

1. Feladat Egy vásári játékban számozott dobozokat lehet lelökdösni. Minden dobozra egy szám van írva. Le tudtok lökni akárhány dobozt, de csak akkor nyertek, ha rajtuk lévő számok összege pontosan 50. Az ábrán keressetek egy, a feltételnek megfelelő dobozcsoporthoz és tegyétek az ezeken a dobozokon lévő számokat növekvő sorrendbe!

				24	
		16		30	
	18		6		36
9		33		28	3

Eredmény. 6, 16, 28

Megoldás. A dobozokra írt számok többsége osztható hárommal. Az 50 hármas maradéka 2, tehát az összeadandók között kell, hogy legyen legalább egy nem hárommal osztható szám. Az ilyen számok csak a 16 és a 28.

16 hármas maradéka 1, és 28 hármas maradéka szintén 1, ezért csak az egyik számot használni nem elegendő, mindkettőt be kell vennünk. Az összegük $16 + 28 = 44$, aminek most már 2 a hármas maradéka, és hogy 50 legyen az összeg, a hiányzó harmadik szám az $50 - 44 = 6$, ami szerepel is egy dobozon. Tehát a lelökdösött dobozokra írt számok a 6, 16 és 28.

2. Feladat Tamarának van három szabályos hatoldalú dobókockája, egy piros, egy kék és egy zöld. Mindegyik dobókocka oldalai 1-től 6-ig vannak számozva. Egyszerre dob mind a három kockával, és összeadja a három számot. Hányféle különböző módon lehet a számok összege 8?

Eredmény. 21

Megoldás. Öt lehetőség van arra, hogy nyolcat dobjunk három dobókockával:

$$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2.$$

A $6 + 1 + 1$ esetében a 6-ost vagy a piros, vagy a kék, vagy a zöld kockával dobhatjuk, ezáltal három különböző lehetőségünk van. Ugyanezen logika mentén szintén három-három lehetőségünk van a $4 + 2 + 2$ és a $3 + 3 + 2$ esetében. $5 + 2 + 1$ dobásakor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ módja van a számok színes kockák közti eloszlásának, ahogy a $4 + 3 + 1$ esetén is. Tehát összesen $3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21$ különböző mód létezik.

3. Feladat Ádámnak van négy gyereke. Ádám életkora egyenlő a három legidősebb gyereke életkorának összegével, míg hat év múlva az életkora a három legfiatalabb gyereke életkorának összegével lesz egyenlő. Mekkora a korkülönbség Ádám legidősebb és legfiatalabb gyermeke között?

Eredmény. 12

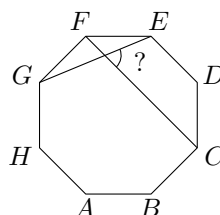
Megoldás. Legyen a Ádám életkora és $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$ a gyermekei életkora. A feladat szövegéből következik, hogy $a = c_2 + c_3 + c_4$ és $a + 6 = (c_1 + 6) + (c_2 + 6) + (c_3 + 6)$. Az első egyenletet a másodikba behelyettesítve megkapjuk, hogy $c_2 + c_3 + c_4 + 6 = c_1 + c_2 + c_3 + 18$, amit egyszerűsíthetünk $c_4 = c_1 + 12$ alakra. Tehát a legidősebb gyerek 12 évvel idősebb, mint a legfiatalabb.

4. Feladat Egy digitális óra 00:00-tól 23:59-ig jelzi ki az időt. Egy teljes nap alatt hányszor fordul elő, hogy a kijelző pontosan 4 számjegyet mutat az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek közül (bármilyen sorrendben)?

Eredmény. 36

Megoldás. Az órát jelző szám mindenképpen kétjegyű, nem nagyobb 23-nál, és két különböző jegyét az 1, ..., 5-ig tartó számokból választjuk ki; ezekkel a feltételekkel a lehetséges órajelzések 12, 13, 14, 15, 21 és 23. Mindegyik lehetséges óránál két számjegyet már felhasználtunk, és a három fennmaradó számjegyből kell kiválasztanunk a percek jelölő számot; erre $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség van, melyek közül mindegyik lehetséges percérték. Ezek alapján mind a hat lehetséges óra hatféle pontos időt tesz lehetővé, ami összesen $6 \cdot 6 = 36$ előfordulás.

5. Feladat Ha $ABCDEFGH$ egy szabályos nyolcszög, akkor hány fokok a CF és EG átlók által bezárt hegyesszög?



Eredmény. $67,5^\circ$

Megoldás. Legyen X a két átló metszéspontja. Az ábrán javasolt CXE kiszámítása helyett számoljuk ki a vele megegyező FXG értékét. Ehhez elsőként figyeljük meg, hogy $GFX = GFC = 90^\circ$, hiszen $BCFG$ egy téglalap. Továbbá, mivel EFG egyenlő szárú háromszög és $GFE = 135^\circ$, tudjuk, hogy $XGF = EGF = 22,5^\circ$. Tehát az FGX háromszögből kiszámolhatjuk, hogy $FXG = 180^\circ - 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$.

6. Feladat Legyen a, b, c, d, e öt különböző pozitív egész szám, amelyekre $a < b < c < d < e$ és a számtani közepük 16. Határozzátok meg d lehető legnagyobb értékét.

Eredmény. 36

Megoldás. Mivel

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 16,$$

következik, hogy $a + b + c + d + e = 80$. Ahhoz, hogy a d lehető legnagyobb értékét megkapjuk, a viszonyoknak megfelelően minimalizáljuk a többi számot: a lehető legkisebb értékek $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ és $e \geq d + 1$. Tehát

$$80 = a + b + c + d + e \geq 1 + 2 + 3 + d + (d + 1) = 7 + 2d,$$

így $2d \leq 73$, és következésképp $d \leq 36$ (d egész szám). Az egyenlőséget az $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 3, 36, 38)$ számokkal el is érhetjük, melyek összege 80, és megfelelnek a sorrendbeli kitételnek. Tehát a d lehető legnagyobb értéke 36.

7. Feladat Egy utazó át akart kelni egy ősi kőkapun, ám ekkor egy szfinx elállta az útját, és ezt a kérdést szegezte neki: „Válaszd meg a feladványt, és akkor átkelhetsz: egy háromjegyű számra gondoltam az alábbi tulajdonságokkal:

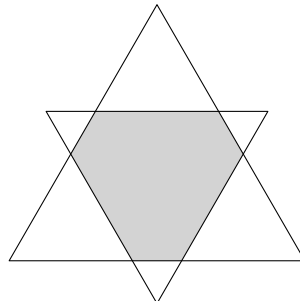
- páratlan szám,
- a számjegyei mind különbözőek és balról jobbra növekednek,
- osztható 9-cel, de bármely számjegyét törölve már nem lesz osztható 9-cel,
- Az egyik számjegye 6.”

Melyik számra gondolt a szfinx?

Eredmény. 567

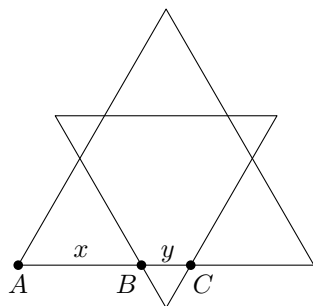
Megoldás. A 9-cel való oszthatósági szabály miatt a számjegyek összege 9 vagy 18. Mivel páratlan számot keresünk, 6 nem állhat az egyes helyi értéken, így a tízes vagy a százasként kell állnia. Nem állhat a százasként állni sem, mivel ekkor a számjegyek lehető legkisebb összege $6 + 7 + 8 = 21 > 18$; ezért a 6 mindenképp a tízes helyi értéken áll. Tehát az egyes helyi értéken álló számjegy legalább 7, így a számjegyek összege biztosan 18, és a százasként álló jegyek összege 12. A lehetőségek növekvő sorrendben $(3, 9)$, $(4, 8)$ és $(5, 7)$: az első kizárhatjuk, mert a 9-et törölve 36-ot kapunk, ami szintén osztható 9-cel; a másodikat azért zárjuk ki, mert páros számot eredményez; ezáltal az $(5, 7)$ az egyetlen jó megoldás. Tehát a szfinx által gondolt szám 567.

8. Feladat Két szabályos háromszöget elhelyeztünk az ábrán látható módon. A megfelelő oldalaik párhuzamosak, és a köré írt köreik középpontja azonos. A nagyobb háromszög oldalhossza 17 cm, míg a kisebb háromszög egy oldalának hossza 11 cm. A két háromszög közös része egy hatszög (az ábrán szürkével színezve). Határozzátok meg (cm-ben) ennek a hatszögnek a területét.

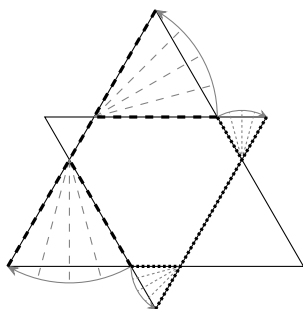


Eredmény. 28

Megoldás. A háromszögek egymásra helyezésével a satírozott hatszögön kívül kialakul három kisebb és három nagyobb egybevágó egyenlő oldalú háromszög. Legyen $AB = x$ és $BC = y$. Ekkor a nagyobb háromszög oldalhossza $2x + y = 17$ és a kisebb háromszögé $x + 2y = 11$. A két egyenletet összeadva megkapjuk, hogy $3x + 3y = 28$, ami megegyezik a satírozott hatszög kerületével.



Alternatív megoldás. Szavak nélküli bizonyításhoz jutunk, ha rávetítjük a hatszög oldalait a két egyenlő oldalú háromszög egy-egy oldalára. Így a hatszög kerülete pontosan megegyezik a megadott szabályos háromszögek oldalhosszainak összegével, vagyis $17 + 11 = 28$.



9. Feladat Anna sportolni készül, és gondolkodik, hogy milyen ruhát vegyen fel. Pontosan egy pólót, egy rövidnadrágot, egy pár zoknit és egy pár sportcipőt kell felvennie. Továbbá eldöntheti, hogy köt-e szalagból masnit a hajába vagy sem. A zokni és a cipő esetében összeillő párt vesz fel (azaz azonos színű a pár két eleme). Van a szekrényében fehér, sárga, zöld, kék és piros póló, és van fehér, fekete és szürke színű rövidnadrágja és masnija is. Ezen kívül van fehér, piros és narancssárga zoknija, illetve fehér és fekete cipője. Csak akkor fog fehér zoknit felvenni, ha minden ruhája fehér (a szalagot is beleértve, amennyiben visel). Hányféleképpen öltözhet fel Anna?

Eredmény. 242

Megoldás. Esetekre bontva számoljuk meg a lehetséges ruha-összeállításokat. Annának pontosan egy pólót, egy rövidnadrágot, egy pár zoknit és egy pár cipőt kell viselnie, illetve opcionálisan egy szalagot a hajában.

Elsőként nézzük a fehér zoknis eseteket. A megadott feltételek alapján Anna csak akkor vesz fel fehér zoknit, ha minden ruhája fehér. Így ekkor a pólójának, a rövidnadrágjának és a cipőjének is fehérnek kell lennie, a szalag pedig vagy fehér, vagy nincs a hajában. Ez összesen 2 összeállítás.

Most vegyük a nemfehér (piros vagy narancssárga) zoknis eseteket, melyekből 2 lehetőség van. Ezekben az esetekben nincs több megszorítás. A póló színére 5 lehetőség van, a rövidnadrágra 3, a cipőre 2, a szalagra pedig 4 (semmi, fehér, fekete vagy szürke). Így a nemfehér zoknis összeállítások száma

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240.$$

Mindkét eshetőséget összeadva megkapjuk az összes lehetséges ruha-összeállítás számát, ami $240 + 2 = 242$.

10. Feladat Keressetek egy négyjegyű számot, ami teljesíti az alábbi feltételeket:

- a százasként álló számjegy kétszerese az ezres helyi értéken álló számjegynek
- az egyes helyi értéken álló számjegy háromszorosa a tízes helyi értéken álló számjegynek
- ha mindegyik számjegyét négyzetre emeljük, akkor ezen négyzetszámok összege 95.

Eredmény. 1239

Megoldás. Legyen $\overline{ABCD}$ a keresett szám és legyenek A, B, C, D a számjegyei; a feltételek szerint $B = 2A$ és $D = 3C$. Ekkor

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A^2 + (2A)^2 + C^2 + (3C)^2 = 5A^2 + 10C^2 = 95,$$

amit egyszerűsíthetünk $A^2 + 2C^2 = 19$ -re. Mivel az egyenlet jobb oldala páratlan, A -nak mindenképp páratlannak kell lennie; továbbá A egyjegyű és $A^2 \leq 19$, ami csak két lehetőséget hagy: $A \in \{1, 3\}$. Ezeket az eseteket ellenőrizve megkapjuk az egyetlen működő lehetőséget, ami $A = 1$, ezáltal pedig $2C^2 = 18$, tehát $C = 3$. Így $B = 2$, $D = 9$, a keresett szám pedig 1239.

11. Feladat Alíz pozitív személyiség, ezért úgy szeretné kitölteni az alábbi kifejezésben a dobozokat plusz vagy mínusz jelekkel, hogy a végeredmény egy pozitív szám legyen. Hányféleképpen teheti ezt meg?

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$$

Eredmény. 16

Megoldás. Elsőként vegyük észre, hogy az $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ összeg sosem lehet nulla; ezt az bizonyítja, hogy mivel $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ páratlan és bármelyik előjel megváltoztatásával páros mennyiséggel változik az összeg, így az eredmény mindig páratlan. Ha bármilyen előjeleket választunk, majd megfordítjuk őket (minden pluszt mínusszá és minden mínuszt plusszá változtatunk), az eredmény pozitívról negatívra változik vagy fordítva, ezzel a pozitív és negatív végösszegeket hiba nélkül párokba rendezve. Az öt doboz mindegyikébe egymástól függetlenül beírhatunk pluszjelet vagy mínuszjelet, 2 lehetőséget adva ezzel mindegyik dobozra, azaz összesen $2^5 = 32$ előjelválasztási lehetőségünk van. Mivel nincs nullát eredményező összeállítás, a lehetőségeknek pontosan a fele eredményez pozitív összeget, így Alíz 16 esetben juthat pozitív eredményre.

12. Feladat Az alábbi írásbeli összeadásban minden betű egy számjegyet jelöl. Azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk pedig különböző számjegyeket jelölnek.

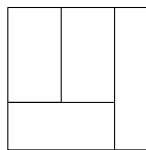
$$\begin{array}{r} A \quad A \quad A \\ + \quad A \quad A \quad B \\ + \quad A \quad C \quad C \\ \hline 2 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \end{array}$$

Adjátok meg az ABC háromjegyű számot!

Eredmény. 619

Megoldás. Mivel mindhárom szám első számjegye ugyanaz, A -ra teljesülnie kell $3A \leq 20$ -nak és $3A \geq 18$ -nak, hiszen nem lehet kettőnél nagyobb maradék három számjegy összeadásakor. Ezáltal $A = 6$. Ebből következik, hogy az egyes helyi értéken álló B és C összege 10. Így 1 a maradék, amit az egyes helyi értékről átviszünk a tízesekhez. Tehát szükségszerűen $C = 9$, ebből pedig következik, hogy $B = 1$. Vagyis $ABC = 619$.

13. Feladat Az ábrán egy 2 egység oldalhosszú négyzet látható, amit négy téglalapra daraboltak. Ha mind a négy téglalapnak ugyanannyi a területe, akkor mennyi a kerületeik összege?

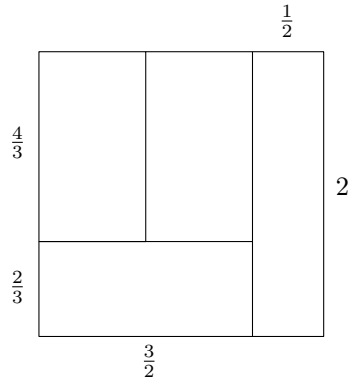


Megjegyzés: A két téglalap határához is tartozó szakaszokat mindkettő kerületénél beszámítjuk.

Eredmény. $\frac{53}{3} = 17\frac{2}{3}$

Megoldás. Mivel a négyzet területe 4, mind a négy téglalap területe 1. Ebből egyértelműen következik, hogy a jobb oldali téglalap szélessége $\frac{1}{2}$, ezáltal a bal alsó téglalap szélessége $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, a magassága pedig $1/\frac{3}{2} = \frac{2}{3}$. Következésképp a két fennmaradó téglalap megegyező magassága $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. A négy kerület összegéhez vegyük a külső négyzet kerületét, ami $4 \cdot 2 = 8$, és adjuk hozzá a belső oldalhosszak dupláját, hiszen ezek mindegyike két téglalaphoz tartozik. A belső

oldalhosszak 2 , $\frac{3}{2}$ és $\frac{4}{3}$, kétszeres összegük pedig $2 \cdot (2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{29}{3}$. Tehát a kerületek keresett összege $8 + \frac{29}{3} = \frac{53}{3}$.



14. Feladat Timi egy hosszú számjegysorozatot készít: a 2026 négyjegyű blokkot 2026-szor írja le a következő szabályok szerint. Elsőként leírja a 2026-ot, majd a megfordítását, 6202-t úgy, hogy az ismétlődő 6-os jegyet a két blokk találkozásánál csak egyszer írja le. Ezután az eredeti és a megfordított sorrendű blokkokat felváltva írja egymás után, minden lépésben az előző blokk utolsó jegyét egyben a következő blokk első jegyeként is használva, így a szomszédos blokkok mindig pontosan egy jegyben fedik egymást, ahogy a következő ábrán is látható. Az ábra az első hat blokkot ábrázolja az összesen 2026 blokk közül.

$$\underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_{1} \underbrace{6\ 2\ 0}_{2} \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_{3} \underbrace{6\ 2\ 0}_{4} \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_{5} \underbrace{6\ 2\ 0}_{6} \dots$$

Határozzátok meg a kapott számjegysorozat jegyeinek összegét!

Eredmény. 12 158

Megoldás. A 2026 egyszeri leírása után a számjegyek összege 10. Az első leírás után mindegyik páros blokk a 202 számjegyeket adja a számsorhoz, ami 4-gyel növeli a számjegyek összegét, a páratlan blokkok pedig a 026 számjegyeket adják hozzá, 8-cal növelve az összeget.

Ezáltal az első számot követően minden két blokk hozzáadása után 12-vel nő a számjegyek összege, ez pedig 1012-szer történik meg ($1 + 2 \cdot 1012 = 2025$). A végére marad a 2026. blokk, ami páros számú, tehát 4-gyel növeli az összeget. Végül a számjegyek összege $10 + 1012 \cdot 12 + 4 = 12\ 158$.

15. Feladat Reggel 8:00 van. Mennyi lesz az idő 260320261998 óra elteltével, ha nem történik óraátállítás az eltelt idő alatt?

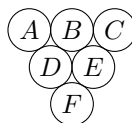
Eredmény. 14:00 = délután 2 óra

Megoldás. Mivel egy nap 24 órából áll, az idő 24 óránként ismétlődik. Emiatt elég megkeresnünk a maradékot, ha $N = 260320261998$ -at elosztjuk 24-gyel. Ezt írásbeli osztással is megtehetjük, de egyszerűbb kiszámolni a maradékokat külön 3-mal és 8-cal való osztás esetén, majd kombinálni a két eredményt.

Mivel N számjegyeinek összege osztható 3-mal, maga N is osztható 3-mal. A 8-cal való osztásnál az utolsó három jegyből álló szám maradékát kell megnéznünk; ez a szám itt 998, így nyolccal osztva 6 maradékot ad. Tehát a 24-gyel való osztáskor kapott maradék egy 24-nél kisebb szám, ami osztható 3-mal és 6 maradékot ad 8-cal való osztás esetén; erre az egyetlen lehetőség a 6.

Ezáltal N óra elteltével az óra ugyanannyival fog előrébb állni, mint 6 óra elteltével. Reggel 8:00-tól számolva 6 órával később 14:00 (vagyis délután 2 óra) van.

16. Feladat Néhány szőlőszem az ábrán látható módon van elhelyezve. Egy szőlőszemet csak akkor ehetünk meg, ha mindegyik közvetlenül alatta elhelyezkedő szőlőszemet (vagyis az őt alulról érintő egy vagy két szőlőszemet) már korábban elfogyasztottuk. Például a D -vel jelölt szemet A és B elfogyasztása előtt meg kell ennünk. Hányféle sorrendben fogyaszthatóak el a szőlőszemek?



Eredmény. 16

Megoldás. Legelsőként kizárólag az F jelölésű szőlőszemet ehethjük meg, ami után megmarad az A, B, C, D és E szőlőszem.

Ekkor választhatunk a D és E szőlőszemek közül. A két eset egyértelműen szimmetrikus, úgyhogy kezdjük az E -vel, ami után megmarad az A, B, C és D szőlőszem. Ezután megehetjük a C -t vagy a D -t:

- Ha a C -t választjuk, utána meg kell ennünk a D -t, ezután pedig vagy A -t vagy B -t (2 lehetőség)
- Ha a D -t választjuk, utána megehetjük az A, B, C szőlőszemek bármelyikét, majd a maradék kettőt bármilyen sorrendben ($3 \cdot 2$ lehetőség)

Tehát minden esetben F -el kezdünk, majd választunk D és E közül, utána pedig $2 + 6 = 8$ különféle lehetőségünk van. Így összesen $1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$ -féleképpen ehethjük meg a szőlőszemeket.

17. Feladat Legyen x egy pozitív egész, amelyre

$$\text{lkt}(x, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \quad \text{és} \quad \text{lkt}(x, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

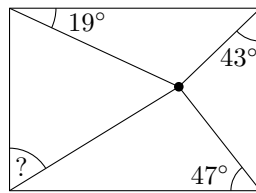
Hányféle különböző értéket vehet fel $\text{lko}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$?

Megjegyzés: $\text{lko}(a, b)$ az a és b egész számok legnagyobb közös osztóját, $\text{lkt}(a, b)$ pedig ugyanezen számok legkisebb közös többszörösét jelenti.

Eredmény. 12

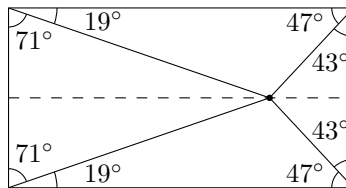
Megoldás. Az x biztosan $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ alakú (más prímszám nem szerepelhet benne, mert akkor benne lenne a legkisebb közös többszörösökben is). Az első feltétel alapján $a = 6$, $b \leq 3$, $c \leq 4$ és $d \leq 2$, míg a második feltétel alapján $a \leq 8$, $b \leq 4$, $c \leq 3$ és $d = 2$. Ebből következik, hogy $\text{lko}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ prímtenyezőkre való osztásában a 2 kitevője pontosan 2, a 3 kitevője bármelyik szám lehet 0 és 3 között, az 5 kitevője bármelyik szám lehet 0 és 2 között, a 7 kitevője pedig pontosan 2. Következésképp összesen $4 \cdot 3 = 12$ ilyen szám létezik.

18. Feladat Egy pont egy téglalap belsejében helyezkedik el az ábrán látható módon. Három, az ábrán jelölt szög mérete ismert. Mekkora a kérdőjellel jelölt szög (fokban)?



Eredmény. 71°

Megoldás. A pótszögeket megkeresve a jobb két csúcsnál arra jutunk, hogy a megadott belső pont a téglalap két függőleges oldalának közös oldalfelező merőlegesén helyezkedik el. Ezáltal az egész ábra szimmetrikus erre a felezővonalra. Következésképp a keresett szög $90^\circ - 19^\circ = 71^\circ$.



19. Feladat Zsuzsi egy nyakláncot szeretne készíteni kétféle gyöngyszem felhasználásával. Összesen 100 gyöngyszemet vásárolt, és tudjuk, hogy több olcsó szemet vett, mint drágát. Az olcsó gyöngyszemek ára összesen 459 forint volt. Minden egyes drága gyöngyszem pontosan 13 forinttal kerül többbe, mint egy olcsó gyöngyszem. Minden ár pozitív egész forint. Hány forintot fizetett Zsuzsi összesen a drága gyöngyszemekért?

Eredmény. 1078

Megoldás. Legyen o az olcsó gyöngyszemek száma és a az (egészben kifejezett) árak forintban. Ekkor $oa = 459$ és mivel összesen 100 gyöngyszem van, amiből több az olcsó, mint a drága, tudjuk, hogy $50 < o < 100$. Mivel a gyöngyök ára egész szám, o biztosan osztója $459 = 3^3 \cdot 17$ -nek, szigorúan 50 és 100 között, és az egyetlen ilyen osztó $o = 51$. Tehát $a = 459/51 = 9$ és minden drágább gyöngyszem ára $a + 13 = 22$ forint. A drága gyöngyök száma $100 - 51 = 49$, így Zsuzsi $49 \cdot 22 = 1078$ forintot fizetett a drága gyöngyökért.

20. Feladat Az

$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot H}{N \cdot A \cdot B \cdot O \cdot J} = G \cdot A \cdot M \cdot E,$$

egyenletben minden betű egy számjegyet jelöl, a különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek, a $\cdot$ szimbólum pedig szorzást jelent. Hányféle különböző értéke lehet az $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$ szorzatnak?

Eredmény. 1

Megoldás. Összesen 10 különféle betű van ($M, A, T, H, N, B, O, J, G, E$), úgyhogy a 0–9 számjegyeket mind pontosan egyszer használjuk fel, tehát valamelyik betű 0-nak felel meg. Ebből következik, hogy az egyenlet mindkét oldalának értéke szükségszerűen 0. A 0 mindkét oldalon előfordul úgy, hogy nem szerepel a tört nevezőjében, és az egyetlen ilyen betű az M , úgyhogy $M = 0$. Tehát $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O = 0$ attól függetlenül, hogy milyen értékűek a fennmaradó betűk, vagyis a szorzat pontosan egy értéket vehet fel.

21. Feladat Három világítótorony egy egyenes partvonalon fekszik. A szomszédos világítótornyok távolsága 13 km. Egy hajó a tengeren 10 km-re van az egyik szélső világítótornytól és 13 km-re a középső világítótornytól. Hány km távolságra van a hajó a másik szélső világítótornytól? (A Föld görbületét elhanyagoljuk.)

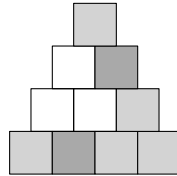
Eredmény. 24

Megoldás. Legyen H a hajó pozíciója, A és B a két szélső világítótorony, K pedig a középső torony. Mivel $KH = KA = KB = 13$, az A, B és H pontok mind egy köríven helyezkednek el, melynek középpontja K . Továbbá az AB szakasz a kör átmérője. A Thalész-tétel alapján az ABH háromszög H -nál derékszögű. Mivel $AB = KA + KB = 26$ és $AH = 10$, a Pitagorasz-tétellel megkapjuk, hogy

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Tehát a hajó és a másik szélső világítótorony közti távolság 24 km.

22. Feladat Hányféleképpen rendelhetjük három szín egyikét egy 4 magasságú piramis 10 építőeleméhez úgy, hogy minden felfelé álló 2 magasságú alpiramis vagy három különböző színű darabból álljon vagy egyszínű legyen? Egy megfelelő színezés látható az alábbi ábrán.



Eredmény. 81

Megoldás. A megadott feltételek mellett a piramis színeit teljes mértékben az alsó sor színei határozzák meg, mivel az alsó sor mindegyik színösszeállítását pontosan egyféleképp tudjuk kiegészíteni a piramis többi sorában. Mivel minden építőelem színére három lehetőség van, összesen $3^4 = 81$ színösszeállítás lehetséges.

23. Feladat Egy szabályos 100-szög minden csúcsához hozzárendeltünk egy különböző számot az $1, 2, \dots, 100$ számok közül úgy, hogy minden egymással szemközti számpár különbségének abszolút értéke egy fix n érték. Határozzátok meg n összes lehetséges értékének az összegét!

Eredmény. 93

Megoldás. Legyen n olyan pozitív egész szám, amire létezik a feladat szövegében leírt elrendezés. Ekkor az 1-es szám párja $n + 1$ (innentől kezdve az egymással szemközti csúcsokat nevezzük *párnak*). Ezután 2 párja biztosan $n + 2$, és így tovább, láthatjuk, hogy k szám párja $n + k$ minden $k = 1, 2, \dots, n$ szám esetében, így pedig n párja $2n$.

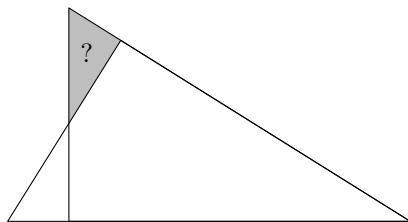
Láthatjuk, hogy az $\{1, 2, \dots, 2n\}$ számblokk minden tagjának a párját ugyanebből a blokkból választjuk ki, és ez a blokk elkülönül a fennmaradó $\{2n + 1, \dots, 100\}$ számoktól. Ha $2n = 100$, akkor a folyamatnak vége, máskülönben pedig folytatjuk ugyanezt a párosítási folyamatot $2n + 1$ -től kezdődően, aminek a párja $3n + 1$ és így tovább.

Idővel az $\{1, 2, \dots, 100\}$ számsor felosztódik $2n$ hosszúságú elkülönülő blokkokra. Ez akkor és csak akkor lehetséges, ha 100 osztható $2n$ -nel, vagyis akkor és csak akkor, ha n pozitív osztója 50-nek.

Könnyen láthatjuk, hogy ez az összeállítás lehetséges párosítást eredményez minden ilyen osztóval (és a fentiek szerint $\frac{100}{2n}$ hosszúságú blokkokat képez). Tehát a válasz az 50 összes pozitív osztójának összege, ami

$$1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93.$$

24. Feladat Vettük egy 5, 12, 13 egység oldalhosszú derékszögű háromszög két példányát, majd egymásra helyeztük őket úgy, hogy a legkisebb szöghöz tartozó csúcsaik egymáson legyenek, és részben fedjék egymást az oldalaik az ábrán látható módon. Mekkora a nem átfedő területet alkotó két háromszög közül az egyiknek a területe?



Eredmény. $\frac{6}{5} = 1,2$

Megoldás. A szürke háromszög hasonló a nagyobb derékszögű háromszöghöz, és a legrövidebb oldalának hossza $13 - 12 = 1$, mivel mindkettő háromszög derékszögű és van még egy közös szögük (az ábrán a legfelső csúcsban).

Ezáltal a két derékszögű háromszög közti méretarány $1 : 5$, és a szürke háromszög másik befogója $\frac{12}{5}$ hosszúságú. Következésképp a keresett terület

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5}.$$

25. Feladat A hét törpe mind választott egy-egy pozitív egész számot. Mindenki ismeri a többiek által választott számokat. Hófehérke egyesével megkérdezte őket, hogy milyen számot választottak.

- Az első törpe csendben maradt.
- A második törpe azt mondta: „A számom egyenlő az első törpe számával.”
- A 3. törpe azt mondta: „A számom egyenlő az első és második törpe számainak összegével.”
- A 4. törpe azt mondta: „A számom egyenlő az első, második és harmadik törpe számainak összegével.”
- ...
- A 7. törpe azt mondta: „A számom egyenlő az elsőtől a hatodikig minden törpe számainak összegével.”

Tudjuk, hogy a hét törpe számainak összege 46. Azt is tudjuk, hogy pontosan egy törpe hazudott, minden egyéb törpe állítása a ténylegesen kiválasztott számokra vonatkozott és nem a hangosan bejelentett számokra. Találjátok meg az összes olyan számot, amit a hazudós törpe választhatott.

Eredmény. 7, 14

Megoldás. Legyenek a törpék által választott számok $a_1, a_2, \dots, a_7$. Elsőként vegyük észre, hogy a hatodik vagy a hetedik törpe hazudik.

Ha a hetedik törpe igazat mondana, akkor $a_7 = a_1 + \dots + a_6$, így a teljes összegre igaz, hogy $a_1 + \dots + a_7 = 2a_7 = 46$, tehát $a_7 = \frac{46}{2} = 23$. Ha a hatodik törpe szintén igazat mondana, akkor hasonlóképp $a_6 = a_1 + \dots + a_5$, tehát $a_7 = a_1 + \dots + a_6 = 2a_6$, amiből következne, hogy $a_6 = \frac{23}{2}$, viszont ez nem lehetséges, hiszen a_6 -nak egész számnak kell lennie. Tehát ebben az esetben mindenképp a hatodik törpének kell hazudnia.

Így ha az első öt állítás igaz, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_2 = a_1, \quad a_3 = a_1 + a_2 = 2a_1, \quad a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 4a_1, \quad a_5 = a_1 + \dots + a_4 = 8a_1,$$

tehát $a_1 + \dots + a_5 = 16a_1$. Továbbá a_6 és a_7 közül az egyik (az, amelyik igazmondó törpéhez tartozik) nagyobb vagy egyenlő $a_1 + \dots + a_5 = 16a_1$ -gyel, vagyis

$$a_1 + \dots + a_7 \geq 16a_1 + 16a_1 = 32a_1.$$

Mivel a számok összege 46, következik, hogy $32a_1 \leq 46$, tehát $a_1 = 1$ (a_1 pozitív egész szám), és következésképp $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$, illetve $a_5 = 8$. Ezekből megkapjuk, hogy $a_1 + \dots + a_5 = 16$.

Most nézzük meg a két utolsó törpét. Ha a hatodik törpe mondott igazat, akkor $a_6 = 16$, szóval hogy megkapjuk a 46 összeget, szükségszerűen $a_7 = 46 - (16 + 16) = 14$. Ha viszont a hatodik törpe hazudott, akkor a hetediknek kellett igazat mondania és $a_7 = a_1 + \dots + a_6 = 16 + a_6$. A korábbi számítások alapján ebben az esetben $a_7 = 23$, amiből következik, hogy $a_6 = 7$.

Mindkét konfiguráció esetén teljesül, hogy pontosan az egyik törpe hazudik, tehát az összes olyan szám, amit a hazug törpe választhatott, 7 vagy 14.

26. Feladat Egy Föld körüli pályán keringő műholddal való kommunikációhoz hat különböző csatornát választunk az $\{1; 2; \dots; 13\}$ halmazból. Két kiválasztás azonos, ha csak a csatornák sorrendjében különböznek. A legjobb sávszélesség elérésének érdekében a kiválasztott csatornák között lennie kell legalább egy olyan párosnak, amelyek sorszáma közötti különbség páratlan. Hány ilyen hattagú csatornacsoport lehetséges?

Eredmény. 1708

Megoldás. Két kiválasztott csatorna különbsége pontosan akkor páratlan, ha ellentétes paritásúak. A közvetlen megszámlálás helyett a nem megfelelő esetekkel számolunk: kivonjuk a páratlan különbséget nem tartalmazó csatornacsoportokat az összes lehetséges esetből.

Egy hat csatornából álló halmaz pontosan akkor nem tartalmaz páratlan különbségeket, ha mindegyik csatornapár között páros a különbség, ami csak akkor fordul elő, ha mind a hat csatorna egyforma paritású. Az $\{1, 2, \dots, 13\}$ halmazban hét páratlan és hat páros csatorna van, így a csak páros vagy csak páratlan számokat tartalmazó hatos csoportok száma $\binom{7}{6} + \binom{6}{6} = 8$.

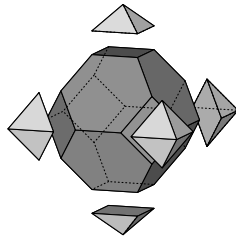
Mivel összesen $\binom{13}{6} = 1716$ -féle lehetőség van hat csatorna kiválasztására, a legalább egy páratlan különbséget tartalmazó hatos csoportok száma $1716 - 8 = 1708$.

27. Feladat Legyen N egy hétjegyű szám, amely minden számjeggyel osztható. Ha a számjegyei mind különbözőek és nem nullák, akkor találjátok meg N számjegyeinek összegét.

Eredmény. 36

Megoldás. Mivel N -nek hét különböző nemnulla számjegye van, legalább egy páros közülük, tehát N is páros. Ha az 5 szerepelne a számjegyei közt, akkor az öttel való oszthatóság szabálya miatt N -nek 0-ra kellene végződnie, ami ellentmond annak a kitételnek, hogy egyik számjegye sem nulla; tehát 5-öt kizárhatjuk. Ezáltal N hét számjegyet tartalmaz az $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ halmazból, tehát pontosan egy jegy marad ki a halmazból. A 9 nem maradhat ki: ha 9 nem szerepelne a számjegyek közt, a számjegyek halmaza $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ lenne, melyek összege 31, tehát N nem felelne meg a hárommal való oszthatóság szabályának, holott benne van a 3, ami ellenmondásos. Így 9-nek mindenképp N jegyei közt kell lennie, vagyis N -nek (és a jegyei összegének) oszthatónak kell lennie kilenccel, és mivel $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$, a 4-et kell kihagynunk, hogy a számjegyek összege 36 legyen, ami az egyetlen lehetséges többszöröse 9-nek. Egy példa a lehetséges N számok közül $N = 9867312$.

28. Feladat Egy szabályos oktaéder minden csúcsánál levágtunk egy darabot, így egy csonkított oktaédert kaptunk. A megmaradó poliédernek nyolc szabályos hatszög oldala van, és hat négyzet alakú oldala. Hányszorosa az új csonkított oktaéder térfogata az eredeti oktaéder térfogatának?



Megjegyzés: Egy szabályos oktaéder egy olyan test, aminek nyolc egybevágó szabályos háromszög oldala van.

Eredmény. $\frac{8}{9}$

Megoldás. Egy a élhosszúságú szabályos oktaéder térfogata ka^3 valamely k állandóra (nem nehéz bizonyítani, hogy $k = \sqrt{2}/3$, de erre nincs szükség a megoldáshoz). A csonkított oktaéderhez levágunk egy $a/3$ élhosszúságú féloktaédert (négyzet alapú piramist) az oktaéder mind a 6 csúcsából. A levágott térfogat megegyezik három, egyenként $\frac{a}{3}$ élhosszúságú oktaéderével. Tehát a teljes eltávolított térfogat $3 \cdot k \left(\frac{a}{3}\right)^3 = ka^3/9$. Következésképp a csonkított oktaéder térfogata az eredeti oktaéderéhez képest

$$\frac{1}{ka^3} \left(ka^3 - \frac{1}{9}ka^3 \right) = \frac{8}{9}.$$

29. Feladat Keressétek meg az alábbi egyenlet összes valós értékű megoldását

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Eredmény. $\pm 1, \pm 2$

Megoldás. Legyen $a = 2^x + 2^{-x}$. Ekkor $4^x + 4^{-x} = a^2 - 2$. Ezt az egyenletbe behelyettesítve megkapjuk, hogy

$$8(a^2 - 2) - 54a + 101 = 0,$$

amit

$$8a^2 - 54a + 85 = 0$$

alakra egyszerűsíthetünk. Ezt a másodfokú egyenletet megoldva arra jutunk, hogy

$$a_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85}}{2 \cdot 8} = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 2720}}{16} = \frac{54 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{54 \pm 14}{16},$$

melynek megoldásai $a_1 = \frac{17}{4}$ és $a_2 = \frac{5}{2}$.

Az első esetben

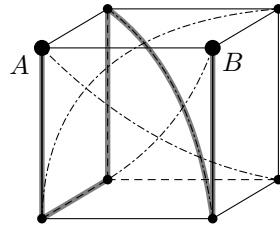
$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{17}{4},$$

amiből következik, hogy $2^x = 4$ vagy $2^x = \frac{1}{4}$, tehát $x = 2$ vagy $x = -2$. A második esetben

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2},$$

amiből következik, hogy $2^x = 2$ vagy $2^x = \frac{1}{2}$, vagyis $x = 1$ vagy $x = -1$. Tehát az eredeti egyenlet megoldásai $x = \pm 1, \pm 2$.

30. Feladat A kocka alakú *Kockvasút* bolygón nyolc város van, a kocka minden csúcsában egy. Vasútvonalak futnak a kocka minden élén, ilyen módon az élszomszédos városok össze vannak kötve, és ezen felül négy vasúti alagút is keresztül van fúrva a bolygón, amelyek az átlellenes ponton lévő városokat kötik össze. Egy turista az A nevű városból indul és el akar jutni a szomszédos B városba úgy, hogy pontosan 5 vasúti szakaszt használ, semelyik várost nem látogatja meg több mint egyszer, és megáll, amikor a céljához érkezik. A turista szeretne legalább egyszer kipróbálni egy vasúti alagutat az útja során. Hányféle útvonal lehetséges? Az ábrán látható egy példa egy ilyen útra.



Eredmény. 28

Megoldás. Színezzük be úgy a nyolc csúcson található városokat kétféle színnel, mintha egy 3D-s sakktábla lenne, hogy az összes vasúti szakasz (akár a kocka élén halad át, akár alagútban) az egyik színű városból a másik színűbe halad. Mivel a turista egyik színű városból indul és pontosan öt vasúti szakaszon áthaladva kell eljutnia a szomszédos, másik színű városba, az útvonalnak váltakozó színű városokat kell érintenie, és a két végpont között pontosan két-két köztes várost kell érintenie mindkét színből úgy, hogy minden érintett város különbözik. Továbbá a jelenlegi alagutas felállásban minden különböző színű várospár közvetlenül kapcsolódik egymáshoz egy vasúti szakasszal.

Először számoljuk meg az összes 5 szakasz hosszúságú útvonalat, figyelmen kívül hagyva az alagutas feltételt. Mindegyik útvonal felírható

$$A \rightarrow m_1 \rightarrow e_2 \rightarrow m_2 \rightarrow e_3 \rightarrow B$$

alakban, ahol m_1 és m_2 a B -vel megegyező színű különböző városok, míg e_2 és e_3 az A -val megegyező színű különböző városok. Összesen $3 \cdot 2$ módon tudjuk kiválasztani a B -vel megegyező színű másik három város közül az (m_1, m_2) rendezett párt, és $3 \cdot 2$ -féleképp tudjuk kiválasztani az A -val megegyező színű másik három város közül az (e_2, e_3) rendezett párt. Tehát összesen $(3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = 36$ -féle 5 szakasz hosszúságú útvonal létezik.

Vonjuk ki ebből azokat az útvonalakat, amelyek nem haladnak át alagúton, vagyis azokat, amik kizárólag éleken haladó vasúti szakaszokon haladnak. Az első lépés nem mehet közvetlenül B -be, úgyhogy csupán kétféle első lépés létezik. Ebből a kettőből egyenként pontosan 4 módon lehet befejezni csak élszakaszokkal az 5 szakasz hosszúságú útvonalat, vagyis összesen $2 \cdot 4 = 8$ csak éleken haladó útvonal létezik.

Tehát azoknak az 5 szakasz hosszúságú útvonalaknak a száma, amelyek legalább egy alagúton áthaladnak, $36 - 8 = 28$.

31. Feladat Egy választáson 2026 szavazó vett részt és négy jelölt volt: A , B , C és D . Az A jelölt szerepelt a legrosszabbul a választáson, hatodannyi szavazatot kapott, mint a B jelölt. A C jelölt pontosan 446-tal kevesebb szavazatot kapott, mint a másik három jelölt együttvéve. A D jelölt nyerte meg a választást, kevesebb, mint 800 szavazattal. Minden választó pontosan egy szavazatot ad le, egy jelöltre a négy közül. Hány szavazatot kapott az A jelölt?

Eredmény. 63

Megoldás. Legyen az egyenként kapott szavazatok száma a, b, c és d . Ezek nemnegatív egész számok, amelyekre teljesül, hogy

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= 2026, \\b &= 6a, \\c &= (a + b + d) - 446, \\a, b, c &< d < 800, \\a &< b, c, d.\end{aligned}$$

Ha hozzáadjuk c -t a harmadik egyenlőtlenség mindkét oldalához, megkapjuk, hogy

$$2c = a + b + c + d - 446 = 2026 - 446 = 1580.$$

Tehát $c = 790$, amiből következik, hogy

$$a + b + d = 2026 - 790 = 1236.$$

Ha behelyettesítjük b -t, megkapjuk, hogy

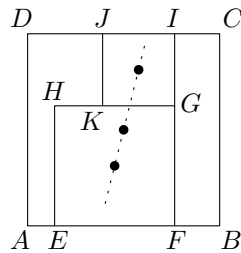
$$a + 6a + d = 1236, \quad \text{tehát} \quad d = 1236 - 7a.$$

Mivel $d < 800$, továbbá $d > c = 790$, tudjuk, hogy $791 \leq d \leq 799$. Vagyis

$$791 \leq 1236 - 7a \leq 799, \quad \text{azaz} \quad 437 \leq 7a \leq 445.$$

A megadott intervallumban az egyetlen 7-tel osztható szám $441 = 7 \cdot 63$. Ezáltal a megoldás $a = 63$, amivel kiszámolhatjuk, hogy $b = 378$, $c = 790$, $d = 795$, és a feladatban megadott feltételek mind teljesülnek is.

32. Feladat Az $ABCD$, $EFGH$ és $KGIJ$ négyzetek az ábrán látható módon helyezkednek el: Az E és F pontok az AB szakaszon vannak, az I és J pontok pedig a CD szakaszon fekszenek. A K pont a GH szakaszon van. Továbbá a három négyzet középpontjai egy egyenesre esnek. Ha tudjuk, hogy $AD = 7$ és $HK = 1$, határozzátok meg az FB szakasz hosszát.



Eredmény. 12/7

Megoldás. Legyen a az $EFGH$ négyzet oldalhossza és b a $KGIJ$ négyzeté. A feladat szövegéből következik, hogy $7 = AD = JK + HE = a + b$ és $1 = HK = HG - KG = a - b$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $a = 4$ és $b = 3$.

A három négyzet középpontján áthaladó egyenes mindhárom négyzetet két egyforma részre osztja, tehát az $FBCI$ téglalap területét a következőképp számolhatjuk ki:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = ab.$$

Az $FBCI$ téglalap területét ugyancsak megadja az $FB \cdot (a+b)$ szorzat, és ebből a két egyenlőségéből megkapjuk, hogy $FB = \frac{ab}{a+b} = \frac{12}{7}$.

33. Feladat Egy táblára néhány számot írtunk, az egyik ezek közül 2026. Ha töröljük a 2026-ot, akkor a számok számtani közepe 6-tal csökken. Ha ehelyett még egy 2026-ot írunk fel a táblára, akkor a számok számtani közepe 4-gyel nő. Mennyi az eredetileg a táblán szereplő számok összege?

Eredmény. 10010

Megoldás. Legyen a kezdeti n darab szám összege S . Ekkor

$$\frac{S - 2026}{n - 1} = \frac{S}{n} - 6,$$

$$\frac{S + 2026}{n + 1} = \frac{S}{n} + 4.$$

Ezeket az egyenleteket a következőképpen egyszerűsíthetjük:

$$S = 2032n - 6n^2,$$

$$S = 2022n + 4n^2.$$

Ha kivonjuk az egyik egyenletet a másiktól és tudjuk, hogy n nem lehet nulla, akkor

$$S - S = (2032 - 2022)n + (-6 + 4)n^2 \Rightarrow 2n^2 = 10n \Rightarrow n = 5.$$

Tehát $S = 2032n - 6n^2 = 10010$.

34. Feladat Egy bolha egy körvonal mentén ugrándozik. Az első szökkenéséhez tartozó középponti szög 1° , azaz az ugrás kezdő- és végpontjához tartozó sugarak által bezárt szög 1° . Minden ezt követő ugrás azonos irányba történik, és középponti szögük 2° , majd 3° , és így tovább. Hányadik ugrásával ér vissza a bolha először a kiindulópontjába?

Eredmény. 80

Megoldás. n ugrás után a bolha

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

fokot járt be. A legkisebb olyan n -t keressük, amire ez a szám 360 többszöröse; magyarul azt szeretnénk, hogy $n(n + 1)$ többszöröse legyen $720 = 16 \cdot 9 \cdot 5$ -nek. A szorzat mindhárom tagjának n vagy $n + 1$ osztójának kell lennie, hiszen bármelyik két szomszédos szám egymás relatív prímje. Nézzük meg a legnagyobb tag, 16 többszöröseit – ekkor az n -re lehetséges számok: 15, 16, 31, 32, 47, 48, 63, 64, 79 és végül 80, ami maga osztható 5-tel, és $n + 1 = 81$ osztható 9-cel. Következésképp az ugrások keresett száma 80.

35. Feladat A Naboia Királyságban három mágikus szövetség él: a Tűz Szövetsége, a Víz Szövetsége és a Szél Szövetsége. Minden szövetség két varázslómesterből és két varázslótanoncból áll. Hogy megvédjék a királyságot, össze kell állítaniuk 4 harcos párt, úgy, hogy minden párban legyen egy mester és egy tanonc, de nem lehetnek ugyanannak a szövetségnek a tagjai. Továbbá minden szövetségnek kell küldenie legalább egy varázslómestert és egy varázslótanoncot a párokba. Hányféleképpen állíthatják össze a párokat?

Megjegyzés: Minden mester és tanonc különálló személyiség, ezért fontos, hogy melyik mágus szerepel az egyes párokban, de a négy pár sorrendje irreleváns.

Eredmény. 768

Megoldás. Mivel négy tanoncot kell kiválasztaniuk és mindegyik szövetségnek legalább egy tanoncot kell küldenie, a tanoncnak a szövetségek közti eloszlása $(2, 1, 1)$ valamilyen sorrendben. Hasonlóképp négy mestert kell kiválasztaniuk és mindegyik szövetségnek legalább egy mestert kell küldenie, így a mesterek eloszlása szintén $(2, 1, 1)$.

Két eset lehetséges.

Az *első esetben* ugyanaz a szövetség küld két tanoncot és két mestert; legyen ez a szövetség X . Három különböző lehetőség van X -re, és a maradék két szövetségből $2 \cdot 2 = 4$ módon választhatják ki a tanoncokat, és a mestereket is ugyanúgy $2 \cdot 2 = 4$ módon választhatják ki.

Minden kiválasztásnál az X szövetségből jövő tanoncokat a másik két szövetségből jövő mesterekkel kell összepárosítani, amit 2-féleképp tehetünk meg. Ha ezt a párosítást véglegesítjük, a maradék két tanoncot az X szövetségből jövő mesterekkel kell összepárosítani, amit ugyancsak 2-féleképp tehetünk meg. Ezáltal ebben az esetben $2 \cdot 2 = 4$ lehetséges mód van a mesterek és tanoncok összepárosítására. Tehát ez az eset $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ -féle párosítást tesz lehetővé.

A *második esetben* az egyik szövetség (X) küld két tanoncot, míg egy másik (Y) küld két mestert. Három lehetőség van X -re és a választás után két lehetőség van Y -ra. A maradék két tanoncot a másik két szövetségből választhatjuk ki $2 \cdot 2 = 4$ módon, és ugyanígy tudjuk kiválasztani a fennmaradó két mestert. Bármelyik kiválasztáskor összesen $3 \cdot 2 = 6$ módon tudjuk összepárosítani a mester-tanítvány párokat: a két X -ből küldött tanítvány párosulhat a három lehetséges mester bármelyikével, és ennek a két párosnak az összeállítása után már csak egyféleképp alakulhatnak ki a fennmaradó párok. Tehát ebben az esetben $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ -féle párosítás lehetséges.

A két esetet összeadva $192 + 576 = 768$ lehetséges harcos felállást kapunk.

36. Feladat Legyenek x és y nemnulla valós számok, amelyekre $x + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$ és $y + \frac{1}{x} = 3\sqrt[3]{4}$. Határozzátok meg $x^2y + \frac{1}{xy^2}$ értékét.

Eredmény. $3\sqrt[3]{2}$

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = \left(xy + \frac{1}{xy}\right) \left(x + \frac{1}{y}\right) - x - \frac{1}{y}.$$

Továbbá

$$xy + \frac{1}{xy} = \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Tehát

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

37. Feladat Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög, amelyre $\angle ADB = 48^\circ$ és $\angle BDC = 56^\circ$. Az X pontot az ABC háromszög belsejében úgy választottuk, hogy $\angle XCB = 24^\circ$, és az AX félegyenes felezi a BAC szöget. Határozzátok meg, hogy hány fokos a CBX szög.

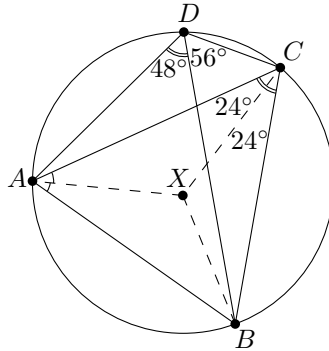
Megjegyzés: egy húrnégyszög egy olyan négyszög, amelynek a csúcsai egy körön fekszenek.

Eredmény. 38°

Megoldás. Az ADB és ACB szögek egyformák, mivel ugyanahhoz a szakaszhoz tartozó kerületi szögek. Ezért

$$\angle ACX = \angle ACB - \angle XCB = \angle ADB - \angle XCB = 48^\circ - 24^\circ = 24^\circ = \angle XCB.$$

Tehát CX az ACB szögfelezője, és ugyanakkor X az ABC háromszög belső szögfelezőjének metszéspontja (vagyis az ABC háromszög beírt körének középpontja).



Számoljuk ki a keresett szöget:

$$\angle CBX = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180^\circ - \angle BAC - \angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - 56^\circ - 48^\circ}{2} = 38^\circ,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\angle BAC = \angle BDC$, ami (a legelső szögegyenlőség analógiájára) abból következik, hogy a két szög ugyanannak a szakasznak a kerületi szöge.

38. Feladat A *Nabioncula simplex* primitív agya bal és jobb féltékére oszlik, melyek kétféle sejtből állnak: neuronokból és gliasejtekből. Egyetlen sejt sem kapcsolódik másik sejthez ugyanabban a féltékében, de a különböző féltékékben lévő minden sejt pár között pontosan egy kétirányú kapcsolat van. Egy *Nabioncula simplex*-ben 168 neuron-neuron kapcsolat, 48 glia-glia kapcsolat és 191 neuron-glia kapcsolat található. Hány neuront tartalmaz a példány agya?

Eredmény. 29

Megoldás. Legyen n_1 és g_1 a neuronok és gliasejtek száma az egyik féltéken, míg n_2 és g_2 a másikon. Tudjuk, hogy $n_1n_2 = 168$, $g_1g_2 = 48$ és $n_1g_2 + n_2g_1 = 191$. Ezért

$$(n_1 + g_1)(n_2 + g_2) = 168 + 48 + 191 = 407 = 11 \cdot 37,$$

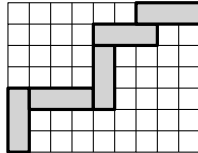
úgyhogy mivel mindkét féltéken mindkét sejtípusból legalább egy található, az általánosság elvesztése nélkül kimondhatjuk, hogy $n_1 + g_1 = 11$. Hasonlóképp

$$(n_1 - g_1)(n_2 - g_2) = 168 + 48 - 191 = 25,$$

ami azzal együtt, hogy n_1 osztója 168-nak és g_1 osztója 48-nak, arra vezet, hogy $n_1 = 8$, $g_1 = 3$, vagyis $n_2 = 168/8 = 21$ és a neuronok száma összesen $n_1 + n_2 = 29$.

Alternatív megoldás. Használjuk ugyanazokat az elnevezéseket, mint az előző megoldásban. Az $n_1 g_2 + n_2 g_1$ szám páratlan, úgyhogy az összeadás egyik tagja páratlan; az általánosság elvesztése nélkül feltételezzük, hogy $n_1 g_2$ páratlan. Ebből következik, hogy n_1 és g_2 is páratlan. Ugyanakkor mivel $168 = 2^3 \cdot 21$ és $48 = 2^4 \cdot 3$, n_2 biztosan osztható 2^3 -al és g_1 osztható 2^4 -nel. Ezáltal $n_2 g_1$ többszöröse $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$ -nak, és mivel kisebb, mint 191, biztosan egyenlő 128-cal, valamint $n_2 = 2^3 = 8$ (és $g_1 = 2^4$). Következésképp $n_1 = 168/8 = 21$, és a válasz könnyen megkapható.

39. Feladat Ágnesnek van öt egyforma egyenes (avagy "I-alakú") triminója, és egy 7×9 -es téglalapban szeretne egy összefüggő utat építeni, ami összeköti a bal alsó sarkot és a jobb felső sarkot. Minden triminó egy középső négyzetből és két szélső négyzetből áll, és az utat úgy kell kialakítani, hogy bármely két egymást követő triminó pontosan egy közös rácsszakaszon érintkezzen, és ez a közös szakasz mindkét triminó esetén az egyik szélső négyzet egyik oldala. Az alábbi ábrán egy ilyen út látható. Hány különböző módon alakíthat ki Ágnes egy ilyen utat?



Eredmény. 75

Megoldás. Mivel Ágnesnek csak öt triminója van, az útvonal egyszer sem haladhat lefelé vagy balra: bármely visszafelé haladó lépéssel elvesztegetnénk a cél felé megtehető távot, amit öt triminóval nem tudunk behozni. Ezért ahogy az útvonal halad, a végpontja mindig fölfelé és/vagy jobbra halad. Az útvonalakat úgy számoljuk, hogy megtöltjük a 7×9 -es táblát: mindegyik cellába beírjuk azoknak a triminó-útvonalaknak a darabszámát, amiknek a jelenlegi végpontja (az utolsó triminó végső szabadon álló négyzete) abban az adott cellában van.

Miután lehelyezzük az első triminót a bal alsó sarokba, a végpontja pontosan két cellányira helyezkedik el a saroktól: vagy kettővel jobbra (ha az első triminó vízszintes), vagy kettővel följebb (ha az első triminó függőleges). Így 1-es értéket írunk a $(0, 2)$ és a $(2, 0)$ cellákba (a koordinátákat a bal alsó sarokból számoljuk).

Töltsük ki a tábla többi részét bal alulról haladva a jobb felső sarok felé. Ahhoz, hogy meghatározzuk egy (x, y) cellába írt értéket, vegyük sorra, hogy milyen módokon végződhet ott egy triminó. Egy (x, y) -ban végződő triminó lehet függőleges vagy vízszintes, és bármelyik esetben a másik végpontjával kell csatlakoznia az előző triminóhoz. Ez négyféle megelőző végpontot tesz lehetővé: $(x, y - 3)$ -at és $(x - 1, y - 2)$ -t a függőleges esetben, valamint $(x - 3, y)$ -t és $(x - 2, y - 1)$ -et a vízszintes esetben. Ezek mindegyikéhez tartozik egy érvényes mód, amivel egy meglévő útvonalat egy triminóval meghosszabbíthatunk. Tehát az (x, y) -ba írt érték megegyezik az

$$(x - 3, y), (x - 2, y - 1), (x - 1, y - 2), (x, y - 3),$$

cellákba már beírt értékek összegével, ahol bármely a táblán kívül eső cella értéke 0.

0	0	4	0	0	22	0	0	75
1	0	0	6	0	0	22	0	0
0	1	0	0	6	0	0	18	0
0	0	2	0	0	6	0	0	13
1	0	0	2	0	0	4	0	0
0	0	0	0	1	0	0	2	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1

Miután kitöltjük az összes cellát ezen a módon, a jobb felső sarokba beírt 75 pontosan megfelel a bal alsó sarokból a jobb felső sarokig lehelyezhető érvényes triminó-útvonalak számának.

Alternatív megoldás. Helyezzük le az öt triminót a bal alsó $(0, 0)$ cellából indulva a következő „csontvázszerű” módon: az egymást követő triminók csak sarkosan találkoznak (végpont-sarok találkozik végpont-sarokkal). Az összes triminó vagy $(+1, +3)$ -mal viszi előrébb az útvonal végpontját („fölfelé” triminó) vagy $(+3, +1)$ -gyel („jobbra” triminó). Öt triminó után az útvonal végpontja (x, y) , ahol $x + y = 20$. Ha F a fölfelé triminók száma és J a jobbra triminóké, akkor $F + J = 5$ és $(x, y) = (F + 3J, 3F + J)$.

Ahhoz, hogy a sarkosan találkozó láncot érvényes útvonallá tegyük, ahol az egymást követő triminók élükkel találkoznak, „megjavítjuk” a négy találkozási pontot az egymás utáni triminók között. Legyen az i -edik találkozási pont az i és $i + 1$ triminók közti találkozás; mindegyik találkozási pontnál kétféle mozgatás közül választunk: vagy eggyel

balra toljuk el az egész $i + 1, i + 2, \dots, 5$ triminó-sort, vagy eggyel lefelé. Ezzel biztosítjuk, hogy az i és $i + 1$ triminók egy egész élben találkoznak és nem csak sarkosan.

Legyen b az összes olyan találkozási pont száma, ahol balra toltuk a láncot, és legyen ℓ az összes olyan találkozási pont száma, ahol lefelé toltuk a láncot. Mivel pontosan 4 találkozási pont van, $b + \ell = 4$. Mind a négy eltolást követően a csontvázszerű lánc (x, y) végpontja átkerül $(x - b, y - \ell)$ -be. Ahhoz, hogy érvényes útvonalunk legyen $(0, 0)$ -ból a jobb felső $(9, 7)$ cellába, erre a kialakult végpontra teljesülnie kell az $(x - b, y - \ell) = (9, 7)$ egyenlőségnek.

Most nézzük meg mind a hat (F, J) esetet:

- $(5, 0)$: $(x, y) = (5, 15)$ nem juthat el $(9, 7)$ -be négy bal/lefele irányú eltolással.
- $(4, 1)$: $(x, y) = (7, 13)$ ugyancsak nem vezet érvényes megoldáshoz.
- $(3, 2)$: $(x, y) = (9, 11)$ -ben szükségszerűen $b = 0$, $\ell = 4$ (minden eltolást lefelé végzünk el). Összesen $\binom{5}{3} = 10$ csontvázszerű lánc van és csak egyféle javítási módszer, tehát 10 érvényes útvonal.
- $(2, 3)$: $(x, y) = (11, 9)$ -ben szükségszerűen $b = 2$, $\ell = 2$. Itt is $\binom{5}{2} = 10$ csontvázszerű láncunk van és $\binom{4}{2} = 6$ módon tudjuk kiválasztani a balra történő eltolásokat (a többi eltolás lefelé történik), ezáltal $10 \cdot 6 = 60$ érvényes útvonalat alkotva.
- $(1, 4)$: $(x, y) = (13, 7)$ -ben szükségszerűen $b = 4$, $\ell = 0$ (minden eltolást balra végzünk el). Ebben az esetben $\binom{5}{1} = 5$ csontvázszerű lánc van és csak egyféle javítási módszer, tehát 5 érvényes útvonal.
- $(0, 5)$: $(x, y) = (15, 5)$ sem vezet érvényes megoldáshoz.

Tehát az érvényes útvonalak száma összesen $10 + 60 + 5 = 75$.

40. Feladat Legyenek a, b, c, d valós számok, amelyekre $a + b + c + d = 2$ és $\frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$. Adjátok meg a

$$\frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}$$

kifejezés értékét.

Eredmény. 507

Megoldás. Legyen $X = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$ és $Y = \frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}$.

Mivel $a + 2b$ szerepel a nevezőben, megpróbálhatunk egyszerűsíteni az $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$ nevezetes azonosság számlálóba hozásával, és hasonlóképp a többi tört esetében. Ekkor

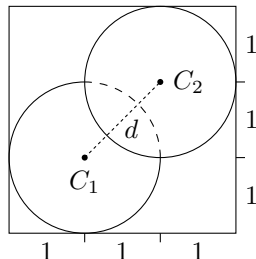
$$X - 4Y = \frac{a^2 - 4b^2}{a + 2b} + \frac{b^2 - 4c^2}{b + 2c} + \frac{c^2 - 4d^2}{c + 2d} + \frac{d^2 - 4a^2}{d + 2a} = (a - 2b) + (b - 2c) + (c - 2d) + (d - 2a) = -(a + b + c + d) = -2.$$

Ebből megkapjuk, hogy $X - 4Y = -2$, tehát $Y = \frac{1}{4}(X + 2) = \frac{2026+2}{4} = 507$.

41. Feladat Egy téglatest alakú doboz alapja egy 3 oldalhosszúságú négyzet, a magassága pedig a . Ebben a dobozban található két pingponglabda, mindkettőnek 1 a sugara. Az első labda érinti a doboz két szomszédos függőleges lapját, a doboz alját és a másik labdát. A másik labda érinti a doboz másik két függőleges lapját, a doboz tetejét és az első labdát. Határozzátok meg a doboz a magasságát.

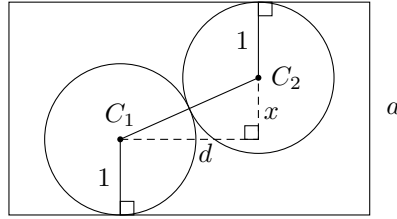
Eredmény. $2 + \sqrt{2}$

Megoldás. Legyen C_1 és C_2 a két labda középpontja, és legyen d a két középpont vízszintes távolsága, vagyis a C_1C_2 szakasznak a doboz tetejére vagy aljára rávetített hossza. Az elrendezést felülről nézve kapunk egy 3 egység oldalhosszúságú négyzetet, ahol C_1 két szomszédos oldaltól 1 távolságra van, míg C_2 a másik két szomszédos oldaltól van 1 távolságra.



Tehát ebből a felső nézetből a C_1 és C_2 vetületei egy 1 oldalhosszúságú négyzet átellenes csúsaiban vannak, ezáltal $d = \sqrt{2}$.

Ezután vizsgáljuk meg a C_1 és C_2 pontokon áthaladó függőleges keresztmetszeti nézetet. Ez a sík a dobozból egy olyan téglalapot metsz, aminek a magassága a keresett a érték, és a C_1C_2 szakasz erre a síkra esik. Legyen x a C_1 és C_2 pontok közti függőleges távolság.



Mivel a két labda egymást érinti és mindkettő 1 egység sugarú, a középpontjuk közötti távolság $C_1C_2 = 2$. A d vízszintes befogójú és x függőleges befogójú derékszögű háromszögben tudjuk, hogy $C_1C_2^2 = d^2 + x^2$, tehát $x = \sqrt{2^2 - d^2} = \sqrt{2}$.

Végül pedig, mivel az egyik labda a doboz alsó oldalát érinti, a másik labda pedig a tetejét, a doboz magasságát megkapjuk az egyik labda sugarának, a két középpont közti függőleges távolságnak és a másik labda sugarának összegéből: $a = 1 + x + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

42. Feladat Hányféleképpen lehet egy 3×3 -as táblázatot kitölteni a $0, 1, \dots, 9$ számjegyekkel úgy, hogy minden cellában pontosan egy szám legyen, egyetlen szám se forduljon elő többször, és a három sor és három oszlop által alkotott hat összeg vagy mind páros, vagy mind páratlan legyen? Alább látható egy példa egy helyes kitöltésre, amelyben minden sor és oszlop összege páros:

1	2	3
5	4	7
6	0	8

Eredmény. 259200

Megoldás. Mivel $0 + 1 + \dots + 9 = 45$ páratlan, egy páratlan számot kihagyva páros összeget kapunk az egész táblázatban, és ezáltal az összes sorban és oszlopban páros összegnek kell lennie. Ezt 4 páratlan és 5 páros számmal csak úgy tudjuk megoldani, ha pontosan egy sor és egy oszlop (5 cella) tartalmazza az összes páros számot. Ezáltal megszámlálhatjuk az összes ilyen táblázat-összeállítást, ha kiválasztjuk a kihagyni kívánt páratlan számjegyet (5 lehetőség), majd kiválasztjuk a csak párosokat tartalmazó sort és oszlopot ($3 \cdot 3 = 9$ lehetőség), ezután tetszőleges sorrendben elhelyezzük a páratlan számokat ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetőség), végül pedig bármilyen sorrendben elhelyezzük a páros számokat ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ lehetőség).

Hasonlóképp, ha egy páros számot hagyunk ki, akkor mindhárom sort és oszlopot összeadva páratlan számot kapunk, ezáltal az egyes sorok és oszlopok összegének is páratlannak kell lennie. Egyféleképpen tudunk elhelyezni öt páratlan számot egy 3×3 -as táblázatba úgy, hogy minden sorban és oszlopban vagy egy vagy három van belőlük: pontosan egy sorba és egy oszlopba rendezzük őket. A táblázat-összeállítások számát az előző esettel analóg módon számoljuk ki, a páros és páratlan számjegyek szerepeinek megfordításával. Tehát a keresett szám $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 120 = 259200$.

43. Feladat Az a, b, c, d páronként különböző pozitív egész számok összege 20000. Keressétek meg $\text{lkkt}(a, b, c, d)$ lehető legkisebb értékét, ahol lkkt a legkisebb közös többszöröst jelenti.

Eredmény. 9600

Megoldás. Legyen $L = \text{lkkt}(a, b, c, d)$ és legyen $a > b > c > d$. Ezek a számok osztói L -nek, vagyis $L = aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1$ valamely a_1, b_1, c_1, d_1 pozitív egész számokra. Egyértelmű, hogy $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$, ezáltal $a_1 \geq 1, b_1 \geq 2, c_1 \geq 3, d_1 \geq 4$. Ez azt jelenti, hogy

$$a \leq L, \quad b \leq \frac{L}{2}, \quad c \leq \frac{L}{3}, \quad d \leq \frac{L}{4}.$$

Következésképp

$$20000 = a + b + c + d \leq L \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25L}{12},$$

vagyis $L \geq 12 \cdot 20000/25 = 9600$.

Annak bizonyításához, hogy $L = 9600$ lehetséges, elég megadnunk, hogy $a = 9600, b = \frac{9600}{2}, c = \frac{9600}{3}$ és $d = \frac{9600}{4}$, amelyek mind egész számok. Ennek a négy számnak a összege $9600 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 20000$. Tehát az L keresett minimális értéke 9600.

44. Feladat Legyen $a_1, a_2, a_3, \dots$ egy sorozat, ahol $a_n = \frac{n^2}{1,001^n}$. Találjátok meg, hogy milyen n esetén veszi fel a sorozat a maximumát.

Eredmény. 2001

Megoldás. Vegyük észre, hogy $a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)^2}{1,001n^2} = \frac{1000(n+1)^2}{1001n^2}$. Ekkor $a_{n+1} > a_n$ vagy $a_{n+1}/a_n > 1$ esetén megkapjuk, hogy $2000n + 1000 > n^2$, ezáltal pedig $n(n - 2000) < 1000$. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a kitétel $n \leq 2000$ esetén érvényes, hiszen az egyenlőtlenség bal oldala nem pozitív, míg $n \geq 2001$ -re ellentmondásra vezet. Emiatt a sorozat szigorúan monoton növekszik 2001-ig, és onnantól hasonlóképp szigorúan monoton csökken, vagyis $a_1 < a_2 < \dots < a_{2000} < a_{2001} > a_{2002} > \dots$. Tehát a sorozat maximuma a_{2001} -nél van.

45. Feladat Öt barát ülőhelyeket keres egy előadáson. Mind egy sorban akarnak ülni, ahol az ülések így helyezkednek el:

|□ □ □ □ □ □ _ □ □ □ □ □ □ _ □ □ □ □ □ □ _ □ □ □ □ □ □|

Azaz egy fal mellett négy blokkban hat-hat szék, közöttük 3 folyosó, majd megint fal. A barátok félénkek, ezért úgy akarnak 5 ülést kiválasztani, hogy el tudják hagyni ülőhelyeiket úgy, hogy ne kelljen egy idegent sem megkérniük, hogy álljon fel, még akkor se, ha minden más ülés foglalt. Hány ilyen öt ülésből álló halmaz létezik?

Eredmény. 252

Megoldás. Az a kitétel, hogy „el tudják hagyni ülőhelyeiket úgy, hogy ne kelljen egy idegent sem megkérniük, hogy álljon fel” azt jelenti, hogy a kiválasztott ülőhelyeknek a folyosókkal szomszédos összefüggő csoportokat kell alkotniuk.

Tegyük sorba az öt barátot. Három csoportra akarjuk felosztani őket (amelyek közül lehet, hogy lesz üres) a három folyosó köré. Ehhez elhelyezünk $2 \cdot 3 - 1 = 5$ határolót:

- a *páratlan* határolók magukat a folyosókat jelölik,
- a *páros* határolók az üres üléseknek a falakkal nem szomszédos csoportjait jelölik (ahol van legalább egy üres ülés).

Azt állítjuk, hogy ezek az elrendezések egy az egyben lefedik az összes érvényes ülőhelyválasztást. Vegyünk egy ilyen elrendezést, például a

_ □ B _ □ B B _ B B,

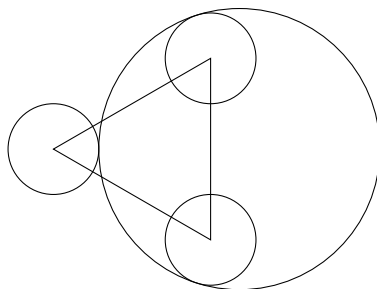
sort, ahol a B egy barátot jelöl, az $_$ egy folyosót és az $\square$ egy üres ülécsoportot. Balról haladva így olvassuk ki: az első blokkból nem választottak ülőhelyet; a második blokkban a második folyosó mellett egy ülést választottak; a harmadik blokkban a jobb két ülést választották ki; a negyedik blokkból pedig a bal oldali két ülést választották ki. Másrészt, az összes érvényes ülőhely-elrendezést egyértelműen tudjuk kódolni. Ha a szomszédos folyosók közti csoportok összeérnének, vagyis ha a barátok egy teljes blokkot elfoglalnának, akkor többféle módon tudnánk elhelyezni a blokkba tartozó határolót, de mivel öt barát van és hat ülésből áll egy blokk, a határoló elhelyezkedése mindig egyedi.

Öt barát (akiket nem különböztetünk meg, hiszen nem számít, hogy melyik barát hová ül a kiválasztott ülések közül) és öt határoló (amik jelentés szerint kétféleké, de a fajtájukat egyértelműen meghatározza a sorrendjük, tehát a számítás során nem különböztetjük meg őket) elrendezéseit számoljuk. Tehát 10 elhelyezkedésből 5-öt kell kiválasztanunk, ezáltal az ülőhelyek kiválasztására

$$\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

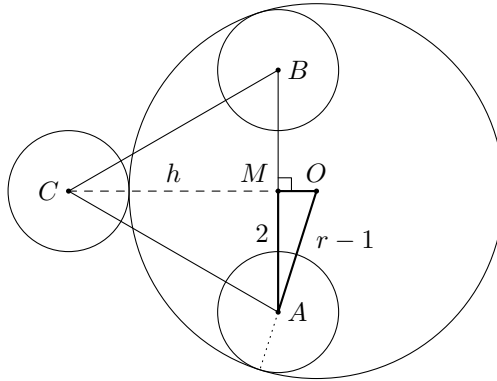
lehetőség van.

46. Feladat Vegyünk egy 4 oldalhosszúságú szabályos háromszöget. A háromszög minden csúcsa köré rajzolunk egy 1 sugarú kört. Határozzátok meg annak a nagyobb körnek a sugarát, amit belülről érint a kis körök közül kettő, és kívülről érinti a harmadik kör.



Eredmény. $\frac{3\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Megoldás. Nevezzük ABC -nek a szabályos háromszöget és a nagyobb kör középpontját O -nak, sugarát r -nek. Tegyük fel, hogy az A és B csúcsok köré rajzolt körök érintik belülről a nagyobb kört, a C köré rajzolt kör pedig kívülről. A háromszög magassága $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$. Mivel $OA = OB$, az O pont az AB szakasz felezőmerőlegesén található. Legyen M az AB oldal felezőpontja, ezáltal $AM = 2$ és $CM = h$.



Az érintőkre vonatkozó feltételek alapján $OA = OB = r - 1$ és $OC = r + 1$. Mivel O a CM egyenesen van, tudjuk, hogy

$$OM = OC - CM = r + 1 - h.$$

(Ezzel feltételezzük, hogy O az ABC háromszögön kívül helyezkedik el. Ha O a háromszögön belülré esne, akkor $OM = OC - CM$ helyett $OM = CM - OC$ lenne érvényben; esettől függetlenül ezek után csak OM^2 -tel dolgozunk, ami nem változik.)

Az OMA derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tételből következik, hogy

$$OA^2 = OM^2 + AM^2 \quad \text{vagy} \quad (r - 1)^2 = (r + 1 - h)^2 + 2^2.$$

Kifejtve és egyszerűsítve megkapjuk, hogy

$$r = \frac{h^2 - 2h + 4}{2(h - 2)}.$$

Behelyettesítve $h = 2\sqrt{3}$ -at megkapjuk a keresett megoldást: $r = \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2}$.

47. Feladat Van két szoba, az egyik tele van törpékkel, akik mind 1,2 m magasak, a másik tele van küklopszokkal, akik mind 4 m magasak. Miután 35 küklopsz és 24 törpe átment a saját szobájából a másikba, az átlagmagasság mindkét szobában ugyanannyi lett. Mennyi összesen a lények minimális száma, amely mellett ez előfordulhatott?

Eredmény. 117

Megoldás. Legyen t és k az összes törpe és küklopsz száma. A csere után az első szobában $t - 24$ törpe és 35 küklopsz van, a második szobában pedig 24 törpe és $k - 35$ küklopsz. Az egyszerűség kedvéért legyen $t_1 = t - 24$, $k_1 = 35$, $t_2 = 24$ és $k_2 = k - 35$, és jelöljük a törpék és küklopszok magasságát m_t -vel és m_k -val. Az átlagmagasság a csere után

$$\frac{t_1 m_t + k_1 m_k}{t_1 + k_1} = \frac{t_2 m_t + k_2 m_k}{t_2 + k_2}.$$

Az egyenletet egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$(m_k - m_t)(k_1 t_2 - t_1 k_2) = 0.$$

Mivel m_k különbözik m_t -től, következik, hogy $k_1 t_2 - t_1 k_2 = 0$ vagy $\frac{k_1}{t_1} = \frac{k_2}{t_2}$. Ez a következtetés logikus: ahhoz, hogy a két szobában ugyanakkora legyen az átlagmagasság, a törpék és küklopszok aránya is egyforma; a tényleges magasságok nem számítanak. A k_1 és t_2 ismert értékeit használva arra jutunk, hogy

$$t_1 k_2 = k_1 t_2 = 35 \cdot 24 = 840.$$

Az a célunk, hogy a lények számának $t + k$ összegét a lehető legkisebb értékre hozzuk, amit a $t_1 + k_2$ összeg minimalizálásával érhetünk el, hiszen $t + k = t_1 + k_2 + 24 + 35$. Két pozitív egész szám, melyek szorzata állandó, akkor adja a legkisebb összeget, ha a két szám a lehető legközelebb van egymáshoz; ez következik például a $(t_1 + k_2)^2 = (t_1 - k_2)^2 + 4t_1 k_2$ egyenlőségből. Tehát a 840 két egész tényezőre való felbontását keressük, melyek a lehető legközelebb vannak egymáshoz. Könnyen megtaláljuk az ideális választást, ami $840 = 28 \cdot 30$.

Ezáltal t_1 és k_2 értéke 28 és 30 (bármilyen sorrendben), és a lények lehető legkisebb létszáma $t + k = 28 + 30 + 24 + 35 = 117$.

48. Feladat Hat kalóz belép egy kocsmába, majd egy kaotikus keveredés után véletlenszerűen helyet foglalnak egy kerek asztal körül. Mindegyiküknek van egy veleszületett vadsági szintje 1-től 6-ig (mindegyikük szintje különböző), amely minden párbajt eldönt: a magasabb szintű kalóz mindig győz. Annak eldöntésére, hogy ki vezesse a legénységet, egy párbajrituálét követnek: minden körben a még játékban lévő kalózok közül véletlenszerűen kiválasztanak egyet, aki kihívja a tőle az óramutató járásával megegyező irányban legközelebb ülő, még játékban lévő kalózt (az üres székeket kihagyva). A gyengébb kalóz kiesik, az erősebb a helyén marad. Öt kör után csak egy kalóz marad. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az utolsó párbaj a két legerősebb kalóz, a 6-os és az 5-ös szintű között zajlik?

Eredmény. 7/15

Megoldás. Véletlenszerűen ültessük az asztal köré a hat kalózt és foglalkozzunk csak az 5-ös és 6-os szintű kalózzal (hiszen a 6-os semmiképp nem tud kiesni). Bármely pillanatban felsorolhatjuk $5, A_1, \dots, A_a, 6, B_1, \dots, B_b$ módon a még játékban lévő kalózokat, ahol a kizárólag az óramutató járása szerint nézve (5-től számolva) az 5-ös és a 6-os szintű kalózok közötti még játékban lévő kalózok száma, b pedig kizárólag a 6-ostól az 5-ösig számolt többi játékban lévő kalóz száma a másik köríven. Legyen $f(a, b)$ annak a valószínűsége, hogy az utolsó párbaj az 5-ös és 6-os kalóz között zajlik ebben az elrendezésben. Egyértelmű, hogy ez a valószínűség csak az a és b értékektől függ, nem pedig a konkrét A_i és B_i kalózok személyétől és szintjétől. Valóban minden A_i és B_i kalóz szintje legfeljebb 4, tehát bármely olyan párbajban, amelyben részt vesz az 5-ös vagy 6-os kalóz, kiesik az alacsonyabb szintű kalóz attól függetlenül, hogy melyik A_i vagy B_i volt az, míg az A_i -k vagy B_i -k közötti párbajok csak az adott blokknak a méretét csökkentik eggyel.

Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor 5 és 6 szomszédosak, miközben $n = a + b + 2$ kalóz van még játékban. Ebben az esetben minden körben pontosan egy kihívóválasztás (5 vagy 6 attól függően, hogy ki ül a jobb oldalon) eredményezi azonnal az 5 és 6 közötti párbajt, kiejtve 5-öt; minden más választás valaki mást ejt ki. Tehát annak a valószínűsége, hogy 5 játékban marad az utolsó párbajig, kifejezhető a következő teleszkopikus szorzattal:

$$f(a, 0) = f(0, b) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{2}{n} = \frac{2}{a+b+2}.$$

Most feltételezzük, hogy $a, b \geq 1$, és maradjon $n = a + b + 2$ a még játékban lévő kalózok száma. Vegyük az 5-tel kezdődő, óramutató járásával megegyező irányba haladó kalózok csoportját, a közvetlenül 6 előtti kalózzal bezárólag; ebben a csoportban pontosan $a+1$ kalóz van: $5, A_1, \dots, A_a$. Ha a véletlenszerűen kiválasztott kihívó ebben a csoportban van, akkor a párbaj is ebben a blokkban zajlik le (a kihívott kalóz az óramutató járásának irányába eső következő kalóz, aki még ebben a csoportban van, kivéve A_a esetén, aki a 6-os kalózt hívja ki) és minden esetben a kiejtett kalóz $A_1, \dots, A_a$ közül kerül ki. Ezáltal ha a kihívót ebből a csoportból választjuk, akkor a eggyel csökken. Ugyanezen logika mentén a 6-tal kezdődő, óramutató járásának irányába haladó kalózcsoport, amely közvetlenül az 5-ös kalóz előtt végződik, $b+1$ tagú, és ha a kihívót ebből a csoportból választjuk ki, akkor b csökken eggyel. Mivel a kihívó választása egyenletes eloszlású az n fennmaradó kalóz között, $a, b \geq 1$ -re megkapjuk, hogy

$$f(a, b) = \frac{a+1}{n} f(a-1, b) + \frac{b+1}{n} f(a, b-1).$$

Kezdetben $a + b = 4$. Az $f(0, 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $f(0, 3) = \frac{2}{5}$, $f(0, 2) = \frac{1}{2}$, $f(0, 1) = \frac{2}{3}$ értékeket és az $f(a, b) = f(b, a)$ szimmetriát használva rekurzióval megkapjuk, hogy $f(1, 1) = \frac{2}{3}$, $f(1, 2) = \frac{3}{5}$, $f(1, 3) = \frac{8}{15}$ és $f(2, 2) = \frac{3}{5}$. Mivel a kezdeti ülésrend egyenletes eloszlású, az óramutató járása szerinti a távolság 5 és 6 között egyenletesen oszlik el a $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon, tehát a keresett valószínűség

$$\frac{1}{5} (f(0, 4) + f(1, 3) + f(2, 2) + f(3, 1) + f(4, 0)) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{15}.$$

Alternatív megoldás. Általánosabb módon oldjuk meg a feladatot n számú kalózzal hat helyett. Legyen p_n annak a valószínűsége, hogy az utolsó két játékban maradó kalóz n és $n-1$ szintű. Az a célunk, hogy bebizonyítsuk a

$$p_n = \left(1 - \frac{2}{n(n-1)} \right) p_{n-1} \quad (\spadesuit)$$

rekurzív formulát $n \geq 3$ -ra.

Vegyük a rituálé legelső lépését. Az $n-1$ szintű kalóz azonnali kiesésének valószínűsége $\frac{2}{n(n-1)}$: annak a valószínűsége, hogy n és $n-1$ egymás mellett ülnek, $\frac{2}{n-1}$, hiszen ha a kalózok n -nel kezdődően ülnek körbe, akkor $n-1$ ülőhelyére $n-1$ lehetőség van és közülük pontosan 2 van n mellett. Ha egymás mellett ülnek, a kettejük közötti párbaj valószínűsége $\frac{1}{n}$. Ezért a valószínűség

$$\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

Ezáltal $1 - \frac{2}{n(n-1)}$ valószínűséggel esik ki az $1, \dots, n-2$ szintű kalózok valamelyike. Ekkor a játékban maradó $n-1$ kalóz ugyancsak véletlenszerű sorrendben ülnek az asztal körül, és minden elrendezés egyformán valószínű: ha a k kalóz

kiesik, akkor bármely ezt követő ülési sorrend létrejöhet pontosan $2(n - k)$ módon, mivel k biztosan az ℓ kalóz mellett ült és vele párbajozott (ℓ az $n - k$ magasabb szintű kalózok egyike) – vagy úgy, hogy k hívta ki ℓ -t, vagy fordítva. Ez a szám kizárólag k -tól függ és nem a kialakuló sorrendtől, úgyhogy ha újraszámozzuk a játékban maradókat $1, 2, \dots, n - 1$ módon, akkor az eredeti felállást kapjuk $n - 1$ kalózzal. Ez bizonyítja a ($\spadesuit$) rekurziót.

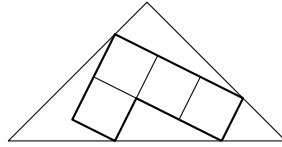
Már csak p_6 -ot kell kiszámolnunk. Mivel $p_2 = 1$, a ($\spadesuit$) többszöri alkalmazásával megkapjuk, hogy

$$p_6 = \frac{14}{15} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy az utolsó párbaj az 5-ös és 6-os kalóz között zajlik, $\frac{7}{15}$. Általánosítva a ($\spadesuit$)-ből való indukcióval is bizonyíthatjuk, hogy

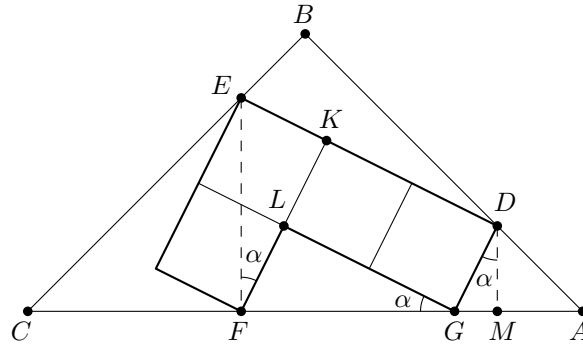
$$p_n = \frac{n + 1}{3(n - 1)}.$$

49. Feladat Egy L-alakú tetrominó (ami négy egybevágú négyzetből áll) bele van rajzolva egy egyenlő szárú derékszögű háromszögbe az ábrán látható módon. Mi a tetrominó területének és a háromszög területének az aránya?



Eredmény. 80/169

Megoldás. A pontokat az ábrán látható módon nevezzük el. Ha a tetrominó négyzeteinek oldalhosszát 1-nek tekintjük, akkor csak az ABC háromszög egyik oldalhosszát kell kiszámolnunk, pl. az AC átfogót.



Az EF segédvonal használatával megkapjuk az EFK derékszögű háromszöget, ahol $EKF \sphericalangle = 90^\circ$ és az oldalhosszak $EK = 1$, $KF = 2$ és $EF = \sqrt{5}$. Mivel $GL = 2$ és $LF = 1$, valamint $FLG \sphericalangle = 90^\circ$, az EFK és FGL háromszögek egybevágók. Ebből megkapjuk, hogy $GF = EF = \sqrt{5}$. Legyen $\alpha = LGF \sphericalangle$. Ekkor $KFE \sphericalangle = \alpha$ és következésképp $GFE \sphericalangle = 90^\circ$, hiszen α kiegészíti $GFL \sphericalangle$ -et 90° -ra. Ez viszont azt is jelenti, hogy az FEC háromszög egyenlő szárú és derékszögű, oldalhossza pedig $FC = \sqrt{5}$. Ezután bevezetünk egy második segédvonalat a D pontból merőlegest állítva az AC szakaszra, létrehozva az M pontot az AC szakaszon. Mivel $LGF \sphericalangle + MGD \sphericalangle = 90^\circ$, megkapjuk, hogy $GDM \sphericalangle = \alpha$, és emiatt az MDG háromszög hasonló az FGL háromszöghöz, méretarányuk pedig $\sqrt{5}$. Tehát az MDG háromszög oldalhosszai $MG = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $MD = \frac{2}{\sqrt{5}}$ és $DG = 1$. Mivel az MAD háromszög is egyenlő szárú és derékszögű, megkapjuk, hogy $AM = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Ezáltal tudjuk, hogy

$$AC = AM + MG + GF + FC = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = \frac{3 + 2 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Tehát az ABC háromszög területe

$$\frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{AC}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{\sqrt{10}} \right)^2 = \frac{169}{20}$$

és a keresett arányszám $\frac{4}{\frac{169}{20}} = \frac{80}{169}$.

50. Feladat Az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat első néhány tagja $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, és minden $n \geq 1$ -re $a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} + 3^{a_{n+1}} + 3^{a_n}$. Mi lesz a_{22} -nek a 49-cel való osztási maradéka?

Eredmény. 11

Megoldás. Az a_{22} tag 3 hatványainak összege, melynek modulo 49 értékét az Euler-tétellel tudjuk megkeresni: mivel $\text{luko}(3, 49) = 1$ és $\varphi(49) = 42$, a tétel miatt biztos, hogy

$$3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 42} \pmod{49}.$$

Ezáltal az $a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \pmod{49}$ kiszámolásához elegendő ismernünk az $a_{21}, a_{20}, a_{19} \pmod{42}$ értékeket, ráadásul a kínai maradéktételt használva elég külön a modulo 6 és 7 értékeket keresnünk.

Először is, $n \geq 4$ -re minden a_n három háromhatvány összege, így páratlan és osztható hárommal, tehát $a_n \equiv 3 \pmod{6}$. Mivel $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ (ismét az Euler-tétel alapján), következésképp $3^{a_n} \equiv 3^3 \pmod{7}$ érvényes $n \geq 4$ -re. $n \geq 7$ -et véve (tehát hogy $n-1, n-2, n-3 \geq 4$ legyen) megkapjuk, hogy

$$a_n = 3^{a_{n-1}} + 3^{a_{n-2}} + 3^{a_{n-3}} \equiv 3^3 + 3^3 + 3^3 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Ha a kínai maradéktétel szerint közösen vizsgáljuk ezeket a kongruenciákat, akkor megkapjuk, hogy $a_n \equiv 39 \equiv -3 \pmod{42}$ érvényes $n \geq 7$ -re. Visszatérve még egy alkalommal az Euler-tételhez, ez azt jelenti, hogy $3^{a_n} \equiv 3^{-3} \pmod{49}$ érvényes $n \geq 7$ -re, ahol a negatív exponens a moduláris inverz egyik hatványát jelöli. Végül pedig

$$a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \equiv 3^{-3} + 3^{-3} + 3^{-3} = 3^{-2} = 9^{-1} \equiv 11, \pmod{49},$$

mivel $9 \cdot 11 = 99 \equiv 1 \pmod{49}$. Tehát a keresett maradék 11.

51. Feladat Max elindul egy végtelen hosszú autópályán, kezdetben üres tankkal. Minden $n \geq 0$ egész szám esetén van egy benzinkút a kezdőponttól n^2 mérföld távolságra. Max mindenhol egész értékű egységnyi üzemanyagot vásárol. Azonban a benzinkutasok nem szeretnek nagy mennyiségű üzemanyagot eladni, ezért az egységnyi üzemanyagár minden hozzáadott egység esetén növekszik: mindegyik árusnál az első egység 1 dollárba kerül, a második 2 dollárba, a harmadik 3 dollárba és így tovább. Egy egységnyi üzemanyaggal Max egy mérföldet tud haladni. A benzinkutak készlete és Max üzemanyagtankja is korlátlan. Ha az összes pénze 730 dollár, akkor maximum hány mérföldet tud megtenni az úton?

Eredmény. 123

Megoldás. Ahhoz, hogy eljusson az n^2 mérföldnél lévő árushoz, Max a korábbi n árustól tud benzint venni. Az elméletben legkisebb üzemanyagárat úgy érheti el, ha minden árustól pontosan n egységnyi benzint vásárol, mivel bármely nem egyenlő eloszlású vásárlás megnöveli a fizetendő végösszeget.

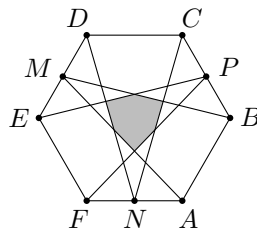
Viszont ellenőriznünk kell, hogy a „minden meglátogatott árustól veszek n egység benzint” stratégia valóban működik (vagyis általa Max el tud jutni n^2 mérföld távolságra); nem fordulhat elő az, hogy kifogy a benzin, mielőtt elérne valamelyik korábbi árushoz. Egyszerű indukcióval bizonyíthatjuk, hogy ez a stratégia nem fulladhat kudarcba. Az $n = 0$ eset egyértelmű: semennyi benzint nem kell vásárolnia, hogy eljusson 0 mérföld távolságra. Tegyük fel, hogy már tudjuk, hogy lehetséges elérni az n^2 mérföld távolságot, ha n egység benzint vásárol mind az n árustól. Ekkor, ha helyette $n+1$ egységet vásárol mindenhol, akkor biztosan nem fogyhat el az üzemanyagja, mielőtt elér n^2 mérföld távolságra. Tehát az n^2 -nél lévő árustól is tud venni $n+1$ egységet, és miután $n+1$ alkalommal vásárolt $n+1$ egység benzint, Max sikeresen el fog érni $(n+1)^2$ mérföld távolságra is.

Ezzel az érveléssel megmutatjuk, hogy az n^2 mérföld eléréséhez szükséges benzin ára legalább

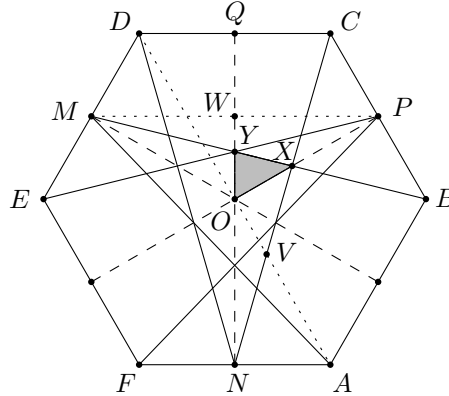
$$C_n = n(1 + 2 + \dots + n) = n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mivel $C_{11} = 726 \leq 730 < 936 = C_{12}$, következik, hogy 11^2 mérföldig el tud jutni a megadott pénzből, de 12^2 mérföldig már nem. Ha a maradék 4 dollárt felhasználja arra, hogy vegyen még 2 egység benzint 11^2 mérföldnél, összesen 123 mérföldet tud levezetni, viszont 124 mérföldnyi benzin már 2 dollárral a költségvetésen kívül esne. A fenti konstrukciók optimális költségűek 123 és 124 mérföldre: nincs értelme a szükségesnél több benzint vásárolni az utolsó árustól, és a 11^2 mérföldnél korábbi árusoktól vásárolt egységek növelése még legalább 12 dollárba kerülne egységenként, még ha tökéletesen el is osztjuk az egységeket.

52. Feladat Legyen $ABCDEF$ egy szabályos hatszög, amelynek a területe 420. Az M, N és P pontok rendre a DE, FA és BC oldalak szakaszfelező pontjai. Berajzoljuk az AM, BM, CN, DN, EP és FP szakaszokat, amelyek körbezárják a szürkére festett régiót. Határozzátok meg a szürke rész területét.



Megoldás. A szürkére satírozott régiót feloszthatjuk hat egybevágó háromszögre; egy ilyen háromszög területét fogjuk kiszámolni. Legyen O a hatszög középpontja, X a BM és CN szakaszok metszete és Y a BM és PE szakaszok metszete. Továbbá bevezetünk néhány segédpontot: Q a CD oldalfelezője, V az AD és CN szakaszok metszéspontja, valamint W a PM és QN szakaszok metszéspontja. Megmutatjuk, hogy $OX : OP = 2 : 5$ és $OY : OQ = 2 : 7$.



Mivel az NAV és CDV háromszögek hasonlóak és $NA = \frac{1}{2}CD$, tudjuk, hogy $AV : VD = 1 : 2$, ezáltal $OV = \frac{1}{3}OA$. Az OVX és PCX háromszögek is hasonlóak, és mivel $PC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}OA$, megkapjuk, hogy $OV : PC = 2 : 3$, ami ugyancsak egyenlő $OX : PX$ -szel. Tehát $OX : OP = 2 : 5$.

Hogy megkapjuk $OY : OQ = 2 : 7$ -t, felhasználjuk az OBY és WMY háromszögek hasonlóságát: $WM = \frac{3}{4}OB$, amiből következik, hogy $OY : YW = 4 : 3$. Ezt kombinálva $OW = WQ$ -val megkapjuk, hogy $OY : OQ = 2 : 7$.

Jelöljük a háromszög területét szögletes zárójelben. Az OXY és OPQ háromszögek közös szöge a POQ -é, úgyhogy

$$\frac{[OXY]}{[OPQ]} = \frac{OX}{OP} \cdot \frac{OY}{OQ} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}.$$

Továbbá az OPQ háromszög egyenlő oldalú, és oldalhossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$ arányú az ABO oldalhosszával, úgyhogy $[OPQ] = \frac{3}{4}[ABO]$. Tehát

$$\frac{[OXY]}{[ABO]} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}.$$

Mivel a satírozott régió az OXY három példányát tartalmazza és a hatszög az ABO hat példányát tartalmazza, ugyanez az arány érvényes. Következtetésképp a satírozott régió területe $\frac{3}{35} \cdot 420 = 36$.

53. Feladat Adél az algebrai átalakítások mestere, ezért felírta az összes $\pm a \pm b \pm c \pm d$ alakú kifejezést (összesen 16-ot, az összes lehetséges előjel-kombinációval), majd összeszorozta őket, így az a, b, c, d változók egy polinomját kapta. Ezután elhagyta azokat a tagokat, melyekben legalább az egyik változó nem szerepelt. Mi a megmaradt tagok együtthatóinak összege?

Eredmény. -328

Megoldás. Legyen P a feladatban megadott polinom. Ha mind a négy változóra 1 értéket helyettesítünk be, akkor a szorzatuk egyik tényezője $(1 + 1 - 1 - 1) = 0$ lesz, így P összes együtthatójának összege 0. Számoljuk ki az elvetett monomok együtthatóinak összegét logikai szita segítségével.

Az olyan monomok együtthatóösszegének kiszámolásához, amelyekből hiányzik legalább egy változó, vegyük azt az esetet, ahol az egyik változó értékét nullának választjuk, majd számoljuk össze mind a négy változóra a lehetőségeket. Így legalább egyszer számoljuk az összes olyan monomot, ami egy változót nem tartalmaz. Hogy összeadjuk azoknak a tagoknak az együtthatóit, amelyek nem tartalmazzák (például) a d -t, kiszámoljuk P értékét úgy, hogy $a = b = c = 1$ és $d = 0$, és megkapjuk, hogy

$$P(1, 1, 1, 0) = ((1 + 1 + 1)(1 + 1 - 1)(1 - 1 + 1)(1 - 1 - 1)(-1 + 1 + 1)(-1 + 1 - 1)(-1 - 1 + 1)(-1 - 1 - 1))^2 = 9^2 = 81.$$

Összeszámolva a hiányzó változóra vonatkozó mind a négy esetet $4 \cdot 81 = 324$ lehetőséget kapunk, viszont ebben az összegben kétszer szerepel minden kétváltozós tag, úgyhogy ki kell vonnunk a $P(1, 1, 0, 0) = 0$ lehetőséget hatszor, hiszen hatféle párosítás létezik a változókra. Végül pedig hozzá kell adnunk az egyváltozós tagokat, úgyhogy hozzáadjuk a $P(1, 0, 0, 0) = 1$ lehetőséget négyszer. Összességében az együtthatók összege $324 + 4 = 328$; és mivel a P összes együtthatójának összege nulla, a komplementer monomok (amelyek mind a négy változót tartalmazzák) együtthatóinak összege -328 .

54. Feladat Nikinek van 9000 egybevágó szabályos háromszöge. Hányféle négyszöget tud kirakni belőlük úgy, hogy mind a 9000 háromszöget átfedés nélkül egyetlen négyszöggé rendezzi? Az egybevágó négyszögeket azonosnak tekintjük.

Eredmény. 30

Megoldás. Egy egyenlő oldalú háromszögekből alkotott csúcsban lévő szög kizárólag 60° -os vagy 120° -os lehet. Mivel egy négyszög belső szögeinek összege 360° , a négy csúcsban lévő szög biztosan 60° , 60° , 120° és 120° . Kétfajta négyszöget tudunk összeállítani: paralelogrammákat és egyenlő szárú trapézokat, attól függően, hogy az egyforma szögek egymással szemben vagy egymás mellett vannak.

Egy ilyen paralelogramma, ha az oldalakat a -val és b -vel jelöljük, $2ab$ háromszögből áll (gondolhatunk rá úgy, mint ab darab, egyenként 2 háromszögből álló paralelogramma), tehát olyan $\{a, b\}$ párokat keresünk, ahol $ab = 4500$. Összesen 18 ilyen pár van (mivel 4500-nak 36 osztója van).

A trapézok esetén vegyük észre, hogy tekinthetünk rájuk úgy, mint két nagyobb szabályos háromszög különbsége. Egy n oldalhosszúságú háromszög n^2 kisebb háromszögből áll (ami, ha sorokra osztva nézzük, az első n páratlan szám összege), szóval azt szeretnénk, hogy teljesüljön $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 9000$, ahol a jelöli a trapéz hosszabb alapját és b a rövidebbet. Ugyancsak osztópárokat keresünk, viszont most $a + b$ -nek és $a - b$ -nek is párosnak kell lennie ahhoz, hogy az egyenletrendszer megoldása egész szám legyen. A 9000-nek 24 olyan páros osztója van, amelyhez a kvóciens is páros (ezek megfeleltethetők a $9000/4$ osztóival), és ezekből 12 érvényes $a + b$ és $a - b$ párt tudunk létrehozni, amikhez 12 érvényes a és b pár tartozik.

Összesen tehát $18 + 12 = 30$ lehetséges négyszög létezik.

55. Feladat Sanyi felfüggesztett egy 10 égőből álló karácsonyi égősort az ablakba, de sajnos nem mindegyik égő világított. Tudjuk, hogy nincs négy egymás melletti égő, amelyek felváltva égnék vagy nem égnék (tehát négy égő sorban ég, nem ég, ég, nem ég vagy nem ég, ég, nem ég, ég). A feltételt figyelembe véve hány különböző elrendezés lehetséges?

Eredmény. 548

Megoldás. Jelöljük a világító égőket 1-gyel és a nem világítókat 0-val, ezáltal az lesz a feladatunk, hogy megszámláljuk az olyan 10 jegy hosszúságú bináris számsorokat, amelyekben sehol sincs egybefüggő 0101 vagy 1010 blokk. Defináljunk egy olyan transzformációt, ami a páros helyi értéken lévő számjegyeket ellentétes állásba teszi (tehát x_i -t kicseréli $1 - x_i$ -re minden páros i -ben, viszont változatlanul hagyja a páratlan i -kben); ezt a transzformációt kétszer alkalmazva visszajutunk az eredeti állapothoz, tehát ez egy bijekció. Továbbá ez a csere a váltakozó 0101 és 1010 blokkokból egységes 0000, illetve 1111 blokkot csinál, és ugyanez fordítva is igaz. Tehát az eredeti számsorok bijekcióban vannak az olyan 10 jegy hosszúságú bináris számsorokkal, amik nem tartalmaznak négy egymást követő egyforma jegyből álló blokkot, és utóbbiakat kényelmesebben meg lehet számolni.

Legyen B_n azoknak az n hosszúságú bináris számsoroknak a száma, amelyek nem tartalmaznak négy egymást követő egyforma számjegyet; azt állítjuk, hogy $n > 3$ -nál teljesül, hogy $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$. Egy lehetséges n hosszúságú számsorban nézzük meg a számvégi egyforma számjegyeket tartalmazó blokk hosszát; a feltétel miatt ez 1, 2 vagy 3, és ezek az esetek diszjunktak. Ha a blokk hossza $k \in \{1, 2, 3\}$, az utolsó k számjegy törlésével érvényes $n - k$ hosszúságú számsort kapunk. Ellentétes esetben, ha egy érvényes $n - k$ hosszúságú számsor végéhez hozzátoldjuk azt az egyedi k hosszúságú számsort, ami ellentétes az eredeti számsor utolsó számjegyével (tehát az első hozzátoldott számjegy az előzővel ellentétes, a második azzal megegyező és így tovább, összesen k hozzátoldott egyforma számjegyig), akkor rekonstruálunk egy érvényes n hosszúságú számsort, amelyben a számvégi egyforma jegyek hossza k . Így az n hosszúságú érvényes számsorok rekurzív módon bijektív kapcsolatban vannak az $n - 1$, $n - 2$, illetve $n - 3$ hosszúságú számsorokkal.

$n \leq 3$ esetén a feltétel minden esetben teljesül, így $B_1 = 2$, $B_2 = 4$ és $B_3 = 8$ (minden n hosszúságú bináris számsor lehetséges). A $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$ rekurziót felhasználva sorban kiszámoljuk, hogy $B_4 = 14$, $B_5 = 26$, $B_6 = 48$, $B_7 = 88$, $B_8 = 162$, $B_9 = 298$, és végül $B_{10} = 548$.

56. Feladat Oldjátok meg a következő egyenletet, ahol a egy pozitív egész szám:

$$\left(\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2} \right)^5 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^2.$$

Eredmény. 2525

Megoldás. A megoldás során feltételezzük, hogy $a \geq 2$, hiszen $a = 1$ -re az egyenlet jobb oldala nem értelmezhető. Vegyük észre, hogy

$$\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2} = \frac{23 + 5\sqrt{21}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^2$$

Mivel $a + \sqrt{a^2 - 4} > 0$, az eredeti egyenlet leegyszerűsödik a következőre:

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^5.$$

Ezt az egyenlőséget kibővíthetjük úgy, hogy

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a^2 - 4} &= \frac{5^5 + \binom{5}{2} \cdot 5^3 \cdot 21 + \binom{5}{4} \cdot 5^1 \cdot 21^2}{16} + \frac{\binom{5}{1} \cdot 5^4 \cdot \sqrt{21} + \binom{5}{3} \cdot 5^2 \cdot (\sqrt{21})^3 + (\sqrt{21})^5}{16} \\ &= \frac{3125 + 10 \cdot 2625 + 25 \cdot 441}{16} + \frac{(5^5 + 21 \cdot 250 + 21^2) \cdot \sqrt{21}}{16} \\ &= 2525 + 551 \cdot \sqrt{21}. \end{aligned}$$

A racionális elemeket összevetve megkapjuk potenciális megoldásnak az $a = 2525$ -öt. Hogy ellenőrizzük, ez valóban megoldás-e, elég visszahelyettesítenünk $a = 2525$ -öt $a^2 - 4$ -be, aminek az eredménye $2525^2 - 4 = 6375621 = 551^2 \cdot 21$, ami megfelel a kívánalmaknak. Ráadásul ez az egyetlen megoldás: az $a + \sqrt{a^2 - 4}$ függvény $a \geq 2$ -re szigorúan monoton növekszik (mindkét kifejezés a -val együtt növekszik), tehát az egyenletnek legfeljebb egy pozitív egész szám megoldása lehet a -ra.

Alternatív megoldás. Legyen $\alpha = \frac{1}{2}(23 + \sqrt{23^2 - 4})$. Mivel α gyöke $t^2 - 23t + 1 = 0$ -nak, és a másik gyök α^{-1} , megkapjuk, hogy $\alpha + \alpha^{-1} = 23$.

Írjuk fel, hogy $\beta = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$. Ekkor β gyöke $t^2 - at + 1 = 0$ -nak, és a korábbiakhoz hasonlóan $\beta + \beta^{-1} = a$. Mivel a csak pozitív értéket vehet fel, következik, hogy β -nak is pozitívnak kell lennie.

A kapott egyenlet $\alpha^5 = \beta^2$. Legyen $x = \beta^{1/5}$ (tehát $x > 0$). Ekkor $x^2 = \alpha$ és emiatt $x^2 + x^{-2} = 23$. Legyen $y = x + x^{-1}$; ekkor $y > 0$ és $y^2 = x^2 + x^{-2} + 2 = 25$, tehát $y = 5$.

Az a cél, hogy megtaláljuk $a = x^5 + x^{-5}$ -t; ehhez bővítsük az előbbieket:

$$y^5 = (x + x^{-1})^5 = (x^5 + x^{-5}) + 5(x^3 + x^{-3}) + 10(x + x^{-1}),$$

tehát

$$a = y^5 - 5(x^3 + x^{-3}) - 10y.$$

Már csak $x^3 + x^{-3}$ -t kell kifejeznünk y -nal, amit hasonlóképp tehetünk meg:

$$y^3 = (x + x^{-1})^3 = (x^3 + x^{-3}) + 3(x + x^{-1}),$$

tehát

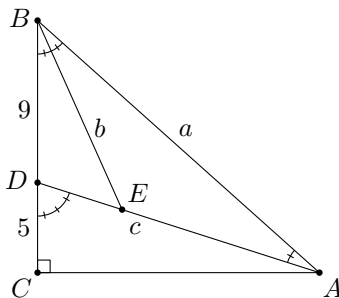
$$x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y.$$

Ezt összevonva az előző egyenlettel megkapjuk, hogy $a = y^5 - 5y^3 + 5y$, ami az $y = 5$ behelyettesítés után 2525 -öt eredményez.

57. Feladat Az ABC derékszögű háromszögben, ahol a C csúsnál van a derékszög, a BC szakaszon fekszik egy olyan D pont, amire $BD = 9$ és $DC = 5$, továbbá $\angle ADC = 3 \cdot \angle BAD$. Határozzátok meg az AB szakasz hosszát.

Eredmény. 21

Megoldás. Közösleges szögvezéssel arra jutunk, hogy $\angle ABD = 2 \cdot \angle DAB$. Rajzoljuk be az $\angle ABD$ szögfelezőjét, ami E pontban metszi az AD szakaszt. Mivel BE felezi az $\angle ABD$ -et, megkapjuk, hogy $\angle ABE = \angle EBD = \angle DAB$, tehát $AE = EB$, valamint a DBE és DAB háromszögek hasonlóak. A hasonlóságból következik, hogy $DB : DA = DE : DB = BE : AB$.



Legyen $AB = a$, $AE = EB = b$ és $AD = c$. Ekkor $DE = c - b$, és az arányokból következik, hogy

$$\frac{9}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c - b}{9}.$$

Tehát $c^2 = bc + 81$ és $bc = 9a$, úgyhogy $c^2 = 9a + 81$.

Mivel az ACD és ABC háromszögek derékszögűek C -nél, következik, hogy

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = a^2 - (9 + 5)^2 = a^2 - 196,$$

és

$$AC^2 = AD^2 - DC^2 = c^2 - 25.$$

Ezeket a kifejezéseket egyenlővé téve és $c^2 = 9a + 81$ -et használva megkapjuk, hogy

$$a^2 - 196 = 9a + 56, \quad \text{vagy} \quad a^2 - 9a - 252 = 0.$$

Ennek az egyenletnek csak egy pozitív gyöke van: $a = 21$.