aligned}$$

Z zamenjavo $b = \frac{45}{A}$ in $a = \frac{20}{B}$ v drugi enačbi dobimo

$$\begin{aligned} A \cdot \frac{20}{B} &= B \cdot \frac{45}{A}, \\ \frac{A^2}{B^2} &= \frac{45}{20} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Torej je $A = \frac{3B}{2}$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo $\frac{3B}{2} + B = \frac{5B}{2} = 100$. Sledi $B = 40$ in $A = 100 - 40 = 60$.

Naloga 33. Suzana je sanjala o osupljivem številu. Bilo je največje trimestno število z naslednjo lastnostjo: število je enako vsoti njegove stotice, kvadrata njegove desetice in kuba njegove enice. O katerem številu je sanjala Suzana?

Rezultat. 598

Rešitev.

Naj bodo a, b in c prva, druga in tretja števka tromestnega števila N. Če je $c = 9$, potem je $N > 9^3 = 729$, torej mora a biti bodisi 7, bodisi 8. V obeh primerih pa nimamo izbire števke b s katero bo zadnja števka števila $729 + a + b^2$ enaka 9.

Poskusimo s $c = 8$. Ker je $8^3 = 512$, mora a biti bodisi 5, bodisi 6, ampak

$$N \leq 512 + 9^2 + 6 = 599 < 600,$$

torej je a lahko zgolj 5. Poiščimo še b, ki ustreza enačbi

$$512 + b^2 + 5 = 8 + 10b + 500$$

oziroma

$$b^2 - 10b + 9 = 0,$$

z rešitvama $b = 1$ and $b = 9$. Vsaka od možnosti nam da po eno rešitev:

$$518 = 5 + 1^2 + 8^3 \quad \text{in} \quad 598 = 5 + 9^2 + 8^3.$$

(Ekvivalentno lahko označimo, da mora biti zadnjša števka števila b^2 enaka 1.)

Če je $c \leq 7$, potem

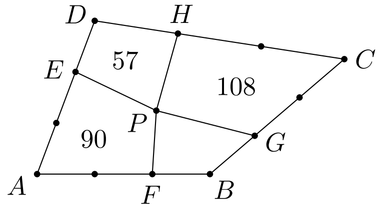
$$N \leq 7^3 + 9^2 + 9 = 433 < 598,$$

torej je največja vrednost števila N enaka 598.

Naloga 34. Vsaka stranica štirikotnika $ABCD$ je z dvema točkama razdeljena na tri enake dele. Natančneje:

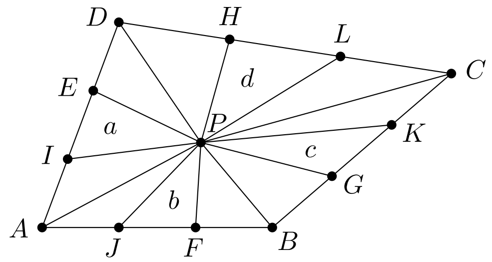
- Točka E leži na stranici AD tako, da velja $AE : ED = 2 : 1$.
- Točka H leži na stranici CD tako, da velja $CH : HD = 2 : 1$.
- Točka F leži na stranici AB tako, da velja $AF : FB = 2 : 1$.
- Točka G leži na stranici CB tako, da velja $CG : GB = 2 : 1$.

Točka P leži znotraj štirikotnika in ga deli na štiri manjše štirikotnike. Ploščine treh manjših štirikotnikov so podane na spodnji sliki. Določite ploščino četrtega štirikotnika $PFBG$.



Rezultat. 42

Rešitev. Točko P povežemo z vsemi točkami, ki razdelijo stranice štirikotnika $ABCD$ na tri dele. S tem dobimo dvanajst trikotnikov.



Trije trikotniki vzdolž ene stranice imajo enako ploščino, saj imajo enako višino ter enako veliko osnovnico. Naj bo a ploščina trikotnika PEI, b ploščina trikotnika PJF, c ploščina trikotnika PKG in d ploščina trikotnika PLH. Iz danih podatkov nastavimo enačbe

$$90 = 2a + 2b, \quad 57 = a + d, \quad 108 = 2c + 2d.$$

Ploščina štirikotnika $PFBG$ ja podana kot $b + c$. Izračunamo

$$b + c = \frac{1}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) - (a + d) = \frac{1}{2}(90 + 108) - 57 = 42.$$

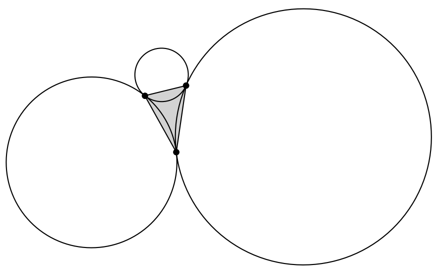
Naloga 35. Obroč iz dvanajstih kvadratov dobimo tako, da iz mreže velikosti 4×4 odstranimo štiri sredinske kvadrate. Na koliko načinov lahko izberemo štiri kvadrate na obroču, da bo na vsaki stranici obroča izbran vsaj en kvadrat?

Opomba: Vsak vogalni kvadrat pripada dvema stranicama. Izbire, ki se razlikujejo zgolj po simetriji (rotacije in zrcaljenja obroča) se štejejo kot različne.

Rezultat. 237

Rešitev. Vsega skupaj imamo $\binom{12}{4} = 495$ načinov izbire štirih kvadratov na obroču dvanjastih kvadratov. Za vsako od štirih stranic obroča imamo osem kvadratov, ki niso na tej stranici, kar nam da $\binom{8}{4} = 70$ izborov, pri katerih na eni stranici obroča ni izbran noben kvadrat. Sledi, da je $495 - 4 \cdot 70 = 215$ izborov, kjer ne izpustimo nobene stranice. Vendar smo na ta način nekatere izbore odšteli dvakrat in sicer tiste, kjer istočasno izpustimo dve stranici. To lahko naredimo z izbiro 4 od 5 kvadratov v bližini enega vogala (5 načinov za en vogal, 20 za vse 4) ali pa z izbiro 4 od 4 nasproto ležečih sredinskih kvadratov (samo dva načina). To nam da $215 + 22 = 237$ načinov. Ker je izpuščanje treh ali štirih stranic v tem primeru nemogoče, je to tudi naša končna rešitev.

Naloga 36. Tri krožnice s polmeri 1, 2 in 3 se paroma dotikajo, kot je prikazano na sliki. Izračunajte ploščino trikotnika, določenega s tremi dotikališči.

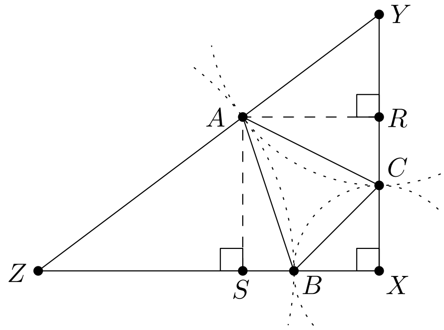


Rezultat. $\frac{6}{5}$

Rešitev. Središča treh krožnic označimo z X, Y, Z. Nadalje z A, B in C označimo dotikališča kot je prikazano na sliki spodaj. Trikotnik XYZ ima stranice dolžin $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ in $2 + 3 = 5$, kar pa je ravno trojica števil, ki zadostuje Pitagorovem izreku. Trikotnik XYZ je torej pravokoten s pravim kotom pri oglišču X. Za izračun ploščine trikotnika ABC moramo odšteti ploščine trikotnikov XCB, YAC in ZBA od ploščine trikotnika XYZ, ki je enaka $\frac{1}{2}(3 \cdot 4) = 6$.

- Trikotnik XCB je pravokoten, torej je njegova ploščina enaka $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.
- Za izračun ploščine trikotnika YAC, moramo najprej poiskati dolžino višine AR. Ker sta si trikotnika RYA in XYZ podobna v razmerju $YA/YZ = \frac{2}{5}$ sledi, da je $AR = \frac{2}{5}ZX = \frac{8}{5}$. Ploščina trikonika YAC je torej enaka $\frac{1}{2}(\frac{8}{5} \cdot 2) = \frac{8}{5}$.
- Podobno izračunamo tudi ploščino trikotnika ZBA. Uporabimo podobnost trikotnikov $\triangle SAZ \sim \triangle XYZ$ z razmerjem $\frac{3}{5}$, da dobimo $AS = \frac{9}{5}$. Ploščina trikotnika ZBA je torej enaka $\frac{1}{2}(\frac{9}{5} \cdot 3) = \frac{27}{10}$.

Končno lahko izračunamo željeno ploščino
$$6 - \frac{1}{2} - \frac{8}{5} - \frac{27}{10} = \frac{6}{5}.$$



Naloga 37. Neža je narisala pravilni n-kotnik za $n > 3$ in preštela njegove diagonale. Opazila je, da je število diagonal večkratnik števila 2025. Katero je najmanjše število n, ki zadošča temu pogoju?

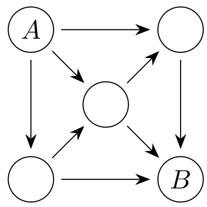
Opomba: Stranice n-kotnika niso štete kot diagonale.

Rezultat. 300

Rešitev. Enostavno je videti, da je število diagonal n-kotnika enako $\frac{1}{2}n(n-3)$. Ker je število 2025 liho, lahko ekvivalentno raziskujemo, kdaj je produkt $P = n(n-3)$ deljiv z 2025. Ker je $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ in sta si števili 3 in 5 tuji, moramo zagotoviti, da bo P deljiv s $3^4 = 81$ in $5^2 = 25$. Upoštevajte, da je lahko samo eden od faktorjev n, $n-3$ deljiv s 5 in zato mora biti en od njih deljiv s 25. Po drugi strani pa je n deljiv s 3 če in samo če je $n-3$ deljiv s 3, zato oba faktorja prispevata k skupni potenci 3, ki deli P; vendar je samo eden od faktorjev n, $n-3$ lahko deljiv s 3^k za $k \geq 2$. To pomeni, da je eden od faktorjev deljiv s $3^3 = 27$.

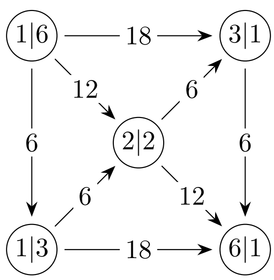
Če bi bil eden od faktorjev deljiv tako s 25 kot s 27, bi bil enak vsaj $25 \cdot 27 = 675$. Preverimo, ali lahko najdemo manjšo vrednost, če izberemo enega od faktorjev (recimo m), ki je deljiv s 27, in drugega ($m \pm 3$), ki je deljiv s 25 (tako je bodisi $n = m$ bodisi $n = m + 3$). Po prvem pogoju imamo $m = 27k$ za neko naravno število k in nas zanima najmanjša vrednost k, za katero je $27k \pm 3$ deljiv s 25 (pri eni od možnosti za predznak). Ker je $25k$ vedno deljiv s 25, lahko ekvivalentno obravnavamo izraz $2k \pm 3$, ki je prvič deljiv s 25 za $k = 11$ in pozitiven predznak. Torej je $m = 27 \cdot 11 = 297$ in $n = m + 3 = 300$.

Naloga 38. David se odpravi na potovanje po poteh spodnjega diagrama. Začne v vozlišču A in konča v vozlišču B. Pri tem mora slediti smerem puščic na diagramu z izjemo ene uporniške poteze, kjer namerno potuje v nasprotni smeri ene od puščic. Ta uporniška poteza se mora pojaviti natanko enkrat med njegovim potovanjem, tudi če to pomeni, da za trenutek zapusti končno destinacijo. David lahko med potovanjem vsako od puščic uporabi večkrat. Na koliko načinov lahko David pripotuje od A do B pod temi pogoji?



Rezultat. 84

Rešitev. Za vsako vozlišče izračunamo (1) število (usmerjenih) poti, ki se začnejo v A in končajo v tem vozlišču, (2) število poti do B, ki se začnejo v tem vozlišču. V spodnjem diagramu, na primer, $3|1$ v zgornjem desnem vozlišču pomeni, da obstajajo natanko tri poti, ki se začnejo v začetnem vozlišču in končajo v tem vozlišču, in samo ena pot iz tega vozlišča do končnega vozlišča. Za vsako puščico je število poti, ki jo prečkajo v nasprotni smeri, podano s produktom prvega števila na končnem vozlišču in drugega števila na začetnem vozlišču, zato ta produkt izračunamo za vsako puščico in te seštevamo. Rezultat je 84.



Naloga 39. V spodnjem računu različne črke predstavljajo različne neničelne števke.

$$\begin{array}{cccccc} & N & N & N & N & N \\ & + & A & A & A & A \\ & & + & B & B & B \\ & & & + & O & O \\ & & & & + & J \\ & - & 2 & 0 & 2 & 5 \\ \hline = & N & A & B & O & J \end{array}$$

Določite največjo možno vrednost petmestnega števila $NABOJ$.

Rezultat. 18249

Rešitev. Račun lahko ekvivalnetno prepišemo kot

$$\begin{array}{cccccc} & N & N & N & N & N \\ & + & A & A & A & A \\ & & + & B & B & B \\ & & & + & O & O \\ & & & & + & J \\ - & N & A & B & O & J \\ \hline & = & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

ki se poenostavi v

$$\begin{array}{ccccc} & N & N & N & N \\ & + & A & A & A \\ & & + & B & B \\ & & & + & O \\ \hline = & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}$$

Iz tega sledi, da je $N = 1$. Na tem mestu nam ostane $\overline{AAA} + \overline{BB} + O = 2025 - 1111 = 914$, kar pomeni, da je $A = 8$. Nadaljnja redukcija $914 - 888 = 26$ daje $B = 2$, in na koncu $O = 4$. Vrednost J je lahko poljubna, vendar različna od že uporabljenih številk, zato je največja možna vrednost $NABOJ$ enaka 18249.

Naloga 40. Petsto organizatorjev tekmovanja Náboj je glasovalo o tekmovalnih problemih. Vsak izmed organizatorjev je za vsak problem glasoval "za" ali "proti". Po glasovanju o prvem problemu se je nekaterim od organizatorjev, ki so glasovali "za", sistem glasovanja zazdel tako dolgočasen, da so se odločili zapustiti sobo. Pri tem nobeden izmed organizatorjev, ki so glasovali "proti", ni zapustil sobe. Pri glasovanju o drugem problemu je "za" glasovalo isto število organizatorjev kot pri prvem glasovanju, število glasov "proti" pa je bilo enako le tretjini glasov "proti" iz prvega glasovanja. Poleg tega vemo, da je 120 organizatorjev glasovalo "za" oba problema in da jih je 70 glasovalo "proti" obema problemoma. Koliko organizatorjev je zapustilo sobo po prvem glasovanju?

Rezultat. 150

Rešitev. Označimo z YN število organizatorjev, ki so v prvem glasovanju glasovali za, v drugem pa proti; podobno definiramo YY, NN in NY. Naj bo YX število organizatorjev, ki so po prvem glasovanju zapustili sobo. Imamo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} YY + YN + NY + NN + YX &= 500 \\ YY + YN + YX &= YY + NY \\ NY + NN &= 3(YN + NN) \end{aligned}$$

Če vstavimo $YY = 120$ in $NN = 70$ ter preuredimo člene, dobimo

$$\begin{array}{rcrcrcr} YN & + & NY & + & YX & = & 310 \\ YN & - & NY & + & YX & = & 0 \\ -3YN & + & NY & & & = & 140 \end{array}$$

Če pomnožimo drugo enačbo z 2 in seštejemo vse enačbe, dobimo $3YX = 450$, zato je $YX = 150$. Preostali dve spremenljivki sta enaki $YN = 5$ in $NY = 155$.

Naloga 41. Določite število takih parov (a, b) naravnih števil, ki zadoščajo $a \le b$ in za katere lahko števila a, b in $D(a, b)$ (največji skupni delitelj števil a in b) uredimo v aritmetično zaporedje, katerega vsota je 2025.

Opomba: Aritmetično zaporedje je tako zaporedje, pri katerem je razlika dveh zaporednih členov vedno enaka.

Rezultat. 12

Rešitev. Naj bo $g = D(a, b)$. Potem je $a = ga'$ in $b = gb'$ za neki naravni števili a' in b'. Ker je $g \le a \le b$, je tričlensko aritmetično zaporedje enako ali (g, a, b) ali njegov obrat; v obeh primerih velja $a - g = b - a$ oziroma $b = 2a - g$, kar postane $b' = 2a' - 1$ po deljenju z g. Iz pogoja o vsoti dobimo

$$g + a + b = g(1 + a' + 2a' - 1) = 3ga' = 2025,$$

torej je $ga' = 675 = 3^3 5^2$. To število ima $(3 + 1) \cdot (2 + 1) = 12$ pozitivnih deliteljev in sedaj je potrebno preveriti, ali vsak tak delitelj daje veljavno vrednost a', torej tako, ki jo je mogoče dopolniti do veljavnega para (a, b). Res, če je $b' = 2a' - 1$, $g = 675/a'$, $a = ga' = 675$, $b = gb'$, imamo $a \le b$, ker je $ga' \le g(2a' - 1)$ za vsaki naravni števili a', g, in tudi

$$D(a, b) = D\big(ga', g(2a' - 1)\big) = g \cdot D(a', 2a' - 1) = g,$$

ker sta si a' in $2a' - 1$ tuji za vsako naravno število a'.

Naloga 42. Vsaka ekipa v vrtcu Náboj na začetku dobi prve 3 naloge iz nabora 16 oštevilčenih nalog. Vsaka ekipa ima svoj sklop nalog, vsi sklopi vsebujejo 16 enakih nalog, oštevilčenih na enak način. Ko ekipa reši nalogo, dobi novo nalogo iz svojega nabora z najnižjo razpoložljivo številko. Po tekmovanju se je izkazalo, da nobeni dve ekipi nista rešili popolnoma enakega nabora nalog. Kolikšno je največje možno število ekip, ki so sodelovale na tem tekmovanju?

Rezultat. 697

Rešitev. Upoštevajte, da je množica nalog, ki jih reši ekipa, popolnoma določena z množico nerešenih nalog in obratno; to lahko vidimo tudi kot množico nalog, ki jih je ekipa pustila na mizi ob koncu tekmovanja, kar je lahko katera koli množica velikosti največ 3. Zato je ekip, ki so tekmovale, največ

$$\binom{16}{0} + \binom{16}{1} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} = 697.$$

Naloga 43. Naj bodo a, b, c in d taka realna števila, da velja

$$\begin{aligned} 2a + 2b - ab &= 2025, \\ 2b + 2c - bc &= 47, \\ 2c + 2d - cd &= 5. \end{aligned}$$

Določite vrednost izraza $2a + 2d - ad$.

Rezultat. 51

Rešitev. S pomočjo formule $(x - 2)(y - 2) = xy - 2x - 2y + 4$ lahko dane enakosti preuredimo v sledeče enačbe

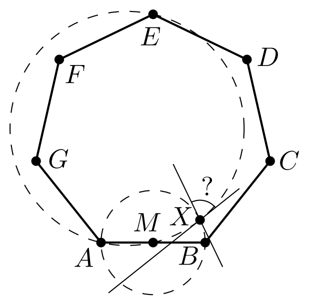
$$\begin{aligned} (a - 2)(b - 2) &= -2021, \\ (b - 2)(c - 2) &= -43, \\ (c - 2)(d - 2) &= -1. \end{aligned}$$

Izračunati želimo $(a - 2)(d - 2)$. Zaradi druge enačbe vemo, da $b \ne 2$ in $c \ne 2$ in zato lahko želen izraz izračunamo kot

$$(a - 2)(d - 2) = \frac{(a - 2)(b - 2)(c - 2)(d - 2)}{(b - 2)(c - 2)} = \frac{(-2021) \cdot (-1)}{-43} = -47.$$

Torej je $2a + 2d - ad = -(-47) + 4 = 51$.

Naloga 44. Naj bo točka M središče stranice AB pravilnega sedemkotnika $ABCDEFG$. Krožnica, ki ima središče v M in gre skozi A, seka trikotniku AME očrtano krožnico, v točki X, ki leži znotraj sedemkotnika. Kolikšna je velikost (v stopinjah) ostrega kota med tangentama na obe krožnici v točki X?



Rezultat. $540°/7$

Rešitev. Ker je $ABCDEFG$ pravilen sedemkotnik, je kot AME pravi in je AE premer večje krožnice. Namesto da bi merili kot med tangentama v točki X, lahko ekvivalentno obravnavamo kot med tangentama v točki A, ki je druga točka presečišča obeh krožnic. Ta kot je enak kotu BAE med ustreznimi premeri, saj so ti pravokotni na tangente. Njegovo velikost, $\frac{3}{7} \cdot 180°$, lahko enostavno določimo s pomočjo simetrije pravilnega sedemkotnika ali pa prepoznamo, da je to obodni kot, ki ustreza središčnemu kotu $\frac{3}{7} \cdot 360°$ od sedemkotniku očrtane krožnice.

Naloga 45. Določite vsoto števil $(\pm 1 \pm 2 \pm 4 \pm \cdots \pm 2^{99})^2$ za vse možne izbire 100 predznakov.

Rezultat. $\frac{2^{100} \cdot (4^{100}-1)}{3}$

Rešitev. Začnimo z bolj splošno opazko: za katero koli naravno število n in realna števila $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je vsota izrazov $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$ za vse možne izbire predznakov enaka

$$2^n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Da vidimo, zakaj to velja, razčlenimo $(\pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n)^2$. Vsaka razčlenitev vsebuje kvadratne člene x_i^2, pa tudi mešane člene v obliki $\pm 2x_ix_j$ za $i \neq j$. Vsak člen x_i^2 se pojavi v vsaki možni razčlenitvi ne glede na izbrane predznake. Ker je 2^n različnih kombinacij znakov, ti kvadratni členi prispevajo skupni faktor 2^n. Po drugi strani pa se mešani členi $\pm 2x_ix_j$ pojavijo s pozitivnim predznakom v točno polovici primerov in z negativnim predznakom v drugi polovici primerov, odvisno od tega, ali imata x_i in x_j isti predznak ali ne. Ker se ti prispevki izničijo po vseh možnih izbirah predznakov, ne vplivajo na končno vsoto. Tako se skupna vsota poenostavi na 2^n kratnik vsote kvadratnih členov, kar dokazuje formulo. V našem primeru imamo $x_k = 2^{k-1}$ in želena vsota je

$$2^{100} \cdot (1 + 4^1 + \cdots + 4^{99}).$$

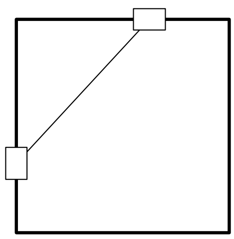
Po formuli za vsoto geometrijske vrste

$$1 + 4^1 + \cdots + 4^{99} = \frac{4^{100}-1}{4-1} = \frac{4^{100}-1}{3}$$

dobimo končni rezultat

$$\frac{2^{100} \cdot (4^{100}-1)}{3}.$$

Naloga 46. Dva avtomobila, povezana z gumijastim trakom, vozita po cesti, ki ima obliko kvadrata, kot je prikazano na sliki. Z vožnjo začneta skupaj na enem vogalu kvadrata. Vsak avto nato potuje neomejeno s konstantno celoštevilsko hitrostjo. Gumijasti trak je izredno elastičen, vendar se bo pretrgal, če ga raztegneta točno čez diagonalo kvadrata. Počasnejši avto se pelje s hitrostjo 24 km/h, hitrejši pa s hitrostjo n km/h, oba v isto smer. Določite takšno najmanjšo celoštevilsko vrednost n, večjo od 24, da se gumijasti trak ne bo nikoli pretrgal.



Rezultat. 56

Rešitev. *Segment* definiramo kot eno stran ceste kvadratne oblike. Naj bosta $m = 24$ in $n > m$ hitrosti počasnejšega in hitrejšega avtomobila, v tem vrstnem redu. Upoštevajte, da je to, ali se elastika kdaj pretrga, odvisno le od razmerja hitrosti, ne pa od njihovih absolutnih vrednosti. Naj sta torej m', n' tuji pozitivni celi števili z $m' : n' = m : n$. Trdimo, da se trak nikoli ne pretrga natanko tedaj, ko je $n' - m'$ večkratnik 4.

Najprej analizirajmo primer, ko $n' - m'$ ni večkratnik števila 4. Ko počasnejši avto prevozi m' segmentov, je v vogalu. Istočasno je hitrejši avto prevozil n' segmentov (zaradi razmerja hitrosti), zato je tudi v vogalu. Ker $n' - m'$ ni deljivo s 4, ta dva vogala ne moreta sovpadati. Če se izkaže, da sta nasprotna vogala, se trak takoj raztrga. Če sta sosednja vogala, se avtomobila po prevoženih še m' in n' segmentih znajdeta v nasprotnih vogalih, kar tudi povzroči pretrganje traku.

Predpostavimo sedaj, da je $n' - m'$ večkratnik števila 4. Najprej upoštevajmo, da avtomobila ne moreta biti oba v vogalu prej kot takrat, ko je počasnejši avto prevozil m' segmentov. V nasprotnem primeru, recimo po $s < m'$ segmentih počasnejšega avtomobila, bi hitrejši avto prevozil $\frac{s}{m'} \cdot n'$ segmentov, kar ne more biti celo število, ker sta m' in n' tuji števili. Zato oba avtomobila prvič dosežeta vogale hkrati, ko počasnejši avto prevozi m' segmentov, hitrejši pa n'. Po predpostavki je $n' - m'$ večkratnik števila 4, zato morata pristati na istem vogalu. Ko sovpadata v vogalu, se celotna situacija dejansko ponastavi (po možnosti z začetkom v drugem vogalu), tako da se trak nikoli ne pretrga.

Poiskati moramo še najmanjši $n > 24$, ki izpolnjuje dani pogoj. Imeti moramo $n' - m'$ deljivo s 4. V tem primeru morata biti tako m' kot n' lihi števili. Ker je m' delitelj števila $m = 24$, sta edini možni vrednosti 1 in 3. Če je $m' = 1$, je najmanjše število n', ki je tuje številu m' in za katerega je izraz n'–1 večkratnik 4, število 5. Potem je $n = \frac{24}{1} \cdot 5 = 120$. Če je $m' = 3$, je najmanjše število n', ki je tuje številu m' in za katerega je izraz n'–3 deljiv s 4, število 7. Tukaj je $n = \frac{24}{3} \cdot 7 = 56$. Ker je 56 manjše od 120, sklepamo, da je želena najmanjša vrednost n enaka 56.

Naloga 47. Za mizo 2025 igralcev igra igro. Na koncu vsakega kroga igre poraženec vsakemu drugemu igralcu podeli toliko kovancev, kolikor jih ta (drugi) igralec trenutno ima (tako da lahko različni igralci prejmejo različne zneske denarja). Po 2025 krogih ima vsak igralec natanko 2^{3000} kovancev. Poleg tega noben igralec ni imel dolgov v nobenem trenutku igre. Določite začetno število kovancev, ki jih je imel poraženec prvega kroga, če je vsak igralec izgubil natanko v enem krogu igre.

Rezultat. $2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot \left(1 + 2025 \cdot 2^{2024}\right)$

Rešitev. Označimo igralce s števili 1, 2, ..., 2025 in število kovancev, ki jih ima igralec p po r krogih, kot $m_{p,r}$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je igralec 1 izgubil prvi krog, igralec 2 drugega in tako naprej. Označimo z $M = 2^{3000}$ število kovancev, ki jih ima na koncu igre vsak igralec.

Za igralca p se po porazu v p-tem krogu znesek njegovih kovancev po vsakem krogu podvoji, dokler ne doseže M na koncu igre; torej je za krog $p \leq r$ količina kovancev za igralca p enaka

$$m_{p,r} = \frac{M}{2^{2025-r}}.$$

Še več, ker je r-ti igralec izgubil r-ti krog, je izgubil toliko kovancev, kolikor jih imajo vsi drugi igralci skupaj, in ker je skupni znesek kovancev v igri $2025M$, sledi, da

$$m_{r,r} = m_{r,r-1} - \sum_{p \neq r} m_{p,r-1} = m_{r,r-1} - (2025M - m_{r,r-1}).$$

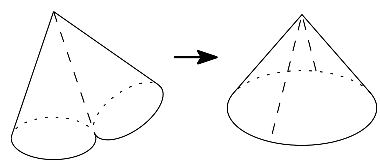
S preureditvijo enačbe dobimo

$$m_{r,r-1} = \frac{m_{r,r}}{2} + \frac{2025M}{2} = \frac{M}{2^{2026-r}} + \frac{2025M}{2}.$$

Če vstavimo $r = 1$, dobimo želeni rezultat

$$\frac{M}{2^{2025}} + \frac{2025M}{2} = 2^{975} + 2025 \cdot 2^{2999} = 2^{975} \cdot \left(1 + 2025 \cdot 2^{2024}\right).$$

Naloga 48. Gal ima tri enake papirnate modele plašča pravilnega stožca (brez osnovne ploskve). Osnovna ploskev stožca je krog, pravokoten na os, ki povezuje njegovo središče z vrhom stožca, vendar ta krog ni del papirnatih modelov. Najprej je Gal postavil dva stožca skupaj od roba do vrha tako, da sta si delila stranico stožca. Oba plašča stožcev je odrezal vzdolž skupne stranice in združil obe površini tako, da je ustvaril plašč večjega stožca (kot je prikazano na sliki). Prostornina polnega stožca, ki ustreza temu večjemu plašču, je bila 10. Nato je Gal na enak način združil ta večji plašč s tretjim (prvotnim) plaščem stožca in nato nameraval izmeriti prostornino nastalega stožca. Ugotovil je, da je rezultat enak nič. Kolikšna je bila prostornina prvotnega stožca?



Rezultat. $\sqrt{10}$

Rešitev. Dejstvo, da ima končni stožec ničelni volumen, pomeni, da združitev treh enakih plaščev povzroči popolnoma ravno obliko – poln krog. Posledično vsak posamezen plašč stožca, ko je sploščen, ustreza krožnemu izseku s središčnim kotom 120°. Naj bo l stranica prvotnega stožca in r polmer njegove osnovne ploskve. Iz središčnega kota dobimo zvezo $l = 3r$. Upoštevajmo, da stranica stožca ostane nespremenjena pri vseh treh stožcih, vključno z degeneriranim.

Vmesni stožec, ki ga tvori spajanje dveh plaščev, ima središčni kot 240°, kar mu daje polmer osnovne ploskve $2r$. Z uporabo formule za prostornino stožca dobimo

$$10 = \frac{1}{3}\pi(2r)^2\sqrt{(3r)^2 - (2r)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi r^3.$$

Od koder lahko izrazimo r^3 in s pomočjo tega izračunamo prostornino prvotnega stožca kot

$$\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{(3r)^2-r^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3=\sqrt{10}.$$

Naloga 49. Za koliko pozitivnih celih števil n, ki so manjša ali enaka 200, ima enačba

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor-n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor=1$$

vsaj eno celoštevilsko rešitev x, kjer je $1\le x\le 200$?

Opomba: Simbol $\lfloor t\rfloor$ označuje največje celo število, manjše ali enako realnemu številu t.

Rezultat. 82

Rešitev. Ko je n večkratnik števila 5, je leva stran enačbe večkratnik 5; zato v tem primeru ni rešitve. Poleg tega je za $n=1$ leva stran vedno nepozitivna, tako da tudi tukaj ni rešitve. V vseh drugih primerih vedno obstaja rešitev, če zanemarimo omejitev $x\le 200$. Preuredimo enačbo v

$$5\left\lfloor\frac{x}{5}\right\rfloor=n\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor+1 \qquad (\heartsuit)$$

za jasnost; sedaj je leva stran vedno večkratnik števila 5, zato preučimo rešitve na podlagi vrednosti $n \bmod 5$.

Če je $n=5k+4$, potem je $x=n+1=5k+5$ rešitev (obe strani $(\heartsuit)$ sta enaki x), torej so vsa števila te oblike veljavna (40 števil). Če je $n=5k+3$, potem, da je desna stran večkratnik 5, potrebujemo $\lfloor x/n\rfloor$ vsaj 3, kar ni mogoče za $n\ge 67$, saj bi to zahtevalo, da je vrednost x večja od 200. Za $n\le 66$ (13 števil) damo $x=3n+1$, zaradi česar sta obe strani $(\heartsuit)$ enaki x. Na podoben način, če je $n=5k+2$, mora biti $\lfloor x/n\rfloor$ vsaj 2, kar se ne more zgoditi za $n\ge 101$, za ostale pa izberemo $x=2n+1$ (20 števil). Nazadnje za $n=5k+1$ so dovoljeni le $n\le 50$, za katere uporabimo $x=4n+1$ (10 števil, vendar 1 ne daje veljavne rešitve, ostane samo 9 veljavnih števil). Skupaj je $40+13+20+9=82$ takih števil n.

Naloga 50. Adam ima neomejeno količino 20-stranih kock, katerih ploskve so oštevilčene s števili od 1 do 20. Naenkrat vrže izbrano število kock z namenom, da bi v enem metu padla natanko ena ali natanko dve enici. Koliko kock naenkrat naj vrže Adam, da bo verjetnost uspeha čim večja?

Rezultat. 28

Rešitev. Verjetnost, ki nas zanima je vsota verjetnosti, da pade natanko ena enica

$$P_1=n\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$$

in verjetnosti, da padeta natanko dve enici

$$P_2=\binom{n}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{n-2}.$$

Vsoto P_1+P_2 lahko poenostavimo v

$$a_n=\frac{1}{2\cdot 19^2}n(n+37)\left(\frac{19}{20}\right)^n.$$

Zanima nas za kateri n dobimo $a_{n+1}<a_n$, oziroma kdaj velja

$$\frac{19}{20}(n+1)(n+38)<n(n+37),$$

ki se lahko nadalje poenostavi v

$$n^2-n-722>0.$$

Za naravno število n je to enakovredno $n\ge 28$. Neposrednemu reševanju kvadratne neenačbe se lahko izognemo tako, da najprej pridobimo oceno prek $n^2>722$, ki daje $n\ge 27$, kar je nezadostno, vendar veljavnosti naslednje vrednosti ni težko preveriti. Ta izračun tudi pokaže, da zaporedje a_n najprej narašča in nato pada, tako da je 28 res indeks njegovega največjega člena.

Naloga 51. Naj bo D točka na stranici AC trikotnika ABC, tako da je $AD = BC$ in $BD = CD$. Dodatno velja $\angle BAC = 30°$. Določite velikost kota DBA (v stopinjah).

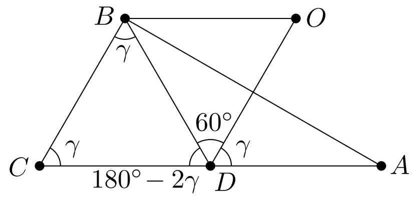
Rezultat. $30°$, $110°$ (2 rešitvi)

Rešitev. Naj bo O središče kroga $\triangle ABD$; potem je $\angle DOB = 2\angle BAD = 60°$, zato je $\triangle BDO$ enakostranični; torej $AO = DO = BD = CD$. Z $AD = BC$ dobimo skladnost enakokrakih trikotnikov AOD in CDB. Označimo $\gamma = \angle ACB$; potem tudi $\angle CBD = \angle DAO = \angle ADO = \gamma$. Analizirajmo sedaj tri primere v odvisnosti od položaja O glede na kot BAC.

Najprej predpostavimo, da je O zunaj kota, torej je bližje stranici AB kot stranici AC. V tem primeru imamo

$$180° = \angle ADO + \angle ODB + \angle BDC = \gamma + 60° + (180° - 2\gamma) = 240° - \gamma,$$

torej $\gamma = 60°$ in enostavno dobimo $\angle DBA = 30°$.



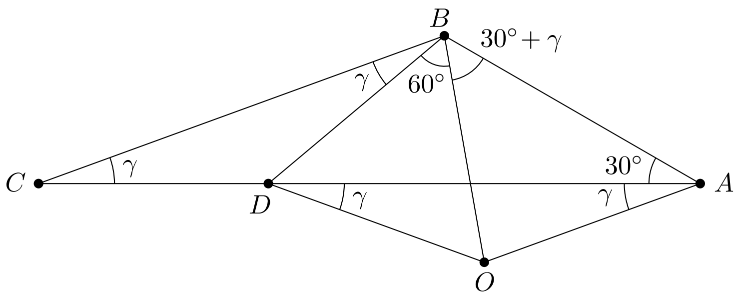
Naj bo sedaj O zunaj $\angle BAC$ in bližje stranici AC. Potem $\angle OBA = \angle BAO = 30° + \gamma$, torej

$$\angle CBA = \angle OBA + \angle DBO + \angle CBD = (30° + \gamma) + 60° + \gamma = 90° + 2\gamma$$

in

$$180° = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 30° + (90° + 2\gamma) + \gamma = 120° + 3\gamma,$$

iz česar sledi $\gamma = 20°$. Torej je $\angle DBA = 90° + \gamma = 110°$.



Na koncu dokažimo, da O pod danimi pogoji ne more biti znotraj kota BAC. To velja, ker je v takem primeru $\angle DOA > 120°$, vendar $\angle BDC < 180° - 60° = 120°$, torej trikotnika AOD in BDC ne moreta biti skladna.

Naloga 52. Naj bo f funkcija, ki vsakemu paru nenegativnih celih števil priredi nenegativno celo število in je definirana z naslednjimi pogoji:

1. Za vsak x: $f(x, x) = 0$.
2. Za vsak x, y: $f(x, y) = f(y, x)$.
3. Za vsak x, y: $f(2x, 2y) = f(x, y)$.
4. Za vsak x, y: $f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y)$.
5. Za vsak x, y: $f(2x + 1, 2y) = f(x, y) + 1$.

Poiščite vsoto vseh nenegativnih celih števil t, $t \leq 60$, za katere velja $f(20, t) = 2$.

Rezultat. 415

Rešitev.

Če opazujemo lastnosti funkcije, lahko sklepamo, da $f(x, y)$ šteje število različnih položajev v binarnih predstavitvah x in y. Pravzaprav lahko vidimo funkcijo kot rekurziven algoritem; naj bo $x' = \lfloor x/2 \rfloor$ in $y' = \lfloor y/2 \rfloor$, tj. x' in y' dobimo z odstranitvijo najmanj pomembnega bita (to je najbolj desni bit, ki predstavlja 2^0 oziroma 1) v x oziroma y.

- Če $x = y$, potem $f(x, y) = 0$, kar pomeni da ni razlik.

- Če sta x in y soda, se njuna najmanj pomembna bita ujemata, zato odstranimo ta bit in izračunamo $f(x', y')$.
- Če sta oba liha, se njuna najmanj pomembna bita še vedno ujemata, kar vodi do enakega zmanjšanja $f(x', y')$.
- Če je eden sod, drugi pa lih, se njuna najmanj pomembna bita razlikujeta, zato povečamo štetje za ena in ponovno nadaljujemo z $f(x', y')$.

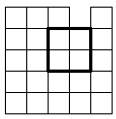
Ta postopek učinkovito primerja obe števili bit za bitom, pri čemer se število poveča natančno takrat, ko se istoležna bita razlikujeta.

Sedaj moramo poiskati vsoto vseh nenegativnih celih števil $t \leq 60$, za katere je $f(20, t) = 2$. To pomeni, da iščemo števila t z največ šestimi binarnimi števkami, ki se razlikujejo od $20 = 010100_2$ na natanko dveh mestih (upoštevati moramo, da 61, 62, 63 ni mogoče dobiti z zamenjavo vrednosti natanko dveh bitov v binarni predstavitvi števila 20). Za izračun skupne vsote moramo analizirati prispevek, ki ga ima pozicija vsakega bita. Ker izbiramo dva bita od šestih, katerima želimo zamenjati vrednost, je takih števil $\binom{6}{2} = 15$. Vsak bit zamenja vrednost v točno petih od teh števil (kar ustreza primerom, ko sta obrnjena ta določen bit in eden od preostalih petih) in ostane nespremenjen v ostalih desetih številih. Zdaj te prispevke ustrezno seštejemo.

Pet števil ima obrnjen najmanj pomemben bit, kar prispeva $5 \cdot 2^0$ k skupni vsoti, medtem ko preostalih deset števil ohrani ta bit nespremenjen. Podobno ima pet števil obrnjen drugi bit, ki vsoti doda $5 \cdot 2^1$. Če nadaljujemo s tem vzorcem, so prispevki iz ostalih pozicij bitov: $10 \cdot 2^2$ (saj ta bit prispeva v desetih primerih brez zamenjave vrednosti), $5 \cdot 2^3$, $10 \cdot 2^4$ in $5 \cdot 2^5$. Iz tega zlahka sledi, da je skupna vsota dana z

$$5 \cdot (010100_2 + 111111_2) = 5 \cdot (20 + 63) = 415.$$

Naloga 53. Beti je narisala mrežo velikosti 45×45 in preštela število kvadratov velikosti 1×1 v njej ter ugotovila, da jih je 2025. Bila je nesrečna, saj ima iz osebnih razlogov raje slike z 2024 majhnimi kvadratki. Da bi to popravila, je z roba mreže odstranila en kvadrat velikosti 1×1. Nato je preštela vse možne kvadrate (ne nujno velikosti 1×1) v prilagojeni mreži. Ker je Beti vraževerna in se boji števil deljivih s 13, je odrezala kvadrat iz mreže tako, da skupno število kvadratov v prilagojeni mreži ni deljivo s 13. Spodnja slika prikazuje primer: mreža velikosti 5×5 z odstranjenim enim robnim kvadratom in označenim kvadratom velikosti 2×2 v novi mreži. Določite koliko možnih izbir za odstranitev robnega kvadrata ima Beti, da izpolni svoj pogoj.



Rezultat. 152

Rešitev. Skupno število kvadratov v začetni mreži velikosti 45×45 je podano z

$$S = 1^2 + 2^2 + \cdots + 45^2 = \frac{1}{6} \cdot 45 \cdot 46 \cdot 91.$$

Ko Beti odstrani en kvadrat velikosti 1×1 iz roba mreže, se skupno število kvadratov zmanjša za R, to je število kvadratov, ki so vsebovali odstranjeni kvadrat. Ker je S sam deljiv s 13, bo prilagojena vsota deljiva s 13, če in samo če je R deljiv s 13. Zato moramo najti vrednosti R, ki so večkratniki števila 13.

Če želimo določiti R moramo upoštevati, da je vsak kvadrat X, ki vsebuje dani robni kvadrat x, enolično določen z izbiro dveh vogalnih kvadratov X vzdolž roba, tako da x leži med njima (kateri koli vogalni kvadrat lahko sovpada z x). Zato je za robni kvadrat, ki se nahaja na položaju n vzdolž ene strani (šteto od vogala), število takih kvadratov:

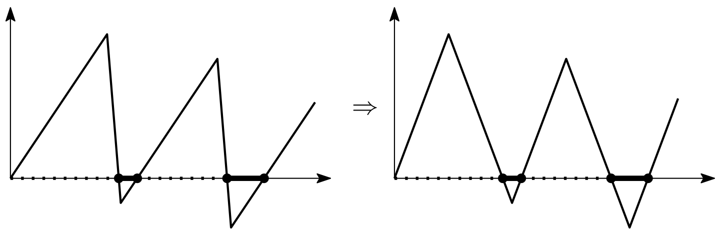
$$R = n(46 - n).$$

Torej moramo identificirati take vrednosti n, pri katerih je $n(46 - n)$ deljivo s 13, saj se je treba tem položajem izogibati. Če preverimo vrednosti za $1 \leq n \leq 23$ (saj nam simetrija omogoča, da upoštevamo samo polovico ene stranice), ugotovimo, da se deljivost s 13 pojavi ravno pri $n = 7, 13, 20$. Zato ima vsaka stranica mreže šest takšnih robnih kvadratov, nobeden od njih ni vogal, tako da je na štirih stranicah $4 \cdot 6 = 24$ robnih kvadratov, ki se jim je treba izogibati. Skupno število robnih kvadratov je $4 \cdot 44 = 176$, zato je število veljavnih izbir za Becky $176 - 24 = 152$.

Naloga 54. Zajec in želva tekmujeta v dirki. Želva gre počasi, a vztrajno, medtem ko zajec teče 6-krat hitreje, a se vsakič, ko preteče 9 metrov naprej, vrne 7 metrov nazaj, da bi se posmehoval želvi. Upoštevajte časovni interval od začetka dirke do zadnjega trenutka, ko se srečata na stezi. Kolikšen del tega časa je bila želva v vodstvu?

Rezultat. $\frac{22}{45}$

Rešitev. Zajec teče naprej 9 metrov, a se nato premakne nazaj za 7 metrov, dejansko pridobi $9 - \frac{9}{6} = \frac{45}{6}$ metrov, ko teče naprej in izgubi $7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$ metrov, ko teče nazaj. Za poenostavitev analize se premaknemo v referenčni okvir, v katerem želva miruje. V tem okviru je zajčeva hitrost, ko teče nazaj, večja od hitrosti, ko teče naprej. Posledično čas v splošnem ni sorazmeren z razdaljo, ki jo preteče zajec. Vendar pa sorazmernost velja za intervale, ki se začnejo in končajo, ko se zajec in želva srečata. To izhaja iz dejstva, da v vsakem takem intervalu ostaja zajčeva povprečna hitrost enaka, saj sta pretečeni razdalji pri obeh hitrostih (naprej in nazaj) enaki. Poleg tega prilagoditev gibanja zajca na konstantno povprečno hitrost v teh intervalih ohrani skupni čas in pretečeno razdaljo. Naslednji grafi razdalje in časa prikazujejo premik od zajčeve dejanske k povprečni hitrosti.



Sedaj upoštevamo zajčeve *cikle*, ki so definirani kot obdobja, v katerih zajec preteče vso razdaljo napre in vso razdaljo nazaj. Za enostavnejše izračune vse razdalje pomnožimo s 6. V tem okviru se zajec premakne 45 metrov naprej in 49 metrov nazaj v vsakem ciklu in del cikla preživi določeno razdaljo za želvo: 4 metre v prvem ciklu, 12 metrov v drugem in tako naprej. Vsak cikel zajema 94 metrov, tako da je zadnji polni cikel enajsti, kjer zajec preživi za želvo 84 metrov in cikel konča 44 metrov za želvo. Po tem zajec preteče še 46 metrov, dokler se zadnjič ne sreča z želvo, 44 od teh metrov pa preživi za njo.

Skupna razdalja, ki jo je zajec pretekel do tega zadnjega srečanja, je $11 \cdot 94 + 46 = 1080$ metrov. Od tega je razdalja, porabljena za sledenje želvi, $(4 + 12 + \cdots + 84) + 44 = 528$ metrov. Tako je del časa, ko je bila želva v vodstvu do njunega zadnjega srečanja $\frac{528}{1080} = \frac{22}{45}$.

Naloga 55. Mark je prejel zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, za katerega velja $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ in

$$a_{n+1}^2 + 3a_n^2 - 4a_{n-1}^2 = 4a_n \cdot (a_{n+1} - a_{n-1}) + 2n - 1$$

za vse $n \geq 2$. Zaporedje s to relacijo sicer ni enolično določeno, zato Mark računa člen za členom, pri čemer vsakič, ko je več možnih rešitev za neki člen, izbere največjo izmed njih. Določi člen a_{13}.

Rezultat. 12274

Rešitev. S preoblikovanjem rekurzivne relacije dobimo

$$a_{n+1}^2 + 4a_n^2 - a_n^2 - 4a_{n-1}^2 - 4a_n \cdot a_{n+1} + 4a_n \cdot a_{n-1} = 2n - 1,$$

kar se nadalje poenostavi v

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 - (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 = 2n - 1.$$

Ker je $(a_2 - 2 \cdot a_1)^2 = (3 - 2)^2 = 1 = 1^2$ in $(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$, preprost induktivni razmislek pokaže, da velja

$$(a_{n+1} - 2 \cdot a_n)^2 = (a_n - 2 \cdot a_{n-1})^2 + 2n - 1 = n^2.$$

To nam da dva kandidata za člen a_{n+1}:

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n \quad \text{ali} \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n - n.$$

Ker Mark vedno izbira večjega izmed njih, tako vedno izbere

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + n.$$

Uporaba rekurzivne relacije iterativno od $a_1 = 1$ implicira

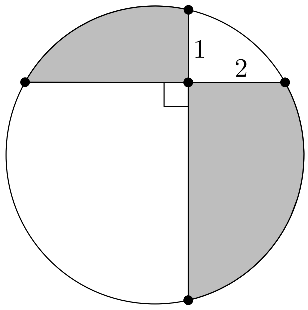
$$a_{13} = 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0.$$

To lahko poenostavimo na naslednji način:

$$\begin{aligned}
a_{13} &= 1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 2 \cdot 2^{10} + 3 \cdot 2^9 + \cdots + 12 \cdot 2^0 \\
&= 2^{12} + (2^{11} + 2^{10} + \cdots + 2^0) + (2^{10} + 2^9 + \cdots + 2^0) + (2^9 + 2^8 + \cdots + 2^0) + \cdots + (2^1 + 2^0) + 2^0 \\
&= 2^{12} + (2^{12} - 1) + (2^{11} - 1) + \cdots + (2^2 - 1) + (2^1 - 1) \\
&= 2^{12} + (2^{13} - 1) - 13 \\
&= 4096 + 8192 - 14 = 12274.
\end{aligned}$$

Markova vrednost člena a_{13} je tako 12274.

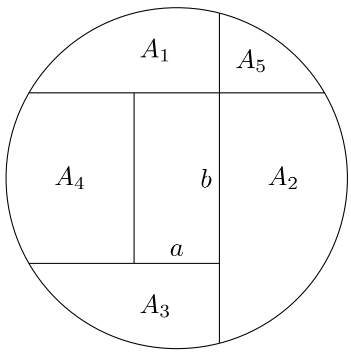
Naloga 56. Diagram prikazuje krog, razdeljen z dvema pravokotnima tetivama. Dani sta dolžini krajših delov teh dveh tetiv, kakor tudi razmerje sive površine proti beli površini, ki je enako $\frac{5\pi-2}{5\pi+2}$. Določite polmer kroga.



Rezultat. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Rešitev.

Obravnavajmo zrcaljenje obeh tetiv čez središče kroga. Označimo nekatere površine in dolžine, kot je prikazano na diagramu.



Očitno velja $A_1 = A_3$ in $A_2 = A_4 + A_5$. To implicira, da je siva površina (ki jo označimo z G) enaka

$$G = A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5,$$

medtem ko je bela površina (ki jo označimo z W) enaka

$$W = A_3 + A_4 + A_5 + ab = G + ab.$$

Upoštevajmo dano razmerje površin

$$\frac{G}{W} = \frac{G}{G + ab} = \frac{5\pi - 2}{5\pi + 2},$$

ki ga lahko preoblikujemo v

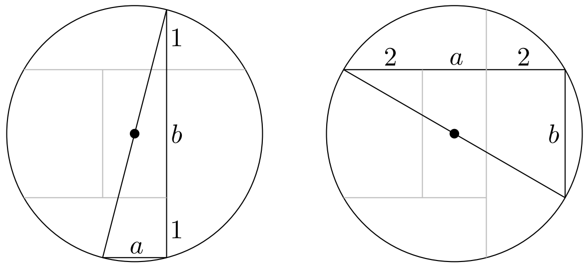
$$G = \frac{1}{4}(5\pi - 2)ab.$$

Obravnavajmo sedaj površino celotnega kroga, katerega polmer označimo z r:

$$\pi r^2 = G + W = 2G + ab = \frac{5\pi}{2}ab$$

oziroma $2r^2 = 5ab$.

Opazimo, da lahko odseke preuredimo na dva načina, da dobimo pravokotni trikotnik, včrtan v krog: enega s katetama a in $b+2$, ter drugega s katetama $a+4$ in b. Tako dobimo sistem treh enačb:



$$\begin{aligned}
2r^2 &= 5ab,\\
4r^2 &= a^2 + (2+b)^2,\\
4r^2 &= (4+a)^2 + b^2,
\end{aligned}$$

ki ga lahko preprosto rešimo. Namreč iz zadnjih dveh enačb dobimo $b = 2a + 3$, kar lahko vstavimo v prvi dve enačbi in dobimo kvadratno enačbo v a. Ena izmed rešitev ($a = -\frac{5}{3}$) ni smiselna, druga pa nam da $a = 1$, $b = 5$, in $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Naloga 57. Stavba ima 160 nadstropij. V vsakem nadstropju je hodnik, do katerega se dostopa preko dvojih glavnih vrat in na vsakem hodniku so štiri sobe. Vsaka soba ima svoja vrata, v vsaki sobi pa živi ena oseba. Na vsaka vrata, vključno z vrati hodnika, bo nameščena ena ključavnica, ključi pa bodo razdeljeni tako, da bo veljalo naslednje:

- vsaka oseba lahko dostopa do svoje sobe, vendar ne do sob drugih oseb,
- vsaka oseba lahko dostopa do hodnika v svojem nadstropju,
- dovoljeno je, da ima kdo dostop do hodnikov v drugih nadstropjih.

Vsaka ključavnica je povezana z edinstvenim ključem in se lahko odklene le s tem ključem. Vendar se ista ključavnica lahko po potrebi uporabi na več vratih, izdelati pa je mogoče poljubno število kopij njenega ključa. Posamezniki lahko imajo toliko ključev, kot je potrebno. Podjetje, odgovorno za namestitev, želi minimizirati skupne stroške izdelave ključev. Ustvarjanje novega ključa stane 3, medtem ko izdelava kopije obstoječega ključa stane 2. Kakšen je minimalen skupni strošek vseh ključev ob upoštevanju zgornjih pogojev?

Rezultat. 2432

Rešitev. Obravnavajmo čim cenejšo razporeditev ključavnic in ključev; jasno je, da ima v takem primeru vsak stanovalec največ dva ključa. Pokažimo najprej, da lahko predpostavimo, da je v vsakem nadstropju vsaj en stanovalec (oz. natanko en stanovalec, saj več kot en tak ne more obstajati), ki ima natanko en ključ. Ta ključ odklepa tako vrata od njegove sobe kot ena vrata od hodnika, medtem ko ostali stanovalci v tem nadstropju uporabljajo druga vrata, za dostop do hodnika.

Predpostavimo, da v enem nadstropju to ne drži. Potem ena vrata za dostop do hodnika, recimo jim D, uporabljata največ dva stanovalca od štirih, ki prebivajo v tem nadstropju - stanovalec a in morda stanovalec b. Če nihče od štirih stanovalcev nima ključa za vrata D, si izberemo poljubnega izmed njih in ga obravnavamo, kot da je stanovalec a. Sistem ključev in ključavnic pa spremenimo na sledeč način: Na vratih D zamenjamo ključavnico s popolnoma novo ključavnico in enako ključavnico namestimo tudi na vrata sobe stanovalca a. Sedaj potrebuje a samo en ključ, ki stane 3, medtem ko je prejšnja konfiguracija z dvema ključema stala vsaj $2 + 2 = 4$. S tem smo zmanjšali strošek za vsaj 1.

Če obstaja tudi stanovalec b, mu dodelimo ključ za druga vrata od hodnika v tem nadstropju, s čimer nismo povišali stroška. Vendar pa ima sedaj b lahko kombinacijo ključev, ki mu omogoča dostop do sobe v kakšnem drugem nadstropju; da bi to popravili, zamenjamo ključavnico na vratih od sobe stanovalca b s popolnoma novo ključavnico, s čimer povečamo strošek za največ 1.

S tem postopkom se skupni strošek za posamezno nadstropje ne poveča, zato lahko zaključimo, da je takšna konfiguracija stroškovno učinkovita, saj zagotovo ne bo dražja od poljubne alternative. V nadaljevanju zato privzamemo, da je v vsakem nadstropju natanko en stanovalec, ki ima samo en ključ.

Problem se torej pretvori na minimizacijo stroškov ključev za 160 nadstropij, kjer ima vsak hodnik le en vhod in tri ločene sobe. Naj bo n število različnih tipov ključev, označenih kot $1, 2, \ldots, n$. Vsak stanovalec prejme en ključ za svojo sobo in en ključ za hodnik. Ta dva ključa ne moreta biti iste vrste; če bi bil ključ stanovalčeve sobe enak ključu za hodnik, bi ostala dva stanovalca, ki si delita hodniški ključ, bodisi dobila dostop do stanovalčeve sobe bodisi sploh ne bi mogla vstopiti v hodnik. Prav tako nobena dva stanovalca ne smeta imeti istega para ključev, saj bi to pomenilo, da imata dostop do iste sobe. Zato je število veljavnih kombinacij ključev enako $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Ker razdeljujemo skupno $3 \cdot 160 = 480$ parov ključev, določimo spodnjo mejo za n iz neenačbe

$$\frac{1}{2}n(n-1) \geq 480.$$

Rešimo za pozitivno celo število n in dobimo $n \geq 32$. Zdaj pokažimo, da je mogoče uporabiti natanko $n = 32$ različnih tipov ključev. Da to dosežemo, razdelimo 160 nadstropij v 32 skupin po 5 nadstropij. Razporeditev ključev poteka na naslednji način (prvi ključ v paru je za hodnik, drugi za sobo):

- 15 stanovalcev v prvi skupini prejme pare ključev $(1,2),(1,3),\ldots,(1,16)$.
- Druga skupina dobi pare ključev $(2,3),(2,4),\ldots,(2,17)$.
- Ta vzorec se nadaljuje, pri čemer 31. skupina prejme pare ključev $(31,32),(31,1),\ldots,(31,14)$.
- Na koncu zadnja, 32. skupina, prejme pare ključev $(32,1),(32,2),\ldots,(32,15)$.

Zlahka vidimo, da ta razporeditev izpolnjuje dane pogoje. Zato je $n = 32$ najmanjše število unikatnih ključev, katerim dodamo še 928 kopij, da pokrijemo vseh $160 \cdot 3 \cdot 2 = 960$ ključev. Ob upoštevanju stanovalcev, omenjenih v prvem odstavku, je treba izdelati skupno $32 + 160 = 192$ unikatnih ključev. Tako je končni strošek izračunan kot $192 \cdot 3 + 928 \cdot 2 = 2432$.