

Úloha 1. Na pouti se objevil nový stánek nabízející obměnu klasické hry se shazováním plechovek. Tentokrát je každá plechovka označená číslem a návštěvník si může libovolně vybrat, které přesně plechovky srazí. Vyhrává jen tehdy, když je součet jejich čísel roven 50. Složte z plechovek na obrázku vítěznou sadu a vypište příslušná čísla ve vzestupném pořadí.

			24	
		16		30
	18		6	36
	9	33	28	3

Výsledek. 6, 16, 28

Řešení. Většina čísel na plechovkách jsou násobky 3. Číslo 50 ale násobkem 3 není, takže je potřeba použít alespoň jedno číslo, které není dělitelné třemi. Z takových čísel jsou k dispozici jen 16 a 28.

Dále si všimneme, že nestačí použít jen jedno z nich. Číslo 50 dává po dělení třemi zbytek 2, zatímco čísla 16 i 28 dávají obě zbytek 1; kdybychom použili jen jedno z nich, nemůžeme přičítáním ostatních čísel (která jsou násobky 3) nikdy dostat jiný zbytek než 1, a proto nikdy nevyjde 50. Proto je nutné použít 16 i 28. Jejich součet je $16 + 28 = 44$ a vidíme, že úlohu splníme (jedině) tím, že spolu s nimi shodíme ještě plechovku s číslem 6. Řešením je proto srazit plechovky s čísly 6, 16 a 28.

Úloha 2. Naty má tři různé šestistěnné kostky: červenou, modrou a žlutou. Jejich stěny jsou klasicky označené čísly od 1 do 6. Naty hodila všemi kostkami najednou a sečetla čísla, která jí padla. Kolika různými způsoby mohla dohromady hodit 8?

Výsledek. 21

Řešení. Kdyby byly kostky nerozlišitelné, existovalo by pět způsobů, jak dostat potřebný součet:

$$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2.$$

Pokud padla čísla 6, 1, 1, je potřeba ještě zvolit, na které ze tří kostek padla šestka. Příklad $6 + 1 + 1$ tedy odpovídá třem různým možnostem. Stejná situace nastává i pro případy $4 + 2 + 2$ a $3 + 3 + 2$; každý z nich také odpovídá třem různým možnostem. V případě $5 + 2 + 1$ máme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ způsobů, jak zvolit čísla na jednotlivých kostkách. Obdobně zjistíme, že i případ $4 + 3 + 1$ odpovídá šesti možnostem. Dohromady mohla tedy Naty hodit osmičku $3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21$ způsoby.

Alternativní řešení. Představme si, že jsou stěny očíslovány 0–5 a cílem je určit počet způsobů, jak v součtu hodit $8 - 3 \cdot 1 = 5$. Potřebujeme tedy 5 bodů jakkoliv rozdělit mezi tři kostky. Každý způsob, jak rozdělit pět objektů do tří přihrádek, se dá jednoznačně vyjádřit jako sedmičlenná posloupnost obsahující pět puntíků a dva oddělovače (tato myšlenka by měla být povědomá těm, kteří potkali tzv. *kombinace s opakováním*). Zbývá určit, kolik takových posloupností existuje. Posloupnost je jednoznačně dána pozicemi oddělovačů, a ty lze volit $\binom{7}{2} = 21$ způsoby.

Úloha 3. Otec Karamazov má čtyři syny. Jednoho dne si všiml, že je stejně starý jako jeho tři nejstarší synové dohromady. Zároveň si uvědomil, že za šest let mu bude tolik let, kolik bude jeho třem nejmladším synům. Jaký je věkový rozdíl mezi nejstarším a nejmladším synem?

Výsledek. 12

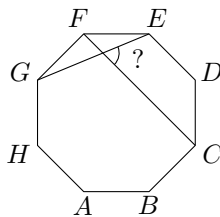
Řešení. Současný věk otce označíme x a stáří jeho synů $a \leq b \leq c \leq d$. Podmínky ze zadání se dají zapsat rovnicemi $x = b + c + d$ a $x + 6 = (a + 6) + (b + 6) + (c + 6)$. Když dosadíme do druhé rovnice za proměnnou x , dostáváme $b + c + d + 6 = a + b + c + 18$, což lze zjednodušit jako $d = a + 12$. Nejstarší syn je tedy o 12 let starší než ten nejmladší.

Úloha 4. Digitální hodiny ukazují čas od 00:00 do 23:59. Kolikrát během jednoho dne jsou na displeji právě čtyři z pěti číslic 1, 2, 3, 4, 5 (v libovolném pořadí)?

Výsledek. 36

Řešení. Hodina na displeji musí být dvojciferné číslo nepřevyšující 23 tvořené různými číslicemi z 1, ..., 5; jediné možnosti jsou 12, 13, 14, 15, 21 a 23. Pro každou takovou hodinu jsou použity dvě číslice a zbývají tři, z nichž dvě tvoří dvojciferné číslo udávající minuty. Máme tak $3 \cdot 2 = 6$ možností, které mohou udávat minuty, celkem tedy $6 \cdot 6 = 36$ možností.

Úloha 5. Necht' $ABCDEFGH$ je pravidelný osmiúhelník. Určete ve stupních velikost ostrého úhlu mezi úhlopříčkami CF a EG .



Výsledek. $67,5^\circ$

Řešení. Průsečík daných úhlopříček označme X . Ostré úhly mezi těmito úhlopříčkami jsou $\angle CXE$ a $\angle FXG$; samozřejmě mají stejnou velikost. Budeme určovat $|\angle FXG|$, protože je to snazší (a ne $|\angle CXE|$, na kterou nás navádí obrázek). Všimneme si, že $|\angle GFX| = |\angle GFC| = 90^\circ$, jelikož $BCFG$ je obdélník. Protože trojúhelník EFG je rovnoramenný a $|\angle GFE| = 135^\circ$, platí $|\angle XGF| = |\angle EGF| = \frac{1}{2}(180^\circ - 135^\circ) = 22,5^\circ$. Z trojúhelníku FGX pak dopočteme, že $|\angle FXG| = 180^\circ - 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$.

Úloha 6. Máme pět různých kladných celých čísel a, b, c, d, e splňujících $a < b < c < d < e$. Jejich aritmetický průměr je 16. Určete maximální možnou hodnotu d .

Výsledek. 36

Řešení. Platí

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 16,$$

a tedy $a + b + c + d + e = 80$. Abychom maximalizovali d , minimalizujeme ostatní proměnné s ohledem na uspořádání. Při zvoleném d jsou nejmenší možné hodnoty $a = 1, b = 2, c = 3$ a $e = d + 1$. Proto

$$80 = a + b + c + d + e \geq 1 + 2 + 3 + d + (d + 1) = 7 + 2d$$

neboli $2d \leq 73$, z čehož plyne $d \leq 36$, protože d je celé číslo. Této hodnoty lze skutečně dosáhnout, například volbou $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 3, 36, 38)$. Tato pětice splňuje podmínky ze zadání a platí pro ni $d = 36$. Tím jsme dokázali, že maximální hodnota d je skutečně 36.

Úloha 7. Poutník na své cestě pouští došel ke starodávné kamenné bráně, kterou střežila sfinga. Sfinga řekla: „Odpověz na mou hádanku a můžeš projít. Jinak zemřeš. Již jsem zahubila mnoho odvážlivců. Jejich počet je trojčíferné číslo splňující tyto podmínky:

- je liché;
- jeho číslice jsou všechny navzájem různé a zvětšují se zleva doprava;
- je dělitelné 9, ale kdykoli odebereme jednu z cifer, dostaneme číslo, které není dělitelné 9;
- jedna z cifer je 6.

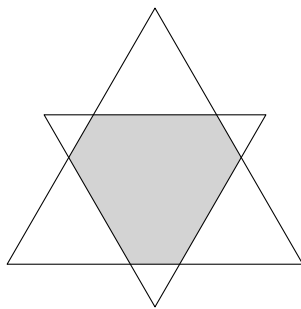
Kolik poutníků jsem už připravila o život?“

Výsledek. 567

Řešení. Z dělitelnosti devítkou plyne, že ciferný součet je 9 nebo 18; je totiž nejvýše roven $7 + 8 + 9 = 24 < 27$. Jelikož je číslo liché, cifra 6 nemůže být na pozici jednotek. Nemůže být ani na pozici stovek, jelikož by pak nejmenší možný ciferný součet byl $6 + 7 + 8 = 21 > 18$; proto je 6 na pozici desítek. Potom je na pozici jednotek alespoň 7, ciferný součet je tedy nutně 18 a součet cifer na pozicích jednotek a stovek je 12. Aby cifry rostly, musí se jednat o jedno z čísel 369, 468 a 567. První možnost vyloučíme, jelikož po odebrání cifry 9 nám zůstane 36, což je dělitelné 9. Druhou vyloučíme, protože jde o sudé číslo. Poslední číslo naopak zjevně všechny podmínky splňuje. Sfinga tedy už zahubila 567 nešťastníků.

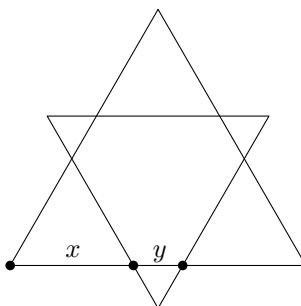
Alternativní řešení. Aby bylo číslo ABC liché, musí být lichá jeho závěrečná číslice C . Zároveň $6 < C$, takže C je 7 nebo 9. Nyní si uvědomíme, že žádné číslo splňující třetí podmínku nemůže obsahovat devítku. Číslo je totiž dělitelné devíti právě tehdy, když je devíti dělitelný jeho ciferný součet; a pokud tato podmínka platí pro nějaké číslo obsahující devítku, pak platí i po škrtnutí této devítky – a to nám sfinga zakázala. Tudíž $C = 7$. Z toho, že cifry rostou, plyne $B = 6$; aby bylo číslo dělitelné devíti, musíme zvolit $A = 5$. Sfinga tedy už zabila 567 poutníků.

Úloha 8. Ondra přes sebe položil dvě sklíčka ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, jak je ukázáno na obrázku. Dal si záležet, aby oba tyto skleněné trojúhelníky měly společný střed kružnice opsané a jejich strany tvořily dvojice rovnoběžných úseček. Větší sklíčko má délku strany 17 cm a menší 11 cm. Plocha, kde se obě sklíčka překrývají, má tvar šestiúhelníku (šedivá část na obrázku). Určete obvod tohoto šestiúhelníku v centimetrech.

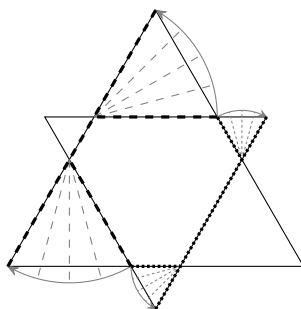


Výsledek. 28

Řešení. Podíváme se nejprve na místa překrytá pouze jedním z obou sklíček. Jde o tři velké rovnostranné trojúhelníky (se stranou, jejíž délku označíme x) a tři menší (se stranou délky y), všechny vně šedého šestiúhelníku. Nyní můžeme vyjádřit stranu většího sklíčka jako $2x + y = 17$ a stranu menšího sklíčka jako $x + 2y = 11$. Sečtením těchto rovností dostaneme vztah $3x + 3y = 28$, což je přesně hledaný obvod šedého šestiúhelníku.



Alternativní řešení. Podobnou myšlenku lze provést také bez počítání a téměř beze slov, viz obrázek: Vyberme jednu rovnoběžnou dvojici stran velkého a malého sklíčka. Pak si můžeme představit, že obvod šestiúhelníku „rozevřeme“ a jeho strany položíme na námi vybrané úsečky. Proto musí být obvod šestiúhelníku roven součtu délek stran obou sklíček, tedy $17 + 11 = 28$.



Úloha 9. Káťa se rozhoduje, jak se oblékne do sportovního klubu. Musí si vzít jedno tričko, jedny kraťasy, jedny ponožky a jedny tenisky. K tomu si může (ale nemusí) dát do vlasů jednu mašli. V šatníku má bílé, žluté, zelené, modré a červené tričko; bílé, černé a šedé kraťasy a mašle; bílé, červené a oranžové ponožky; a konečně bílé a černé tenisky. Káťa si bílé ponožky vezme jedině tehdy, když je celý její outfit bílý (včetně mašle, pokud si ji bere). Kolika různými způsoby se může obléknout?

Poznámka: Káťa si nechce oblékat dvě ponožky různých barev ani obouvat dvě různě barevné tenisky.

Výsledek. 242

Řešení. Všechny možné outfity spočteme rozdělením na dva případy.

Nejdříve uvažujme, že si Káťa vezme bílé ponožky. Podle zadání si je může vzít jen tehdy, pokud je celý její outfit bílý. To znamená, že tričko, kraťasy i tenisky musejí být bílé a mašle buď chybí, nebo je také bílá. To nám dává jen 2 možnosti.

Pokud si Káťa nevezme bílé ponožky, pak si vezme buď červené nebo oranžové, což jsou 2 možnosti. V tomto případě už neplatí žádná další omezení. Má tedy na výběr 5 triček, 3 druhy kraťasů, 2 typy tenisek a 4 možnosti pro mašli (žádná, bílá, černá nebo šedá). Tento případ nám tedy dává $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240$ kombinací.

Sečtením obou případů dostáváme, že celkový počet různých outfitů je $240 + 2 = 242$.

Úloha 10. Najděte čtyřciferné číslo splňující následující podmínky:

- číslice na pozici stovek je dvojnásobkem číslice na pozici tisícovek,
- číslice na pozici jednotek je trojnásobkem číslice na pozici desítek,
- pokud každou číslici umocníme na druhou, součet těchto druhých mocnin je 95.

Výsledek. 1239

Řešení. Označíme si hledané číslo jako $ABCD$ (tj. A, B, C, D jsou jeho cifry); z podmínek plyne $B = 2A$ a $D = 3C$. Potom

$$95 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A^2 + (2A)^2 + C^2 + (3C)^2 = 5A^2 + 10C^2,$$

což lze upravit na $A^2 + 2C^2 = 19$. Jelikož pravá strana je lichá, musí být i A liché. Protože A je číslice a $A^2 \leq 19$, tak nutně $A \in \{1, 3\}$. Po vyzkoušení těchto možností zjistíme, že jediná možnost je $A = 1$, ze které plyne $2C^2 = 18$, a tedy $C = 3$. Potom $B = 2$, $D = 9$ a hledané číslo je 1239.

Úloha 11. Mirek Dušín je kladný hrdina, a proto chce do každého rámečku ve výrazu

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$$

doplnit plus nebo mínus tak, aby výsledkem bylo kladné číslo. Kolika způsoby to může provést?

Výsledek. 16

Řešení. Všimneme si, že výraz $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ nikdy není roven nule, protože je vždy lichý; $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ je totiž liché číslo a každá změna znaménka mění hodnotu o sudé číslo. Dále si uvědomíme, že kdykoli vezmeme jeden konkrétní výraz a všechna znaménka v něm nahradíme opačnými, vynásobíme tím výslednou hodnotu číslem -1 , takže kladnou hodnotu změním na zápornou a naopak. Díky tomu můžeme rozdělit výrazy do dvojic tak, že z každé dvojice má právě jeden kladnou hodnotu (tady je důležité, že nám nikdy nevyjde nula). Proto je přesně polovina možných výrazů kladná. Protože máme pět pozic a na každé z nich dvě možnosti, je celkový počet doplnění znamének roven $2^5 = 32$, a doplnění s kladným výsledkem je tedy 16.

Úloha 12. Olin má tři různé oblíbené číslice A, B a C . Sestavil z nich tři čísla uvedená níže, sečetl je pod sebou a vyšlo mu 2026.

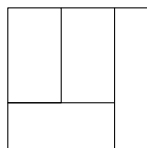
$$\begin{array}{r} A \quad A \quad A \\ + \quad A \quad A \quad B \\ + \quad A \quad C \quad C \\ \hline 2 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \end{array}$$

Určete hodnotu trojciferného čísla ABC .

Výsledek. 619

Řešení. Trojciferné číslo začínající číslicí A má hodnotu alespoň $100A$ a zároveň méně než $100(A + 1)$. Proto dostáváme $3 \cdot 100A \leq 2026 < 3 \cdot 100(A + 1)$. Protože je A celé číslo, máme sevřít 2026 mezi dva po sobě jdoucí násobky 300, a dostáváme tedy, že $A = 6$. Proto $B + CC = 2026 - 666 - 660 = 100$. Kdyby bylo $C \neq 9$, bude $B + CC \leq 9 + 88 < 100$. Tudíž $C = 9$ a $B = 1$; hledaným číslem je tedy 619.

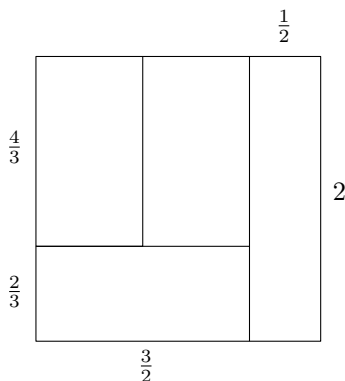
Úloha 13. Na náčrtku vidíme čtverec o straně délky 2 rozdělený na čtyři obdélníky. Všechny tyto obdélníky mají stejný obsah. Jaký je součet jejich obvodů?



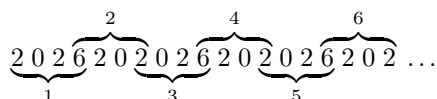
Poznámka: Úsečka, která je společná dvěma obdélníkům, se započítává do obou obvodů.

Výsledek. $\frac{53}{3} = 17\frac{2}{3}$

Řešení. Čtverec má obsah 4, takže obsah každého obdélníku je 1. Z toho hned plyne, že šířka pravého obdélníku je $\frac{1}{2}$. Šířka levého dolního obdélníku je tudíž $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, a jeho výška tedy musí být $1/\frac{3}{2} = \frac{2}{3}$. Výška zbylých dvou obdélníků proto vyjde jako $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Součet obvodů dostaneme takto: K vnějšímu obvodu, tj. obvodu čtverce, rovnému $4 \cdot 2 = 8$, přičteme dvojnásobek celkové délky všech vnitřních úseček, protože každá je součástí obvodu dvou obdélníků. Vnitřní úsečky mají délky 2, $\frac{3}{2}$ a $\frac{4}{3}$, takže dvojnásobek jejich součtu je $2 \cdot (2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{29}{3}$. Kýženou hodnotou je tedy $8 + \frac{29}{3} = \frac{53}{3}$.



Úloha 14. Bianka se rozhodla vytvořit velmi dlouhou řadu číslic tím, že za sebe celkem 2026krát napíše blok číslic 2026 podle následujících pravidel. Nejprve napíše 2026. Poté pokračuje napsáním 6202, což je blok 2026 napsaný pozpátku; přitom ale vynechá cifru 6 v místě, kde první blok končí a druhý začíná. Dále pravidelně střídá psaní bloku 2026 normálně a pozpátku, přičemž poslední cifra jednoho bloku je vždy zároveň první cifrou bloku následujícího, takže každé dva sousední bloky se překrývají právě v jedné cifře. Toto je ilustrováno na schématu, které zobrazuje prvních 6 z celkem 2026 bloků.



Určete ciferný součet výsledného čísla.

Výsledek. 12 158

Řešení. Uvědomíme si, že napsáním prvních dvou bloků Bianka vlastně napíše číslo 2026202, dalšími dvěma bloky připíše další 2026202, atd., ale každé dva sousední velebloky mají společnou jednu dvojku. Z toho už je jasné, že Biančino číslo vznikne tak, že se za sebe 1013krát napíše 202620 a na konec se připíše ještě jedna dvojka. Hledaný ciferný součet je tedy $1013 \cdot (2 + 2 + 6 + 2) + 2 = 1013 \cdot 12 + 2 = 12\,158$.

Úloha 15. Digitální hodiny ukazují 08:00 ráno. Jaký čas budou ukazovat poté, co uplyne 260320261998 hodin? Předpokládejme, že během této doby nedojde k žádným změnám času (např. přechod na letní čas).

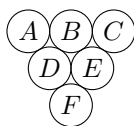
Výsledek. 14:00 = 2 odpoledne

Řešení. Když uplyne 24 hodin, čas se samozřejmě nezmění. Proto stačí zjistit, jaký dává $N = 260320261998$ zbytek po dělení 24. Ten by bylo možné přímočaře spočítat základoškolským postupem pro dělení se zbytkem. Jednodušší ale je samostatně spočítat zbytek po dělení čísly 3 i 8 a z nich pak odvodit zbytek po dělení 24.

Ciferný součet čísla N je dělitelný 3, takže i N samotné je dělitelné 3. Zbytek po dělení 8 závisí jen na posledních třech číslicích (protože 1000 je násobek osmi); stačí tedy spočítat zbytek čísla 998 po dělení osmi, což je 6. Zbytek čísla N po dělení 24 je tedy číslo menší než 24, které je dělitelné 3 a dává zbytek 6 po dělení 8; jediné takové číslo je 6.

Po N hodinách se tedy hodiny posunou o 6 hodin. Řešením je proto 14:00 neboli 2 hodiny odpoledne.

Úloha 16. Na obrázku je znázorněn hrozen vína. Bobuli z hroznu lze sníst pouze tehdy, pokud již byly snězeny všechny bobule přímo pod ní (tedy jedna nebo dvě bobule, kterých se dotýká spodkem). Například bobuli D je nutné sníst dříve než bobule A a B . Kolika různými způsoby lze takto sníst celý hrozen?



Výsledek. 16

Řešení. Z obrázku je patrné, že jedinou bobulí, kterou lze na počátku sníst, je bobule F . Po jejím sněžení nám zůstanou bobule A, B, C, D a E . Následně můžeme sníst buď bobuli D , nebo E . Situace je zjevně symetrická, začneme tedy s E ; poté zbudou bobule A, B, C a D . Pak můžeme sníst buď C , nebo D :

- Pokud zvolíme C , musíme pak sníst D , po kterém následuje buď A , nebo B (2 možnosti).
- Pokud zvolíme D , můžeme jako další sníst A, B , nebo C , a poté zbývající dvě bobule v libovolném pořadí ($3 \cdot 2$ možností).

Vždy tedy začínáme bobulí F , poté volíme mezi D a E , a následně máme $2 + 6 = 8$ různých možností. To nám dává celkem $1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$ možných způsobů, jak hrozen sníst.

Úloha 17. Kladné celé číslo x splňuje

$$\text{nsn}(x, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \quad \text{a} \quad \text{nsn}(x, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

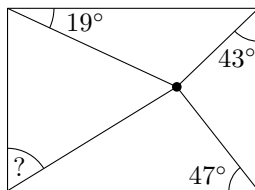
Kolika různých hodnot může nabývat výraz $\text{NSD}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$?

Poznámka: $\text{NSD}(a, b)$ značí největšího společného dělitele a $\text{nsn}(a, b)$ nejmenší společný násobek celých čísel a a b .

Výsledek. 12

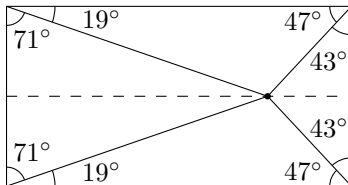
Řešení. Číslo x musí mít tvar $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ (jiná prvočísla se v rozkladu vyskytovat nemohou, jinak by se objevila i v nejmenších společných násobcích). První podmínka je ekvivalentní vztahům $a = 6$, $b \leq 3$, $c \leq 4$ a $d \leq 2$, zatímco druhá podmínka odpovídá $a \leq 8$, $b \leq 4$, $c \leq 3$ a $d = 2$. Z toho vyplývá, že v prvočíselném rozkladu výrazu $\text{NSD}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ je exponent u čísla 2 roven 2, exponent u 3 může být libovolné číslo od 0 do 3, exponent u 5 libovolné číslo od 0 do 2 a exponent u 7 je roven 2. Z toho vyplývá, že lze dostat $4 \cdot 3 = 12$ různých hodnot.

Úloha 18. V obdélníku je umístěn bod jako na obrázku. Kromě toho jsou na obrázku vyznačené velikosti tří úhlů. Určete ve stupních velikost úhlu označeného otazníkem.



Výsledek. 71°

Řešení. Spočítáme doplňky do 90° u obou vrcholů na pravé straně a všimneme si, že nám vyšel trojúhelník se dvěma stejnými úhly (o velikosti 43°). Tento trojúhelník je tedy rovnoramenný, a proto zkoumaný bod leží na společné ose dvou svislých stran obdélníka. Celá konfigurace je tedy symetrická podle této osy. Z toho už snadno dopočítáme velikost hledaného úhlu jako $90^\circ - 19^\circ = 71^\circ$.



Úloha 19. Hedvika chce vytvořit náhrdelník ze dvou druhů korálek. Celkem koupila 100 korálek, přičemž dražších korálek koupila méně než levnějších. Levnější korálky ji stály dohromady 459 korun. Dražší korálek stojí o 13 korun více než ten levnější a všechny ceny v korunách jsou kladná celá čísla. Kolik korun Hedvika celkem zaplatila za dražší korálky?

Výsledek. 1078

Řešení. Nechť l je počet levnějších korálek a c cena za jeden z nich (v korunách). Potom $lc = 459$, a jelikož Hedvika celkem koupila 100 korálek a levnějších bylo více, platí $50 < l \leq 100$. Protože cena je celé číslo, musí l dělit $459 = 3^3 \cdot 17$ a zároveň být větší než 50 a menší než 100. Jediný takový dělitel 459 je $l = 51$. Potom $c = 459/51 = 9$, a dražší korálek tak stojí $c + 13 = 22$ korun. Počet dražších korálek je $100 - 51 = 49$, takže Hedvika za dražší korálky zaplatila $49 \cdot 22 = 1078$ korun.

Úloha 20. V rovnici

$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot H}{N \cdot A \cdot B \cdot O \cdot J} = G \cdot A \cdot M \cdot E$$

reprezentuje každé písmeno jednu číslici, přičemž různá písmena reprezentují různé číslice a symbol $\cdot$ značí násobení. Kolika různých hodnot může nabývat součin $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$?

Výsledek. 1

Řešení. Jelikož se v rovnici vyskytuje 10 různých písmen ($M, A, T, H, N, B, O, J, G, E$), každá číslice 0–9 je použita právě jednou, takže jedno z písmen odpovídá 0. Nemůže jít o žádné z písmen N, A, B, O, J , která se vyskytují ve jmenovateli. Musí tedy jít o některé ze zbylých písmen, a proto se jedna strana rovnice rovná nule. Tudíž se musejí nule rovnat obě strany! Nulová číslice se tedy vyskytuje jak v součinu $M \cdot A \cdot T \cdot H$, tak v součinu $G \cdot A \cdot M \cdot E$. Jediná taková písmena jsou A a M ; protože se ale A vyskytuje i ve jmenovateli, zjišťujeme, že $M = 0$. Potom $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O = 0$ bez ohledu na to, jaké hodnoty reprezentují zbylá písmena. Součin tedy může nabývat jedné jediné hodnoty.

Úloha 21. Na rovném pobřeží stojí tři majáky. Sousední majáky jsou od sebe vždy vzdáleny 13 km. Loď se nachází na moři v místě vzdáleném 10 km od jednoho z krajních majáků a 13 km od prostředního majáku. Určete vzdálenost lodi (v km) od druhého krajního majáku. Zakřivení Země ignorujte.

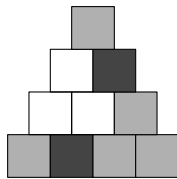
Výsledek. 24

Řešení. Pozici lodi označme L , pozice krajních majáků A a B , pozici prostředního majáku S . Protože $|SL| = |SA| = |SB| = 13$, leží body A, B a L na kružnici se středem S . Úsečka AB je navíc průměrem této kružnice. Podle Thaletovy věty je tedy ABL pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB . Protože $|AB| = |AS| + |SB| = 26$ a $|AL| = 10$, z Pythagorovy věty dostáváme

$$|BL| = \sqrt{|AB|^2 - |AL|^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Hledaná vzdálenost je tedy 24 km.

Úloha 22. Máme pyramidu výšky 4 a chceme každý z jejích deseti dílků obarvit bíle, šedě nebo černě tak, aby každá dílčí pyramida výšky 2 (orientovaná směrem vzhůru) byla jednobarevná nebo trojbarevná. Kolika způsoby to můžeme udělat? Příklad správného obarvení je na obrázku.



Výsledek. 81

Řešení. Každé obarvení spodního řádku jednoznačně určuje, jak budou obarvené kostky ve druhém řádku. Ty pak zase určí obarvení třetího řádku, a tím i barvu vrcholu. Proto stačí spočítat, kolika způsoby lze obarvit základnu pyramidy. V ní jsou čtyři dílky a každý má jednu ze tří barev, takže možných obarvení je celkem $3^4 = 81$.

Úloha 23. V každém vrcholu pravidelného 100úhelníka je napsáno jiné z čísel $1, 2, \dots, 100$. Přitom platí, že absolutní hodnota rozdílu každých dvou čísel, která jsou přesně naproti sobě, je stejné pevně dané číslo n . Určete součet všech různých hodnot, kterých může n nabývat.

Výsledek. 93

Řešení. Dvojici čísel, která se nacházejí naproti sobě (a tedy se liší o n), budeme říkat *pár*. Číslo 1 musí být v páru s $n + 1$. Podobně musí být 2 v páru s $n + 2$ (pokud tedy už není spárované s jedničkou), a tak dále – číslo k tvoří pár s $n + k$ pro každé $k = 1, 2, \dots, n$. Číslo n je tedy spárované s $2n$.

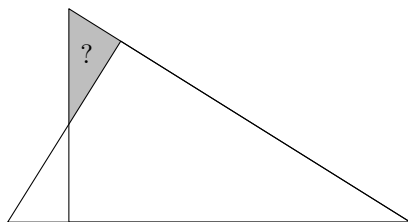
V bloku čísel $\{1, 2, \dots, 2n\}$ je tudíž každé číslo spárované s některým jiným číslem z téhož bloku, a dál se stačí zabývat už jen čísly $\{2n + 1, \dots, 100\}$. Pokud $2n = 100$, jsou už všechna čísla úspěšně spárovaná. V opačném případě opakujeme stejný argument: $2n + 1$ musí být spárované s $3n + 1$ atd., čímž získáváme další blok $\{2n + 1, \dots, 4n\}$, a dál pokračujeme obdobně.

Nakonec bude množina $\{1, 2, \dots, 100\}$ rozdělena do několika disjunktních bloků délky $2n$. To je možné právě tehdy, když je 100 dělitelné $2n$, neboli právě když n je kladný dělitel 50.

Pokud tedy n není kladný dělitel 50, tak párování neexistuje, a pokud dělitelem je, tak jsme úspěšně zkonstruovali párování splňující podmínky ze zadání (přičemž čísla jsou rozdělena do $\frac{100}{2n}$ bloků). Hledaným číslem je tedy součet všech kladných dělitelů 50, což je

$$1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93.$$

Úloha 24. Tobík vzal dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s délkami stran 5, 12 a 13 a položil je přes sebe tak, že sdílejí vrchol, u něhož je nejmenší úhel, a částečně se překrývají i příslušné strany, viz náčrtek. Jaký obsah má zvýrazněný šedý trojúhelníček, který je součástí jen jednoho z obou velkých trojúhelníků?



Výsledek. $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1,2$

Řešení. Šedý trojúhelníček je podobný velkému bílému, protože jsou oba pravoúhlé a sdílejí i další úhel (na našem náčrtku jde o úhel „úplně nahoře“). Přitom délka nejkratší strany šedého trojúhelníčku má délku $13 - 12 = 1$. Odpovídající strana velkého trojúhelníku má délku 5, takže poměr podobnosti je $1 : 5$. Druhá odvěsna šedého trojúhelníčku má tedy délku $\frac{12}{5}$. Z toho zjišťujeme, že jeho obsah je $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5}$.

Úloha 25. Každý ze sedmi trpaslíků si myslí kladné celé číslo. Všichni trpaslíci znají čísla ostatních. Sněhurka se každého trpaslíka zeptala, jaké číslo si vybral.

- První trpaslík jí nic neřekl.
- Druhý trpaslík pravil: „Moje číslo se rovná číslu prvního trpaslíka.“
- Třetí trpaslík pravil: „Moje číslo se rovná součtu čísel prvních dvou trpaslíků.“
- Čtvrtý trpaslík pravil: „Moje číslo se rovná součtu čísel prvních tří trpaslíků.“
- ...
- Sedmý trpaslík pravil: „Moje číslo se rovná součtu čísel prvních šesti trpaslíků.“

Víme, že součet všech sedmi vybraných čísel je 46. Také víme, že právě jeden trpaslík lhal. Výpovědi trpaslíků se vztahují ke skutečně vybraným číslům, ne k tomu, co řekli ostatní trpaslíci. Určete všechna čísla, která si může myslet nepravdomluvný trpaslík.

Výsledek. 7, 14

Řešení. Čísla jednotlivých trpaslíků označíme $a_1, a_2, \dots, a_7$. Nejprve si všimneme, že musel lhát buď šestý, nebo sedmý trpaslík. Pokud totiž sedmý trpaslík mluví pravdu, tak $a_7 = a_1 + \dots + a_6$, takže pro součet všech čísel platí $a_1 + \dots + a_7 = 2a_7 = 46$; z toho dostáváme $a_7 = \frac{46}{2} = 23$. Kdyby v této situaci mluvil pravdu i šestý trpaslík, platilo by $a_6 = a_1 + \dots + a_5$, a tedy $a_7 = a_1 + \dots + a_6 = 2a_6$. Z toho by ale plynulo $a_6 = \frac{23}{2}$, což je spor, protože a_6 je celé číslo. Skutečně jsme tedy zjistili, že pokud mluví pravdu sedmý trpaslík, tak šestý nutně lže.

Prvních pět trpaslíků tedy každopádně mluvilo pravdu, což nám dává

$$a_2 = a_1, \quad a_3 = a_1 + a_2 = 2a_1, \quad a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 4a_1, \quad a_5 = a_1 + \dots + a_4 = 8a_1,$$

takže $a_1 + \dots + a_5 = 16a_1$. Navíc musí alespoň jedno z čísel a_6 a a_7 (to, které si myslí pravdomluvný trpaslík) být větší nebo rovno $a_1 + \dots + a_5 = 16a_1$, z čehož plyne

$$a_1 + \dots + a_7 \geq 16a_1 + 16a_1 = 32a_1.$$

Protože celkový součet je 46, dostáváme $32a_1 \leq 46$, takže $a_1 = 1$ (protože jde o kladné celé číslo), z čehož dále plyne $a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4$ a $a_5 = 8$. Proto $a_1 + \dots + a_5 = 16$.

Nakonec se podívejme na poslední dva trpaslíky. Pokud mluvil pravdu šestý, tak $a_6 = 16$ a ze znalosti celkového součtu dopočteme $a_7 = 46 - (16 + 16) = 14$. Pokud naopak mluvil pravdu sedmý, tak $a_7 = a_1 + \dots + a_6 = 16 + a_6$. Z prvního odstavce už víme, že v této situaci platí $a_7 = 23$, což dává $a_6 = 7$.

V obou variantách skutečně platí, že lhal právě jeden trpaslík, takže obě mohly nastat. Proto si lhář mohl vybrat buď 7, nebo 14.

Úloha 26. Při komunikaci s orbitální družicí vybíráme šestici různých kanálů z množiny $\{1, 2, \dots, 13\}$. Rozhodující je pouze samotné složení vybrané šestice – na pořadí, v jakém kanály zvolíme, nezáleží. Abychom dosáhli optimální přenosové rychlosti, musí výběr obsahovat alespoň jednu dvojici kanálů, jejichž čísla se liší o lichou hodnotu. Kolik takových šestic kanálů lze vytvořit?

Výsledek. 1708

Řešení. Dva vybrané kanály se liší o liché číslo právě tehdy, když mají opačnou paritu (jeden je sudý a druhý lichý). Namísto přímého výpočtu použijeme metodu doplňku: od všech možných výběrů odečteme ty, které neobsahují žádný lichý rozdíl.

Ve skupině šesti kanálů nejsou žádné liché rozdíly právě tehdy, když má každá dvojice sudý rozdíl. To nastane pouze v případě, že všech šest kanálů má stejnou paritu. V množině $\{1, 2, \dots, 13\}$ je sedm lichých a šest sudých kanálů, takže počet čistě lichých nebo čistě sudých výběrů je $\binom{7}{6} + \binom{6}{6} = 8$.

Vzhledem k tomu, že celkem existuje $\binom{13}{6} = 1716$ způsobů, jak vybrat šestici kanálů, je počet šestic s alespoň jedním lichým rozdílem roven $1716 - 8 = 1708$.

Úloha 27. Daníkovo oblíbené sedmiciferné číslo N je dělitelné každou svou cifrou. Všechny cifry čísla N jsou různé a nenulové. Určete ciferný součet tohoto čísla.

Výsledek. 36

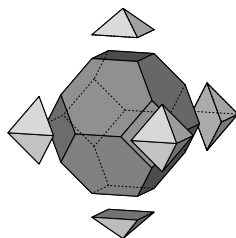
Řešení. Protože má číslo N sedm různých nenulových cifer, musí být alespoň jedna z nich sudá, a tedy i samotné N musí být sudé. Kdyby byla jednou z cifer 5, tak by N kvůli dělitelnosti 5 muselo končit nulou. To by však byl spor se zadáním, které říká, že všechny cifry jsou nenulové; cifra 5 je tedy vyloučena.

Nyní víme, že N se skládá ze sedmi cifer vybraných z množiny $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, což znamená, že vynecháváme právě jednu cifru z této množiny. Cifra 9 nesmí být vynechána: kdybychom 9 vynechali, výsledná množina cifer by byla $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ s ciferným součtem 31. V takovém případě by číslo N nesplňovalo podmínku dělitelnosti třemi, přestože obsahuje cifru 3, což vede ke sporu.

Cifra 9 tedy musí být součástí čísla N , což znamená, že N (a tedy i jeho ciferný součet) musí být dělitelné devíti. Jelikož $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$, musíme vynechat cifru 4, abychom získali ciferný součet 36; jiný násobek devíti takto vytvořit nelze. Jedním z příkladů takového čísla je $N = 9\,867\,312$.

Úloha 28. Komolý osmistěn vytvoříme z pravidelného osmistěnu kolmým odseknutím jeho vrcholů. Uděláme to tak, aby nám zbyl mnohostěn s osmi pravidelnými šestiúhelníkovými stěnami a šesti čtvercovými stěnami. Jaký bude poměr objemu vzniklého komolého osmistěnu ku objemu původního pravidelného osmistěnu?

Poznámka: Pravidelný osmistěn je těleso s osmi stejnými stěnami ve tvaru rovnostranného trojúhelníku.



Výsledek. $\frac{8}{9}$

Řešení. Objem pravidelného osmistěnu s hranou délky a se dá vypočítat jako ka^3 pro nějakou konstantu k (dá se ukázat, že $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$, ale to k řešení nepotřebujeme). Při vytvoření komolého osmistěnu jsme ve skutečnosti odsekli šest malých jehlanů se čtvercovou podstavou o délce strany $\frac{a}{3}$ a s délkou boční hrany také $\frac{a}{3}$ (jde o polovinu malého pravidelného osmistěnu); to je vynuceno podmínkou na pravidelnost šestiúhelníkových stěn. Celkový odseknutý objem lze tedy vyjádřit jako objem tří malých osmistěnu s hranou délky $\frac{a}{3}$, a je tedy roven $3 \cdot k \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{ka^3}{9}$. Poměr objemů komolého a původního osmistěnu lze proto zapsat jako

$$\frac{1}{ka^3} \left(ka^3 - \frac{1}{9}ka^3 \right) = \frac{8}{9}.$$

Úloha 29. Najděte všechna reálná řešení rovnice

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Výsledek. $\pm 1, \pm 2$

Řešení. Označíme si $a = 2^x + 2^{-x}$. Pak $a^2 = 2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 2^{-2x} = 4^x + 2 + 4^{-x}$, takže $4^x + 4^{-x} = a^2 - 2$. Dosazením dostaneme

$$8(a^2 - 2) - 54a + 101 = 0,$$

což zjednodušíme na

$$8a^2 - 54a + 85 = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice získáme

$$a_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85}}{2 \cdot 8} = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 2720}}{16} = \frac{54 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{54 \pm 14}{16},$$

tedy $a_1 = \frac{17}{4}$ a $a_2 = \frac{5}{2}$. Pro a_1 máme

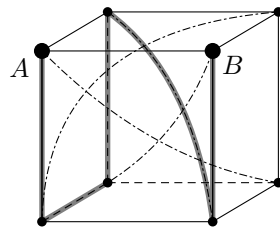
$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{17}{4} \quad \text{neboli} \quad (2^x)^2 - \frac{17}{4}2^x + 1 = 0;$$

vyřešením této kvadratické rovnice dostáváme $2^x = 4$ nebo $2^x = \frac{1}{4}$, tedy $x = 2$ nebo $x = -2$. Pro a_2 pak analogicky

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2} \quad \text{neboli} \quad (2^x)^2 - \frac{5}{2}2^x + 1 = 0,$$

z čehož plyne $2^x = 2$ nebo $2^x = \frac{1}{2}$, tedy $x = 1$ nebo $x = -1$. Řešeními zadané rovnice jsou tak $x = \pm 1, \pm 2$.

Úloha 30. Na krychlové planetě jménem Zeměkrychle se nachází osm měst, v každém z jejích vrcholů jedno. Na planetě jsou vybudovány železniční koleje vedoucí po všech hranách krychle, a navíc ještě čtyři železniční tunely vedoucí vnitřkem planety, které spojují města ležící v protilehlých vrcholech. Do města A přijel návštěvník a vyrazil vlakem na cestu po planetě, která skončila v sousedním městě B (vrcholy A a B sdílejí hranu). Jeho trasa se skládala právě z pěti úseků trati a neprocházela žádným městem více než jednou. Navíc vedla alespoň jedním tunelem. Kolik takových tras mezi A a B existuje? Na obrázku vidíte příklad trasy splňující zadání.



Výsledek. 28

Řešení. Obarvíme si město A bílou barvou, město B černou, a všechna ostatní města střídavě bílou a černou tak, jako bychom barvili 3D šachovnici. Každý úsek trati (ať už vede po hraně, nebo tunelem) tedy vede z města jedné barvy do města opačné barvy. A také naopak, díky tunelům jsou každá dvě města opačných barev spojena přímkou železnici. Vidíme, že se na cestovatelské trase musejí pravidelně střídát barvy vrcholů.

Začneme tím, že spočítáme všechny cesty délky 5 z A do B včetně těch, které nevedou tunelem. (Na podmínce, aby se vrcholy neopakovaly, ovšem trváme.) S podmínkou o tunelech si poradíme později. Každá cesta je ve tvaru

$$A \rightarrow c_1 \rightarrow b_2 \rightarrow c_2 \rightarrow b_3 \rightarrow B,$$

kde c_1, c_2 jsou různá města černé barvy a b_2, b_3 jsou různá města bílé barvy. Máme $3 \cdot 2$ možností, jak vybrat dvojici (c_1, c_2) černých měst (máme čtyři černá města a B si zvolit nemůžeme), stejně tak máme $3 \cdot 2$ možností, jak vybrat dvojici (b_2, b_3) bílých měst. Dohromady tedy máme $(3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = 36$ cest délky 5.

Ještě ale musíme odečíst cesty, které nepoužijí tunel, tedy ty, které vedou pouze po hranách krychle. Kolik je takovýchto nevyhovujících cest? Z A se nesmíme prvním krokem přesunout do B , takže máme k dispozici dva možné tahy. Vcelku snadno nahlédneme, že na každou z těchto dvou voleb navazují přesně 4 možnosti, jak cestu délky 5 vedoucí do B po hranách krychle dokončit. Celkově tedy máme $2 \cdot 4 = 8$ takových cest.

Počet hledaných cest délky 5, které vedou alespoň jedním tunelem, je proto $36 - 8 = 28$.

Úloha 31. O funkci starosty Horní Dolní se ve volbách ucházeli čtyři kandidáti a hlasovalo v nich 2026 voličů. Nejhůře dopadl kandidát A; dokonce obdržel oproti kandidátovi B jen šestinou hlasů. Kandidát C dostal o 446 hlasů méně než všichni jeho soupeři dohromady. Volby vyhrál kandidát D, a to s méně než 800 hlasy. Každý volič dal svůj hlas právě jednomu z kandidátů. Kolik hlasů dostal kandidát A?

Výsledek. 63

Řešení. Jednotlivé počty hlasů označme a, b, c, d . Jde o nezáporná celá čísla splňující

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2026, \\ b &= 6a, \\ c &= (a + b + d) - 446, \\ a, b, c &< d < 800, \\ a &< b, c, d. \end{aligned}$$

Když k oběma stranám třetího vztahu přičteme c , dostáváme

$$2c = a + b + c + d - 446 = 2026 - 446 = 1580.$$

Proto $c = 790$, z čehož dále plyne

$$a + b + d = 2026 - 790 = 1236.$$

Dosadíme-li za b , vyjde

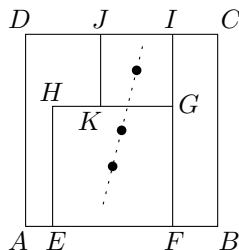
$$a + 6a + d = 1236 \quad \text{neboli} \quad d = 1236 - 7a.$$

Protože $d < 800$ a zároveň $d > c = 790$, máme $791 \leq d \leq 799$. Proto

$$791 \leq 1236 - 7a \leq 799 \quad \text{neboli} \quad 437 \leq 7a \leq 445.$$

Jediné číslo dělitelné 7 v daném intervalu je $441 = 7 \cdot 63$. Odpovědí je proto $a = 63$. Lze dopočítat, že $b = 378$, $c = 790$, $d = 795$ a všechny podmínky ze zadání jsou skutečně splněny.

Úloha 32. Čtverce $ABCD$, $EFGH$ a $KGIJ$ jsou uspořádány jako na obrázku: Body E a F leží na úsečce AB , body I a J na úsečce CD a bod K na úsečce GH . Středů všech tří čtverců navíc leží na jedné přímce. Pokud $|AD| = 7$ a $|HK| = 1$, čemu se rovná $|FB|$?



Výsledek. 12/7

Řešení. Označme písmenem a délku strany čtverce $EFGH$ a písmenem b délku strany čtverce $KGIJ$. Ze zadání vyplývá, že $7 = |AD| = |FG| + |GI| = a + b$ a $1 = |HK| = |HG| - |KG| = a - b$. Řešením této soustavy rovnic je $a = 4$, $b = 3$.

Každá přímka procházející středem čtverce dělí jeho vnitřek na dva útvary se stejnou plochou. Obdélník $FBCI$ tudíž dostaneme, když od poloviny největšího čtverce odebereme polovinu obou menších čtverců, neboli jeho obsah je roven

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = ab.$$

Obsah téhož obdélníka lze také spočítat přímočaře jako $|FB| \cdot (a+b)$. Z těchto dvou rovností vyjádříme $|FB| = \frac{ab}{a+b} = \frac{12}{7}$.

Úloha 33. Na tabuli je napsáno několik čísel, mezi nimi i 2026. Kdybychom smazali číslo 2026, klesl by aritmetický průměr čísel na tabuli o 6. Kdybychom místo toho na tabuli připsali ještě jednou 2026, průměr by naopak vzrostl o 4. Určete součet čísel, která jsou na tabuli.

Výsledek. 10010

Řešení. Označme původní počet čísel n a jejich součet S . Podmínky ze zadání lze přepsat jako

$$\frac{S - 2026}{n - 1} = \frac{S}{n} - 6,$$
$$\frac{S + 2026}{n + 1} = \frac{S}{n} + 4.$$

Tyto rovnice lze zjednodušit do podoby

$$S = 2032n - 6n^2,$$
$$S = 2022n - 4n^2.$$

Když je od sebe odečteme a využijeme toho, že n nemůže být nula, dostáváme

$$S - S = (2032 - 2022)n + (-6 + 4)n^2 \quad \text{neboli} \quad 2n^2 = 10n,$$

což dává $n = 5$. Řešením je proto $S = 2032 \cdot 5 - 6 \cdot 5^2 = 10010$.

Úloha 34. Blecha skáče po kružnici stále ve stejném směru a postupně se rozcvičuje. Při prvním skoku se po obvodu posune jen o 1° (tj. spojnice středu kružnice s bodem jejího odrazu a s bodem jejího dopadu spolu svírají úhel 1°). Při druhém skoku se už po obvodu posune o další 2° , při třetím o 3° a tak dále. Při kolikátém skoku blecha poprvé doskočí přesně na místo, odkud původně vyrazila?

Výsledek. 80

Řešení. Po n skocích má blecha celkem naskákáno

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

stupňů. Chceme tedy nalézt nejmenší n , pro které je tato hodnota násobkem 360. To znamená, že $n(n + 1)$ musí být dělitelné $720 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Protože n a $n + 1$ jsou nesoudělná čísla, je nejvýše jedno z nich dělitelné 3, a toto číslo tedy musí být dělitelné 9. Obdobně je buď n , nebo $n + 1$ dělitelné 16; jedno z nich také musí být dělitelné 5. Aby byla splněna podmínka o dělitelnosti 16, vycházejí jako kandidáti na n postupně tato čísla: 15, 16, 31, 32, 47, 48, 63, 64, 79, 80, ... Z těchto hodnot je podmínka o dělitelnosti 9 splněna jen pro 63 a 80, a ani 63, ani 64 není dělitelné 5. Moucha tedy musí dohromady naskákat alespoň $80 \cdot 81 = 5 \cdot 16 \cdot 9^2 = 9 \cdot 720$ stupňů. Poprvé se tedy blecha na počátek vrátí po 80. skoku.

Výpočet lze případně urychlit, když si uvědomíme, že jedno z n , $n + 1$ musí být dělitelné alespoň dvěma z čísel 5, 9, 16 neboli alespoň jedním z čísel 45, 80, 144. Nejmenší kandidáti pro n , kteří připadají v úvahu, jsou tedy 44, 45, 79 a 80. Pro první dvě čísla není splněna dělitelnost šestnácti a pro 79 dělitelnost devíti, řešením je tedy 80 (o kterém už víme, že podmínky splňuje).

Úloha 35. Starodávnou říši střeží tři magické školy: škola Ohně, škola Vody a škola Země. Každá škola je tvořena dvěma mistry a dvěma učiteli. Na ochranu říše proti temným čarodějům je potřeba vyslat čtyři dvojice. Ve dvojici bude vždy jeden mistr a jeden učeň, každý z jiné školy. Každá škola vyšle alespoň jednoho mistra a alespoň jednoho učně. Kolika způsoby mohou být tyto dvojice utvořeny?

Poznámka: Záleží na tom, který konkrétní mistr či učeň bude do dvojice vyslán (jedná se o unikátní osoby), nezáleží ale na pořadí daných čtyř dvojic.

Výsledek. 768

Řešení. Jelikož vybíráme čtyři učně a každá škola vyšle alespoň jednoho, musí jedna vyslat dva učně a zbylé dvě po jednom. Totéž platí i pro mistry. Budeme rozlišovat dva případy:

V prvním případě jedna škola vyšle oba své učně a oba své mistry. Tuto školu označíme X . Školu X můžeme vybrat třemi způsoby. Ze zbývajících dvou škol mohou být učni vybráni $2 \cdot 2 = 4$ způsoby, stejně jako mistři, kteří taktéž mohou být vybráni $2 \cdot 2 = 4$ způsoby. Tím jsou vybráni účastníci výpravy, ale ještě ne to, jak jsou rozděleni do dvojic.

Učni z X musejí být spárováni s mistry ze zbývajících dvou škol, což lze udělat dvěma způsoby. Když už jsme tyto dva páry utvořili, zbývajících dva učni nemají jinou možnost než být spárováni s mistry z X , což lze taktéž provést dvěma způsoby. Tudíž máme právě $2 \cdot 2 = 4$ platných párování učňů s mistry. Celkem tedy první případ dává $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ možností pro to, které konkrétní dvojice vyslat.

V druhém případě jedna škola (X) poskytne dva učně, zatímco jiná škola (Y) poskytne dva mistry. Máme tři možnosti, jak zvolit školu X ; školu Y pak vybereme ze zbývajících dvou. Zbylí dva učni mohou být ze zbývajících dvou škol vybráni $2 \cdot 2 = 4$ způsoby, totéž platí pro zbývajících dva mistry. Pro každou takovou volbu existuje $3 \cdot 2 = 6$ přípustných párování: dva učni z X mohou být spárováni s libovolnými dvěma ze tří mistrů (nemohou být spárováni pouze se čtvrtým mistrem z X). Jakmile tuto volbu pevně určíme, ukáže se, že zbylá párování jsou již dána jednoznačně. Tento případ tedy dává celkem $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ možností.

Sečtením obou případů dostáváme $192 + 576 = 768$ možných uskupení dvojic vyslaných proti černokněžníkům.

Úloha 36. Nemulová reálná čísla x, y splňují $x + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$ a $y + \frac{1}{x} = 3\sqrt[3]{4}$. Určete hodnotu $x^2y + \frac{1}{xy^2}$.

Výsledek. $3\sqrt[3]{2}$

Řešení. Můžeme si všimnout, že když zadané výrazy vynásobíme, některé zlomky se pokrátlí. Dostáváme:

$$6 = 3 \cdot \sqrt[3]{8} = \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) = xy + \frac{1}{xy} + 2 \quad \text{neboli} \quad xy + \frac{1}{xy} = 4.$$

Z toho bychom snadno získali hodnotu xy jako řešení kvadratické rovnice a v kombinaci se zadanými vztahy pro x a y bychom se mohli pokoušet vyjádřit hledanou hodnotu. To skutečně lze provést. Ve skutečnosti ale existuje i jednodušší řešení, při kterém hodnotu xy vůbec nepotřebujeme. Všimneme si, že platí

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = \left(xy + \frac{1}{xy}\right) \left(x + \frac{1}{y}\right) - x - \frac{1}{y}.$$

Z těchto dvou pozorování už spočítáme hledanou hodnotu výrazu:

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Úloha 37. Pro tětiový čtyřúhelník $ABCD$ platí $|\angle ADB| = 48^\circ$ a $|\angle BDC| = 56^\circ$. Uvnitř trojúhelníku ABC leží bod X , pro který platí, že $|\angle XCB| = 24^\circ$ a že polopřímka AX je osou úhlu $\angle BAC$. Určete $|\angle CBX|$ ve stupních.

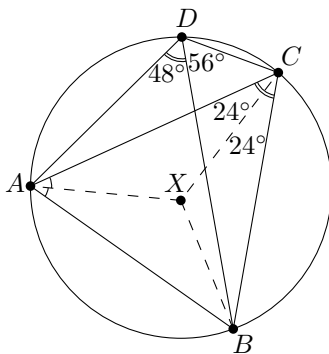
Poznámka: Tětiový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, jehož všechny čtyři vrcholy leží na jedné kružnici (neboli pro něj existuje kružnice opsaná).

Výsledek. 38°

Řešení. Úhly $\angle ADB$ a $\angle ACB$ jsou shodné, protože odpovídají stejnému oblouku kružnice. Proto platí

$$|\angle ACX| = |\angle ACB| - |\angle XCB| = |\angle ADB| - |\angle XCB| = 48^\circ - 24^\circ = 24^\circ = |\angle XCB|.$$

Prímka CX je tedy osou úhlu $\angle ACB$, a bod X je tedy středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC . Proto leží i na ose úhlu $\angle ABC$.



Nyní už můžeme spočítat požadovanou velikost úhlu:

$$|\angle CBX| = \frac{|\angle CBA|}{2} = \frac{180^\circ - |\angle BAC| - |\angle ACB|}{2} = \frac{180^\circ - 56^\circ - 48^\circ}{2} = 38^\circ.$$

V předposlední rovnosti jsme použili rovnost $|\angle BAC| = |\angle BDC|$, která opět plyne ze skutečnosti, že oba úhly přísluší stejnému oblouku kružnice.

Úloha 38. Živočišný druh *Nabionricula simplex* má velmi primitivní mozek rozdělený na levou a pravou hemisféru, přičemž každá se skládá ze dvou typů buněk: neuronů a podpůrných buněk. Buňky v rámci stejné hemisféry mezi sebou nikdy nejsou propojeny, zatímco mezi každými dvěma buňkami z různých hemisfér existuje právě jeden obousměrný spoj. V jednom mozku jedince *Nabionricula simplex* je 168 spojů typu neuron–neuron, 48 spojů typu podpůrná–podpůrná a 191 spojů typu neuron–podpůrná. Jaký je celkový počet neuronů v mozku jedince *Nabionricula simplex*?

Výsledek. 29

Řešení. Necht n_1 a p_1 označují počet neuronů a podpůrných buněk v jedné z hemisfér a n_2 a p_2 v druhé. Zadání říká, že $n_1n_2 = 168$, $p_1p_2 = 48$ a $n_1p_2 + n_2p_1 = 191$. Pak tedy

$$(n_1 + p_1)(n_2 + p_2) = 168 + 48 + 191 = 407 = 11 \cdot 37.$$

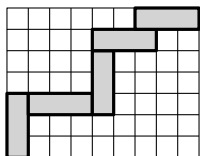
Protože v každé hemisféře zjevně musí být alespoň jedna buňka každého typu (a tedy nemusíme uvažovat případ $1 \cdot 407$), můžeme bez újmy na obecnosti konstatovat, že $n_1 + p_1 = 11$. Obdobně

$$(n_1 - p_1)(n_2 - p_2) = 168 + 48 - 191 = 25 = 5 \cdot 5.$$

Výraz $n_1 - p_1$ tedy musí být 1, 5 nebo 25. (Kdyby totiž měl zápornou hodnotu, musel by mít zápornou hodnotu i výraz $n_2 - p_2$, což by ale znamenalo, že v obou hemisférách je více podpůrných buněk než neuronů, což je ve sporu s $n_1 n_2 > p_1 p_2$.) Každá z těchto tří voleb nám dá (spolu s $n_1 + p_1 = 11$) jednoduchou soustavu rovnic o dvou neznámých n_1, p_1 ; když si uvědomíme, že hledáme jen kladná celočíselná řešení a že n_1 je dělitel čísla 168 a p_1 je dělitel čísla 48, snadno vidíme, že jediná možná volba je $n_1 - p_1 = 5$. Dostáváme tudíž $n_1 = 8$ a $p_1 = 3$. Pak tedy $n_2 = 168/8 = 21$ a celkový počet neuronů je $n_1 + n_2 = 29$.

Alternativní řešení. Použijme stejné značení jako v předchozím řešení. Číslo $n_1 p_2 + n_2 p_1$ je liché, takže jeden ze sčítanců je lichý. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že lichým sčítancem je $n_1 p_2$. Z toho vyplývá, že jak n_1 , tak p_2 jsou liché. Protože $n_1 n_2 = 168 = 2^3 \cdot 21$ a $p_1 p_2 = 48 = 2^4 \cdot 3$, musí dále n_2 být dělitelné 2^3 a p_1 být dělitelné 2^4 . Potom je $n_2 p_1$ násobkem $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$, a protože musí být menší než 191, platí $n_2 p_1 = 128$. Tudíž $n_2 = 2^3 = 8$ (a $p_1 = 2^4$). Docházíme k závěru, že $n_1 = 168/8 = 21$, což dává stejný výsledek jako předchozí postup.

Úloha 39. Zdeněk má pět stejných rovných triomin (tj. dlaždic rozměru 3×1) a chtěl by z nich vytvořit souvislou cestu na obdélníkové mřížce 7×9 tak, aby spojovala levý dolní roh s pravým horním. Každé triomino se skládá z jednoho prostředního a dvou koncových čtverečků; a cesta musí být vytvořena tak, že dvě po sobě jdoucí triomina se vždy dotýkají podél právě jedné hrany mřížky, a to koncovými, nikdy ne prostředními čtverečky. Jedna taková cesta je na obrázku. Kolika různými způsoby může Zdeněk takovou cestu vytvořit?



Výsledek. 75

Řešení. Cesta v mřížce musí dohromady udělat 6 kroků nahoru a 8 kroků doprava; to u cestičky z pěti triomin (tj. patnácti dílků) znamená, že každý dílek je oproti tomu předešlému směrem nahoru či doprava, nikdy ne doleva či dolů. Cesty spočítáme postupným vyplněním mřížky 7×9 : do každého čtverečku mřížky vepíšeme počet cest (vedoucích v každém bodě jen nahoru či doprava) z triomin, jejichž koncový bod leží v tomto čtverečku.

Po umístění prvního triomina z levého dolního rohu musí být koncový bod přesně dva čtverečky od něj, buď doprava nebo nahoru. Vepíšeme tedy jedničku do čtverečků $(0, 2)$ a $(2, 0)$ (souřadnice počítáme od levého dolního rohu).

Dále vyplníme zbytek mřížky zleva doprava a zespoda nahoru. Abychom zjistili hodnotu na čtverečku (x, y) , podíváme se na způsoby, jakými tam triomino může skončit. Triomino končící na (x, y) může být svislé nebo vodorovné a musí se dotýkat předchozího triomina podél hrany koncového čtverečku. To nám dává čtyři možné koncové čtverečky předchozího triomina: $(x, y - 3)$ a $(x - 1, y - 2)$ v případě svislého triomina a $(x - 3, y)$ a $(x - 2, y - 1)$ v případě vodorovného triomina. Hodnota vepsaná do (x, y) bude jednoduše součtem hodnot již vepsaných do

$$(x - 3, y), (x - 2, y - 1), (x - 1, y - 2), (x, y - 3),$$

přičemž každý čtvereček mimo mřížku uvažujeme s nulovou hodnotou.

0	0	4	0	0	22	0	0	75
1	0	0	6	0	0	22	0	0
0	1	0	0	6	0	0	18	0
0	0	2	0	0	6	0	0	13
1	0	0	2	0	0	4	0	0
0	0	0	0	1	0	0	2	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1

Po vyplnění všech čtverečků je hodnota 75 v pravém horním rohu přesně hledaným počtem cest.

Alternativní řešení. Nejprve za sebe umístíme pět triomin tak, aby na sebe navazovala pouze rohem (koncový roh na koncový roh). První z nich bude začínat v bodě $(0, 0)$ a každé další triomino posune koncový bod buď o $(+1, +3)$ (triomino *nahoru*) nebo o $(+3, +1)$ (triomino *doprava*) – pozor, nyní souřadnice odkazují skutečně na vrcholy v mřížce,

nikoli na celé čtverečky. Koncový bod po umístění pěti triomin tedy bude (x, y) , kde $x + y = 20$. Označíme-li N počet triomin nahoru a P počet triomin doprava, potom $N + P = 5$ a $(x, y) = (N + 3P, 3N + P)$.

Abychom tuto řadu triomin, která se dotýkají pouze rohy (čemuž budeme říkat „volný řetězec“), transformovali do platných cest, postupně „opravíme“ každý ze čtyř kloubů mezi navazujícími triominy. Místu, kde se potkávají triomina i a $i + 1$, budeme říkat i -tý kloub. Pro každý kloub zvolíme jednu ze dvou operací: V i -tém kloubu buď posuneme celý řetězec triomin $i + 1, i + 2, \dots, 5$ o jednu jednotku doleva, nebo o jednu jednotku dolů. To zajistí, že triomina i a $i + 1$ sdílejí celou hranu namísto rohu.

Označme ℓ celkový počet kloubů, na kterých provedeme posun doleva, a d počet kloubů, na kterých provedeme posun dolů. Protože máme celkem 4 klouby, $\ell + d = 4$. Po provedení všech čtyř posunů se koncový bod (x, y) původního volného řetězce posune do $(x - \ell, y - d)$. Pro platnou cestu z $(0, 0)$ do pravého horního rohu $(9, 7)$ splňuje tento koncový bod $(x - \ell, y - d) = (9, 7)$.

Prozkoumáme všech 6 možných hodnot (N, P) :

- $(5, 0)$: $(x, y) = (5, 15)$ nemůže dosáhnout $(9, 7)$ čtyřmi posuny.
- $(4, 1)$: $(x, y) = (7, 13)$ také není možné opravit.
- $(3, 2)$: $(x, y) = (9, 11)$ znamená $\ell = 0$, $d = 4$ (všechny posuny jsou směrem dolů). Máme $\binom{5}{3} = 10$ volných řetězců a pro každý pouze jedno možné opravení, což dává 10 platných cest.
- $(2, 3)$: $(x, y) = (11, 9)$ znamená $\ell = 2$, $d = 2$. Máme $\binom{5}{2} = 10$ volných řetězců a pro každý z nich $\binom{4}{2} = 6$ způsobů, jakými vybrat, které klouby posuneme doleva (zbytek se posune dolů), z čehož získáme $10 \cdot 6 = 60$ platných cest.
- $(1, 4)$: $(x, y) = (13, 7)$ znamená $\ell = 4$, $d = 0$ (všechny posuny jsou směrem doleva). Máme $\binom{5}{1} = 5$ volných řetězců a pro každý jen jedno možné opravení, tedy jen 5 platných cest.
- $(0, 5)$: $(x, y) = (15, 5)$ také není možné opravit.

Celkové množství platných cest je tedy $10 + 60 + 5 = 75$.

Úloha 40. Reálná čísla a, b, c, d splňují $a + b + c + d = 2$ a $\frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$. Určete hodnotu výrazu

$$\frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}.$$

Výsledek. 507

Řešení. Označme $X = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$ a $Y = \frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}$.

Zkusíme pomocí X a Y vytvořit nějaký výraz beze zlomků, ideálně $a + b + c + d = 2$ nebo něco podobného. Protože ve jmenovateli prvního zlomku máme $a + 2b$, chtěli bychom v čitateli mít $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$, aby se jmenovatel vykrátí. Totéž platí pro zbývající zlomky. Vezměme tedy:

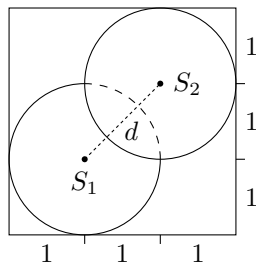
$$\begin{aligned} X - 4Y &= \frac{a^2 - 4b^2}{a + 2b} + \frac{b^2 - 4c^2}{b + 2c} + \frac{c^2 - 4d^2}{c + 2d} + \frac{d^2 - 4a^2}{d + 2a} = \\ &= (a - 2b) + (b - 2c) + (c - 2d) + (d - 2a) = -(a + b + c + d) = -2. \end{aligned}$$

Dostáváme tak $X - 4Y = -2$, a tedy $Y = \frac{1}{4}(X + 2) = \frac{2026+2}{4} = 507$.

Úloha 41. Krabíčka má tvar kvádru o výšce a , jehož podstavou je čtverec o straně délky 3. Jsou v ní dva pingpongové míčky o poloměru 1. První se dotýká dna, dvou svislých stěn a druhého míčku, druhý se dotýká zbylých dvou svislých stěn, víka krabíčky a prvního míčku. Určete hodnotu a .

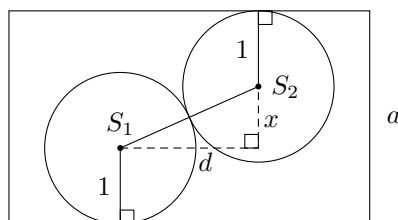
Výsledek. $2 + \sqrt{2}$

Řešení. Středy míčků budeme značit S_1 a S_2 a dále označíme d vodorovnou vzdálenost mezi těmito body, tj. délku projekce úsečky S_1S_2 na dno (nebo víko) krabíčky. Při pohledu shora vidíme čtverec o straně délky 3 a v něm dvě jednotkové kružnice; obě se dotýkají dvojice sousedních stran, a to tak, že se každé strany čtverce dotýká právě jedna z nich.



Z toho plyne, že v této projekci leží S_1 a S_2 v protilehlých rozích čtverce o straně 1. Tudíž $d = \sqrt{2}$.

Dále uvažujeme svislou rovinu (tj. kolmou na dno i víko) procházející body S_1 a S_2 . Krabice v tomto řezu vypadá jako obdélník, jehož „svislá“ strana má hledanou délku a ; úsečka S_1S_2 samozřejmě leží v této rovině. Označme x svislou vzdálenost mezi S_1 a S_2 .



Spojnice středů dvou dotýkajících se jednotkových koulí má zjevně délku $|S_1S_2| = 2$. Zároveň jde o přeponu pravoúhlého trojúhelníka s vodorovnou odvěsnou d a svislou odvěsnou x , takže $|S_1S_2|^2 = d^2 + x^2$ neboli $x = \sqrt{2^2 - d^2} = \sqrt{2}$.

Protože se první míček dotýká dna a druhý víka, lze hledanou výšku krabice určit jako součet poloměru prvního míčku, svislé vzdálenosti obou středů a poloměru druhého míčku: $a = 1 + x + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

Úloha 42. Klárka vyplnila tabulku 3×3 číslicemi $0, 1, \dots, 9$ tak, že každé políčko obsahuje právě jednu číslici, žádná číslice se neopakuje, a navíc, když Klárka sečte čísla v kterémkoli řádku nebo sloupci, vyjde jí buď vždy liché, nebo vždy sudé číslo. Kolika způsoby mohla tabulku vyplnit? Uvádíme příklad tabulky, kde je všech šest součtů sudých:

1	2	3
5	4	7
6	0	8

Výsledek. 259 200

Řešení. V tabulce chybí právě jedna číslice. Zkoumejme nejprve situaci, kdy chybí lichá číslice. Protože $0+1+\dots+9 = 45$ je liché číslo a vynecháváme z něj jeden lichý sčítanec, je celkový součet v tabulce sudý. Proto je sudý i součet v každém řádku i sloupci. Každý řádek i sloupec tedy ze čtyř lichých číslic buď obsahuje dvě, nebo neobsahuje žádné. Z toho vidíme, že právě jeden řádek a právě jeden sloupec bude obsahovat jen sudé číslice, a zbylá čtyři místa budou obsazena lichými. Každou takovou tabulku tedy jednoznačně určíme tím, že nejprve zvolíme vynechanou lichou číslici (5 možností), pak vybereme jeden řádek a jeden sloupec bez lichých čísel ($3 \cdot 3 = 9$ možností), a nakonec zvolíme konkrétní rozmístění lichých ($4! = 24$ možností) a sudých ($5! = 120$ možností) čísel.

Situaci, kdy v tabulce chybí sudá číslice, je obdobná. Součet v každém řádku i sloupci musí tentokrát být lichý. Sudá a lichá čísla si v řešení z předchozího odstavce vymění role, jinak probíhá výpočet naprosto stejně. Tentokrát tedy můžeme 5 způsoby vybrat chybějící sudou cifru, pak $3 \cdot 3$ způsoby zvolit řádek a sloupec obsahující jen liché cifry, a nakonec rozmístit sudá čísla $4!$ a lichá $5!$ způsoby. Celkový počet možností, jak tabulku vyplnit, se tedy rovná $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 120 = 259\,200$.

Úloha 43. Máme čtyři vzájemně různá kladná celá čísla a, b, c, d s celkovým součtem 20 000. Jaká je nejmenší možná hodnota $\text{nsn}(a, b, c, d)$, kde nsn značí nejmenší společný násobek?

Výsledek. 9600

Řešení. Označme si $L = \text{nsn}(a, b, c, d)$. Protože je L násobkem všech těchto čísel, platí $L = aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1$ pro nějaká různá kladná celá čísla a_1, b_1, c_1, d_1 . Bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$. Z toho plyne $a_1 \geq 1$, $b_1 \geq 2$, $c_1 \geq 3$, $d_1 \geq 4$, a tedy

$$a \leq L, \quad b \leq \frac{L}{2}, \quad c \leq \frac{L}{3}, \quad d \leq \frac{L}{4}.$$

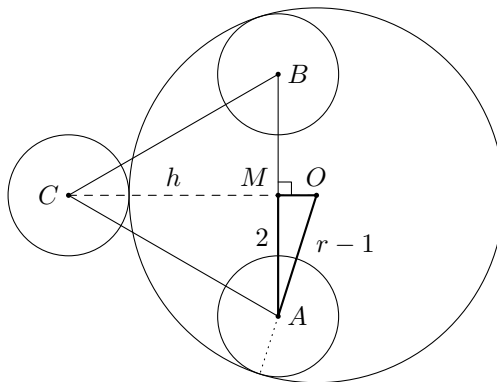
Proto zjišťujeme, že

$$20\,000 = a + b + c + d \leq L \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25L}{12},$$

neboli $L \geq 12 \cdot 20\,000/25 = 9600$.

Zjistíme, jestli je hodnota $L = 9600$ dosažitelná. Jediný způsob, jak v uvedené nerovnosti dostat rovnost, je položit $a = 9600$, $b = \frac{9600}{2}$, $c = \frac{9600}{3}$ a $d = \frac{9600}{4}$. Tyto hodnoty b, c, d jsou skutečně celočíselné; jejich největším společným násobkem je zjevně 9600 a jejich součtem $9600 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 20\,000$ přesně, jak potřebujeme. Hledaným minimem je tedy 9600.

AB , potom $|AM| = 2$ a $|CM| = h$.



Protože se kružnice dotýkají, platí $|OA| = |OB| = r - 1$ a $|OC| = r + 1$. Najdeme polohu bodu O . Víme, že leží na přímce CM , a jeho vzdálenost od M tedy je

$$|OM| = |OC| - |CM| = r + 1 - h.$$

(Zde předpokládáme, že O leží vně trojúhelníku ABC . Pokud by ležel uvnitř, museli bychom psát $|OM| = |CM| - |OC|$; v dalším výpočtu ale pracujeme pouze s hodnotou $|OM|^2$, která je stejná v obou případech.) Použijeme-li Pythagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku OMA , dostaneme

$$|OA|^2 = |OM|^2 + |AM|^2 \quad \text{neboli} \quad (r - 1)^2 = (r + 1 - h)^2 + 2^2.$$

Z toho vyjádříme r jako

$$r = \frac{h^2 - 2h + 4}{2(h - 2)}.$$

Stačí dosadit $h = 2\sqrt{3}$ a dostaneme hledaný poloměr $r = \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2}$.

Úloha 47. Na večírku se sešli kyklopové vysocí 4 m a trpaslíci vysocí (nebo spíš nízcí) jen 1,2 m. Zpočátku se spolu tyto dvě skupiny kvůli velkému výškovému rozdílu nebavily a každá okouněla ve své vlastní místnosti. V průběhu večera se ale začaly prolamovat ledy a 35 kyklopů a 24 trpaslíků přešlo ze své místnosti do té druhé. Poté byla průměrná výška účastníků stejná v obou místnostech. Jaký je minimální celkový počet účastníků večírku, pro který toto mohlo nastat?

Výsledek. 117

Řešení. Označme k a t po řadě celkový počet kyklopů a trpaslíků, kteří dorazili na večírek. Jakmile se rozproudila zábava, sešlo se v jedné místnosti $t - 24$ trpaslíků a 35 kyklopů a v druhé místnosti 24 trpaslíků a $k - 35$ kyklopů. Pro přehlednost zavedme následující značení: Pro první místnost položíme $t_1 = t - 24$, $k_1 = 35$, pro druhou $t_2 = 24$, $k_2 = k - 35$, a výšky kyklopů a trpaslíků označme po řadě h_k a h_t . Průměrnou výšku tak můžeme vyjádřit jako

$$\frac{t_1 h_t + k_1 h_k}{t_1 + k_1} = \frac{t_2 h_t + k_2 h_k}{t_2 + k_2}.$$

Zjednodušením této rovnosti dostaneme

$$(h_k - h_t)(k_1 t_2 - t_1 k_2) = 0.$$

Jelikož se výšky kyklopů a trpaslíků liší, musí platit vztah $k_1 t_2 - t_1 k_2 = 0$, neboli $\frac{k_1}{t_1} = \frac{k_2}{t_2}$. Vidíme, že ve skutečnosti na konkrétních výškách vůbec nezáleží. Pokud má být průměrná výška v obou místnostech stejná, musí být v obou místnostech stejný poměr kyklopů a trpaslíků. To je ostatně intuitivně jasné i bez jakéhokoli počítání.

Dosazením známých hodnot k_1 a t_2 dostaneme

$$t_1 k_2 = k_1 t_2 = 35 \cdot 24 = 840.$$

Naším cílem je minimalizovat celkový počet účastníků $k + t$. Ekvivalentně můžeme minimalizovat také výraz $k_2 + t_1 = k - 35 + t - 24$, který se od něho liší o fixní konstantu. Pro hodnoty k_2 a t_1 známe jejich součin a chceme minimalizovat jejich součet. V takovém případě je ideální volit dvě čísla co nejbliž u sebe – to plyne z identity $(t_1 + k_2)^2 = (t_1 - k_2)^2 + 4t_1 k_2$. Hledáme tedy rozklad čísla 840 na dva co nejbližší činitele. Snadno najdeme optimální řešení $840 = 28 \cdot 30$.

Proto jsou t_1 a k_2 rovny 28 a 30 (v libovolném pořadí) a celkový počet účastníků na večírku je $t + k = 28 + 30 + 24 + 35 = 117$.

Úloha 48. Šest pirátů vtrhne do krčmy. Po chaotické šarvátce se promíchají a náhodně se usadí kolem kulatého stolu. Každý z nich má nějakou celočíselnou úroveň zuřivosti od 1 do 6 (každý jinou), která rozhoduje o výsledku duelu: vyhrává vždy pirát s vyšší zuřivostí. Aby rozhodli, kdo převezme vedení, provádějí následující rituál: v každém kole je náhodně vybrán jeden ze zbývajících pirátů, aby vyzval k duelu svého nejbližšího souseda ve směru hodinových ručiček (prázdná místa se přeskakují). Poražený je vyřazen, vítěz zůstává na místě. Po pěti kolech zbude pouze poslední pirát. Jaká je pravděpodobnost, že poslední duel proběhne mezi dvěma nejsilnějšími piráty (se zuřivostmi 5 a 6)?

Výsledek. 7/15

Řešení. Piráty náhodně usadíme kolem stolu a budeme sledovat pouze ty se zuřivostí 5 a 6. Piráty budeme celou dobu označovat po směru hodinových ručiček jako $5, A_1, \dots, A_a, 6, B_1, \dots, B_b$, kde 5 a 6 značí piráty s příslušnou zuřivostí, a je počet nevyřazených pirátů sedících mezi 5 a 6 ve směru hodinových ručiček od 5 k 6, a b je počet zbývajících nevyřazených pirátů sedících mezi 6 a 5. Označme $f(a, b)$ pravděpodobnost, že finální duel proběhne mezi 5 a 6 (pro danou konfiguraci). Je zjevné, že tato pravděpodobnost skutečně závisí pouze na číslech a a b , nikoli na konkrétních hodnotách zuřivosti pirátů A_i a B_i . Každý pirát A_i a B_i totiž může mít zuřivost nejvýše 4, takže v duelu s 5 nebo 6 bude vyřazen, a zároveň všechny duely mezi piráty A_i a A_j (či mezi B_i a B_j) pouze sníží velikost daného bloku o jedna.

Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, pak 5 a 6 sedí vedle sebe a zbývá $n = a + b + 2$ pirátů. V této situaci existuje v každém kole právě jedna volba vyzyvatele (konkrétně 5 či 6 podle toho, kdo z nich sedí napravo), která vynutí duel 5 proti 6, čímž vyřadí 5. Všechny ostatní volby vyřadí někoho jiného. Pravděpodobnost, že 5 přežije do posledního duelu, tedy bude

$$f(a, 0) = f(0, b) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{2}{n} = \frac{2}{a+b+2}.$$

Nyní předpokládejme, že $a, b \geq 1$ a $n = a + b + 2$ je počet zbývajících pirátů. Podívejme se na blok pirátů jdoucí od 5 po směru hodinových ručiček a končící těsně před 6. Tento blok má právě $a + 1$ členů, konkrétně $5, A_1, \dots, A_a$. Pokud náhodně vybraný vyzyvatel je v tomto bloku, duel proběhne mezi dvěma piráty z tohoto bloku (nebo mezi A_a a 6) a vyřazený pirát bude nutně z tohoto bloku, ale nebude to pirát 5. Každý výběr vyzyvatele z tohoto bloku tedy zmenší a o jedna. Stejně funguje i blok začínající pirátem 6, který obsahuje po směru hodinových ručiček všechny piráty až po piráta 5 a má právě $b + 1$ členů. Výběrem vyzyvatele z tohoto bloku se b vždy sníží o jedna. Dostáváme tedy rekurentní vzorec

$$f(a, b) = \frac{a+1}{n} f(a-1, b) + \frac{b+1}{n} f(a, b-1) \quad \text{pro } a, b \geq 1.$$

Na začátku platí $a + b = 4$. Použitím krajních hodnot $f(0, 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $f(0, 3) = \frac{2}{5}$, $f(0, 2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $f(0, 1) = \frac{2}{3}$ a symetrie $f(a, b) = f(b, a)$ z rekurence postupně dostaneme $f(1, 1) = \frac{3}{5}$, $f(1, 2) = \frac{3}{5}$, $f(1, 3) = \frac{8}{15}$ a $f(2, 2) = \frac{3}{5}$. Protože počáteční rozesazení je náhodné, je mezera ve směru hodinových ručiček mezi 5 a 6 rovnoměrně distribuovaná na množině $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, takže hledaná pravděpodobnost je

$$\frac{1}{5} (f(0, 4) + f(1, 3) + f(2, 2) + f(3, 1) + f(4, 0)) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{15}.$$

Alternativní řešení. Budeme rovnou řešit obecnější úlohu s n piráty místo šesti. Označme p_n pravděpodobnost, že piráti, kteří přežijí do posledního kola, jsou n a $n-1$. Naším cílem je dokázat rekurentní vztah

$$p_n = \left(1 - \frac{2}{n(n-1)} \right) p_{n-1} \quad \text{pro } n \geq 3. \quad (\spadesuit)$$

Tvrdíme, že v prvním kole bude pirát $n-1$ vyřazen s pravděpodobností $\frac{2}{n(n-1)}$. Pravděpodobnost, že piráti n a $n-1$ sedí vedle sebe, je totiž $\frac{2}{n-1}$, protože po usazení piráta n má pirát $n-1$ na výběr z celkem $n-1$ židlí a právě 2 z nich jsou vedle n . A sedí-li n a $n-1$ vedle sebe, je pravděpodobnost duelu mezi nimi v prvním kole $\frac{1}{n}$. Pravděpodobnost vyřazení piráta $n-1$ v prvním kole je tedy skutečně $\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n(n-1)}$.

S pravděpodobností $1 - \frac{2}{n(n-1)}$ je tedy první vyřazený některý z pirátů se zuřivostí $1, \dots, n-2$. Zdůvodníme, že v tom případě je zbývajících $n-1$ pirátů usazených kolem stolu opět „úplně náhodně“, tj. všechny jejich konfigurace kolem stolu jsou stejně pravděpodobné. Byl-li vyřazen pirát k , pak každá konfigurace zbylých pirátů kolem stolu mohla vzniknout přesně $2(n-k)$ způsoby: je totiž jasné, jak byli kolem stolu uspořádáni ostatní piráti, a pirát k byl vyřazen nějakým silnějším pirátem (těch je $n-k$), vedle kterého mohl sedět buď vlevo, nebo vpravo. Číslo $2(n-k)$ záleží jen na k a ne na konfiguraci, která po jeho vyřazení zbude, takže když zbývajících pirátů před druhým kolem přechíslováme jako $1, 2, \dots, n-1$, dostáváme původní úlohu s $n-1$ piráty. Tím jsme dokázali rekurenci $(\spadesuit)$.

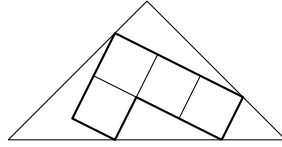
Nyní už je snadné spočítat p_6 . Zjevně $p_2 = 1$; opakovaným použitím rekurentního vztahu $(\spadesuit)$ dostáváme

$$p_6 = \frac{14}{15} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

Hledaná pravděpodobnost finálního duelu mezi piráty 6 a 5 je tedy $\frac{7}{15}$. Ze vztahu $(\spadesuit)$ dokonce můžeme snadno indukci dokázat obecný vzorec

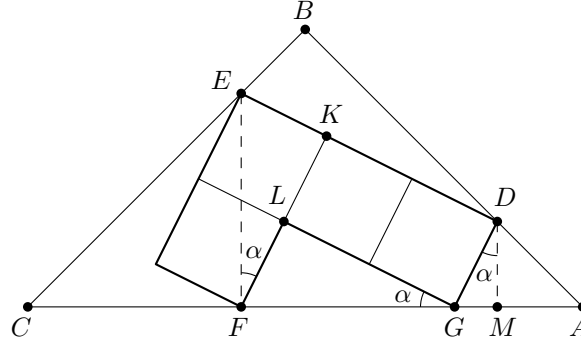
$$p_n = \frac{n+1}{3(n-1)} \quad \text{pro } n \geq 2.$$

Úloha 49. Tetromino tvaru L, složené ze čtyř shodných čtverců spojených hranami, jsme vepsali do rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku jako na obrázku. Určete poměr obsahu tetrominu ku obsahu trojúhelníku.



Výsledek. 80/169

Řešení. Označíme si body jako na nákresu níže a budeme předpokládat, že čtverce, z nichž se tetromino skládá, jsou jednotkové. Pak k vyřešení potřebujeme spočítat jen jednu délku strany trojúhelníka ABC , např. přepony AC .



Dokreslíme si nejprve pomocnou úsečku EF , čímž vznikne pravoúhlý trojúhelník EFK s pravým úhlem u vrcholu K a s délkami stran $|EK| = 1$, $|KF| = 2$ a $|EF| = \sqrt{5}$. Dále je $|GL| = 2$, $|LF| = 1$, a navíc $\angle FLG = 90^\circ$, proto jsou trojúhelníky EFK a FGL shodné, a tedy $|GF| = |EF| = \sqrt{5}$. Úhel $\angle LGF$ si označíme α . Pak i $\angle KFE = \alpha$, čímž ale dostaneme $\angle GFE = 90^\circ$, protože α je doplňkem úhlu $\angle GFL$ do 90° . Z toho plyne, že je trojúhelník FEC rovnoramenný pravoúhlý s odvěsnou délkou $|FC| = \sqrt{5}$.

Dokreslíme si nyní druhou pomocnou úsečku spuštěním kolmice z bodu D na úsečku AC a patu této kolmice si označíme M . Protože $\angle LGF + \angle MGD = 90^\circ$, dostáváme $\angle GDM = \alpha$, a tudíž je trojúhelník MDG podobný trojúhelníku LGF s koeficientem $\sqrt{5}$. Trojúhelník MDG má tedy délky stran $|MG| = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $|MD| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a $|DG| = 1$. Protože je trojúhelník MAD rovnoramenný pravoúhlý, platí $|AM| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Složením výše uvedeného jsme získali

$$|AC| = |AM| + |MG| + |GF| + |FC| = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = \frac{3 + 2 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Proto se obsah trojúhelníku ABC rovná

$$\frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{|AC|}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{\sqrt{10}} \right)^2 = \frac{169}{20}$$

a hledaný podíl je $\frac{4}{\frac{169}{20}} = \frac{80}{169}$.

Úloha 50. Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ danou rovnostmi $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ a vztahem $a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} + 3^{a_{n+1}} + 3^{a_n}$ platným pro každé celé $n \geq 1$. Jaký je zbytek po dělení a_{22} číslem 49?

Výsledek. 11

Řešení. Člen a_{22} je součtem mocnin čísla 3, jejichž zbytek po dělení 49 lze určit pomocí Eulerovy věty. Platí $\text{NSD}(3, 49) = 1$ a také $\varphi(49) = 42$, takže z Eulerovy věty dostaneme

$$3^{42} \equiv 1 \pmod{49}, \quad \text{a tedy} \quad 3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 42} \pmod{49}.$$

Pro výpočet $a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}}$ modulo 49 tedy stačí znát hodnoty a_{21}, a_{20}, a_{19} modulo 42. Z Čínské věty o zbytcích víme, že je to ekvivalentní nalezení těchto hodnot modulo 6 a 7.

Pro $n \geq 4$ je každý člen a_n součtem tří mocnin čísla 3, tedy lichý a dělitelný třemi. Díky tomu máme

$$a_n \equiv 3 \pmod{6}.$$

Pro výpočet a_n modulo 7 opět použijeme Eulerovu větu. Protože $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, odvodíme $3^{a_n} \equiv 3^3 \pmod{7}$ pro každé $n \geq 4$. Vezmeme-li $n \geq 7$ (aby $n-1, n-2, n-3 \geq 4$), dostáváme

$$a_n = 3^{a_{n-1}} + 3^{a_{n-2}} + 3^{a_{n-3}} \equiv 3^3 + 3^3 + 3^3 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Kombinací těchto kongruencí a Čínské věty o zbytcích dostaneme $a_n \equiv 39 \equiv -3 \pmod{42}$ pro $n \geq 7$. S využitím Eulerovy věty máme $3^{a_n} \equiv 3^{-3} \pmod{49}$ pro $n \geq 7$, kde záporný exponent označuje mocninu modulární inverze. (Samozřejmě bychom mohli také přímočaře pracovat s exponentem 39, ale takto si ušetříme práci.) Pak tedy

$$a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \equiv 3^{-3} + 3^{-3} + 3^{-3} = 3^{-2} = 9^{-1} \equiv 11 \pmod{49},$$

protože $9 \cdot 11 = 99 \equiv 1 \pmod{49}$. Hledaný zbytek je tudíž 11.

Úloha 51. Lucka sedí v autě s prázdnou nádrží na nultém kilometru nekonečné dálnice a chystá se vyrazit na cestu. Pro každé $n \geq 0$ se přesně na n^2 -tém kilometru nachází čerpací stanice. Na každé benzínce, ke které Lucka dojede, může koupit jakýkoliv celočíselný počet dávek paliva. Majitelé čerpacích stanic ale neradi prodávají palivo ve velkém množství, takže cena za dávku postupně vzrůstá: na každé benzínce stojí první dávka 1 librodolar, druhá dávka už 2 librodolary, třetí 3 librodolary, atd. Jedna dávka paliva vystačí Luce právě na jeden kilometr. Zásoby paliva na benzínkách i Lucčina nádrž jsou neomezené. Pokud má Lucka 730 librodolarů, kam nejdále může dojet?

Výsledek. 123

Řešení. Označme C_n nejmenší možnou částku, za kterou je možné ujet n^2 kilometrů. Větší část úlohy spočívá v určení této hodnoty. Aby Lucka došla k benzínce na kilometru n^2 , mohla čerpat u n předchozích benzínek. Potřebuje celkem n^2 dávek paliva, a ty zjevně nemůže sehnat levněji než tak, že u každé z n benzínek koupí n dávek.

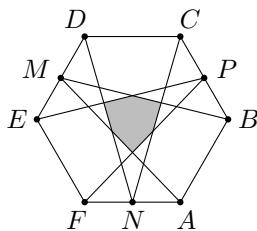
Nejprve ale musíme ověřit, že plán „na každé benzínce, kterou potkám, koupím n dávek paliva“ funguje (tj. umožňuje úspěšně dojet na kilometr n^2) alespoň při neomezené zásobě peněz; nestane se, že Luce dojde palivo dřív, protože nezvládne dojet už k některé předešlé čerpací stanici? Dokážeme velmi jednoduchou indukcí, že tento plán neselže. Případ $n = 0$ je jasný – žádné palivo není potřeba nakupovat a úspěšně dorazíme na nultý kilometr. Předpokládejme nyní, že už víme, že je možné dorazit na kilometr n^2 tak, že u každé z n benzínek koupíme n dávek. Potom je zjevné, že pokud budeme nakupovat dokonce $n + 1$ dávek, tak nám také nedojde palivo před kilometrem n^2 ; tím pádem se nám cestou podaří úspěšně $(n + 1)$ -krát koupit $n + 1$ dávek, a palivo nám tedy vystačí až na kilometr $(n + 1)^2$.

Indukcí jsme tedy dokázali, že zvolený plán skutečně funguje; proto je C_n rovno ceně n nákupů n dávek paliva, tj.

$$C_n = n(1 + 2 + \dots + n) = n \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Protože $C_{11} = 726 \leq 730 < C_{12}$, vidíme, že Lucka má dost peněz na to, aby urazila 11^2 kilometrů, ale ne 12^2 . K tomu, aby došla na svou poslední benzínku, spotřebovala 726 librodolarů, takže jí zbývá ještě 4. Nemá smysl (a dokonce to není ani možné) za ně už dříve draze nakoupit na předešlých benzínkách; jediné možné využití je utratit je na kilometru 11^2 . Tam za ně lze koupit 2 dávky paliva, ale třetí už ne. Proto Lucka může ujet nejvýše $11^2 + 2 = 123$ kilometrů.

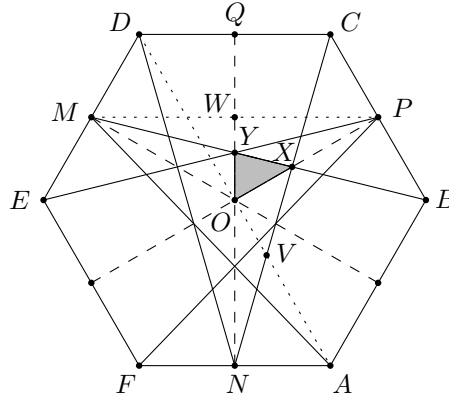
Úloha 52. Pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ má obsah 420. Písmena M , N a P postupně označují středy úseček DE , FA a BC . Části úseček AM , BM , CN , DN , EP a FP tvoří hranice šedého útvaru vyznačeného na obrázku. Určete jeho obsah.



Výsledek. 36

Řešení. Šedý útvar lze rozdělit na šest shodných trojúhelníků; určíme obsah jednoho z nich. Označme písmenem O střed šestiúhelníku, písmenem X průsečík BM s CN a písmenem Y průsečík BM s PE . Hledáme tedy obsah trojúhelníku OXY . Budeme potřebovat následující pomocné body: střed úsečky CD označíme Q , průsečík AD s CN

bude V a průsečík PM s QN bude W . Dokážeme, že $|OX| : |OP| = 2 : 5$ a $|OY| : |OQ| = 2 : 7$.



Jelikož trojúhelníky NAV a CDV jsou podobné a platí $|NA| = \frac{1}{2}|CD|$, dostáváme $|AV| : |VD| = 1 : 2$, což lze přepsat jako $|AV| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{2}{3}|OA|$. Proto $|OV| = \frac{1}{3}|OA|$. Dále je trojúhelník OVX podobný PCX , a protože

$$|PC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|OA| = \frac{3}{2}|OV|,$$

máme $|OX| : |PX| = 2 : 3$. Z toho plyne $|OX| : |OP| = 2 : 5$.

K odvození vztahu $|OY| : |OQ| = 2 : 7$ je potřeba využít podobnosti trojúhelníku OBY s WMY ; když si uvědomíme, že $|WM| = \frac{3}{4}|OB|$, plyne z ní $|OY| : |YW| = 4 : 3$ neboli $|OY| = \frac{4}{7}|OW|$. Díky $|OW| = |WQ|$ dostáváme kýžené $|OY| : |OQ| = 2 : 7$.

Pro označení obsahu trojúhelníku budeme používat hranaté závorky. Trojúhelníky OXY a OPQ sdílejí úhel u vrcholu O , takže

$$\frac{[OXY]}{[OPQ]} = \frac{|OX|}{|OP|} \cdot \frac{|OY|}{|OQ|} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}.$$

Trojúhelník OPQ je rovnostranný s $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -násobnou délkou strany oproti trojúhelníku ABO , takže $[OPQ] = \frac{3}{4}[ABO]$. Proto

$$\frac{[OXY]}{[ABO]} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}.$$

Protože se vyznačený útvar skládá ze šesti kopií trojúhelníku OXY a šestiúhelník se skládá ze šesti kopií trojúhelníku ABO , je mezi jejich obsahy stejný poměr jako mezi těmito trojúhelníky. Obsah šedé oblasti je tedy $\frac{3}{35} \cdot 420 = 36$.

Úloha 53. Jardu fakt baví algebraické úpravy, takže jednoho krásného dne vzal všech šestnáct různých výrazů tvaru $\pm a \pm b \pm c \pm d$ a spočítal jejich součin. Tím získal polynom v proměnných a, b, c, d . Pak z něj zahodil všechny členy, v nichž chyběla alespoň jedna z proměnných. Sečtete koeficienty členů, které Jardovi v polynomu zbyly.

Výsledek. -328

Řešení. Označme původní Jardův polynom před zahazením nevhodných členů písmenem P . Součet všech koeficientů dostaneme jako $P(1, 1, 1, 1)$; tento součin obsahuje činitel $(1 + 1 - 1 - 1) = 0$, takže součet všech koeficientů P je 0. Stačí tedy určit součet koeficientů, které Jarda zahodil. Spočítáme jej pomocí principu inkluze a exkluze.

K určení součtu koeficientů členů, v nichž chybí proměnná d , stačí položit $d = 0$ a $a = b = c = 1$. Dostáváme

$$\begin{aligned} P(1, 1, 1, 0) &= ((1 + 1 + 1)(1 + 1 - 1)(1 - 1 + 1)(1 - 1 - 1) \cdot \\ &\quad \cdot (-1 + 1 + 1)(-1 + 1 - 1)(-1 - 1 + 1)(-1 - 1 - 1))^2 = 9^2 = 81. \end{aligned}$$

Stejnou hodnotu má i součet koeficientů členů, v nichž chybí kterákoli jiná zvolená proměnná. Když tedy sečteme koeficienty členů, v nichž chybí a , přičteme koeficienty členů, v nichž chybí b , koeficienty členů bez c a koeficienty členů bez d , dostáváme $4 \cdot 81 = 324$. V tomto součtu jsme ale započítali dvakrát každý člen, v němž jsou jen dvě proměnné. Proto musíme šestkrát odečíst $P(1, 1, 0, 0) = 0$; existuje totiž šest dvojic proměnných. Na závěr musíme do součtu znovu vrátit koeficienty členů zahrnujících jen jednu proměnnou, což znamená čtyřikrát přičíst $P(1, 0, 0, 0) = 1$. Dohromady dostáváme, že součet koeficientů členů, které Jarda vyhodil, je $324 - 6 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 328$. Protože součet všech koeficientů v P je nula, hledaný součet zbylých členů je -328 .

Úloha 54. Anička má 9000 shodných rovnostranných trojúhelníků. Všechny je bez překryvu uspořádala do tvaru jednoho jediného čtyřúhelníku. Kolik různých čtyřúhelníků takto mohla vytvořit? Shodné čtyřúhelníky považujeme za totožné.

Výsledek. 30

Řešení. Všechny úhly ve výsledném čtyřúhelníku musejí být násobky 60° . Navíc je jejich součet roven 360° . Z toho snadno plyne, že tyto úhly musejí být (v nějakém pořadí) $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$; úhel 180° v některém z vrcholů by totiž znamenal, že jde ve skutečnosti o trojúhelník, a při úhlu 240° nebo větším vidíme, že by alespoň jeden ze zbylých úhlů musel být menší než 60° , což nelze. Tím pádem lze vytvořit dva typy čtyřúhelníků: Rovnoběžníky, kde se shodné úhly nacházejí naproti sobě, a rovnoramenné lichoběžníky, kde spolu shodné úhly sousedí.

Pokud Anička sestavila rovnoběžník o stranách a, b , pak k tomu využila $2ab$ trojúhelníků (jde o ab malých rovnoběžníků sestavených jen ze dvou trojúhelníků). Každý takový rovnoběžník odpovídá jednomu páru $\{a, b\}$, kde $ab = 4500$. Takových dvojic je 18 (protože $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ má $(2+1)(2+1)(3+1) = 36$ kladných dělitelů).

Pokud Anička sestavila rovnoramenný lichoběžník, je důležité si všimnout, že každý takovýto lichoběžník mohla získat tím, že sestavila velký rovnostranný trojúhelník (z více než 9000 trojúhelníčků) a pak z něho zase odebrala o něco menší rovnostranný trojúhelník. Trojúhelník o straně n se skládá z n^2 trojúhelníčků – to zjistíme buď tím, že se na něj podíváme po vrstvách a sečteme posloupnost lichých čísel $1 + 3 + \dots + (2n-1)$, nebo snáze tím, že si uvědomíme, že jde o polovinu rovnoběžníku o stranách n a n . Z toho plyne, že Aniččin lichoběžník je složený z $a^2 - b^2$ trojúhelníčků, kde a je délka delší a b délka kratší základny. Proto potřebujeme vědět, kolika způsoby lze zapsat 9000 ve tvaru $(a+b)(a-b)$. Čísla $a+b$ a $a-b$ mají stejnou paritu; a také naopak, pokud zapíšeme 9000 jako součin dvou čísel se stejnou paritou (tedy nutně sudých), snadno z nich získáme odpovídající celá čísla a, b . Rozklady 9000 na součin dvou sudých čísel odpovídají rozkladům $9000/4 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ na součin dvou čísel; toto číslo má $(1+1)(2+1)(3+1) = 24$ dělitelů, takže příslušných rozkladů (a tedy i hledaných dvojic a, b) je 12.

Dohromady takto mohla Anička vytvořit $18 + 12 = 30$ čtyřúhelníků.

Úloha 55. Kuba po nocích vyrábí vánoční svítýlka, tedy řetězy s 10 žárovkami, a k dispozici má žluté a modré žárovky. Zařekl se, že se na řetězu nebude vyskytovat žádný úsek čtyř po sobě jdoucích žárovek, ve kterém by se barvy pravidelně střídaly (tedy ani žlutá – modrá – žlutá – modrá, ani naopak). Kolik různých řetězů umí Kuba vyrobit? (Kubovy řetězy mají odlišný začátek a konec.)

Výsledek. 548

Řešení. Žlutou žárovku reprezentujeme číslicí 1 a modrou 0. Úloha po nás tedy chce určit počet binárních (obsahujících pouze 1 a 0) posloupností délky deset, které neobsahují úseky 0101 ani 1010. Představme si transformaci, která změní znak na všech sudých pozicích (z 0 na 1 a obráceně), zatímco liché pozice nezmění. Aplikujeme-li tuto transformaci na nějakou posloupnost dvakrát, danou posloupnost tím nezměníme. Naše transformace je tedy bijekce, a navíc změní bloky 0101 a 1010 na 0000 nebo 1111. Kubovy řetězy tedy po transformaci odpovídají posloupnostem délky deset, jež neobsahují žádný souvislý úsek čtyř stejných číslic. Určíme počet takových posloupností délky n .

Označme tedy B_n počet posloupností délky n , které neobsahují žádný souvislý úsek čtyř stejných číslic. Dokážeme, že pro $n > 3$ platí rekurence $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$. Vezměme nějakou posloupnost délky n a podívejme se na její závěrečný úsek ze stejných číslic; ten bude mít délku 1, 2 nebo 3, označme ji k . (Hodnota $k = 1$ tedy znamená, že poslední dvě číslice jsou různé; $k = 2$ nastává tehdy, když poslední dvě jsou stejné, ale předpředposlední je jiná; jinak máme $k = 3$.) Odstraněním závěrečných k stejných číslic dostaneme validní posloupnost délky $n - k$. A také naopak: Z kterékoliv posloupnosti délky $n - k$ pro $k = 1, 2, 3$, která neobsahuje žádný souvislý úsek čtyř stejných číslic, umíme jednoznačně vyrobit validní posloupnost délky n tím, že za poslední číslici x připojíme blok délky k tvořený opačnou číslicí $1 - x$. Tím jsme vytvořili bijekci mezi vhodnými posloupnostmi délky n a vhodnými posloupnostmi délek $n - 1, n - 2$ a $n - 3$. Porovnáním počtů získáme výše uvedenou rekurenci.

Pro $n \leq 3$ jsou povoleny všechny binární posloupnosti, takže $B_1 = 2, B_2 = 4$ a $B_3 = 8$. Z rekurence dále postupně počítáme $B_4 = 14, B_5 = 26, B_6 = 48, B_7 = 88, B_8 = 162, B_9 = 298$ a konečně $B_{10} = 548$.

Úloha 56. Pro kladné celé číslo a vyřešte rovnici

$$\left(\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2} \right)^5 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^2.$$

Výsledek. 2525

Řešení. Nejprve si všimneme, že $a = 1$ nepřípadá v úvahu a že pro $a \geq 2$ je výraz $a + \sqrt{a^2 - 4}$ kladný, takže můžeme rovnici odmocnit – půjde o ekvivalentní úpravu. Dostáváme tedy

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \sqrt{\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2}}^5.$$

Výraz na levé straně je pro $a \geq 2$ ostře rostoucí (protože a i $a^2 - 4$ jsou rostoucí funkce), a proto může existovat nejvýše jedno reálné řešení $a \geq 2$. Tím spíše může existovat nejvýše jedno kladné celé řešení.

Nyní zjednodušíme pravou stranu. Platí $\frac{23+\sqrt{23^2-4}}{2} = \frac{23+5\sqrt{21}}{2} = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2$, takže dostáváme

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^5.$$

Použitím binomické věty upravíme rovnost do podoby

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a^2 - 4} &= \frac{5^5 + \binom{5}{2} \cdot 5^3 \cdot 21 + \binom{5}{4} \cdot 5^1 \cdot 21^2}{16} + \frac{\binom{5}{1} \cdot 5^4 \cdot \sqrt{21} + \binom{5}{3} \cdot 5^2 \cdot \sqrt{21}^3 + \sqrt{21}^5}{16} \\ &= \frac{3125 + 10 \cdot 2625 + 5 \cdot 2205}{16} + \frac{(5^5 + 250 \cdot 21 + 21^2) \cdot \sqrt{21}}{16} \\ &= 2525 + 551 \cdot \sqrt{21} \\ &= 2525 + \sqrt{551^2 \cdot 21}. \end{aligned}$$

Porovnáváme tedy dva výrazy ve tvaru $m + \sqrt{n}$, kde m, n jsou kladná celá čísla. Nabízí se myšlenka (kterou je skutečně možné korektně odůvodnit, ale dá to práci a my to už nemusíme dělat – víme totiž, že existuje nejvýše jedno řešení), že se budou rovnat příslušná m i příslušná n . Porovnání „racionálních částí“ dá $a = 2525$; snadno ověříme, že pak platí i druhá potřebná rovnost: Když dosadíme $a = 2525$ do $a^2 - 4$, skutečně dostáváme $2525^2 - 4 = 6\,375\,621 = 551^2 \cdot 21$. Ověřili jsme tedy, že 2525 je řešením; protože už víme, že kladné celočíselné řešení může existovat nejvýše jedno, je tím úloha vyřešena.

Alternativní řešení. Necht' $\alpha = \frac{1}{2}(23 + \sqrt{23^2 - 4})$. Pak α je kořenem kvadratické rovnice $t^2 - 23t + 1 = 0$, jejímž druhým kořenem je α^{-1} . Proto platí $\alpha + \alpha^{-1} = 23$.

Podobně položíme $\beta = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$. Pak je β kořenem rovnice $t^2 - at + 1 = 0$, a tedy $\beta + \beta^{-1} = a$. Navíc β musí být kladná, protože a je kladné.

Rovnici ze zadání jsme přepsali na $\alpha^5 = \beta^2$. Označme $x = \beta^{1/5}$; jde o kladné reálné číslo. Pak $x^2 = \alpha$, což dává $x^2 + x^{-2} = 23$. Položíme-li ještě $y = x + x^{-1}$, bude y také kladné. A jelikož $y^2 = x^2 + x^{-2} + 2 = 25$, platí $y = 5$.

Naším cílem je spočítat $a = x^5 + x^{-5}$ ze známé hodnoty y . Proto roznásobíme

$$y^5 = (x + x^{-1})^5 = (x^5 + x^{-5}) + 5(x^3 + x^{-3}) + 10(x + x^{-1}),$$

z čehož dostáváme

$$a = y^5 - 5(x^3 + x^{-3}) - 10y.$$

Zbývá nám vyjádřit $x^3 + x^{-3}$ pomocí y . To uděláme podobně:

$$y^3 = (x + x^{-1})^3 = (x^3 + x^{-3}) + 3(x + x^{-1}),$$

a proto

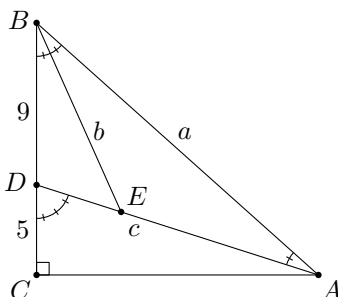
$$x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y.$$

Spojením předchozích výsledků získáme $a = y^5 - 5y^3 + 5y$, a dosazením $y = 5$ dostaneme konečný výsledek $a = 2525$.

Úloha 57. V trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C leží na straně BC bod D tak, že $|BD| = 9$ a $|DC| = 5$. Určete $|AB|$, pokud $|\angle ADC| = 3|\angle BAD|$.

Výsledek. 21

Řešení. Dopočtením úhlů snadno dostáváme $|\angle ABD| = 2|\angle DAB|$. Sestrojíme osu úhlu $\angle ABD$ a označíme její průsečík s úsečkou AD jako E . Platí tedy $|\angle ABE| = |\angle EBD| = |\angle DAB|$. Z toho plyne $|AE| = |EB|$ a také to, že trojúhelníky DBE a DAB jsou podobné. Z této podobnosti dostáváme $|DB| : |DA| = |DE| : |DB| = |BE| : |AB|$.



Označme $|AB| = a$, $|AE| = |EB| = b$ a $|AD| = c$. Potom $|DE| = c - b$ a uvedené poměry lze vyjádřit jako

$$\frac{9}{c} = \frac{c-b}{9} = \frac{b}{a}.$$

Z toho dostáváme $c^2 = bc + 81$ a $bc = 9a$, z čehož dále plyne $c^2 = 9a + 81$.

Protože trojúhelníky ACD i ABC jsou pravoúhlé s pravým úhlem u bodu C , dostáváme

$$|AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 = a^2 - (9 + 5)^2 = a^2 - 196$$

a také

$$|AC|^2 = |AD|^2 - |DC|^2 = c^2 - 25.$$

Z rovnosti těchto výrazů získáme po dosazení $c^2 = 9a + 81$ rovnici

$$a^2 - 196 = 9a + 56 \quad \text{neboli} \quad a^2 - 9a - 252 = 0.$$

Tato rovnice má právě jeden kladný kořen: $a = 21$.