

Vastus. $67,5^\circ$

Lahendus. Olgu X meie kahe diagonaali lõikepunkt. Selle asemel, et joonise järgi arvutada nurk $\angle CXE$, arvutame nurga $\angle FXG$ suuruse, mis on sama väärtusega. Selleks märkame esmalt, et $\angle GFX = \angle GFC = 90^\circ$, sest $BCFG$ on ristkülik. Lisaks, kuna kolmnurk EFG on võrdhaarne ja $\angle GFE = 135^\circ$, siis $\angle XGF = \angle EGF = 22,5^\circ$. Seega järeldame kolmnurgast FGX , et $\angle FXG = 180^\circ - 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$.

Ülesanne 6. Olgu a, b, c, d, e viis erinevat positiivset täisarvu nii, et $a < b < c < d < e$ ja nende aritmeetiline keskmine on 16. Leia d suurim võimalik väärtus.

Vastus. 36

Lahendus. Kuna

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 16,$$

siis $a + b + c + d + e = 80$. Et d oleks võimalikult suur, peavad teised liikmed olema võimalikult väikesed. Et järjestus $a < b < c$ jääks püsima, on väikseimad võimalikud väärtused $a = 1, b = 2, c = 3$ ning lisaks $e \geq d + 1$ (et kehtiks $d < e$). Seega

$$80 = a + b + c + d + e \geq 1 + 2 + 3 + d + (d + 1) = 7 + 2d,$$

kust $2d \leq 73$ ja seega $d \leq 36$ (kuna d on täisarv). See väärtus on saavutatav, kui valime $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 3, 36, 38)$, mille korral on summa tõepoolest 80 ning valitud arvud rahuldavad meie järjestustingimust. Järelikult on d suurim võimalik väärtus 36.

Ülesanne 7. Rändur jõudis kõrbes vana kivivärava juurde ja leidis sealt teed blokeeriva sfinksi. Sfinks lausus: “Vasta õigesti mu mõistatusele ja ma luban sul mööduda: mul on mõttes üks kolmekohaline arv, millel on järgmised omadused:

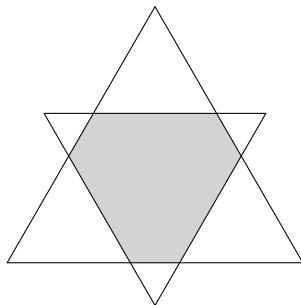
- see on paaritu;
- selle numbrid on kõik erinevad ja on vasakult paremale minnes kasvavad;
- see jagub 9-ga, kuid ükskõik millise ühe numbri eemaldamisel ei jagu saadud arv enam 9-ga;
- üks selle numbritest on 6.”

Mis arv on sfinksil mõttes?

Vastus. 567

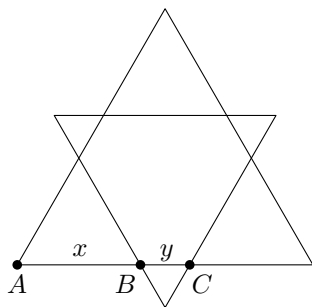
Lahendus. Kuna arv jagub 9-ga, siis arvu numbrite summa peab olema 9 või 18. Kuna arv on paaritu, ei saa ühelist arv olla 6, seega on kas kümneliste või sajaliste arv 6. Sajaliste kohal ta olla ei saa, sest siis oleks vähim võimalik numbrite summa $6 + 7 + 8 = 21 > 18$; järelikult on 6 kümneliste kohal. Siis on ühelist number vähemalt 7, seega peab numbrite summa olema 18 ning sajaliste ja ühelist summa peab olema 12. Kõikvõimalikud sellised kasvavad paarid on $(3, 9)$, $(4, 8)$ ja $(5, 7)$: esimene ei sobi, sest 9 kustutamisel saame arvu 36, mis jagub endiselt 9-ga; teine ei sobi, sest annab paarisarvu; seega on ainus sobiv valik $(5, 7)$. Järelikult on sfinksil mõttes arv 567.

Ülesanne 8. Kaks võrdkülgset kolmnurka on paigutatud nagu joonisel näidatud. Nende vastavad küljed on paralleelsed ning neil on sama ümberringjoone keskpunkt. Kolmnurgkade külgede pikkused on 17 cm (suurem kolmnurk) ja 11 cm (väiksem kolmnurk). Nende kahe kolmnurga ühine osa moodustab kuusnurga (joonisel varjutatud). Leia selle kuusnurga ümbermõõt (sentimeetrites).

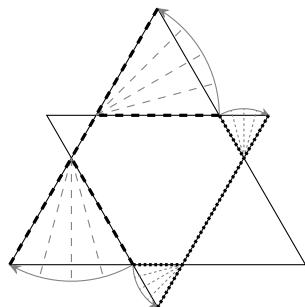


Vastus. 28

Lahendus. Joonisel on varjutatud kuusnurgast väljas kolm väiksemat ja kolm suuremat võrdkülgset kongruentset kolmnurka. Olgu $AB = x$ ja $BC = y$. Siis on suurema kolmnurga küljepikkus $2x + y = 17$ ja väiksema küljepikkus $x + 2y = 11$. Kahe võrrandi liitmisel saame $3x + 3y = 28$, mis on täpselt meie kuusnurga ümbermõõt.



Alternatiivne lahendus: Alljärgneval joonisel näeme “tõestust ilma sõnadeta”, kus paigutame kuusnurga küljed kummagi antud võrdkülgse kolmnurga ühe külje peale ümber. Seega on kuusnurga ümbermõõt täpselt meie võrdkülgsete kolmnurkade külgede pikkuste summa, s.t. $17 + 11 = 28$.



Ülesanne 9. Anna tahab trenni minekuks ennast riidesse panna. Tal peab seljas olema täpselt üks T-särk, üks paar lühikesi pükse, üks paar sokke ja üks paar tosse, ning soovi korral võib juustes kanda juuksepeala. Anna riidekapis on valget, kollast, rohelist, sinist ja punast värvi T-särk; valget, musta ja halli värvi lühikesi pükse; valget, musta ja halli värvi juuksepealu; valget, punast ja oranži värvi sokke; ning valget ja musta värvi tosse. Anna kannab valgeid sokke ainult siis, kui kogu ta muu riietus on valge (ka pael, kui ta otsustab paela kanda). Mitmel erineval viisil saab Anna ennast trenni minekuks riidesse panna? (Anna valitud kaks sokki on alati sama värvi ning Anna valitud kaks tossu on alati sama värvi.)

Vastus. 242

Lahendus. Loendame kõik lubatud riietused juhtude kaupa. Annal peab olema täpselt üks särk, üks paar lühikesi pükse, üks paar sokke ja üks paar tosse ning soovi korral võib ta kanda juuksepeala.

Vaatleme kõigepealt valgeid sokke. Antud tingimuste kohaselt võib Anna valgeid sokke kanda ainult siis, kui kogu ta riietus on valge. Seega peavad T-särk, lühikesed püksid ja tossud kõik olema valged ning paela kas ei kanta või see on valge. Nii saame 2 võimalikku trenniriietust.

Nüüd vaatleme mittevalgeid sokke (punaseid või oranže), mille jaoks on 2 valikut. Sel juhul rohkem piiranguid pole. T-särgi valikuks on 5 võimalust, lühikeste pükste valikuks 3, tossude valikuks 2 ning paela valikuks 4 valikut (valge, must, hall, või pael puudub). Seega saame sellel juhul

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240$$

trenniriietust.

Liites mõlemad juhud kokku, saame me $240 + 2 = 242$ võimalikku trenniriietust.

Ülesanne 10. Leia neljakohaline arv, mis rahuldab kõiki järgmisi tingimusi:

- selle arvu sajaliste number on kaks korda suurem kui selle arvu tuhandeliste number,
- selle arvu üheliste number on kolm korda suurem kui selle arvu kümneliste number,
- kui tõsta iga selle arvu number ruutu, siis saadud ruutude summa on 95.

Vastus. 1239

Lahendus. Olgu see arv $ABCD$, kus A , B , C ja D on selle arvu numbrid; tingimustest saame $B = 2A$ ja $D = 3C$. Nüüd

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A^2 + (2A)^2 + C^2 + (3C)^2 = 5A^2 + 10C^2 = 95,$$

mis lihtsustub kujule $A^2 + 2C^2 = 19$. Kuna parem pool on paaritu, peab A olema paaritu; lisaks on A number ja $A^2 \leq 19$, mistõttu saame $A \in \{1, 3\}$. Neid väärtusi proovides töötab ainult $A = 1$, mis annab $2C^2 = 18$ ja seega $C = 3$. Järelikult $B = 2$, $D = 9$ ning otsitud arv on 1239.

Ülesanne 11. Numbrimees tahab avaldises

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$$

asendada iga kasti kas pluss- või miinusmärgiga nii, et saadud tulemus oleks positiivne arv. Mitmel viisil saab Numbrimees seda teha?

Vastus. 16

Lahendus. Kõigepealt märkame, et summa $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ ei saa kunagi olla 0. Tõepoolest, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ on paaritu ning ükskõik millise märgi muutmine muudab summat alati paarisarvu võrra, mistõttu jääb tulemus alati paarituks. Kui võtame suvalise märgivaliku ja vahetame kõik plussid miinusteks ja kõik miinused plussideks, muutub väärtus positiivsest negatiivseks või vastupidi, seega saame üks-ühele vastavuse positiivsete ja negatiivsete tulemuste vahel. Iga viie kasti jaoks võime märgi valida teistest valikutest sõltumatult ja igas kastis on märgi valikuks 2 võimalust, seega on meil kokku $2^5 = 32$ märgivalikut. Kuna ükski neist ei anna summaks nulli, peavad täpselt pooled olema positiivsed, seega saab Numbrimees positiivse tulemuse valida 16 viisil.

Ülesanne 12. Allpool näidatud tehes tähistab iga täht üht numbrit. Samad tähed tähistavad alati sama numbrit ning erinevad tähed tähistavad alati erinevaid numbreid.

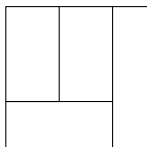
$$\begin{array}{rcccc} & A & A & A & \\ + & A & A & B & \\ + & A & C & C & \\ \hline 2 & 0 & 2 & 6 & \end{array}$$

Leia kolmekohaline arv ABC .

Vastus. 619

Lahendus. Kuna kõigi kolme liidetava esimeseks numbriks on A , peab kehtima $3A \leq 20$ ja $3A \geq 18$, sest kolme numbril liitmisel saab ülekandeks tekkida maksimaalselt 2. Seega $A = 6$. Ühekohaliste veerus saame siis $6 + B + C$, kuid summa üheliste number on 6, seega $B + C = 10$ ja ülekandeks tekib 1. Kümneliste veerus saame $6 + 6 + C + 1 = 13 + C$, kuid summa kümneliste number on 2, mistõttu $C = 9$ (ja ülekandeks tekib 2). Sellest järeldeb $B = 1$ ning seega $ABC = 619$.

Ülesanne 13. Joonisel on näha ruutu küljepikkusega 2, mis on jaotatud neljaks ristkülikuks. Kui kõigi ristkülikute pindala on võrdne, siis leia nende ristkülikute ümbermõõtude summa.

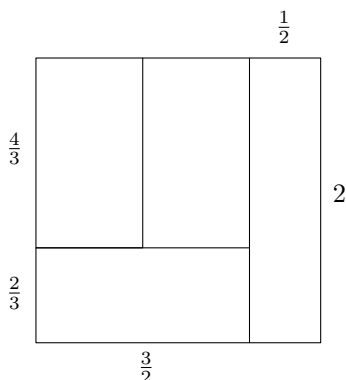


Märkus: Ühine lõik kahel ristkülikus arvestatakse mõlema ümbermõõdu hulka.

Vastus. $\frac{53}{3} = 17\frac{2}{3}$

Lahendus. Kuna ruudu pindala on 4, peab iga ristküliku pindala olema 1. Sellest järeldeb kohe, et parempoolse ristküliku laius on $\frac{1}{2}$; seega alumise vasaku ristküliku laius on $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ja tema kõrgus on $1/\frac{3}{2} = \frac{2}{3}$. Seega ülejäänud kahe ristküliku ühine kõrgus on $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Nelja ümbermõõdu summa leidmiseks võtame välisruudu ümbermõõdu $4 \cdot 2 = 8$ ja liidame kaks korda sisemiste lõikude kogupikkuse, sest iga selline lõik kuulub kahe ristküliku ümbermõõtu. Siselõikude pikkused on 2 , $\frac{3}{2}$ ja $\frac{4}{3}$, nii et nende kahekordne summa on $2 \cdot (2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{29}{3}$. Seega on otsitav ümbermõõtude summa

$$8 + \frac{29}{3} = \frac{53}{3}.$$



Ülesanne 14. Ülle moodustab pika numbrijada, kirjutades neljakohalise arvu 2026 järjest 2026 korda järgmiste reeglite järgi. Ülle alustab arvu 2026 kirjutamisega, seejärel jätkab ta arvu 6202 kirjutamisega (mis on 2026 tagurpidi), jättes sealjuures korduva numbri 6 uuesti kirjutamata. Edasi kirjutab ta arvu 2026 vaheldumisi õigetpidi ja tagurpidi, kasutades iga kord eelmise arvu viimast numbrit järgmise arvu esimese numbrina, ehk teisisõnu naaberarvud kattuvad täpselt ühe numbri võrra. Allolev skeem näitab esimest kuut arvu (kokku 2026 arvust).

$$\underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_1 \underbrace{2\ 0\ 2\ 0}_2 \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_3 \underbrace{2\ 0\ 2\ 0}_4 \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_5 \underbrace{2\ 0\ 2\ 0}_6 \dots$$

Leia saadud arvu numbrite summa.

Vastus. 12 158

Lahendus. Kui kirjutada 2026 üks kord, on numbrite summa 10. Pärast esimest arvu lisab iga paaris järjekorranumbriga arv numbrid 026, mis suurendab summat 4 võrra, ja iga paaritu järjekorranumbriga arv lisab numbrid 2026, mis suurendab summat 8 võrra.

Seega iga kord pärast esimest arvu, kui lisandub kaks arvu (seda juhtub 1012 korda, sest $1 + 2 \cdot 1012 = 2025$), suureneb summa 12 võrra. Lõpus jääb veel 2026. arv, mis on paaris järjekorranumbriga ning suurendab seega summat 4 võrra. Kokku saame $10 + 1012 \cdot 12 + 4 = 12158$.

Ülesanne 15. Kell on 8:00 hommikul. Mis kell on pärast 260320261998 tunni möödumist, eeldades, et selle aja jooksul ei toimu kella keeramist (nt suveaja tõttu)?

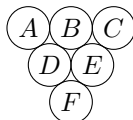
Vastus. 14:00 ehk kell 2 päeval.

Lahendus. Kuna ööpäevas on 24 tundi, siis on kellal sama aeg iga 24 tunni tagant. Järelikult piisab leida tekkiv jääk arvu $N = 260320261998$ jagamisel arvuga 24. Seda saame teha kirjaliku jagamise teel, kuid veelgi lihtsam on leida tekkiv jääk arvude 3 ja 8-ga jagamisel ning saadud tulemused kombineerida.

Kuna arvu N numbrite summa jagub kolmega, jagub N ise samuti kolmega. Kaheksaga jagamiseks märkame, et jääk sõltub vaid viimasest kolmest numbrist tekkivast arvust ehk arvust 998, mis annab arvuga 8 jagamisel jäägiks 6 ehk ka N annab arvuga 8 jagamisel jäägiks 6. Seega arvuga 24 jagamisel tekkiv jääk peab olema arvust 24 väiksem arvu, mis jagub kolmega ning annab arvuga 8 jagamisel jäägi 6, ainus sobiv variant on arv 6.

Seega peale N tundi liigub kell edasi sama palju tunde kui peale 6 tundi. Seega on kell $08:00 + 6h = 14:00$.

Ülesanne 16. Joonisel on viinamarjakobar. Mingit viinamarja saab ära süüa vaid siis, kui kõik viinamarjad otse selle viinamarja all (s.t. üks või kaks viinamarja, mida valitud viinamari puudutab) on juba ära söödud. Näiteks tuleb viinamari D ära süüa enne A -d ja B -d. Mitmel eri viisil saab kogu kobara ära süüa?



Vastus. 16

Lahendus. Alguses peame ära sööma viinamarja F ning alles jäävad viinamarjad A, B, C, D , ja E .

Seejärel saame ära süüa kas viinamarja D või E . Olukord on ilmselgelt sümmeetriline, seega sööme esmalt ära viinamarja E ning alles jäävad viinamarjad A, B, C , ja D . Siis saame ära süüa viinamarja C või D :

- Kui valime C , siis peame järgmisena sööma D ning seejärel kas A või B (ehk tekib 2 võimalust)

- Kui valime D , siis saame järgmisena süüa A, B , või C ning seejärel ülejäänud kaks suvalises järjekorras (ehk tekib $3 \cdot 2$ võimalust)

Seega alustame alati F -ga, siis valime D ja E vahel ning pärast seda on meil $2 + 6 = 8$ eri võimalust. Kokku annab see $1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$ viinamarjade söömise järjekorda.

Ülesanne 17. Olgu x positiivne täisarv nii, et

$$\text{VÜK}(x, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \quad \text{ja} \quad \text{VÜK}(x, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

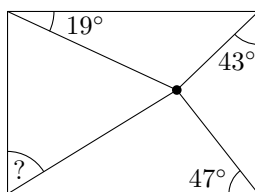
Mitu erinevat väärtust saab avaldis $\text{SÜT}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ omandada?

Märkus: $\text{SÜT}(a, b)$ ja $\text{VÜK}(a, b)$ tähistavad vastavalt täisarvude a ja b suurimat ühistegurit ning vähimat ühiskordset.

Vastus. 12

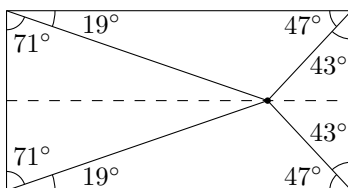
Lahendus. Arv x peab olema kujul $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ (muid algarve ei saa esineda, muidu ilmuksid nad meie vähimastes ühiskordsetesse). Esimene tingimus on samaväärne sellega, et $a = 6$, $b \leq 3$, $c \leq 4$ ja $d \leq 2$, teine tingimus aga sellega, et $a \leq 8$, $b \leq 4$, $c \leq 3$ ja $d = 2$. See tähendab, et arvu $\text{SÜT}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ algtegurite astendajates on arvu 2 astendaja võrdne 2-ga, arvu 3 astendaja võib olla suvaline arv vahemikus 0 kuni 3, arvu 5 astendaja võib olla suvaline arv vahemikus 0 kuni 2 ning arvu 7 astendaja on võrdne 2-ga. Järelikult on sobivaid väärtusi $4 \cdot 3 = 12$.

Ülesanne 18. Üks punkt asub ristküliku sees nagu näidatud alljärgneval joonisel. Märgitud on kolm nurka ja nende suurus. Leia küsimärgiga tähistatud nurga suurus (kraadides).



Vastus. 71°

Lahendus. Leides alumises parempoolses ristküliku nurgas täiendnurga (et summa oleks 90°), järeltame, et antud sisepunkt asub ristküliku kahe vertikaalsuunaga külje ühisel keskristsirgel. Seega on kogu joonis selle keskristsirge suhtes sümmeetriline. Järelikult on otsitav nurk $90^\circ - 19^\circ = 71^\circ$.



Ülesanne 19. Rosalinde tahab kahte tüüpi helmestest moodustada kaelakee. Ta ostis kokku 100 helmest, kusjuures odavaid helmeid ostis ta rohkem kui kalleid helmeid. Kõigi odavate helmeste koguhind oli 459 kuldnat. Lisaks maksab iga kallis helmes 13 kuldnat rohkem kui iga odav helmes. Kõik hinnad kuldnates on positiivsed täisarvud. Mitu kuldnat maksis Rosalinde kallite helmeste eest?

Vastus. 1078

Lahendus. Olgu c odavate helmeste arv ja p nende (täisarvuline) hind kuldnates. Siis $cp = 459$ ning kuna helmeid on kokku 100 ja odavaid on rohkem kui kalleid, siis $50 < c < 100$. Kuna hind on täisarv, peab c olema arvu $459 = 3^3 \cdot 17$ jagaja, mis jääb rangelt vahemikku 50 ja 100, ning ainus selline jagaja on $c = 51$. Seega $p = 459/51 = 9$ ja iga kallis helmes maksab $p + 13 = 22$ kuldnat. Kalleid helmeid on $100 - 51 = 49$, nii et Rosalinde maksis kallite helmeste eest $49 \cdot 22 = 1078$ kuldnat.

Ülesanne 20. Võrrandis

$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot H}{N \cdot A \cdot B \cdot O \cdot J} = G \cdot A \cdot M \cdot E,$$

tähistab iga täht üht numbrit, kusjuures erinevad tähed tähistavad alati erinevaid numbreid ning sümbol $\cdot$ tähistab korrutamist. Mitu erinevat väärtust saab korrutis $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$ omandada?

Vastus. 1

Lahendus. Erinevaid tähti on 10 ($M, A, T, H, N, B, O, J, G, E$), seega kasutatakse kõiki numbreid 0–9 täpselt ühe korra, mis tähendab, et üks tähtedest võrdub nulliga. Järelikult peavad võrrandi mõlemad pooled olema võrdsed 0-ga, ning on oluline, et 0 esineks võrrandi mõlemal poolel, kuid ei esineks vasakpoolse murru nimetajas. Ainus selline sobiv täht on M , seega $M = 0$. Seega $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O = 0$ sõltumata sellest, mis väärtused ülejäänud tähed omandavad, ehk korrutis saab omandada täpselt ühe väärtuse.

Ülesanne 21. Kolm tuletorni asuvad rannajoonel samal sirgel. Iga kaks kõrvuti asuvat tuletorni on teineteisest 13 km kaugusel. Merel olev laev on ühest kahest äärmisest tuletornist 10 km kaugusel ja keskmisest tuletornist 13 km kaugusel. Kui kaugel (kilomeetrites) on laev teisest äärmisest tuletornist? (Eeldame, et planeet Maa on lame.)

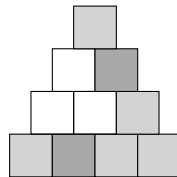
Vastus. 24

Lahendus. Olgu S laeva asukoht, A ja B kaks äärmist tuletorni ning M keskmine tuletorn. Kuna $MS = MA = MB = 13$, siis punktid A , B ja S asuvad kõik ringjoonel keskpunktiga M . Lisaks on lõik AB selle ringjoone diameeter. Thalese teoreemi kohaselt on kolmnurk ABS seega täisnurkne täisnurgaga tipu S juures. Kuna $AB = MA + MB = 26$ ja $AS = 10$, annab Pythagorase teoreem

$$BS = \sqrt{AB^2 - AS^2} := \sqrt{26^2 - 10^2} := \sqrt{576} := 24.$$

Seega on laeva kaugus teisest äärmisest tuletornist 24 km.

Ülesanne 22. Mitmel eri viisil saab kõrgusega 4 püramiidi kümme klotsi värvida kolme värviga nii, et iga (suunaga üles) kõrgusega 2 väiksem püramiid on värvitud kas kõigi kolme värviga või ainult ühe värviga? Joonisel on toodud näide ühest sellist sobivast värvimisest.



Vastus. 81

Lahendus. Kogu püramiidi värvimine on üheselt määratud alumise rea värvimisega, sest iga alumise rea värvimine määrab üheselt kogu püramiidi värvimise. Kuna iga alumise rea klotsi jaoks saame valida kolme värvi hulgast, on võimalikke värvimisi kokku $3^4 = 81$.

Ülesanne 23. Korrapärase 100-nurga igasse tippu kirjutatakse erinev arv hulgast $1, 2, \dots, 100$ nii, et 100-nurga vastastippudes olevate arvude vahe absoluutväärtus on alati sama väärtus n . Leidke kõigi võimalike erinevate n -i väärtuste summa.

Vastus. 93

Lahendus. Olgu n positiivne täisarv, mille korral selline arvude paigutus eksisteerib. Siis peab arv 1 olema paaris arvuga $n + 1$ (st. et need arvud on kirjutatud kahele vastastipule; nimetame selliseid paare edaspidi lihtsalt *paarideks*). Seejärel peab 2 olema paaris arvuga $n + 2$, ja samamoodi jätkates näeme, et iga $k = 1, 2, \dots, n$ peab olema paaris arvuga $n + k$. Täheldame, et n on paaris arvuga $2n$.

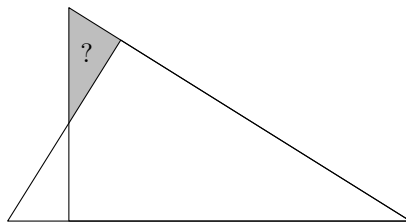
Seega on iga arv plokist $\{1, 2, \dots, 2n\}$ paaris mõne teise sama plokki arvuga ning selle plokki saab ülejäänud arvudest $\{2n + 1, \dots, 100\}$ eraldada. Kui $2n = 100$, siis on kõik arvud kaetud. Vastasel juhul kordame sama arutelu alustades arvust $2n + 1$, mis peab olema paaris arvuga $3n + 1$, ning jätkame analoogselt.

Seega jaguneb hulk $\{1, 2, \dots, 100\}$ lõpuks eri plokkideks suurusega $2n$. See on võimalik parajasti siis, kui 100 jagub arvuga $2n$, ehk parajasti siis, kui n on arvu 50 positiivne jagaja.

On lihtne näha, et iga sellise jagaja korral annab see konstruktsioon korrektse lahendi (koostades ülaltoodud viisil $\frac{100}{2n}$ plokki). Seega on vastus arvu 50 kõigi positiivsete jagajate summa, mis on

$$1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93.$$

Ülesanne 24. Võtame kaks täisnurkset kolmnurka küljepikkustega 5, 12 ja 13 ning asetame need üksteise peale nii, et nende väikseim nurk ning vastav tipp on ühised ja nad kattuksid osaliselt, nagu joonisel näidatud. Mis on ühe sellise kolmnurga pindala, mis moodustab mittekatuva ala?



Vastus. $\frac{6}{5} = 1.2$

Lahendus. Hall kolmnurk on sarnane suure täisnurkse kolmnurgaga ning selle lühim külg on pikkusega $13 - 12 = 1$, sest mõlemad on täisnurksed ja neil on ka teine nurk ühine (meie joonisel ülemine).

Seega on nende kahe täisnurkse kolmnurga sarnasussuhe $1 : 5$ ning halli kolmnurga teine kaatet on pikkusega $\frac{12}{5}$. Järelikult on otsitav pindala

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5}.$$

Ülesanne 25. Igaüks seitsmest põialpoisist valis välja positiivse täisarvu. Nad kõik teavad teiste põialpoiste valitud arve. Lumivalgeke küsis igalt põialpoisilt, mis arvu ta valis.

- 1. põialpoiss vaikis.
- 2. põialpoiss hüüdis: “Minu arv on võrdne 1. põialpoisi arvuga.”
- 3. põialpoiss hüüdis: “Minu arv on võrdne 1. ja 2. põialpoisi arvude summaga.”
- 4. põialpoiss hüüdis: “Minu arv on võrdne 1., 2. ja 3. põialpoisi arvude summaga.”
- ...
- 7. põialpoiss hüüdis: “Minu arv on võrdne 1. kuni 6. põialpoisi arvude summaga.”

On teada, et seitsme valitud arvu summa on 46. Samuti on teada, et täpselt üks põialpoiss valetas; kõik teised põialpoisid rääkisid tõtt ning väitsid midagi päriselt valitud arvude kohta, mitte välja hüütud arvude kohta. Leia kõik arvud, mille valetanud põialpoiss võis valida.

Vastus. 7, 14

Lahendus. Olgu põialposite valitud arvud $a_1, a_2, \dots, a_7$. Näitame esmalt, et valetama pidi kas kuues või seitsmes põialpoiss.

Tõepoolest, kui seitsmes põialpoiss rääkis tõtt, siis $a_7 = a_1 + \dots + a_6$, seega $a_1 + \dots + a_7 = 2a_7 = 46$ ehk $a_7 = \frac{46}{2} = 23$. Kui kuues põialpoiss rääkis samuti tõtt, siis analoogselt $a_6 = a_1 + \dots + a_5$ ehk $a_7 = a_1 + \dots + a_6 = 2a_6$, kust $a_6 = \frac{23}{2}$, vastuolu, sest a_6 peab olema täisarv. Seega sel juhul pidi kuues põialpoiss valetama.

Järelikult esimesed viis põialpoissi rääkisid tõtt, kust

$$a_2 = a_1, \quad a_3 = a_1 + a_2 = 2a_1, \quad a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 4a_1, \quad a_5 = a_1 + \dots + a_4 = 8a_1,$$

seega $a_1 + \dots + a_5 = 16a_1$. Veelgi, vähemalt üks arvudest a_6 ja a_7 (vastavalt see, mis kuulub tõtt rääkivale põialpoisile) on suurem kui või võrdne arvuga $a_1 + \dots + a_5 = 16a_1$ ja seega

$$a_1 + \dots + a_7 \geq 16a_1 + 16a_1 = 32a_1.$$

Kuna kogusumma on 46, siis $32a_1 \leq 46$, kust $a_1 = 1$ (kuna a_1 on positiivne täisarv) ja järelikult $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$, ja $a_5 = 8$. Seega $a_1 + \dots + a_5 = 16$.

Nüüd vaatleme viimast kahte põialpoissi. Kui kuues põialpoiss rääkis tõtt, siis $a_6 = 16$, seega summa 46 saamiseks peab kehtima $a_7 = 46 - (16 + 16) = 14$. Vastasel juhul, kui kuues põialpoiss valetas, siis rääkis seitsmes põialpoiss tõtt ja $a_7 = a_1 + \dots + a_6 = 16 + a_6$. Eelneva põhjal kehtib sel juhul $a_7 = 23$, kust $a_6 = 7$.

Mõlemal juhul kehtib tingimus, et täpselt üks põialpoiss valetas, seega valetav põialpoiss võis valida kas arvu 7 või 14.

Ülesanne 26. Orbiidil oleva satelliidiga suhtlemiseks valime hulgast $\{1, 2, \dots, 13\}$ kuus erinevat kanalit (kusjuures oluline on ainult valitud kanalite hulk, mitte valitud kanalite järjekord). Parima ühenduse saamiseks peab meie kanalite hulgas olema vähemalt üks kanalite paar, mille vahe on paartu. Mitu sellist kanalite hulka on võimalik valida?

Vastus. 1708

Lahendus. Kaks valitud kanalit erinevad paartu arvu võrra parajasti siis, kui neil on erinev paarsus. Kõikide võimaluste loendamise asemel loendame täiendhulka: lahutame kõigist võimalikest valikutest need, milles ühtegi paartut vahet ei esine.

Kuueliikmelises kanalite hulgas ei esine paartuid vahesid parajasti siis, kui iga paari vahe on paarisarv, mis on võimalik vaid siis, kui kõik kuus kanalit on sama paarsusega. Hulgas $\{1, 2, \dots, 13\}$ on seitse paartut ja kuus paariskanalit, seega ainult paartutest või ainult paariskanalitest koosnevate valikute arv on $\binom{7}{6} + \binom{6}{6} = 8$.

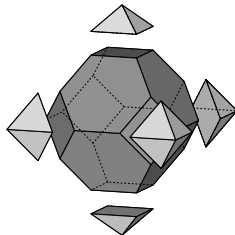
Kuna kuue kanali valikuid on kokku $\binom{13}{6} = 1716$, siis vähemalt ühe paartu vahega hulki on kokku $1716 - 8 = 1708$.

Ülesanne 27. Olgu N seitsmekohaline arv, mis jagub iga oma numbriga. Kui kõik arvu N numbrid on erinevad ja ükski neist ei ole null, siis leia arvu N numbrite summa.

Vastus. 36

Lahendus. Kuna arvu N on seitse erinevat nullist erinevat numbrit, on vähemalt üks neist paaris, seega N on paaris. Kui arv N esineks number 5, siis jaguvus 5-ga sunniks arvu N lõppema numberiga 0, mis annab vastuolu. Järelikult 5 arv N ei esine. Seega kasutab N seitset numbrit hulgast $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, st. jätab sellest hulgast täpselt ühe numbri välja. Me ei saa välja jätta 9-t: kui 9 oleks puudu, oleks numbrite hulk $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, mille summa on 31, mistõttu N ei jagu 3-ga, kuigi N sisaldab numbrit 3, vastuolu. Seega peab 9 esinema arvu N numbrite hulgas. Seega jagub N (ja seega ka arvu N numbrite summa) 9-ga ning kuna $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$, peame välja jätma arvu 4, et saada numbrite summaks 36, mis on ainus võimalik 9 kordne. Üks sobiv näide sellisest arvust on $N = 9867312$.

Ülesanne 28. Kärbitud oktaeeder saadakse korrapärase oktaedri tippude äralõikamisel nii, et järele jääb hulktahukas, millel on kaheksa korrapärase kuusnurkset tahku ja kuus ruudukujulist tahku. Kui suure osa algse oktaedri ruumalast moodustab kärbitud oktaedri ruumala?



Märkus: Korrapärane oktaeeder on tahukas, millel on kaheksa ühesugust võrdkülgset kolmnurkset tahku.

Vastus. $\frac{8}{9}$

Lahendus. Korrapärase oktaedri servapikkusega a ruumala on ka^3 , kus k on mingi konstant (tegelikult pole raske näidata, et $k = \sqrt{2}/3$, kuid lahenduses pole meil seda vaja). Kärbitud oktaedri saamiseks eemaldame igast oktaedri 6 tipust poole oktaedrist (ehk ruutpõhjalise püramiidi) servapikkusega $a/3$. Eemaldatud ruumala on võrdne kolme oktaedri ruumalaga, millest igaühe servapikkus on $\frac{a}{3}$. Eemaldatud ruumala on seega kokku $3 \cdot k \left(\frac{a}{3}\right)^3 = ka^3/9$. Järelikult moodustab kärbitud oktaedri ruumala algse oktaedri ruumalast

$$\frac{1}{ka^3} \left(ka^3 - \frac{1}{9}ka^3 \right) = \frac{8}{9}.$$

Ülesanne 29. Leia võrrandi

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0$$

kõik reaalarvulised lahendid.

Vastus. $-2, -1, 1, 2$

Lahendus. Olgu $a = 2^x + 2^{-x}$, siis $4^x + 4^{-x} = a^2 - 2$. Asendades võrrandisse, saame

$$8(a^2 - 2) - 54a + 101 = 0$$

mis lihtsustub kujule

$$8a^2 - 54a + 85 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendamisel saame

$$a_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85}}{2 \cdot 8} = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 2720}}{16} = \frac{54 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{54 \pm 14}{16}$$

tulemused

$$a_1 = \frac{17}{4} \text{ ja } a_2 = \frac{5}{2}.$$

Esimesel juhul

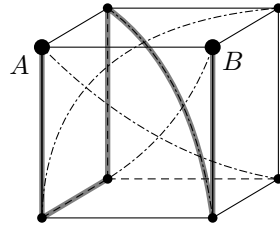
$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{17}{4},$$

millest järeldub $2^x = 4$ või $2^x = \frac{1}{4}$, seega $x = 2$ või $x = -2$. Teisel juhul

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2},$$

millest järeldub $2^x = 2$ või $2^x = \frac{1}{2}$, seega $x = 1$ või $x = -1$. Järelikult on algse võrrandi lahendid $x = \pm 1, \pm 2$.

Ülesanne 30. Kuubikujulisel planeedil on kaheksa linna, üks igas kuubi tipus. Planeedil asub palju raudteid: mööda iga kuubi serva leidub raudteeühendus selle serva ühes tipus asuvast linnast serva teises tipus asuvasse linna. Lisaks leidub neli maa-alust raudteeühendust, mis on puuritud läbi planeedi ning mis ühendavad kuubi vastastippudes asuvaid linnu. Reisija Ruudi alustab ühes nurgas asuvast linnast A ja soovib jõuda naaberlinna B (linn B asub linnast A ühe serva kaugusel), kasutades täpselt viit raudteeühendust, kusjuures Ruudi ei taha ühtki linna külastada rohkem kui ühe korra. Kui Ruudi soovib oma teekonna jooksul kasutada vähemalt ühte maa-alust raudteed, siis mitu sobivat marsruuti on Ruudil võimalik koostada? Joonisel on näidatud üht sobivat marsruuti.



Vastus. 28

Lahendus. Värvime oma kaheksa linna kahe värviga 3D malelauana ja täheldame, et iga raudtee viib meid alati ühte värvi linnast teise värvi linna. Kuna Ruudi alustab ühte värvi linnast ja peab täpselt viie raudteega jõudma naaberlinnani, mis on teist värvi, peab marsruut igal käigul värve vahetama ning seega külastama täpselt kahte vahepealset linna kummastki värvist (kusjuures kõik külastatud linnad on erinevad). Lisaks on tänu maa-alustele raudteedele iga eri värvi linnapaar raudteega ühendatud.

Kõigepealt loendame kõik pikkusega 5 marsruute, maa-alust nõuet arvestamata. Iga marsruut esitub kujul

$$A \rightarrow o_1 \rightarrow e_2 \rightarrow o_2 \rightarrow e_3 \rightarrow B,$$

kust o_1, o_2 on kaks erinevat B värvi linna ning e_2, e_3 on kaks erinevat A värvi linna. Järjestatud paari (o_1, o_2) valimiseks kolmest B värvi linnast peale B on $3 \cdot 2 = 6$ võimalust ning samamoodi on järjestatud paari (e_2, e_3) valimiseks kolmest A värvi linnast peale A samuti $3 \cdot 2 = 6$ võimalust. Seega on pikkusega 5 marsruute kokku $6 \cdot 6 = 36$.

Lahutame nüüd marsruudid, mis ei kasuta ühtki maa-alust raudteed. Esimene samm ei saa meid viia otse linna B , seega on meil ainult kaks võimalikku esimest sammu. Nendest kummagi järel on meil täpselt 4 võimalust jätkata ning täiendada enda teekond pikkuseni 5 ning jõuda B -sse, seega on meil kokku $2 \cdot 4 = 8$ maapealset marsruuti.

Järelikult on sobivad pikkusega 5 marsruute $36 - 8 = 28$.

Ülesanne 31. Vaatleme valimisi, kus on 2026 valijat ja neli kandidaati: A, B, C ja D . Kandidaat A sai kõige vähem hääli, saades kuuendiku sellest häälte arvust, mille sai kandidaat B . Kandidaat C sai täpselt 446 häält vähem kõikidele ülejäänud kandidaatidele antud häälte kogusummast. Kandidaat D võitis valimised, saades sealjuures vähem kui 800 häält. Iga valija andis enda hääle täpselt ühele neljast kandidaadist. Mitu häält sai kandidaat A ?

Vastus. 63

Lahendus. Olgu kandidaatide saadud häälte arvud vastavalt a, b, c ja d . Need on mittenegatiivsed täisarvud, mis rahuldavad tingimusi

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2026, \\ b &= 6a, \\ c &= (a + b + d) - 446, \\ a, b, c &< d < 800, \\ a &< b, c, d. \end{aligned}$$

Kui liidame kolmanda seose mõlemale poolele arvu c , saame

$$2c = a + b + c + d - 446 = 2026 - 446 = 1580.$$

Seega $c = 790$, millest omakorda järeldub, et

$$a + b + d = 2026 - 790 = 1236.$$

Asendades b arvuga a , saame

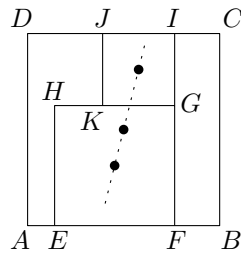
$$a + 6a + d = 1236 \quad \text{or} \quad d = 1236 - 7a.$$

Kuna $d < 800$ ja samaaegselt $d > c = 790$, siis $791 \leq d \leq 799$. Järelikult

$$791 \leq 1236 - 7a \leq 799 \quad \text{or} \quad 437 \leq 7a \leq 445.$$

Ainus arv antud vahemikus, mis jagub 7-ga, on $441 = 7 \cdot 63$. Seega on vastus $a = 63$. Siis saame soovi korral arvutada, et $b = 378, c = 790, d = 795$, ning kõik ülesande tingimused on tõepoolest täidetud.

Ülesanne 32. Kolm ruutu $ABCD$, $EFGH$ ja $KGIJ$ on paigutatud nagu joonisel: punktid E ja F asuvad lõigul AB , punktid I ja J asuvad lõigul CD ning punkt K asub lõigul GH . Lisaks asuvad nende kolme ruudu keskpunktid ühel ja samal sirgel. Kui $AD = 7$ ja $HK = 1$, siis leia lõigu FB pikkus.



Vastus. $\frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$

Lahendus. Olgu a ja b ruutude $EFGH$ ja $KGIJ$ küljepikkused. Ülesande tingimustest saame võrrandid $7 = AD = JK + HE = a + b$ ja $1 = HK = HG - KG = a - b$. Selle võrrandsüsteemi lahendid on $a = 4$ ja $b = 3$.

Sirge, mis läbib kõigi kolme ruudu keskpunkti, jagab iga ruudu pindala kaheks võrdseks osaks. Seetõttu saab ristküliku $FBCI$ pindala arvutada kui

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = ab.$$

Ristküliku $FBCI$ pindala on teisalt ka $FB \cdot (a+b)$. Nendest kahest võrrandist saame $FB = \frac{ab}{a+b} = \frac{12}{7}$.

Ülesanne 33. Tahvlile on kirjutatud mitu arvu, nende hulgas arv 2026. Kui arv 2026 tahvlilt kustutada, siis tahvlile jäänud arvude aritmeetiline keskmine väheneb 6 võrra. Kui aga kirjutada tahvlile juurde veel üks 2026, siis tahvlil olevate arvude aritmeetiline keskmine suureneb 4 võrra. Leia algselt tahvlil olnud arvude summa.

Vastus. 10010

Lahendus. Olgu algsete n arvu summa S . Siis

$$\begin{aligned}\frac{S - 2026}{n - 1} &= \frac{S}{n} - 6, \\ \frac{S + 2026}{n + 1} &= \frac{S}{n} + 4.\end{aligned}$$

Need võrrandid lihtsustuvad kujule

$$\begin{aligned}S &= 2032n - 6n^2, \\ S &= 2022n - 4n^2.\end{aligned}$$

Lahutades ühe teisest ja kasutades teadmist, et n ei saa olla null, saame

$$S - S = (2032 - 2022)n + (-6 + 4)n^2 \Rightarrow 2n^2 = 10n \Rightarrow n = 5.$$

Seega $S = 2032n - 6n^2 = 10010$.

Ülesanne 34. Kirp hüppab mööda ringjoont. Tema esimene hüpe vastab kesknurgale 1° (s.t. hüppe otspunktidesse tõmmatud raadiuste vaheline nurk on 1°). Iga järgmine hüpe mööda ringjoont on samas suunas ja vastab kesknurga suurusele 2° , siis 3° , jne. Peale mitmendat hüpet satub kirp esimest korda tagasi alguspunkti?

Vastus. 80

Lahendus. Pärast n hüpet on kirp läbinud

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

kraadi. Otsime vähimat n väärtust, mille korral n jagub 360-ga; teisisõnu tahame, et $n(n+1)$ jaguks arvuga $720 = 16 \cdot 9 \cdot 5$. Iga neist kolmest tegurist peab jagama kas arvu n või $n+1$, sest kaks järjestikust arvu on ühistegurita. Alustame suurima teguri 16 kordsetest – see annab n kandidaatideks 15, 16, 31, 32, 47, 48, 63, 64, 79 ja lõpuks 80, mis jagub 5-ga ning $n+1 = 81$ jagub 9-ga. Järelikult on otsitav hüpete arv 80.

Ülesanne 35. Naboia kuningriigis on kolm maagigildi: Tulegild, Veegild ja Tuulegild. Igas gildis on kaks meistermaagi ja kaks õpipoissmaagi. Kuningriigi kaitsmiseks tuleb moodustada neli lahingupaari, millest igaühes on üks meister ja üks õpipoiss, kuid üheski paaris ei tohi olla kahte maagi samast gildist. Lisaks peab iga gild kaitsesse panustama vähemalt ühe meistri ja ühe õpipoisiga. Mitmel eri viisil saavad maagid lahingupaare moodustada?

Märkus: iga meister ja iga õpipoiss on erinevad maagid. Seega on oluline, millised konkreetset maagid igas paaris on, kuid nelja maagipaari järjestus ei ole oluline.

Vastus. 768

Lahendus. Kuna me valime neli õpipoissi ja iga gild peab panustama vähemalt ühe õpipoisiga, peab õpipoiste jaotus gildide vahel olema mingis järjekorras $(2, 1, 1)$. Samamoodi valitakse neli meistrit ja iga gild peab panustama vähemalt ühe meistriga, seega peab ka meistrite jaotus olema $(2, 1, 1)$.

Tekib kaks võimalust.

Esimesel juhul annab üks ja sama gild nii kaks õpipoissi kui ka kaks meistrit; tähistame seda gildi tähega X . Gildi X valikuid on 3. Ülejäänud kahest gildist saab õpipoisse valida $2 \cdot 2 = 4$ viisil ning samuti saab meistreid valida $2 \cdot 2 = 4$ viisil.

Iga sellise valiku korral tuleb gildi X kaks õpipoissi paari panna kahe meistriga, kes tulevad ülejäänud kahest gildist, ning seda saab teha 2 viisil. Kui see valik on fikseeritud, tuleb ülejäänud kaks õpipoissi paari panna gildi X kahe meistriga, mida saab taas teha 2 viisil. Seega on sellel juhul meistrite ja õpipoiste paari panemiseks $2 \cdot 2 = 4$ sobivat viisi. Järelikult saame selles juhuses $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ lahendit.

Teisel juhul panustab üks gild (X) kahe õpipoisiga ning mõni teine gild (Y) kahe meistriga. Gildi X valikuid on 3 ning kui see valik fikseerida, siis gildi Y valikuid on 2. Ülejäänud õpipoisse saab valida kahest muust gildist $2 \cdot 2 = 4$ viisil ning ülejäänud meistreid saab valida samal arvul viisidel. Iga sellise valiku korral on meistri ja õpipoisi paaride moodustamiseks $3 \cdot 2 = 6$ lubatud viisi: gildi X kaks õpipoissi võib omistada ükskõik millisele kahele kolmest võimalikust meistrist ning kui see valik on tehtud, on ülejäänud õpipoiste ja meistrite paarid üheselt määratud. Seega annab see juht $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ lahendit.

Mõlemad juhud kokku annavad $192 + 576 = 768$ võimalikku viisi lahingupaare moodustada.

Ülesanne 36. Olgu x, y nullist erinevad reaalarvud nii, et $x + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$ ja $y + \frac{1}{x} = 3\sqrt[3]{4}$. Leia avaldise $x^2y + \frac{1}{xy^2}$ väärtus.

Vastus. $3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{54}$

Lahendus. Paneme tähele, et

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = \left(xy + \frac{1}{xy}\right) \left(x + \frac{1}{y}\right) - x - \frac{1}{y}.$$

Lisaks

$$xy + \frac{1}{xy} = \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Seega

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Ülesanne 37. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk, kus $\angle ADB = 48^\circ$ ja $\angle BDC = 56^\circ$. Punkt X valitakse kolmnurga ABC sees nii, et $\angle XCB = 24^\circ$ ning kiir AX poolitab nurga $\angle BAC$. Leia nurga $\angle CBX$ suurus kraadides.

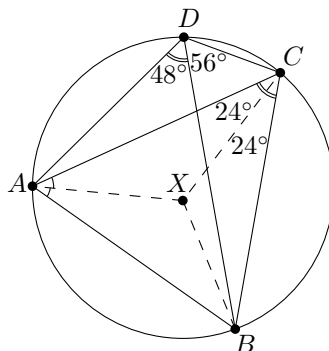
Märkus: kõõlnelinurk on nelinurk, mille kõik neli tippu asuvad ühel ringjoonel.

Vastus. 38°

Lahendus. Nurgad $\angle ADB$ ja $\angle ACB$ on võrdsed, sest nad toetuvad samale kaarele. Seega

$$\angle ACX := \angle ACB - \angle XCB := \angle ADB - \angle XCB := 48^\circ - 24^\circ := 24^\circ := \angle XCB.$$

Seega on CX nurga $\angle ACB$ poolitaja ning X on seega kolmnurga ABC nurgapoolitajate lõikepunkt ehk kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt.



Nüüd leiame otsitud nurga suuruse:

$$\angle CBX := \frac{\angle CBA}{2} := \frac{180^\circ - \angle BAC - \angle ACB}{2} := \frac{180^\circ - 56^\circ - 48^\circ}{2} := 38^\circ,$$

kus kasutasime fakti, et $\angle BAC = \angle BDC$, mis tuleneb sellest, et mõlemad toetuvad samale ringjoone kaarele.

Ülesanne 38. *Nabiobakteril* on väga algeline aju, mis koosneb vasakust ja paremast poolkerast. Kummaski poolkeras leidub kaht tüüpi rakke: neuroneid ja gliiarakke. Ükski kaks rakku samas poolkeras ei ole omavahel ühendatud, kuid iga kaks rakku eri poolkerades on omavahel ühendatud. Ühes *Nabiobakteri* isendis leidub 168 neuron–neuron ühendust, 48 gliiarakk–gliiarakk ühendust ja 191 neuron–gliiarakk ühendust. Mitu neuronit on selles isendis kokku?

Vastus. 29

Lahendus. Olgu n_1 ja g_1 ühe poolkera neuronite ja gliiarakkude arv ning n_2 ja g_2 teise poolkera vastavad arvud. Teame, et $n_1 n_2 = 168$, $g_1 g_2 = 48$ ja $n_1 g_2 + n_2 g_1 = 191$. Seega

$$(n_1 + g_1)(n_2 + g_2) = 168 + 48 + 191 = 407 = 11 \cdot 37,$$

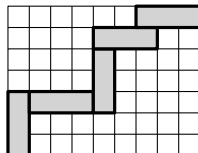
ning kuna kummaski poolkeras peab olema vähemalt üks mõlemat tüüpi rakk, võime üldisust kitsendamata eeldada, et $n_1 + g_1 = 11$. Samamoodi

$$(n_1 - g_1)(n_2 - g_2) = 168 + 48 - 191 = 25,$$

millest koos asjaoluga, et n_1 jagab arvu 168 ja g_1 jagab arvu 48, järeldub kähku, et $n_1 = 8$ ja $g_1 = 3$. Seega $n_2 = 168/8 = 21$ ning neuronite koguarv on $n_1 + n_2 = 29$.

Lisalahendus. Kasutame sama tähistust nagu eelmises lahenduses. Arv $n_1 g_2 + n_2 g_1$ on paaritu, seega on vähemalt üks kahest liidetavast paaritu; üldisust kitsendamata olgu selleks $n_1 g_2$. Siit järeldub, et nii n_1 kui ka g_2 on paaritud. Teisalt, kuna $168 = 2^3 \cdot 21$ ja $48 = 2^4 \cdot 3$, peab n_2 jaguma arvuga 2^3 ja g_1 arvuga 2^4 . Seega on $n_2 g_1$ arvu $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$ kordne ning kuna see on väiksem kui 191, peab kehtima $n_2 g_1 = 128$, kusjuures $n_2 = 2^3 = 8$ (ja $g_1 = 2^4$). Järelikult $n_1 = 168/8 = 21$ ning nüüd on lahenduse lõpp ilmne.

Ülesanne 39. Agnesel on viis ühesugust sirget (I-kujulist) trimino-plaati ning ta soovib moodustada 7×9 ristkülikukujulisel ruudustikul katkematu tee, mis ühendab vasakut alumist nurka parema ülemise nurgaga. Iga trimino koosneb ühest keskmisest ruudust ja kahest otsaruutust ning katkematu tee peab olema moodustatud nii, et iga kaks järjestikust triminot puutuvad kokku täpselt mööda ühte ühist ruudustiku ruudu serva; see serv peab olema mõlema trimino otsaruudu külge. Alloleval joonisel on näidatud üks tingimustele vastav tee. Mitmel eri viisil saab Agnes sellise tee moodustada?



Vastus. 75

Lahendus. Kuna Agnesel on vaid viis triminot, ei saa tema tee kunagi suunduda vasakule ega allasuunas: iga sellise suunaga käik raiskaks ruudustiku läbimiseks vaja minevaid käike. Seega iga trimino on alati suunatud kas paremale või ülessuunas. Nüüd täidame sobivate teede loendamiseks 7×9 tabeli: igasse ühikruutu kirjutame triminoteede arvu, mille hetkeline lõpp-punkt (viimase trimino ühenduseta ots) asub selles ühikruudus.

Peale esimese trimino vasakusse alla nurka asetamist peab otspunkt olema täpselt kahe ruudu kaugusel: vastavalt kas kaks ruutu paremal (kui esimene trimino on horisontaalne) või kaks ruutu ülal (kui esimene trimino on vertikaalne). Seega kirjutame me arvu 1 ruutudesse $(0, 2)$ and $(2, 0)$ (kus siin on meie koordinaatide algpunkt alumine vasak ruut).

Nüüd täidame tabeli, liikudes alt vasakule ülevale paremale. Et leida ruudu (x, y) väärtus, vaatleme, mis variandid on triminoteel selles ruudus lõpetada. Trimino, mille otspunkt on ruudus (x, y) , saab olla kas verikaalne või horisontaalne, ning mõlemal juhul peab selle trimino alguspunkt olema eelmise trimino otspunktiga kohakuti. Siit saame neli võimalikku eelnevat tee otspunkti: $(x, y - 3)$ ja $(x - 1, y - 2)$ vertikaaljuhul ning $(x - 3, y)$ ja $(x - 2, y - 1)$ horisontaaljuhul. Kõik nendest variantidest on sobivad selle jaoks, et juba eksisteerivat triminoteed ühe triminoga jätkata. Järelikult kirjutame me ruutu (x, y) eelmainitud nelja ruudu summa:

$$(x - 3, y), (x - 2, y - 1), (x - 1, y - 2), (x, y - 3),$$

kus iga tabelist väljas asuv ruut vastab arvu 0 liitmisele.

0	0	4	0	0	22	0	0	75
1	0	0	6	0	0	22	0	0
0	1	0	0	6	0	0	18	0
0	0	2	0	0	6	0	0	13
1	0	0	2	0	0	4	0	0
0	0	0	0	1	0	0	2	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1

Peale tabeli nii täitmist, on ülemises paremas nurgas esinev arv 75 täpselt sobivate triminoteede arv vasakult alumisest ruudust ülemisse paremasse ruutu.

Ülesanne 40. Olgu a, b, c, d sellised reaalarvud, mille korral $a + b + c + d = 2$ ja $\frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$. Leia avaldise

$$\frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}$$

väärtus.

Vastus. 507

Lahendus. Olgu $X = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$ ja $Y = \frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}$.

Avaldame:

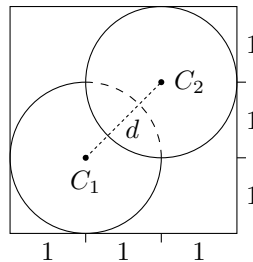
$$\begin{aligned} X - 4Y &= \frac{a^2 - 4b^2}{a+2b} + \frac{b^2 - 4c^2}{b+2c} + \frac{c^2 - 4d^2}{c+2d} + \frac{d^2 - 4a^2}{d+2a} = (a-2b) + (b-2c) + (c-2d) + (d-2a) = \\ &:= -a - b - c - d = -(a+b+c+d) = -2. \end{aligned}$$

Siit saame $X - 4Y = -2$, järelikult $Y = \frac{1}{4}(X + 2) = \frac{2026+2}{4} = 507$.

Ülesanne 41. Risttahukakujuulises karbis, mille põhi on ruut küljepikkusega 3 ja mille kõrgus on a , asuvad kaks pingpongipalli, mõlemad raadiusega 1. Esimene pall on karpi paigutatud nii, et see puudutab karbi põhja, karbi kahte kõrvuti asuvat külgseina ja teist palli. Teine pall on paigutatud nii, et see puudutab karbi lage, kaht ülejäänud kõrvuti asuvat külgseina ja esimest palli. Leia karbi kõrgus a .

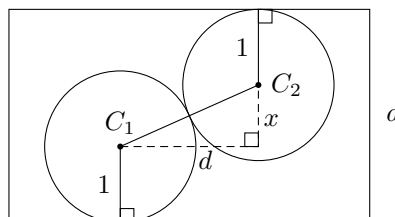
Vastus. $2 + \sqrt{2}$

Lahendus. Olgu C_1 ja C_2 nende kahe palli keskpunktid ning olgu d nende kahe keskpunkti horisontaalne kaugus, s.t. lõigu C_1C_2 projektsioon karbi ülemisele (või alumisele) tahule. Vaadeldes paigutust ülalt, saame küljepikkusega 3 ruudu, kus C_1 on kaugusel 1 kahest kõrvutiolevast küljest ning C_2 on kaugusel 1 kahest ülejäänud kõrvutiolevast küljest.



Seega asuvad selles pealtvaates C_1 ja C_2 projektsioonid küljepikkusega 1 ruudu vastastippudes. Järelikult $d = \sqrt{2}$.

Nüüd vaatleme põhjaga risti olevat vertikaaltasandit, mis läbib punkte C_1 ja C_2 . Selle tasandi lõige karbiga on otsitava kõrgusega a ristkülik ning lõik C_1C_2 asub selles tasandis. Olgu x punktide C_1 ja C_2 vaheline vertikaalkaugus.



Kuna meie kaks palli puudutavad teineteist ja mõlema raadius on 1, siis nende keskpunktide vaheline kaugus on $C_1C_2 = 2$. Täisnurkse kolmnurga korral, mille horisontaalne kaatet on d ja vertikaalne kaatet on x , kehtib $C_1C_2^2 = d^2 + x^2$, seega $x = \sqrt{2^2 - d^2} = \sqrt{2}$.

Kuna esimene pall puudutab põhja ja teine pall lage, siis on karbi kõrgus esimese palli raadiuse, keskpunktide vertikaalkauguse, ja teise palli raadiuse summa: $a = 1 + x + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

Ülesanne 42. Mitmel viisil saame täita 3×3 tabeli numbritega $0, 1, \dots, 9$ nii, et igas lahtris on täpselt üks number, ühtegi numbrit ei kasuta me rohkem kui ühe korra ning iga rea ja iga veeru summadest moodustuvad kuus summat on kas kõik paarisarvud või kõik paaritud arvud? Allpool on näidatud üks selline sobiv tabel, kus iga rea ja iga veeru summad on paarisarv:

1	2	3
5	4	7
6	0	8

Vastus. 259200

Lahendus. Kuna $0 + 1 + \dots + 9 = 45$ on paaritu, siis ühe paaritu numbri väljajätmisel on kogu tabeli summa paaris ning järelikult peavad kõik ridade ja veergude summad olema paarisarvud. See on võimalik 4 paaritud ja 5 paarisarvu kasutades ainult siis, kui üks rida ja üks veerg (kokku 5 lahtrit) sisaldavad ainult paarisarve. Seega saame selliste tabelite arvu leida nii: valime väljajäetava paaritu numbri (5 võimalust), seejärel valime rea ja veeru, kus on ainult paarisarvud ($3 \cdot 3 = 9$ võimalust), siis paigutame paaritud numbrid suvalises järjekorras ($4! = 24$ võimalust) ja lõpuks paigutame paarisarvud suvalises järjekorras ($5! = 120$ võimalust).

Samamoodi, kui jätame välja paarisarvu, siis iga rea summa on paaritu ning järelikult peavad kõik ridade ja veergude summad olema paaritud. Ainus viis paigutada viis paaritud numbrit 3×3 tabelisse nii, et iga reas või veerus oleks neist kas üks või kolm, on panna nad ühte ritta ja ühte veergu. Sellel juhul leiame sobivate tabelite arvu analoogselt eelnevaga, ainult et paaris- ja paaritud numbrite rollid on vahetatud. Seega on tabelite koguarv $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 120 = 259200$.

Ülesanne 43. Neli paarikaupa erinevat positiivset täisarvu a, b, c ja d rahuldavad tingimust $a + b + c + d = 20000$. Leia $VÜK(a, b, c, d)$ vähim võimalik väärtus, kus $VÜK$ tähistab nende arvude vähimat ühiskordset.

Vastus. 9600

Lahendus. Olgu $L = VÜK(a, b, c, d)$ ja olgu $a > b > c > d$. Need arvud jagavad arvu L , s.t. $L = aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1$ mingite positiivsete täisarvude a_1, b_1, c_1, d_1 korral. On selge, et $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$. Seega $a_1 \geq 1, b_1 \geq 2, c_1 \geq 3, d_1 \geq 4$. Seega

$$a \leq L, \quad b \leq \frac{L}{2}, \quad c \leq \frac{L}{3}, \quad d \leq \frac{L}{4}.$$

Järelikult

$$20000 = a + b + c + d \leq L \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25L}{12},$$

s.t. $L \geq 12 \cdot 20000/25 = 9600$.

Et näidata, et $L = 9600$ on saavutatav, piisab valida $a = 9600, b = \frac{9600}{2}, c = \frac{9600}{3}$ ja $d = \frac{9600}{4}$, mis on kõik täisarvud. Nende nelja arvu summa on $9600 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 20000$. Seega on otsitav L vähim väärtus 9600.

Ülesanne 44. Olgu $a_1, a_2, a_3, \dots$ jada, mis on defineeritud valemiga $a_n = \frac{n^2}{1,001^n}$. Leia n väärtus, mille korral a_n on suurim võimalik.

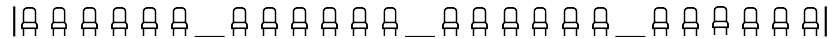
Vastus. 2001

Lahendus. Märkame, et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{1,001n^2} = \frac{1000(n+1)^2}{1001n^2}.$$

Siis $a_{n+1} > a_n$ ehk $a_{n+1}/a_n > 1$ annab $2000n + 1000 > n^2$ ning seega $n(n - 2000) < 1000$. On lihtne kontrollida, et see tingimus kehtib, kui $n \leq 2000$, sest vasak pool on mittepositiivne, ning ei kehti, kui $n \geq 2001$. Järelikult on jada rangelt kasvav kuni 2001-ni ja analoogselt sealt alates rangelt kahanev, st. $a_1 < a_2 < \dots < a_{2000} < a_{2001} > a_{2002} > \dots$. Seega on jada suurim liige a_{2001} .

Ülesanne 45. Viis sõpra valivad istekohti teatrietendusele. Nad kõik tahavad istuda samas reas ning kohtade paigutus reas on näidatud alljärgneval joonisel:



Teisisõnu, vasakult paremale minnes esineb selles reas sein, seejärel neli kuuest istmest koosnevat plokki, mida eraldavad kolm vahekäiku, ja viimaks teine sein. Sõbrad on arad, mistõttu tahavad nad valida viis istekohta nii, et isegi kui kõik teised kohad on hõivatud, saavad nad oma kohtadelt lahkuda ilma, et peaksid paluma võõrastel püsti tõusta. Mitu sellist viie elemendiga istekohtade hulka leidub?

Vastus. 252

Lahendus. Tingimus „nad kõik saavad lahkuda ilma, et peaksid paluma kellelgi püsti tõusta“ tähendab teisisõnu, et valitud istekohad peavad moodustama vahekäikudest algavad ühendatud plokid.

Paigutame viis sõpra ühte ritta. Soovime jagada nad kolme hulka (mõni neist võib olla tühi), mis vastavad kolmele vahekäigule. Selleks lisame $2 \cdot 3 - 1 = 5$ eraldajat:

- *paaritud* eraldajad tähistavad vahekäike,
- *paaris* eraldajad tähistavad võõraste inimeste istekohtade hulki kahes keskmises plokis.

Väitame, et need konfiguratsioonid on üks-ühele vastavuses kõigi sobivate istekohtade valikutega. Vaatame üht sellist konfiguratsiooni, nt jada

$$_ \emptyset F _ \emptyset F F _ F F,$$

kus F tähistab sõpra, $_$ vahekäiku ja $\emptyset$ võõraste istekohtade plokki. Vasakult alustades loeme seda nii: esimesest plokist ei valita ühtegi istekohta. Teisest plokist valitakse üks koht teise vahekäigu kõrval. Kolmandas plokis valitakse kaks parempoolseimat kohta ning lõpuks valitakse viimases istekohtade plokis kaks vasakpoolseimat kohta.

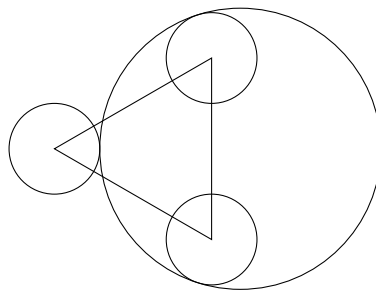
Märkame, et iga sobiva istekohtade valiku korral on täpselt üks viis seda kodeerida. Kui kahe naaber-vahekäigu ümber olevad klastrid puutuksid kokku, s.t. kui terve plokk oleks sõprade poolt hõivatud, oleks vastava eraldaja paigutamiseks mitu võimalust; kuid kuna sõpru on viis ja igas plokis kuus istekohta, on selle asukoht alati üheselt määratud.

Loendame viie sõbra (sõbrad olgu üksteisest eristamatud, sest meid ei huvita, milline sõber millisel valitud kohal istub) ja viie eraldaja paigutusi (kuigi eraldajaid on kahte tüüpi, siis nende tüüp on üheselt määratud läbi nende järjekorra, seega pole meil loendamisel täiendavat eristamist vaja). Seega valime 10 kohast 5, mis annab

$$\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

võimalust.

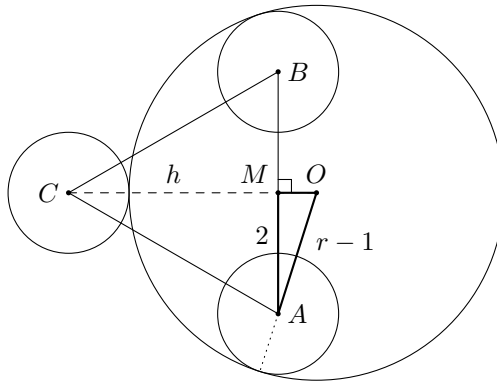
Ülesanne 46. Vaatleme võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega 4. Iga tipp on keskpunktiks ringile raadiusega 1. Leia selle ringi raadius, mis puutub nendest kolmest ringjoonest kahte sisemiselt ning kolmandat väliselt.



Vastus. $\frac{3\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Lahendus. Tähistame võrdkülgse kolmnurga ABC -ga ning olgu otsitava ringi keskpunkt O ja raadius r . Puutugu see punktides A ja B asuvaid ringjooni sisemiselt ning punktis C asuvat ringjoont väliselt. Meie kolmnurga kõrgus on $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$. Kuna $OA = OB$, siis asub punkt O lõigu AB keskristsirgel. Olgu M lõigu AB keskpunkt, siis

$$AM = 2 \text{ ja } CM = h.$$



Puutumistingimustest saame $OA = OB = r - 1$ ja $OC = r + 1$. Kuna O asub sirgel CM , siis

$$OM = OC - CM = r + 1 - h.$$

(See eeldab, et O asub kolmnurgast ABC väljaspool. Kui O oleks hoopis kolmnurga sees, siis kehtiks $OM = CM - OC$, mitte $OM = OC - CM$; mõlemal juhul kasutame edaspidi ainult avaldise OM^2 väärtust, mis on mõlemal juhul sama.)

Täisnurkses kolmnurgas OMA annab Pythagorase teoreem

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 \quad \text{või} \quad (r - 1)^2 = (r + 1 - h)^2 + 2^2.$$

Lihtsustades saame

$$r = \frac{h^2 - 2h + 4}{2(h - 2)}.$$

Asendades siia $h = 2\sqrt{3}$, leiame soovitud tulemuse $r = \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2}$.

Ülesanne 47. Vaatleme kahte tuba: üks on täis päkapikke, igauks 1,2 m pikk, ja teine on täis kükloope, igauks 4 m pikk. Kui 35 kükloopi ja 24 päkapikku liiguksid enda toast teise tuppa, siis selle tulemusena oleks mõlemas toas olevate olendite keskmine pikkus täpselt sama. Mis on vähim olendite koguarv, mille korral see sündmus saaks aset leida?

Vastus. 117

Lahendus. Olgu päkapikkude koguarv d ja kükloopide koguarv c . Pärast liikumisi on esimeses toas $d - 24$ päkapikku ja 35 kükloopi ning teises toas 24 päkapikku ja $c - 35$ kükloopi. Mugavuse huvides tähistame $d_1 = d - 24$, $c_1 = 35$, $d_2 = 24$ ja $c_2 = c - 35$ ning olgu päkapiku ja kükloobi pikkused vastavalt h_d ja h_c . Keskmine pikkus on siis

$$\frac{d_1 h_d + c_1 h_c}{d_1 + c_1} = \frac{d_2 h_d + c_2 h_c}{d_2 + c_2}.$$

Seda võrrandit lihtsustades saame

$$(h_c - h_d)(c_1 d_2 - d_1 c_2) = 0.$$

Kuna h_c erineb h_d -st, peab kehtima $c_1 d_2 - d_1 c_2 = 0$ ehk $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$. Intuitiivselt on see mõistlik: et mõlema toa keskmine pikkus oleks sama, peab ka päkapikkude ja kükloopide suhe olema mõlemas toas sama; tegelikud pikkused ei mängi rolli. Kasutades teadaolevaid c_1 ja d_2 väärtusi, saame

$$d_1 c_2 = c_1 d_2 = 35 \cdot 24 = 840.$$

Meie eesmärk on minimeerida olendite koguarvu $d + c$, mis on samaväärne $d_1 + c_2$ minimeerimisega, sest $d + c = d_1 + c_2 + 24 + 35$. Kahe positiivse arvu fikseeritud korrutise korral on nende summa minimaalne siis, kui arvud on võimalikult lähedased; see järeldub näiteks võrdusest $(d_1 + c_2)^2 = (d_1 - c_2)^2 + 4d_1 c_2$. Seega otsime arvu 840 tegurdust kaheks võimalikult lähestikuseks täisarvuks. Optimaalse valiku $840 = 28 \cdot 30$ leidmine ei ole nüüd keeruline.

Seega on d_1 ja c_2 väärtused 28 ja 30 (ükskõik millises järjekorras) ning vähim olendite koguarv on $d + c = 28 + 30 + 24 + 35 = 117$.

Ülesanne 48. Kuus piraati sisenevad kõrtsi ja istuvad suvalises järjestuses ümmarguse laua ümber. Igal piraadil on kaasasündinud raevukusaste 1-st 6-ni (kõik erinevad), mis määrab iga duelli võitja: duelli võidab alati kõrgema raevukusastmega piraat. Et otsustada, kes juhib piraadisalka, järgivad nad päripäeva suunatud duellirituaali: igas voorus valitakse juhuslikult üks allesjäänud piraat, kes esitab väljakutse lähimale päripäeva istuvale allesjäänud piraadile (jättes tühjad kohad vahele); nõrgem piraat langeb välja ja peab laua ümbert lahkuma, tugevam piraat jääb istuma. Viie vooru järel on alles vaid üks piraat. Mis on tõenäosus, et viimane duell toimub kahe tugevama piraadi (ehk raevukusastmete 6 ja 5) vahel?

Vastus. $\frac{7}{15}$

Lahendus. Asetame kuus piraati juhuslikult ümber laua ning keskendume ainult piraatidele raevukusastmega 5 ja 6 (sest 6 ei saa kunagi välja langeda). Suvalisel hetkel loetleme allesjäänud piraate päripäeva kujul $5, A_1, \dots, A_a, 6, B_1, \dots, B_b$, kus a on ellujäänud piraatide arv, kes paiknevad päripäeva rangelt 5 ja 6 vahel, ning b on ellujäänute arv, kes paiknevad teisel ringjoone kaarel rangelt 6 ja 5 vahel. Olgu $f(a, b)$ tõenäosus, et antud konfiguratsiooni korral on viimane duell piraatide 5 ja 6 vahel. On selge, et see tõenäosus sõltub ainult arvudest a ja b , mitte piraatide A_i ja B_i spetsiifilistest raevukusastmetest. Tõepoolest, iga A_i ja B_i raevukusaste on maksimaalselt 4, seega iga duell, milles osaleb 5 või 6, elimineerib nõrgema piraadi sõltumata sellest, millise A_i või B_i -ga täpselt tegu on, samal ajal kui duellid A_i -de vahel (vastavalt B_i -de vahel) vähendavad lihtsalt selle plokki suurust ühe võrra.

Kui $a = 0$ või $b = 0$, siis 5 ja 6 on kõrvuti ning alles on $n = a + b + 2$ piraati. Selles olukorras on igas käigus täpselt üks väljakutsuja valik (nimelt 5 või 6 valik, olenevalt sellest, kumb on paremal), mis sunnib duelli omavahel piraadid 5 ja 6 kohe ning elimineerib piraadi 5; kõik muud väljakutsuja valikud eemaldavad kellegi teise. Seega esitub tõenäosus, et 5 püsib elus kuni viimase duellini, kujul

$$f(a, 0) = f(0, b) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{2}{n} = \frac{2}{a+b+2}.$$

Eeldame nüüd, et $a, b \geq 1$, ning tähistame allesjäänud piraatide arvu endiselt kui $n = a + b + 2$. Vaatleme piraatide kellasuunalist plokki, mis algab piraadist 5 ja lõpeb vahetult enne piraati 6; selles plokis on täpselt $a + 1$ liiget, nimelt $5, A_1, \dots, A_a$. Kui juhuslikult valitud väljakutsuja kuulub sellesse plokki, siis toimub järgnev duell selle plokki sees (väljakutse saab järgmine päripäeva suunas olev piraat, kes on endiselt plokis, välja arvatud A_a , kes esitab väljakutse piraadile 6), ning igal juhul on elimineeritav piraat üks piraatidest $A_1, \dots, A_a$. Seega vähendab väljakutsuja valimine sellest plokist arvu a väärtust ühe võrra. Analoogselt on päripäeva suunatud plokk, mis algab piraadist 6 ja lõpeb vahetult enne piraati 5, suurusega $b + 1$, ning väljakutsuja valimine sellest plokist vähendab b väärtust ühe võrra. Kuna väljakutsuja valitakse sama tõenäosusega kõigi n allesjäänud piraatide seast, saame $a, b \geq 1$ korral

$$f(a, b) = \frac{a+1}{n} f(a-1, b) + \frac{b+1}{n} f(a, b-1).$$

Alguses kehtib $a+b=4$. Kasutades piirjuhte $f(0, 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $f(0, 3) = \frac{2}{5}$, $f(0, 2) = \frac{1}{2}$, $f(0, 1) = \frac{2}{3}$ ning sümmeetriat $f(a, b) = f(b, a)$, saame me $f(1, 1) = \frac{2}{3}$, $f(1, 2) = \frac{3}{5}$, $f(1, 3) = \frac{8}{15}$ ja $f(2, 2) = \frac{3}{5}$. Kuna algne istumisjärjekord on juhuslik ning kõik variandid on sama tõenäosusega, on päripäeva kaugus a piraatide 5 ja 6 vahel sama tõenäosusega kõigist variantidest hulgas $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, seega otsitav tõenäosus on

$$\frac{1}{5} (f(0, 4) + f(1, 3) + f(2, 2) + f(3, 1) + f(4, 0)) := \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \right) := \frac{7}{15}.$$

Alternatiivlahendus. Lahendame üldisema ülesande n piraadi jaoks kuue piraadi asemel. Olgu p_n tõenäosus, et viimased kaks ellu jäävat piraati on n ja $n-1$. Näitame nüüd, et $n \geq 3$ korral kehtib seos

$$p_n = \left(1 - \frac{2}{n(n-1)} \right) p_{n-1}. \quad (\spadesuit)$$

Vaatleme duellirituaali esimest sammu. Piraat $n-1$ langeb kohe välja tõenäosusega $\frac{2}{n(n-1)}$: tõenäosus, et n ja $n-1$ istuvad üksteise kõrval, on $\frac{2}{n-1}$, kuna kui esimenena istuks laua taha piraat n , siis piraadil $n-1$ on $n-1$ istekoha valikut, millest täpselt 2 on piraadi n kõrval. Kui nad istuvad kõrvuti, siis duell piraatide n ja $n-1$ vahel juhtub tõenäosusega $\frac{1}{n}$. Seega tõenäosus on

$$\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Seega, tõenäosusega $1 - \frac{2}{n(n-1)}$ on esimesena välja langev piraat üks piraatidest hulgas $1, \dots, n-2$. Sel juhul on alles jäänud $n-1$ piraati laua taga taaskord suvalises järjestuses ning kõik sellised järjestused on sama tõenäolised: peale piraadi k välja langemist saab iga allesjäänud paigutus esineda täpselt $2(n-k)$ eri viisil, sest k pidi duelli pidama (ning järelikult istuma kõrvuti) ühega $n-k$ tugevama piraadist ℓ , ning variante oli kaks: piraat k kas kutsus duellile piraadi ℓ või piraat ℓ kutsus duellile piraadi k . See avaldis sõltub vaid k väärtusest ning mitte piraatide järjekorrast

ringis, seega võime allesjäänud piraadid täistada raevukusastmetega $1, 2, \dots, n-1$, et saada algne ülesanne $n-1$ piraadi korral. seega olema tõestanud seose ($\spadesuit$).

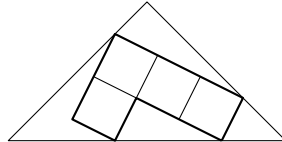
Nüüd piisab leida p_6 väärtus. Kuna $p_2 = 1$, siis tingimuse ($\spadesuit$) korduv rakendamine annab

$$p_6 = \frac{14}{15} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

Seega tõenäosus, et viimane duell on piraatide 6 ja 5 vahel, on $\frac{7}{15}$. Veelgi, induktsiooni ning seose ($\spadesuit$) saab näidata, et

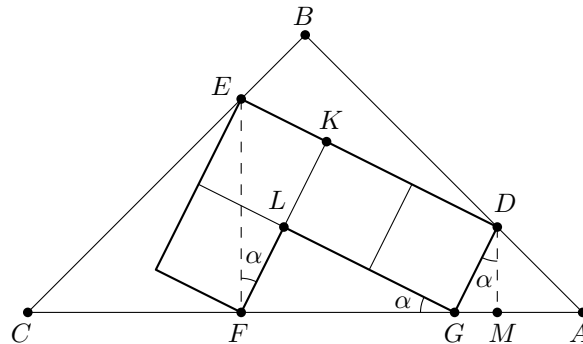
$$p_n = \frac{n+1}{3(n-1)}.$$

Ülesanne 49. L-kujuline tetromino, mis koosneb neljast võrdsest külgnevast ruudust, on joonisel näidatud viisil paigutatud võrdhaarse täisnurkse kolmnurga sisse. Leia tetromino pindala ja kolmnurga pindala suhe.



Vastus. $\frac{80}{169}$

Lahendus. Nimetame punkte joonisel näidatud viisil. Olgu iga väikese ruudu küljepikkus 1, siis peame arvutama vaid kolmnurga ABC ühe külje pikkuse, näiteks hüpotenuusi AC pikkuse.



Kasutades abijoont EF , saame täisnurkse kolmnurga EFK , kus $\angle EKF = 90^\circ$ ja küljepikkused on $EK = 1$, $KF = 2$, ning $EF = \sqrt{5}$. Kuna $GL = 2$ ja $LF = 1$ ning $\angle FLG = 90^\circ$, siis kolmnurgad EFK ja FGL on kongruentsed. Siit saame $GF = EF = \sqrt{5}$. Olgu nurk $\angle LGF$ tähistatud kui α . Siis ka $\angle KFE = \alpha$ ning järeldame, et $\angle GFE = 90^\circ$, sest α täiendab nurka $\angle GFL$ kuni 90° -ni. See aga tähendab, et kolmnurk FEC on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kaateti pikkus on $FC = \sqrt{5}$. Nüüd lisame teise abijoone: tõmbame punktist D kõrguse sirgeni AC ning saame sirgel AC punkti M . Kuna $\angle LGF + \angle MGD = 90^\circ$, saame $\angle GDM = \alpha$ ning seega on kolmnurk MDG sarnane kolmnurgaga FGL , kusjuures nende suhe on $\sqrt{5}$. Järelikult on kolmnurga MDG küljepikkused $MG = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $MD = \frac{2}{\sqrt{5}}$, ja $DG = 1$. Kuna ka kolmnurk MAD on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, saame lõpuks $AM = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Nüüd

$$AC = AM + MG + GF + FC = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = \frac{3+2 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Seega on kolmnurga ABC pindala

$$\frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{AC}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{169}{20}$$

ning otsitav suhe on $\frac{4}{\frac{169}{20}} = \frac{80}{169}$.

Ülesanne 50. Vaatleme jada $(a_n)_{n=1}^\infty$, mis on määratud tingimustega $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ ning $n \geq 1$ korral $a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} + 3^{a_{n+1}} + 3^{a_n}$. Leia jääk, mis tekib arvu a_{22} jagamisel arvuga 49?

Vastus. 11

Lahendus. Liige a_{22} on arvu 3 astmete summa ning selle väärtuse mooduli 49 järgi saame leida Euleri teoreemi abil: kuna $\gcd(3, 49) = 1$ ja $\varphi(49) = 42$, siis teoreemist järeldub, et

$$3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 42} \pmod{49}.$$

Seega, et leida $a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \pmod{49}$, piisab leida $a_{21}, a_{20}, a_{19} \pmod{42}$. Hiina jäägiteoreemi abil on see samaväärne nende väärtuste leidmisega moodulite 6 ja 7 järgi.

Esmalt, kui $n \geq 4$, siis iga liige a_n on kolme arvu 3 astme summa, seega on see summa paaritu ja jagub 3-ga, mistõttu $a_n \equiv 3 \pmod{6}$. Kuna $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ (taas Euleri teoreemist), siis järeldame, et $3^{a_n} \equiv 3^3 \pmod{7}$, kui $n \geq 4$. Võttes $n \geq 7$ (ehk $n-1, n-2, n-3 \geq 4$), saame

$$a_n = 3^{a_{n-1}} + 3^{a_{n-2}} + 3^{a_{n-3}} \equiv 3^3 + 3^3 + 3^3 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Kombineerides need kongruentsid Hiina jäägiteoreemi abil, saame $a_n \equiv 39 \equiv -3 \pmod{42}$, kui $n \geq 7$. Kasutades taaskord Euleri teoreemi saame me $3^{a_n} \equiv 3^{-3} \pmod{49}$, kui $n \geq 7$, kus negatiivne astendaja tähistab pöördarvu astet meie mooduli järgi. Viimaks,

$$a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \equiv 3^{-3} + 3^{-3} + 3^{-3} = 3^{-2} = 9^{-1} \equiv 11 \pmod{49}$$

sest $9 \cdot 11 = 99 \equiv 1 \pmod{49}$. Seega on otsitav jääk 11.

Ülesanne 51. Max alustab lõpmatu tee alguses tühja kütusepaagiga. Iga täisarvu $n \geq 0$ korral asub alguspunktist n^2 miili kaugusel kaupmees. Max võib iga kaupmehe käest osta täisarvu kütuseühikuid. Kaupmehed ei taha müüa suuri koguseid kütust, seega kasvab kütuseühiku hind lineaarselt ostetud ühikute arvu võrra: iga kaupmehe juures maksab esimene kütuseühik \$1, teine kütuseühik \$2, kolmas kütuseühik \$3 jne. Iga kütuseühik võimaldab Maxil sõita 1 miili kaugusele. Nii kaupmeeste varud kui ka Maxi kütusepaagi maht on piiramatud. Kui eelarve on \$730, siis mitme miili kaugusele saab Max mööda teed maksimaalselt sõita?

Vastus. 123

Lahendus. Et jõuda kaupmeheni, kes asub n^2 miili kaugusel, saab kütust osta n varasemalt kaupmehelt. Teoreetiliselt minimaalse hinna saame, kui ostame igalt kaupmehelt täpselt n kütuseühikut, sest iga ebaühtlane jaotus suurendab kogukulu.

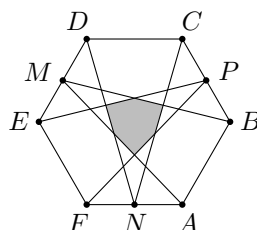
Siiski peame kontrollima, et plaan “iga kaupmehe juures, keda kohtan, ostan n ühikut kütust” tõepoolest töötab (s.t. et Max jõuab edukalt miilini n^2); ei tohi juhtuda, et Max jääb enne mõne varasema kaupmeheni jõudmist kütusest ilma. Näitame induktsiooniga, et see plaan viib sihile. Juht $n = 0$ on selge: miilini 0 jõudmiseks ei ole vaja kütust osta. Oletame nüüd, et me juba teame, et miilini n^2 on võimalik jõuda, kui osta n kütuseühikut igalt eelnevalt n kaupmehelt. Siis, kui ostame selle asemel $n+1$ ühikut, ei saa meil kindlasti enne miilini n^2 jõudmist kütust otsa. Seega saame ka kaupmehelt kaugusel n^2 osta $n+1$ kütuseühikut, ning pärast neid $n+1$ ostu, millest igaüks maksab $n+1$ kütuseühikut, jõuame edukalt miilini $(n+1)^2$.

See arutlus näitab, et miilini n^2 jõudmise hind on vähemalt

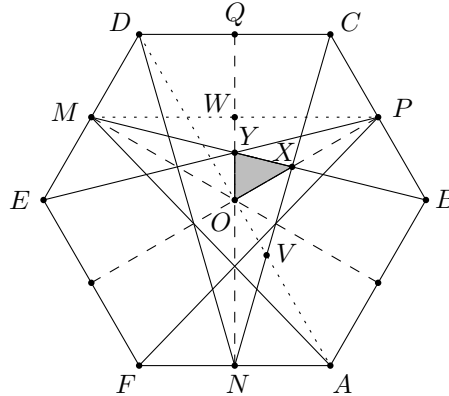
$$C_n = n(1 + 2 + \dots + n) = n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Kuna $C_{11} = 726 \leq 730 < 936 = C_{12}$, siis järeldame, et antud eelarvega on võimalik jõuda 11^2 miilini, kuid mitte 12^2 miilini. Kui kasutada allesjäänud \$4 selleks, et osta kohas 11^2 veel 2 kütuseühikut, saab jõuda 123 miilini; 124 miilini jõudmine samal viisil ületaks eelarvet \$2 võrra. Need konstruktsioonid on 123 ja 124 jaoks kulu minimeerivad: viimase kaupmehe juurest ei ole mõtet osta rohkem kütust, kui vaja, ning enne miili 11^2 ostetud ühikute koguarvu suurendamine maksab vähemalt \$12 lisaks iga täiendava ühiku kohta isegi siis, kui jaotus on ideaalselt tasakaalus.

Ülesanne 52. Olgu $ABCDEF$ korrapärane kuusnurk pindalaga 420. Olgu M, N ja P vastavalt külgede DE, FA ja BC keskpunktid. Joonestatakse lõigud AM, BM, CN, DN, EP ja FP , mille tulemusel moodustub joonisel varjutatud hulknurk. Mis on selle varjutatud hulknurga pindala?



Lahendus. Nagu järgnevalt jooniselt näha, saab varjutatud piirkonna jaotada kuueks võrdseks kolmnurgaks, arvutame ühe sellise kolmnurga pindala. Olgu O kuusnurga keskpunkt, X sirgete BM ja CN lõikepunkt ning Y sirgete BM ja PE lõikepunkt. Nüüd on meie eesmärk leida kolmnurga OXY pindala. Lisaks defineerime täiendavalt järgnevad punktid: olgu Q lõigu CD keskpunkt, V sirgete AD ja CN lõikepunkt ning W sirgete PM ja QN lõikepunkt. Näitame, et $OX : OP = 2 : 5$ ja $OY : OQ = 2 : 7$.



Kuna kolmnurgad NAV ja CDV on sarnased ning $NA = \frac{1}{2}CD$, saame $AV : VD = 1 : 2$, seega $OV = \frac{1}{3}OA$. Kuna kolmnurk OVX on sarnane kolmnurgaga PCX ning kuna $PC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}OA$, saame $OV : PC = 2 : 3$, mis võrdub ka suhtega $OX : PX$. Järelikult $OX : OP = 2 : 5$.

Et näha, et $OY : OQ = 2 : 7$, kasutame kolmnurkade OBY ja WMY sarnasust ning fakti $WM = \frac{3}{4}OB$, millest järeldub $OY : YW = 4 : 3$. Koos tingimusega $OW = WQ$ annab see kergesti $OY : OQ = 2 : 7$.

Tähistame kantsulgudega kolmnurga pindala. Kolmnurkadel OXY ja OPQ on ühine nurk $\angle POQ$, seega

$$\frac{[OXY]}{[OPQ]} = \frac{OX}{OP} \cdot \frac{OY}{OQ} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}.$$

Lisaks on kolmnurk OPQ võrdkülgne ning selle küljepikkus on $\frac{\sqrt{3}}{2}$ korda suurem kolmnurga ABO küljepikkusest, seega $[OPQ] = \frac{3}{4}[ABO]$. Seega

$$\frac{[OXY]}{[ABO]} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}.$$

Kuna varjutatud piirkond koosneb kuuest kolmnurga OXY koopiast ja kuusnurk koosneb kuuest kolmnurga ABO koopiast, kehtib sama suhe. Järeldame, et varjutatud osa pindala on $\frac{3}{35} \cdot 420 = 36$.

Ülesanne 53. Adele on algebraliste teisenduste meister, mistõttu võttis ta kõik avaldised kujul $\pm a \pm b \pm c \pm d$ (kokku 16 eri avaldist kõigi võimalike märgikombinatsioonide jaoks) ja korrutas need omavahel, saades polünoomi nelja muutujaga a, b, c, d . Seejärel eemaldas ta saadud polünoomist kõik liikmed, milles puudus vähemalt üks muutujatest a, b, c, d . Mis on allesjäänud polünoomi liikmete kordajate summa?

Vastus. -328

Lahendus. Olgu P ülesandes kirjeldatud polünoom (enne liikmete eemaldamist). Kui omistada kõigile neljale muutujale väärtus 1, siis korrutis sisaldab tegurina liiget $(1+1-1-1) = 0$, seega P kõigi kordajate summa võrdub 0-ga. Arvutame nüüd eemaldatud liikmete kordajate summa. Teeme seda elimineerimismeetodi abil (ingl. k. *inclusion-exclusion principle*).

Et leida soovitud kordajate summat, vaatleme esmalt juhtu, kus me asendame mingi fikseeritud muutuja nulliga, ning summeerime seda üle kõigi nelja muutuja valiku, lugedes nii iga vähemalt-ühte-muutujat-mitte-sisaldavat liiget vähemalt korra. Et summeerida nende liikmete kordajad, mis ei sisalda (näiteks) d -d, arvutame P väärtuse, kui $a = b = c = 1$ ja $d = 0$ ning saame

$$P(1, 1, 1, 0) = ((1+1+1)(1+1-1)(1-1+1)(1-1-1)(-1+1+1)(-1+1-1)(-1-1+1)(-1-1-1))^2 = 9^2 = 81.$$

Kui summeerida üle nelja valiku, milline muutuja puudub, saame $4 \cdot 81 = 324$, kuid selles summas loeme kaks korda iga liiget, milles esineb vaid kaks muutujat, seega peame lahutama $P(1, 1, 0, 0) = 0$ kuus korda, kuna paarikaupa muutujate valikuid on kuus. Viimaks peame tagasi lisama ainult ühe muutujaga liikmed, seega liidame $P(1, 0, 0, 0) = 1$ neli korda. Kokku annavad need kordajad summa $324 + 4 = 328$; kuna P kõigi kordajate summa on 0, siis vastassumma ehk nende liikmete, mis sisaldavad kõiki nelja muutujat, kordajate summa on -328 .

Ülesanne 54. Mikul on 9000 samasugust võrdkülgset kolmnurka. Mitu erinevat nelinurka saab ta neist kokku panna, kui ta peab kõik 9000 kolmnurka (ilma kattumisteta) kokku panema üheks nelinurgaks? Kongruentsed nelinurgad loeme samaks.

Vastus. 30

Lahendus. Võrdkülgsetest kolmnurkadest kokku pandud nelinurga nurk saab olla ainult 60° või 120° . Kuna nelinurga sisenurkade summa peab olema 360° , peavad need neli nurka olema $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ ja 120° . Luua saame kahte tüüpi nelinurki: rööpkülikuid ja võrdhaarseid trapetseid (sõltuvalt sellest, kas võrdsed nurgad on vastasnurgad või mitte).

Rööpkülikute korral (tähistades rööpküliku külgede pikkused kui a ja b) koosneb see rööpkülik $2ab$ kolmnurgast (meil on ab väikest rööpkülikut, millest igaüks koosneb kahest kolmnurgast), seega otsime paare $\{a, b\}$, mille korral $ab = 4500$. Selliseid paare on 18 (kuna arvu 4500 jagajaid on 36).

Trapetsi puhul märgime, et seda trapetsit saab vaadelda kui ala, mis esitub kahe suure võrdkülgse kolmnurga alade vahena. Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega n koosneb n^2 väiksemast kolmnurgast (kuna alt üles kolmnurki lugedes on see esimese n paaritu arvu summa), seega tahame, et $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 9000$, kus a tähistab trapetsi pikemat alust ja b lühemat. Otsime jälle jagajate paare, kuid nüüd peavad nii $a + b$ kui ka $a - b$ olema paarisarvud, et võrrandisüsteemil leiduks täisarvuline lahend. Arvul 9000 on 24 paarisjagajat, mille korral ka tekkinud jagatis on paaris (need vastavad arvu 9000/4 jagajatele), ning need annavad 12 sobivat paari $a + b$ ja $a - b$, mis omakorda vastavad 12 sobivale paarile a ja b jaoks.

Kokku on võimalikke nelinurki $18 + 12 = 30$.

Ülesanne 55. Ants riputas aknale 10 lambist koosneva jõulutule, kuid kahjuks ei hakanud kõik lambid tööle. On teada, et ei leidu nelja järjestikust lampi, mis vaheldumisi põleksid ning ei põleks (st. järjestuses põleb, ei põle, põleb, ei põle või järjestuses ei põle, põleb, ei põle, põleb). Mitu erinevat võimalikku lambijärjestust leidub?

Vastus. 548

Lahendus. Tähistame põlevat lampi arvuga 1 ja kustunud lampi arvuga 0, seega tuleb loendada pikkusega 10 kahendjärjenditeid, mis ei sisalda järjestikuse alamplokiina järjendid 0101 ega 1010. Defineerime teisenduse, mis pöörab kõik paarispositioonidel olevad bitid ümber (st. asendame x_i väärtusega $1 - x_i$ paarisarvulise i korral ning jätame x_i paaritu i korral muutmata); selle teisenduse kahekordne rakendamine annab algse jada tagasi, seega on tegu bijektsiooniga. Lisaks muudab see pööramine vahelduva ploki 0101 või 1010 konstantseks plokiks 0000 või 1111 ja vastupidi. Seega on algsed jadad bijektsioonis pikkusega-10 kahendjärjenditega, milles ei esine nelja järjestikust võrdset bitti; neid on mugavam loendada.

Olgu B_n selliste pikkusega n kahendjärjendite arv, milles ei ole nelja järjestikust võrdset bitti; väidame, et $n > 3$ korral rahuldavad need arvud seost $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$. Võtame suvalise sobiva jada pikkusega n ja vaatame selle lõpus olevat maksimaalset ühesuguste bittide plokki; tingimuse tõttu on selle pikkus 1, 2 või 3. Kui lõpuploki pikkus on $k \in \{1, 2, 3\}$, siis viimase k biti eemaldamine annab sobiva pikkusega $n - k$ jada. Teisalt, igast sobivast pikkusega $n - k$ jadast saame luua sobiva pikkusega n jada, kui lisame jada lõppu unikaalse pikkusega k ploki, kus iga bitt erineb algse jada viimasest bitist (s.t. esmalt lisame vastandbiti ja seejärel jätkame sama bitiga, kuni kokku on lisatud k bitti). Nii on pikkusega n sobivad jadad bijektsioonis pikkustega $n - 1$, $n - 2$ ja $n - 3$ sobivate jadadega, millest järeldub meie soovitud seos.

$n \leq 3$ korral on tingimus triviaalne, seega $B_1 = 2$, $B_2 = 4$ ja $B_3 = 8$ (lubatud on kõik pikkusega n kahendjärjendid). Kasutades seost $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$, saame järjest $B_4 = 14$, $B_5 = 26$, $B_6 = 48$, $B_7 = 88$, $B_8 = 162$, $B_9 = 298$ ja lõpuks $B_{10} = 548$.

Ülesanne 56. Lahenda järgmine võrrand positiivse täisarvu a jaoks:

$$\left(\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2} \right)^5 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^2.$$

Vastus. 2525

Lahendus. Lahenduse vältel eeldame, et $a \geq 2$, kuna võrrandi paremal poolel esineb avaldis $\sqrt{a^2 - 4}$. Tähelepanelikult, et

$$\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2} = \frac{23 + 5\sqrt{21}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^2$$

Kuna $a + \sqrt{a^2 - 4} > 0$, siis taandub algne võrrand kujule

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^5.$$

Selle võrduse saame aga lahti kirjutada kujul

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a^2 - 4} &= \frac{5^5 + \binom{5}{2} \cdot 5^3 \cdot 21 + \binom{5}{4} \cdot 5^1 \cdot 21^2}{16} + \frac{\binom{5}{1} \cdot 5^4 \cdot \sqrt{21} + \binom{5}{3} \cdot 5^2 \cdot (\sqrt{21})^3 + (\sqrt{21})^5}{16} \\ &= \frac{3125 + 10 \cdot 2625 + 25 \cdot 441}{16} + \frac{(5^5 + 21 \cdot 250 + 21^2) \cdot \sqrt{21}}{16} \\ &= 2525 + 551 \cdot \sqrt{21}. \end{aligned}$$

Vasaku ning parema poole ratsionaalsete osade võrdsusest saame $a = 2525$. Veendumaks, et tegu on tõepoolest sobiva lahendiga, asendame väärtuse $a = 2525$ avaldisse $a^2 - 4$ ja saame $2525^2 - 4 = 6375621 = 551^2 \cdot 21$, mis sobib. Viimaks täheldame, et leidub vaid üks lahend, sest $a \geq 2$ korral on avaldis $a + \sqrt{a^2 - 4}$ rangelt kasvav (kuna mõlemad liidetavad on rangelt kasvavad), seega leidub meie võrrandil maksimaalselt üks sobiv lahend, kus a on täisarv.

Lisalahendus. Olgu $\alpha = \frac{1}{2}(23 + \sqrt{23^2 - 4})$. Kuna α on võrrandi $t^2 - 23t + 1 = 0$ juur ning teine juur on α^{-1} , siis $\alpha + \alpha^{-1} = 23$.

Tähistame $\beta = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$. Siis β on võrrandi $t^2 - at + 1 = 0$ juur, seega analoogselt eelnevaga $\beta + \beta^{-1} = a$. Kuna a peab olema positiivne, siis peab ka β peab olema positiivne.

Antud võrrand on $\alpha^5 = \beta^2$. Olgu $x = \beta^{1/5}$ (seega $x > 0$). Siis $x^2 = \alpha$ ja järelikult $x^2 + x^{-2} = 23$. Olgu $y = x + x^{-1}$; siis $y > 0$ ja $y^2 = x^2 + x^{-2} + 2 = 25$, seega $y = 5$.

Meie eesmärk on leida $a = x^5 + x^{-5}$; selleks avaldame

$$y^5 = (x + x^{-1})^5 = (x^5 + x^{-5}) + 5(x^3 + x^{-3}) + 10(x + x^{-1}),$$

seega

$$a = y^5 - 5(x^3 + x^{-3}) - 10y.$$

Jääb üle avaldada $x^3 + x^{-3}$ läbi muutuja y , mida saab teha eelnevaga sarnaselt:

$$y^3 = (x + x^{-1})^3 = (x^3 + x^{-3}) + 3(x + x^{-1}),$$

seega

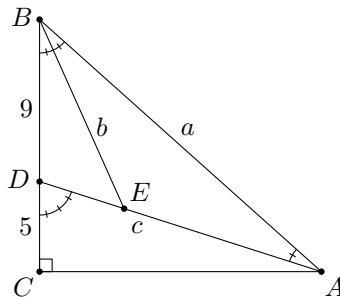
$$x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y.$$

Kombineerides saadud tulemuse eelmise võrrandiga, saame $a = y^5 - 5y^3 + 5y$, ning kui siia asendada $y = 5$, saame vastuse 2525.

Ülesanne 57. Täisnurkse kolmnurga ABC täisnurk on tipu C juures ning punkt D asub lõigul BC nii, et $BD = 9$ ja $DC = 5$. Kui $\angle ADC = 3\angle BAD$, siis leia lõigu AB pikkus.

Vastus. 21

Lahendus. Lihtne nurkade arvutus näitab, et $\angle ABD = 2\angle DAB$. Lõigaku $\angle ABD$ poolitaja sirget AD punktis E . Kuna BE poolitab nurga $\angle ABD$, siis $\angle ABE = \angle EBD = \angle DAB$. Seega $AE = EB$, mistõttu on kolmnurgad DBE ja DAB sarnased. Sarnasusest järeldub $DB : DA = DE : DB = BE : AB$.



Olgu $AB = a$, $AE = EB = b$ ja $AD = c$. Siis $DE = c - b$ ning külgede suhetest saame

$$\frac{9}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c - b}{9}.$$

Seega $c^2 = bc + 81$ ja $bc = 9a$, millest järeldub $c^2 = 9a + 81$.

Kuna kolmnurkadel ACD ja ABC on täisnurk tipu C juures, järeldame

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = a^2 - (9 + 5)^2 = a^2 - 196,$$

ja samuti

$$AC^2 = AD^2 - DC^2 = c^2 - 25.$$

Võrdsustades need avaldised ja kasutades eelnevat tulemust $c^2 = 9a + 81$, saame

$$a^2 - 196 = 9a + 56 \quad \text{või} \quad a^2 - 9a - 252 = 0.$$

Sellel võrrandil on ainult üks positiivne juur: $a = 21$.