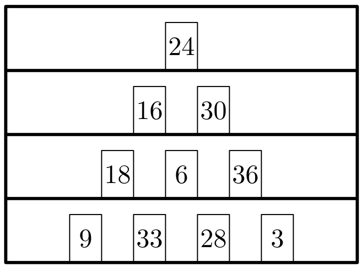
Zadanie 1. Na jarmarku przygotowano grę w rzucanie do puszek, każda z nich ma swój numer. Gracz może zrzucić dowolną liczbę puszek, ale wygrywa wyłącznie, gdy suma ich numerów jest równa 50. Znajdź wygrywający zbiór puszek spośród pokazanych na poniższym obrazku oraz podaj ich numery w rosnącej kolejności.



Wynik. 6, 16, 28

Rozwiązanie. Jak można zauważyć, większość puszek ma numer podzielny przez 3. Suma zrzuconych puszek ma być równa 50, czyli dawać resztę 2 z dzielenia przez 3, zatem przynajmniej jedna z nich nie może mieć numeru podzielnego przez 3. Jedyne takie numery to 16 i 28.

Zauważmy, że liczby 16 i 28 dają resztę 1 z dzielenia przez 3, zatem aby uzyskać resztę 2 gracz musi zrzucić obie z nich. Ich suma to 44, zatem pozostałe zrzucone puszki muszą mieć sumę równą $50 - 44 = 6$, co jest możliwe jedynie zrzucając puszkę o numerze 6. Wynika stąd, że poszukiwany zestaw puszek to 6, 16 i 28.

Zadanie 2. Mateusz ma trzy standardowe sześcienne kostki do gry: czerwoną, niebieską i żółtą. Każda z nich ma napisane na swoich ścianach wszystkie liczby całkowite od 1 do 6. Mateusz rzuca każdą kostką raz, a następnie dodaje liczby które wypadły. Na ile sposobów może otrzymać sumę równą 8?

Wynik. 21

Rozwiązanie. Jest pięć możliwości, aby otrzymać sumę równą 8 w rzucie trzema kośćmi:

$$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2.$$

W przypadku $6 + 1 + 1$ liczba 6 może wypaść na czerwonej, niebieskiej lub żółtej kości, więc mamy trzy możliwości. Analogicznie mamy również po trzy możliwości dla każdej z sum: $4 + 2 + 2$ i $3 + 3 + 2$. W przypadku sumy $5 + 2 + 1$ mamy $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ możliwości rozmieszczenia liczb na trzech różnokolorowych kościach. Tak samo jest dla przypadku $4 + 3 + 1$. Zatem łącznie jest $3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21$ możliwości.

Zadanie 3. Adam ma czworo dzieci. Zauważył, że jego wiek jest równy sumie lat jego trzech najstarszych dzieci oraz, że za sześć lat jego wiek będzie równy sumie lat jego trójki najmłodszych dzieci. Jaka jest różnica wieku między najstarszym a najmłodszym dzieckiem Adama?

Wynik. 12

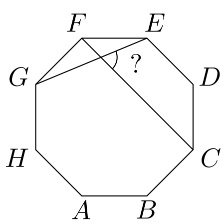
Rozwiązanie. Oznaczmy przez a wiek Adama, a przez $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant c_4$ wiek jego dzieci. Założenia zadania implikują równania $a = c_2 + c_3 + c_4$ oraz $a + 6 = (c_1 + 6) + (c_2 + 6) + (c_3 + 6)$. Z pierwszego równania otrzymujemy w drugim równaniu $c_2 + c_3 + c_4 + 6 = c_1 + c_2 + c_3 + 18$, co się upraszcza do $c_4 = c_1 + 12$. Zatem różnica pomiędzy najstarszym i najmłodszym dzieckiem Adama wynosi 12 lat.

Zadanie 4. 24-godzinny zegar elektroniczny pokazuje czas od 00:00 do 23:59. Ile razy w ciągu doby wyświetlacz pokazuje dokładnie cztery spośród pięciu cyfr 1, 2, 3, 4, 5 (w dowolnej kolejności)?

Wynik. 36

Rozwiązanie. Godzina musi być liczbą dwucyfrową nieprzekraczającą 23 z różnymi cyframi z pośród $1, \ldots, 5$; jedyne możliwości to 12, 13, 14, 15, 21 oraz 23. Każda taka godzina wykorzystuje dwie cyfry, pozostawiając trzy, z których należy ułożyć liczbę minut wykorzystującą różne cyfry. Można to zrobić na $3 \cdot 2 = 6$ sposobów i każdy z nich daje w rezultacie poprawną liczbę minut. Zatem każda z godzin daje sześć poprawnych minut, czyli mamy $6 \cdot 6 = 36$ szukanych wskazań zegara.

Zadanie 5. Niech $ABCDEFGH$ będzie ośmiokątem foremnym. Ile wynosi miara kąta ostrego między przekątnymi CF i EG (w stopniach)?



Wynik. 67,5°

Rozwiązanie. Niech X będzie punktem przecięcia tych przekątnych. Zamiast liczyć miarę kąta $\angle CXE$, jak sugeruje obrazek, policzymy miarę kąta $\angle FXG$, która jest taka sama. Zauważmy, że $\angle GFX = \angle GFC = 90°$, ponieważ $BCFG$ jest prostokątem. Co więcej trójkąt EFG jest równoramienny, z kątem $\angle GFE = \frac{1}{8} \cdot 6 \cdot 180° = 135°$, a więc $\angle XGF = \angle EGF = 22{,}5°$. Z sumy miar w trójkącie FGX otrzymujemy $\angle FXG = 180° - 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$.

Zadanie 6. Niech a, b, c, d, e będą pięcioma różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi zależności $a < b < c < d < e$ oraz mającymi średnią arytmetyczną równą 16. Znajdź największą możliwą wartość liczby d.

Wynik. 36

Rozwiązanie. Skoro

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = 16,$$

to $a+b+c+d+e = 80$. Aby zmaksymalizować d wystarczy zminimalizować sumę pozostałych liczb. Z warunków zadania wynika, że minimalne ich wartości to kolejno $a \geqslant 1$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$ oraz $e \geqslant d+1$, zatem

$$80 = a+b+c+d+e \geqslant 1+2+3+d+(d+1) = 7+2d.$$

Otrzymujemy $2d \leqslant 73$, czyli $d \leqslant 36$, bo musi być całkowite. Warunki te są spełnione dla $(a,b,c,d,e) = (1,2,3,36,38)$, więc największa możliwa wartość d to 36.

Zadanie 7. Wędrowiec dotarł pod antyczną, kamienną bramę na pustyni i spotkał sfinksa zagradzającego mu drogę. Sfinks powiedział do niego: „Pozwolę ci przejść, jeśli odgadniesz liczbę, o której myślę. Jest to liczba trzycyfrowa i ma następujące własności:

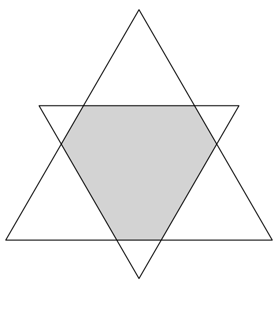
- jest nieparzysta,
- jej cyfry są parami różne i rosną od lewej do prawej,
- jest podzielna przez 9, ale usunięcie dowolnej jej cyfry sprawi, że nie będzie podzielna przez 9,
- jedną z jej cyfr jest 6."

Jaką liczbę powinien powiedzieć wędrowiec, aby przejść?

Wynik. 567

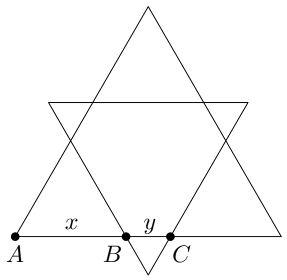
Rozwiązanie. Cyfra jedności musi być nieparzysta i równa co najmniej 6, więc jest to 7 lub 9. Trzeci warunek oznacza, że suma wszystkich cyfr jest podzielna przez 9, ale pierwszych dwóch już nie jest, więc 9 nie może być cyfrą jedności. Zatem cyfra jedności jest równa 7, a to oznacza, że 6 jest cyfrą dziesiątek. Aby suma cyfr była podzielna przez 9, cyfrą setek musi być 5. Zatem liczba sfinksa to 567.

Zadanie 8. Dwa trójkąty równoboczne są ustawione tak, jak pokazano na rysunku. Ich odpowiednie boki są parami równoległe oraz oba trójkąty mają wspólny środek okręgu opisanego. Większy trójkąt ma bok długości 17 cm, a mniejszy 11 cm. Obszar wspólny obu trójkątów to sześciokąt zacieniowany na rysunku. Wyznacz obwód tego sześciokąta w cm.

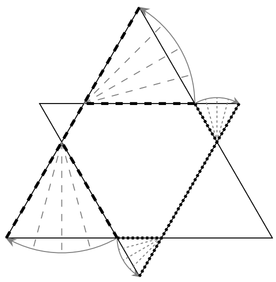


Wynik. 28

Rozwiązanie. Poza zacieniowanym obszarem znajdują się trzy przystające małe trójkąty równoboczne oraz trzy przystające duże trójkąty równoboczne. Niech $AB = x$ i $BC = y$. Wtedy długość boku większego trójkąta wynosi $2x + y = 17$, a długość boku mniejszego wynosi $x + 2y = 11$. Dodając oba równania stronami dostajemy $3x + 3y = 28$, co jest wzorem na szukany obwód sześciokąta.



Alternatywne rozwiązanie. Możemy przenieść boki sześciokąta jak na rysunku poniżej, aby otrzymać dwa odcinki, które są bokiem mniejszego i większego trójkąta. Zatem obwód sześciokąta jest równy sumie długości tych dwóch boków trójkątów, czyli wynosi $17 + 11 = 28$.



Zadanie 9. Martynka chce ubrać się na zajęcia sportowe. Musi mieć na sobie dokładnie jedną koszulkę, jedne spodenki, jedną parę skarpetek, jedną parę tenisówek oraz może potencjalnie mieć wstążkę we włosach. Zarówno para skarpetek, jak i para tenisówek musi być pasująca (oba elementy w parze muszą mieć ten sam kolor). Martynka posiada koszulki białe, żółte, zielone, niebieskie i czerwone; spodenki oraz wstążki białe, czarne i szare; skarpetki białe, czerwone i pomarańczowe; tenisówki białe i czarne. Ubiera białe skarpetki tylko wtedy, gdy cała jest ubrana na biało (uwzględniając wstążkę, jeśli ma ją na sobie). Na ile sposobów Martynka może się ubrać na zajęcia?

Wynik. 242

Rozwiązanie. Zliczamy wszystkie ubiory zgodne z opisanymi zasadami. Zacznijmy od białych skarpetek, według zasad może je ubrać wyłącznie gdy wszystko inne jest białe, co daje 2 przypadki (w zależności czy założy wstążkę). Odrzucając białe skarpetki pozostają 2 możliwości skarpetek, 5 możliwości koszulki, 3 możliwości spodenek, 2 możliwości tenisówek oraz 4 możliwości wstążki (3 kolory i jej brak). Łącznie daje to

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240$$

możliwych ubiorów. Ponadto dwa ubiory z białymi skarpetkami, więc łącznie 242 możliwości.

Zadanie 10. Znajdź liczbę czterocyfrową spełniającą następujące warunki:

- cyfra setek jest dwa razy większa od cyfry tysięcy,
- cyfra jedności jest trzy razy większa od cyfry dziesiątek,
- suma kwadratów wszystkich jej cyfr wynosi 95.

Wynik. 1239

Rozwiązanie. Niech $\overline{ABCD}$ oznacza szukaną liczbę, gdzie A, B, C, D są jej kolejnymi cyframi. Z warunków zadania wiemy, że $B = 2A$ i $D = 3C$. Wówczas

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A^2 + (2A)^2 + C^2 + (3C)^2 = 5A^2 + 10C^2 = 95,$$

co sprowadza się do $A^2 + 2C^2 = 19$. Skoro prawa strona jest nieparzysta, to A musi być nieparzysta. Ponadto A jest cyfrą i $A^2 \leqslant 19$, więc $A \in \{1, 3\}$. Jeśli $A = 3$, to $2C^2 = 10$, czyli C nie jest liczbą całkowitą. Natomiast jeśli $A = 1$, to $2C^2 = 18$, czyli $C = 3$. Ostatecznie otrzymujemy, że $B = 2$, $D = 9$, a szukana liczba wynosi 1239.

Zadanie 11. Zuzanna jest pozytywną osobą, więc chce wypełnić puste miejsca w wyrażeniu

$$\square\, 1\, \square\, 2\, \square\, 3\, \square\, 4\, \square\, 5$$

za pomocą znaków plus i minus, w taki sposób, aby uzyskać dodatni wynik. Na ile sposobów może to zrobić?

Wynik. 16

Rozwiązanie. Zauważmy, że wyrażenie $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ nigdy nie może być równe 0, gdyż $1+2+3+4+5 = 15$, a zmiana znaku na przeciwny nie zmienia parzystości wyniku. Teraz zauważmy, że jeśli wszystkie znaki w wyrażeniu zmienimy na przeciwne, czyli plusy na minusy, a minusy na plusy, to wynik również zmieni znak na przeciwny. Otrzymaliśmy zatem możliwość połączenia wszystkich ustawień w pary, w których jeden wynik jest dodatni, a drugi jest ujemny. Wiemy, że wszystkich ustawień znaków jest $2^5 = 32$, ponieważ w każdym z pięciu miejsc może pojawić się jeden z dwóch znaków. Zatem Zuzanna ma dokładnie połowę możliwości, aby uzyskać wynik dodatni, stąd odpowiedź to 16.

Zadanie 12. W dodawaniu pisemnym poniżej każda litera zastępuję jedną cyfrę (w zapisie dziesiętnym). Te same litery odpowiadają tym samym cyfrom, a różne litery odpowiadają różnym cyfrom.

$$\begin{array}{cccc} & A & A & A \\ + & A & A & B \\ + & A & C & C \\ \hline 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

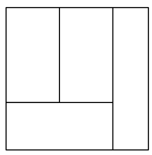
Wyznacz liczbę trzycyfrową ABC.

Wynik. 619

Rozwiązanie. Ponieważ pierwsza liczba każdego z trzech składników jest taka sama, to A musi spełniać nierówność $3A \leqslant 20$, a także $3A \geqslant 18$, bo nie możemy przenieść więcej niż 2 do kolejnej kolumny przy dodawaniu trzech cyfr. Zatem $A = 6$. Wynika z tego, że w kolumnie jedności cyfry B i C sumują się do 10. Zatem 1 z kolumny jedności przeniesie do kolumny dziesiątek, stąd dostajemy $C = 9$, a następnie $B = 1$. Szukana liczba ABC wynosi więc 619.

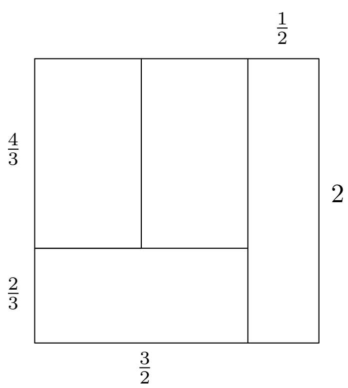
Zadanie 13. Rysunek poniżej przedstawia kwadrat o boku długości 2, który podzielono na cztery prostokąty. Wszystkie cztery prostokąty mają takie samo pole. Oblicz sumę obwodów tych prostokątów.

Uwaga: Odcinki wspólne dla dwóch prostokątów liczymy w obwodzie obu z nich.



Wynik. $\frac{53}{3} = 17\frac{2}{3}$

Rozwiązanie. Skoro pole kwadratu wynosi 4, to pole każdego z prostokątów jest równe 1. Z tego wynika, że szerokość prostokąta po prawej wynosi $\frac{1}{2}$, więc szerokość prostokąta w lewym dolnym rogu jest równa $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, a stąd jego wysokość wynosi $\frac{2}{3}$. Z tego wynika, że wspólna wysokość dwóch pozostałych prostokątów jest równa $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. W celu obliczenia sumy obwodów prostokątów, liczmy obwód kwadratu, który wynosi $4 \cdot 2 = 8$, i dodajemy dwukrotność odcinków wewnątrz kwadratu, ponieważ każdy z nich należy do dwóch obwodów. Długości tych odcinków wynoszą 2, $\frac{3}{2}$ i $\frac{4}{3}$, więc dwukrotność ich sumy jest równa $2 \cdot \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{29}{3}$. Zatem szukana suma obwodów prostokątów wynosi $8 + \frac{29}{3} = \frac{53}{3}$.



Zadanie 14. Dominik tworzy długi ciąg cyfr w 2026 krokach, stosując następujące reguły. W pierwszym kroku pisze 2026, w drugim 6202, czyli odwrócone 2026, ale nie powtarza ostatniej napisanej cyfry 6. W każdym następnym kroku powtarza tę czynność, używając naprzemiennie 2026 w zwykłej i odwróconej kolejności, za każdym razem używając ostatniej cyfry poprzedniego bloku jako pierwszej cyfry następnego, tak, że kolejne bloki mają dokładnie jedną wspólną cyfrę, jak na ilustracji poniżej obrazującej pierwszych 6 spośród 2026 bloków.

$$\rlap{$\underbrace{2\,0\,2\,6}_{1}$}2\,0\,2\,\rlap{$\overbrace{6\,2\,0\,2}^{2}$}6\,2\,0\,\rlap{$\underbrace{2\,0\,2\,6}_{3}$}2\,0\,2\,\rlap{$\overbrace{6\,2\,0\,2}^{4}$}6\,2\,0\,\rlap{$\underbrace{2\,0\,2\,6}_{5}$}2\,0\,2\,\overbrace{6\,2\,0\,2}^{6}\,\ldots$$

Wyznacz sumę cyfr powstałej w tej sposób liczby.

Wynik. 12 158

Rozwiązanie. Suma cyfr po napisaniu 2026 pierwszy raz wynosi 10. Każde następne napisanie bloku o parzystym numerze dodaje cyfry 202, czyli zwiększa sumę cyfr o 4, a każde napisanie bloku o nieparzystym numerze dodaje cyfry 026, czyli zwiększa sumę cyfr o 8. W ten sposób, za każdym razem gdy napisane zostaną dwa kolejne bloki, co stanie się 1012 razy ($1 + 2 \cdot 1012 = 2025$), suma cyfr wzrośnie o 12. Na koniec zostanie dopisany blok numer 2026, który ma parzysty numer, więc suma cyfr wzrośnie o 4. Sumarycznie dostajemy $10 + 1012 \cdot 12 + 4 = 12\,158$.

Zadanie 15. Jest godzina 8:00 rano. Która godzina będzie po upływie 260 320 261 998 godzin, zakładając, że w tym czasie nie nastąpi żadna zmiana czasu (np. na letni)? Odpowiedź podaj w formacie 24-godzinnym.

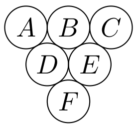
Wynik. 14

Rozwiązanie. Liczba 260 320 261 992 jest podzielna przez 24, ponieważ:

- jest podzielna przez 3: suma jej cyfr wynosi $42 = 3 \cdot 14$;
- jest podzielna przez 8: 1000 jest wielokrotnością 8 ($8 \cdot 125$), podobnie jak 992 ($8 \cdot 124$), więc $260\,320\,261 \cdot 1000 + 992$ jest również wielokrotnością 8.

Zatem reszta z dzielenia 260 320 261 998 przez 24 wynosi 6, co oznacza, że będzie godzina 14.

Zadanie 16. Na rysunku poniżej pokazano kiść winogron. Jedno winogrono może być zjedzone jedynie wtedy, gdy wszystkie winogrona bezpośrednio pod nim (czyli jedno lub dwa, z którymi styka się na dole) zostały już zjedzone. Na przykład winogrono D musi być zjedzone wcześniej niż winogrona A i B. Ile istnieje różnych kolejności zjedzenia całej kiści?



Wynik. 16

Rozwiązanie. Zjadanie musi być rozpoczęte od winogrona F, więc zostają winogrona A, B, C, D i E. Następnie możemy zjeść winogrona D lub E, sytuacja jest symetryczna, więc zacznijmy od E. Pozostały A, B, C i D, więc możemy zjeść C lub D.

- Jeśli zjemy C, to musimy zjeść D, a potem A i B na jeden z dwóch sposobów.
- Jeśli zjemy D, to A, B i C można zjeść w dowolnej z $3 \cdot 2 = 6$ kolejności.

Wynika stąd, że zaczynamy od F, potem wybieramy D lub E, a następnie zjadamy resztę na $2 + 6 = 8$ sposobów, czyli łącznie otrzymujemy $1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$ sposobów zjedzenia całej kiści.

Zadanie 17. Niech x będzie dodatnią liczbą całkowitą, dla której

$$\mathrm{NWW}(x, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \quad \text{oraz} \quad \mathrm{NWW}(x, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

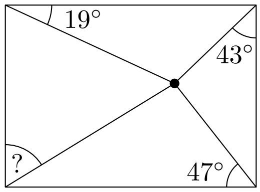
Ile możliwych wartości może przyjąć $\mathrm{NWD}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$?

Uwaga: $\mathrm{NWD}(a, b)$ i $\mathrm{NWW}(a, b)$ oznaczają odpowiednio największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność dodatnich liczb całkowitych a i b.

Wynik. 12

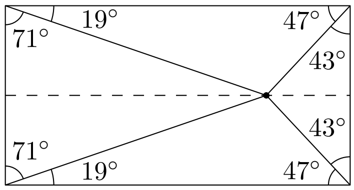
Rozwiązanie. Liczba x musi być postaci $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ (inne liczby pierwsze nie mogą pojawić się w tym rozkładzie, bo pojawiłyby się we wspólnej wielokrotności). Pierwszy warunek jest równoważny z $a = 6$, $b \leqslant 3$, $c \leqslant 4$ i $d \leqslant 2$, a drugi można zapisać jako $a \leqslant 8$, $b \leqslant 4$, $c \leqslant 3$ i $d = 2$. To implikuje, że w rozkładzie na liczby pierwsze $\mathrm{NWD}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ wykładnik przy liczbie 2 jest równy 2, wykładnik przy liczbie 3 może być dowolną liczbą całkowitą pomiędzy 0 i 3, wykładnik przy liczbie 5 może być dowolną liczbą całkowitą pomiędzy 0 i 2, a wykładnik przy liczbie 7 jest równy 2. Widzimy zatem, że jest $4 \cdot 3 = 12$ takich liczb.

Zadanie 18. Pewien punkt znajduje się wewnątrz prostokąta, jak na rysunku poniżej. Znane są miary trzech zaznaczonych kątów. Znajdź miarę kąta oznaczonego znakiem zapytania (w stopniach).



Wynik. 71°

Rozwiązanie. Obliczając miary kątów dopełniających do 90° przy dwóch wierzchołkach po prawej stronie prostokąta, dostajemy, że dany punkt leży na symetralnej prawego boku prostokąta, czyli na osi symetrii prostokąta. Zatem cała konfiguracja jest symetryczna względem tej prostej. Stąd szukany kąt wynosi $90° - 19° = 71°$.



Zadanie 19. Karolina chce stworzyć naszyjnik używając dwóch rodzajów koralików. Kupiła w tym celu 100 koralików, przy czym koralików tańszych było więcej niż droższych. Łącznie wydała 459 florenów na tańsze koraliki. Wiemy ponadto, że droższy koralik kosztuje o 13 florenów więcej niż tańszy koralik. Wszystkie ceny wyrażone we florenach są całkowite i dodatnie. Ile florenów Karolina wydała na droższe koraliki?

Wynik. 1078

Rozwiązanie. Niech c będzie liczbą tańszych koralików, zaś p ich ceną we florenach. Wtedy $cp = 459$, a skoro łącznie koralików jest 100 i tańszych jest więcej niż droższych, to zachodzi $50 < c < 100$. Cena tańszych koralików jest liczbą całkowitą, więc c musi być dzielnikiem liczby $459 = 3^3 \cdot 17$, który jest ściśle między 50 a 100. Jedyną możliwością jest $c = 51$. W takim razie $p = 459/51 = 9$, a więc droższe koraliki kosztują po $p + 13 = 22$ floreny. Liczba droższych koralików to $100 - 51 = 49$, zatem Karolina zapłaciła za nie $49 \cdot 22 = 1078$ florenów.

Zadanie 20. W wyrażeniu

$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot H}{N \cdot A \cdot B \cdot O \cdot J} = G \cdot A \cdot M \cdot E$$

każda z liter odpowiada innej cyfrze w zapisie dziesiętnym, a symbol $\cdot$ oznacza mnożenie. Ile rożnych wartości może mieć wyrażenie $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$?

Wynik. 1

Rozwiązanie. Mamy 10 rożnych liter (M, A, T, H, N, B, O, J, G, E), więc każda z cyfr jest użyta dokładnie raz. Co więcej jedna z liter ma wartość 0. To oznacza, że 0 musi występować po obu stronach równania i nie może się znajdować w mianowniku. Jedyną literą spełniająca te warunki jest M, czyli $M = 0$. Niezależnie od tego jakie wartości przyjmą pozostałe litery wyrażenie $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$ może mieć tylko jedną wartość.

Zadanie 21. Trzy latarnie morskie zbudowano na wybrzeżu będącym linią prostą. Odległość każdych dwóch sąsiednich latarni to 13 km. Statek znajduje się 10 km od jednej ze skrajnych latarni oraz 13 km od środkowej. Jak daleko (w km) znajduje się on od trzeciej latarni? Pomiń krzywiznę kuli ziemskiej.

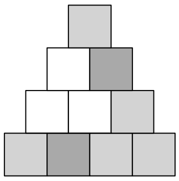
Wynik. 24

Rozwiązanie. Niech S oznacza pozycję statku, A i B oznaczają dwie skrajne latarnie, a M oznacza środkową z nich. Ponieważ z założeń zadania zachodzi $MS = MA = MB = 13$, więc A, B i S leżą na okręgu o środku w M. Odcinek AB jest średnicą tego okręgu, zatem trójkąt ABS jest prostokątny z kątem 90° przy wierzchołku S. Z twierdzenia Pitagorasa dla tego trójkąta dostajemy

$$BS = \sqrt{AB^2 - AS^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Zatem szukana odległość wynosi 24 km.

Zadanie 22. Na ile sposobów można pomalować wszystkie 10 klocków w piramidzie o wysokości 4 na jeden z trzech kolorów tak, aby każda zawarta w niej piramida o wysokości 2 (z czubkiem do góry) była pokolorowana albo wszystkimi trzema kolorami, albo tylko jednym. Na rysunku pokazany jest przykład takiego kolorowania.



Wynik. 81

Rozwiązanie. Przy takich warunkach kolorowanie całej piramidy jest całkowicie wyznaczone przez kolorowanie jej dolnego rzędu, ponieważ dowolne kolorowanie dolnego rzędu można uzupełnić w dokładnie jeden sposób do kolorowania całej piramidy. Ponieważ kolor każdego klocka można wybrać na 3 sposoby, to istnieje łącznie $3^4 = 81$ kolorowań.

Zadanie 23. Wierzchołkom 100-kąta foremnego przypisano parami różne liczby $1, 2, \ldots, 100$ w taki sposób, że wartość bezwzględna różnicy liczb umieszczonych na końcach każdej najdłuższej przekątnej jest taka sama i równa pewnej stałej n. Znajdź sumę wszystkich możliwych różnych wartości liczby n.

Wynik. 93

Rozwiązanie. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą, dla której takie rozmieszczenie istnieje. Wtedy liczba 1 musi być dobrana w parę z $n+1$ (rozumiejąc parę jako dwie liczby będące naprzeciw siebie; będziemy nazywać takie pary po prostu *parami* w dalszej części rozwiązania). Analogicznie, 2 musi być dobrane w parę z $n+2$, i kontynuując ten proces dostajemy, że k musi być dobrane w parę z $n+k$, dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$. W szczególności, n musi być dobrane w parę z $2n$.

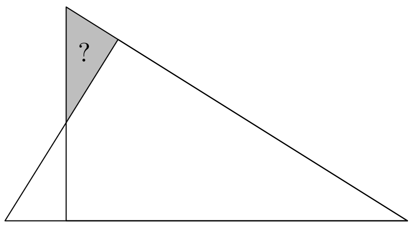
Zatem każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ jest dobrana w parę z inną liczbą z tego zbioru, więc ten zbiór może być oddzielony od innych liczb: $\{2n+1, \ldots, 100\}$. Jeśli $2n = 100$, to dobraliśmy w pary wszystkie liczby. Jeśli nie, możemy powtórzyć proces zaczynając od liczby $2n+1$, która musi być dobrana w parę z $3n+1$, i możemy tak kontynuować.

Ostatecznie, zbiór $\{1, 2, \ldots, 100\}$ dzieli się na rozłączne podzbiory mocy $2n$. To jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy 100 jest podzielne przez $2n$, to znaczy wtedy i tylko wtedy, gdy n jest dodatnim dzielnikiem 50.

Łatwo zauważyć, że ta konstrukcja daje poprawny podział dla każdego takiego dzielnika (poprzez podział na $\frac{100}{2n}$ podzbiorów jak pokazano wyżej). Zatem odpowiedź jest równa sumie dodatnich dzielników 50, czyli wynosi

$$1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93.$$

Zadanie 24. Dwa trójkąty prostokątne o bokach długości 5, 12 i 13 umieszczamy na sobie w taki sposób, by ich najmniejsze kąty pokrywały się, jak na rysunku. Jakie pole ma jeden z trójkątów nienależących do wspólnej części tych trójkątów prostokątnych?



Wynik. $\frac{6}{5} = 1{,}2$

Rozwiązanie. Szary trójkąt jest podobny do dużego trójkąta, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt, a jego najkrótszy bok ma długość $13 - 12 = 1$. W takim razie skala tego podobieństwa to $1 : 5$, więc druga z podstaw szarego trójkąta ma długość $\frac{12}{5}$. Oznacza to, że szukane pole wynosi

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5}.$$

Zadanie 25. Każdy z siedmiu krasnoludków wybrał dodatnią liczbę całkowitą. Wszyscy znają liczby wybrane przez pozostałych. Królewna Śnieżka zapytała każdego z krasnoludków o liczbę, którą wybrał.

- Pierwszy krasnoludek milczał.
- Drugi krasnoludek powiedział: „Moja liczba jest taka sama, jak liczba pierwszego krasnoludka.”
- Trzeci krasnoludek powiedział: „Moja liczba jest sumą liczb pierwszego i drugiego krasnoludka.”
- Czwarty krasnoludek powiedział: „Moja liczba jest równa sumie liczb poprzednich trzech krasnoludków.”
- ...
- Siódmy krasnoludek powiedział: „Moja liczba jest równa sumie liczb poprzednich sześciu krasnoludków.”

Wiemy, że suma wszystkich wybranych liczb wynosi 46. Wiemy także, że dokładnie jeden z krasnoludków kłamał. Krasnoludki nie słyszały się wzajemnie, dlatego odnosiły się do liczb wybranych na początku. Podaj wszystkie liczby, jakie mógł wybrać kłamiący krasnoludek.

Wynik. 7, 14

Rozwiązanie. Oznaczmy liczby wybrane przez krasnoludki jako $a_1, a_2, \ldots, a_7$.

Jeśli siódmy krasnoludek mówił prawdę, to wybrana przez niego liczba jest równa połowie sumy wszystkich liczb

$$a_7 = \frac{46}{2} = 23.$$

Ale wtedy szósty krasnoludek kłamał, bo inaczej wartość jego liczby musiałby wynosić $\frac{23}{2}$ i nie byłaby liczbą całkowitą. Zatem z pewnością jeden z dwóch ostatnich krasnoludków kłamał, a pierwszych pięć krasnoludków mówiło prawdę.

Jeżeli $a_1 \geqslant 2$, to suma liczb wybranych przez pierwszych pięciu krasnoludków wynosi co najmniej $2+2+4+8+16 = 32$. Suma ta musiała być podwojona przez jednego z ostatnich dwóch krasnoludków, który powiedział prawdę. Sumarycznie daje to więcej niż 46, co oznacza, że $a_1 = 1$. Stąd otrzymujemy pozostałe liczby pierwszych pięciu krasnoludków:

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 8.$$

Jeżeli szósty krasnoludek powiedział prawdę, to $a_6 = 16$ i wtedy $a_7 = 14$, aby suma wszystkich liczb wynosiła 46. W przeciwnym razie, jeśli szósty krasnoludek skłamał, to siódmy mówił prawdę i $a_7 = 23$ oraz $a_7 = 16 + a_6$, więc $a_6 = 7$. Zatem kłamiący krasnoludek wybrał liczbę 14 albo 7.

Zadanie 26. W celu komunikacji z satelitą należy wybrać sześć różnych kanałów o numerach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 13\}$, przy czym dwa wybory są identyczne, jeśli używają tych samych liczb, niezależnie od ich kolejności. Aby uzyskać optymalną jakość połączenia, wśród numerów wybranych kanałów muszą być przynajmniej dwa o nieparzystej różnicy. Na ile sposobów można optymalnie wybrać kanały do komunikacji?

Wynik. 1708

Rozwiązanie. Dwa kanały mają numery o nieparzystej różnicy wtedy i tylko wtedy, gdy są one różnej parzystości. Zatem zamiast zliczać optymalne wybory, łatwiej zliczyć te nieoptymalne, czyli mające jedynie różnice parzyste.

Wynika stąd, że nieoptymalny wybór kanałów zawiera 6 liczb parzystych lub 6 liczb nieparzystych, wybranych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 13\}$. W zbiorze tym jest 6 liczb parzystych i 7 nieparzystych, zatem możemy wybrać nieoptymalny zbiór na $\binom{7}{6} + \binom{6}{6} = 7 + 1 = 8$ sposobów.

Skoro wszystkich możliwych wyborów jest $\binom{13}{6} = 1716$, to optymalnych wyborów jest $1716 - 8 = 1708$.

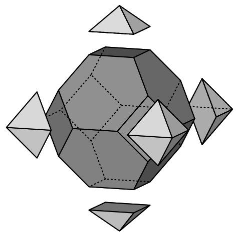
Zadanie 27. Niech N będzie 7-cyfrową liczbą, która jest podzielna przez każdą ze swoich cyfr. Wiedząc, że cyfry liczby N są parami różne i niezerowe, wyznacz ich sumę.

Wynik. 36

Rozwiązanie. Ponieważ liczba N ma siedem parami różnych niezerowych cyfr, to co najmniej jedna z nich jest parzysta, zatem liczba N też jest parzysta. Gdyby 5 było jedną z cyfr liczby N, to podzielność przez 5 wymusiłaby, że liczba N kończy się cyfrą 0, co jest sprzeczne z założeniami. Zatem cyfra 5 nie występuje w tej liczbie. Skoro N w zapisie wykorzystuje siedem cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, to nie wykorzystuje dokładnie jednej z tych cyfr. Gdyby nie wykorzystywała cyfry 9, to suma jej cyfr wynosiłaby 31, czyli liczba N nie byłaby podzielna przez 3, a zawierałaby cyfrę 3, co oznacza sprzeczność. Zatem cyfra 9 musi być jedną z cyfr liczby N, więc liczba N (i także suma jej cyfr) jest podzielna przez 9. Skoro $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$, to musimy pominąć cyfrę 4, aby pozostać z sumą cyfr równą 36, jedyną osiągalną wielokrotnością 9. Przykładem takiej liczby jest $N = 9\,867\,312$.

Zadanie 28. Ośmiościan ścięty to bryła stworzona przez odcięcie wierzchołków ośmiościanu foremnego w taki sposób, że powstałe ściany to osiem sześciokątów foremnych i sześć kwadratów. Jaki ułamek objętości wyjściowego ośmiościanu stanowi utworzony ośmiościan ścięty?

Uwaga: Ośmiościan foremny to bryła o ośmiu ścianach będących trójkątami równobocznymi.



Wynik. $\frac{8}{9}$

Rozwiązanie. Ośmiościan foremny o boku długości a ma objętość ka^3 dla pewnej stałej k (można nietrudno pokazać, że $k = \sqrt{2}/3$, ale nie jest to wymagane, aby rozwiązać to zadanie). Aby stworzyć ośmiościan ścięty odcinamy połowę małego ośmiościanu foremnego (ostrosłup o podstawie kwadratu) o boku długości $a/3$ z każdego z 6 wierzchołków wyjściowej bryły. Usunięta objętość jest taka sama jak trzech ośmiościanów, każdy o boku długości $a/3$. Zatem całkowita objętość odciętych brył to $3 \cdot k\left(\frac{a}{3}\right)^3 = ka^3/9$. Zatem szukany ułamek to

$$\frac{1}{ka^3}\left(ka^3 - \frac{1}{9}ka^3\right) = \frac{8}{9}.$$

Zadanie 29. Wyznacz wszystkie rzeczywiste rozwiązania równania

$$8\left(4^x + 4^{-x}\right) - 54\left(2^x + 2^{-x}\right) + 101 = 0.$$

Wynik. $-2, -1, 1, 2$

Rozwiązanie. Niech $a = 2^x + 2^{-x}$, wtedy $4^x + 4^{-x} = a^2 - 2$. Podstawiając do wyjściowego równania otrzymujemy

$$8(a^2 - 2) - 54a + 101 = 0,$$

czyli

$$8a^2 - 54a + 85 = 0.$$

Rozwiązania tego równania kwadratowego są postaci

$$\frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85}}{2 \cdot 8} = \frac{54 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{54 \pm 14}{16},$$

a więc są równe $\frac{17}{4}$ oraz $\frac{5}{2}$.

W pierwszym przypadku mamy

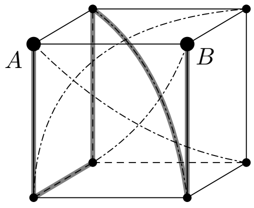
$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{17}{4},$$

czyli $2^x = 4$ lub $2^x = \frac{1}{4}$, zatem $x = 2$ lub $x = -2$. W drugim przypadku

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2},$$

co daje $2^x = 2$ lub $2^x = \frac{1}{2}$, czyli $x = 1$ lub $x = -1$. Podsumowując, jedynymi rozwiązaniami są $x = \pm 1, \pm 2$.

Zadanie 30. Na sześciennej planecie *Kostkotorce* znajduje się osiem miast, po jednym w każdym narożniku. Wzdłuż każdej krawędzi sześcianu biegną linie kolejowe łączące miasta na końcach tej krawędzi. Dodatkowo istnieją cztery linie kolejowe biegnące tunelami, które łączą pary miast w przeciwległych narożnikach sześcianu. Kolejarz Kostek rozpoczyna podróż w mieście znajdującym się w narożniku A i chce dotrzeć do sąsiedniego miasta w narożniku B (oddalonego o jedną krawędź), pokonując dokładnie pięć linii kolejowych i nigdy nie odwiedzając żadnego miasta więcej niż raz. Kostek chce skorzystać z co najmniej jednego tunelu w trakcie podróży. Ile jest możliwych tras? Przykładowa trasa jest przedstawiona na rysunku poniżej.



Wynik. 28

Rozwiązanie. Pokolorujmy narożniki sześcianu dwoma kolorami, aby każda trasa kolejowa (w tym również tunele) miała końce w dwóch rożnych kolorach. Podróżnik zaczynając podroż w mieście o danym kolorze, w każdej kolejnej podróży będzie przemieszczał się do miasta o innym kolorze. Do pokonania mamy pięć odcinków, a trasa musi mieć naprzemienne kolory, będzie zatem obejmować dokładnie dwa miasta pośrednie każdego koloru. Każde z odwiedzanych miast musi być różne, a mając do dyspozycji tunele każde dwa miasta rożnych kolorów mają połączenie kolejowe.

Policzmy ile jest tras długości 5 (ignorując chwilowo warunek skorzystania z tunelu). Każda trasa ma postać

$$Ao_1e_2o_2e_3B,$$

gdzie o_1, o_2 to różne miasta koloru B, a e_2, e_3 to różne miasta koloru A. Istnieje $3 \cdot 2 = 6$ sposobów na wybór pary uporządkowanej (o_1, o_2) spośród trzech miast koloru B innych niż B oraz istnieje $3 \cdot 2 = 6$ sposobów na wybór pary uporządkowanej (e_2, e_3) spośród trzech miast koloru A innych niż A. Zatem w sumie istnieje $6 \cdot 6 = 36$ tras o długości 5 z A do B.

Teraz policzmy ile jest tras, które nie wykorzystują tunelu. W pierwszym ruchu nie możemy trafić od razu do B, więc mamy do wyboru dwa miasta. Po wykonaniu któregokolwiek z tych ruchów istnieją dokładnie 4 sposoby na ukończenie trasy o długości 5 do B, wykorzystując wyłącznie krawędzie, co daje $2 \cdot 4 = 8$ tras niewykorzystujących tuneli.

Ostatecznie otrzymujemy $36 - 8 = 28$ szukanych tras długości 5 wykorzystujących tunele.

Zadanie 31. W wyborach na sołtysa uczestniczyło 2026 wyborców oraz czterech kandydatów: Arek, Barek, Czarek i Darek. Arek wypadł najgorzej, otrzymując jedną szóstą głosów, które uzyskał Barek. Czarek otrzymał o dokładnie 446 głosów mniej niż wszyscy trzej pozostali kandydaci łącznie. Darek wygrał wybory uzyskując mniej niż 800 głosów. Każdy z wyborców oddał dokładnie jeden głos na jednego z kandydatów. Ile głosów otrzymał Arek?

Wynik. 63

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że kandydaci zebrali kolejno a, b, c oraz d głosów. Wiemy, że $a+b+c+d = 2026$ i zachodzą zależności:

$$b = 6a, \qquad c = (a+b+d) - 446, \qquad d < 800 \qquad \text{oraz} \qquad d > a, b, c.$$

Wynika stąd, że

$$a+b+c+d = a+b+(a+b+d-446)+d = 2026,$$
$$a+b+d = 1236,$$

czyli

$$c = 1236 - 446 = 790.$$

Skoro $b = 6a$, to

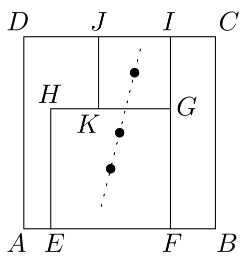
$$a + 6a + d = 1236, \qquad \text{czyli} \qquad d = 1236 - 7a.$$

Skoro D wygrał, to $d > c = 790$, ale jednocześnie $d < 800$, więc $791 \leqslant d \leqslant 799$, co daje

$$791 \leqslant 1236 - 7a \leqslant 799, \qquad \text{czyli} \qquad 437 \leqslant 7a \leqslant 445.$$

Wynika stąd, że $a = 63$, a więc $b = 378$, $c = 790$ oraz $d = 795$, co spełnia wszystkie założenia zadania.

Zadanie 32. Trzy kwadraty $ABCD$, $EFGH$ i $KGIJ$ są ułożone jak na rysunku poniżej: punkty E i F leżą na odcinku AB, punkty I i J leżą na odcinku CD, a punkt K leży na odcinku GH. Ponadto, środki tych trzech kwadratów leżą na jednej prostej. Wiedząc, że $AD = 7$ i $HK = 1$, wyznacz długość odcinka FB.



Wynik. $\frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$

Rozwiązanie. Niech a i b będą długościami boków kwadratów $EFGH$ i $KGIJ$. Z treści zadania dostajemy równości $7 = AD = JK + HE = a + b$ oraz $1 = HK = HG - KG = a - b$. Rozwiązaniem tego układu równań jest $a = 4$ i $b = 3$.

Prosta przechodząca przez środki wszystkich trzech kwadratów dzieli pole każdego z nich na dwie połowy. Zatem pole prostokąta $FBCI$ można obliczyć z równania

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = ab.$$

Pole prostokąta $FBCI$ jest również dane przez $FB \cdot (a+b)$. Z tych dwóch równości otrzymujemy $FB = \frac{ab}{a+b} = \frac{12}{7}$.

Zadanie 33. Na tablicy napisano kilka liczb, w tym 2026. Gdy zmażemy liczbę 2026, to średnia arytmetyczna liczb na tablicy zmniejszy się o 6. Jeśli jednak kolejna liczba 2026 zostanie dopisana, to średnia arytmetyczna liczb na tablicy zwiększy się o 4. Znajdź sumę liczb, które napisano na początku na tablicy.

Wynik. 10 010

Rozwiązanie. Niech suma wyjściowych n liczb na tablicy wynosi S. Wtedy

$$\frac{S-2026}{n-1} = \frac{S}{n} - 6,$$
$$\frac{S+2026}{n+1} = \frac{S}{n} + 4.$$

Te równania możemy uprościć do

$$S = 2032n - 6n^2,$$
$$S = 2022n - 4n^2.$$

Odejmując je stronami otrzymujemy $2n^2 = 10n$, czyli $n = 5$. Zatem $S = 2032n - 6n^2 = 10\,010$.

Zadanie 34. Pchła Ela skacze po okręgu. W pierwszym skoku przemieszcza się o 1° (to znaczy: kąt między promieniami okręgu o końcach w punktach początku i końca skoku ma miarę 1°). Wszystkie następne skoki są w tym samym kierunku, a w kolejnych krokach pchła przemieszcza się o 2°, potem 3°, i tak dalej. Po którym skoku pchła wyląduje po raz pierwszy dokładnie w punkcie, z którego zaczynała?

Wynik. 80

Rozwiązanie. Po n skokach pchła przebędzie dystans równy łukowi opartemu na kącie wewnętrznym o mierze

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

stopni. Szukamy zatem najmniejszej liczby całkowitej dodatniej n, dla której powyższe wyrażenie jest wielokrotnością liczby 360. Równoważnie oznacza to, że $n(n+1)$ jest wielokrotnością liczby $720 = 16 \cdot 9 \cdot 5$. Każdy z tych trzech czynników musi dzielić albo n albo $n+1$, bo każde dwie kolejne liczby są względnie pierwsze. Przyjrzyjmy się wielokrotnościom największego czynnika, 16 – to daje nam następujące początkowe możliwe wartości n: 15, 16, 31, 32, 47, 48, 63, 64, 79 i 80. Spośród nich tylko 15, 64, 79 i 80 są takie, że n lub $n+1$ jest podzielne przez 5, a z nich jedynie dla $n = 80$ mamy $n + 1 = 81$ podzielne przez 9. Zatem wnioskujemy, że 80 jest szukaną najmniejszą liczbą skoków.

Zadanie 35. W królestwie *Nabojlandii* są trzy gildie magiczne: Gildia Ognia, Gildia Wody i Gildia Ziemi. Każda gildia składa się z dwóch potężnych czarodziejów i dwóch chowańców. Aby obronić królestwo cztery duety, każdy złożony z jednego czarodzieja i jednego chowańca, muszą stanąć do obrony. Żaden duet nie może składać się z czarodzieja i chowańca z tej samej gildii, każda gildia musi posłać co najmniej jednego czarodzieja i co najmniej jednego chowańca do jakiegoś duetu. Na ile sposobów można wybrać te cztery duety?

Uwaga: Czarodzieje i chowańcy są rozróżnialni, zatem układy z różnymi czarodziejami lub chowańcami z tych samych gildii są różne, ale kolejność duetów nie ma znaczenia.

Wynik. 768

Rozwiązanie. Ponieważ musi zostać wybranych czterech chowańców i każda gildia musi wystawić co najmniej jednego chowańca, to liczby chowańców wystawionych przez poszczególne gildie to $(2, 1, 1)$ w pewnej kolejności. Rozumując analogicznie dla czarodziejów ich rozkład to także $(2, 1, 1)$ w pewnej kolejności.

Rozważmy dwa przypadki. W pierwszym przypadku jedna z gildii, powiedzmy X, posyła obu czarodziei oraz obu chowańców. Mamy 3 możliwości wyboru tej gildii. Z pozostałych dwóch gildii chowańcy mogą zostać wybrani na $2 \cdot 2 = 4$ sposoby, jak i czarodzieje mogą być wybrani na $2 \cdot 4$ sposoby. Dla każdego z tych wyborów chowańcy z gildii X muszą zostać sparowani z czarodziejami z pozostałych gildii, czego można dokonać na 2 sposoby. Gdy te duety są ustalone, to chowańcy z pozostałych gildii muszą zostać sparowani z czarodziejami z gildii X, co ponownie można zrobić na 2 sposoby. Zatem sumarycznie mamy $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 192$ układy w tym przypadku.

W drugim przypadku jedna z gildii (X) posyła dwóch chowańców, a inna gildia (Y) posyła dwóch czarodziejów. Są 3 możliwości wyboru gildii X oraz, po jej ustaleniu, 2 możliwości wyboru gildii Y. Pozostali chowańcy mogą być wybrani z pozostałych dwóch gildii na $2 \cdot 2 = 4$ sposoby, podobnie pozostali czarodzieje mogą zostać wybrani na $2 \cdot 2 = 4$ sposoby. Dla każdego z tych wyborów mamy $3 \cdot 2 = 6$ dopuszczalnych sposobów aby sparować czarodziejów z chowańcami: dwaj chowańcy z gildii X mogą być przypisani do dowolnej dwójki z trzech dopuszczalnych czarodziejów i gdy taki wybór zostanie dokonany pozostali chowańcy i pozostali czarodzieje są zmuszeni do sparowania się w dokładnie jeden sposób. Zatem ten przypadek daje nam $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ układów.

Sumując możliwości w obu przypadkach dostajemy $192 + 576 = 768$ szukanych sposobów.

Zadanie 36. Niech x, y będą takimi niezerowymi liczbami rzeczywistymi, że $x + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$ oraz $y + \frac{1}{x} = 3\sqrt[3]{4}$. Znajdź wartość wyrażenia $x^2y + \frac{1}{xy^2}$.

Wynik. $3\sqrt[3]{2}$

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(x + \frac{1}{y}\right) - x - \frac{1}{y}.$$

Ponadto

$$xy + \frac{1}{xy} = \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) - 2 = \sqrt[3]{2} \cdot 3\sqrt[3]{4} - 2 = 4.$$

Zatem

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

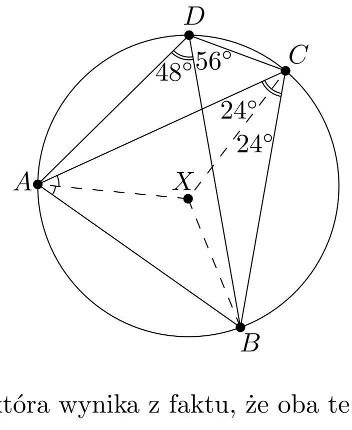
Zadanie 37. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg, w którym $\angle ADB = 48°$ i $\angle BDC = 56°$. Punkt X został wybrany wewnątrz trójkąta ABC w taki sposób, aby $\angle XCB = 24°$ i prosta AX była dwusieczną kąta BAC. Podaj miarę kąta CBX w stopniach.

Wynik. 38°

Rozwiązanie. Kąty $\angle ADB$ i $\angle ACB$ mają równe miary, ponieważ są oparte na tym samym łuku. Zatem

$$\angle ACX = \angle ACB - \angle XCB = \angle ADB - \angle XCB = 48° - 24° = 24° = \angle XCB.$$

Wynika z tego, że prosta CX jest dwusieczną kąta $\angle ACB$, czyli punkt X jest punktem przecięcia wszystkich trzech dwusiecznych trójkąta ABC (a więc jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC).



Korzystając z równości $\angle BAC = \angle BDC$, która wynika z faktu, że oba te kąty oparte są na tym samym łuku okręgu, możemy obliczyć szukaną miarę kąta:

$$\angle CBX = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180° - \angle BAC - \angle ACB}{2} = \frac{180° - 56° - 48°}{2} = 38°.$$

Zadanie 38. *Nabionicula simplex* ma bardzo prymitywny mózg podzielony na lewą i prawą półkulę, z których każda składa się z dwóch rodzajów komórek: neuronów i astrocytów. Żadna komórka nie ma połączenia z inną komórką z tej samej półkuli. Natomiast pomiędzy każdą parą komórek z różnych półkul istnieje dokładnie jedno połączenie. W mózgu pewnej *nabioniculi simplex* jest 168 połączeń między parami neuronów, 48 połączeń między parami astrocytów oraz 191 połączeń między neuronami a astrocytami. Ile jest neuronów w mózgu tego organizmu?

Wynik. 29

Rozwiązanie. Niech n_1 i a_1 oznaczają odpowiednio liczbę neuronów i astrocytów w jednej półkuli, a n_2 i a_2 liczbę neuronów i astrocytów w drugiej półkuli. Wiemy, że $n_1n_2 = 168$, $a_1a_2 = 48$ oraz $n_1a_2 + n_2a_1 = 191$. Zatem

$$(n_1 + a_1)(n_2 + a_2) = 168 + 48 + 191 = 407 = 11 \cdot 37,$$

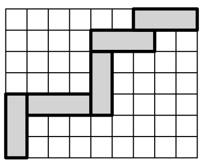
więc skoro w każdej półkuli musi być co najmniej jedna komórka każdego typu, bez straty ogólności możemy zapisać $n_1 + a_1 = 11$. Podobnie

$$(n_1 - a_1)(n_2 - a_2) = 168 + 48 - 191 = 25.$$

Różnica $n_1 - a_1$ jest mniejsza niż 11, dodatnia, bo $n_1n_2 > a_1a_2$ oraz nie może być równa 1, gdyż wtedy $a_1 = 5$ nie jest dzielnikiem $a_1a_2 = 48$. Zatem $n_1 - a_1 = 5$, czyli $n_1 = 8$ oraz $a_1 = 3$, co implikuje, że $n_2 = 168/8 = 21$ oraz $a_2 = 48/3 = 16$. Łączna liczba neuronów wynosi więc $n_1 + n_2 = 29$.

Alternatywne rozwiązanie. Zachowajmy oznaczenia z poprzedniego rozwiązania. Liczba $n_1a_2 + n_2a_1$ jest nieparzysta, zatem jeden ze składników jest nieparzysty. Bez straty ogólności załóżmy, że to n_1a_2. To oznacza, że obie liczby n_1 i a_2 są nieparzyste. Z drugiej strony, ponieważ $168 = 2^3 \cdot 21$ i $48 = 2^4 \cdot 3$, to liczba n_2 musi być podzielna przez 2^3 oraz liczba a_1 przez 2^4. Zatem liczba n_2a_1 jest wielokrotnością $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$, a ponieważ jest mniejsza od 191, to musi być równa 128, czyli $n_2 = 2^3 = 8$. Z tego wynika, że $n_1 = 168/8 = 21$, co implikuje szukaną liczbę neuronów $n_1 + n_2 = 29$.

Zadanie 39. Andrzej ma pięć identycznych prostych płytek trimino (w kształcie litery „I”), które chce tak ułożyć w ciągłą ścieżkę na prostokątnej planszy 7×9, by połączyć lewy dolny róg planszy z jej prawym górnym rogiem. Każde trimino składa się z jednego pola środkowego i dwóch pól końcowych, a każda para sąsiednich trimino na ścieżce styka się wzdłuż dokładnie jednej krawędzi pola, będącej bokiem końcowego pola w każdym trimino. Jedno z możliwych ułożeń opisanej ścieżki pokazano na rysunku poniżej. Na ile różnych sposobów Andrzej może ułożyć opisaną ścieżkę?



Wynik. 75

Rozwiązanie. Zauważmy, że Andrzej ma do dyspozycji płytki o łącznie 15 polach, zatem ścieżka nigdy nie może pójść w dół, ani w lewo – inaczej zmarnowałaby niezbędne pola płytek na nadrobienie drogi. Wynika stąd, że zaczynając układać od lewego dolnego rogu koniec każdej nowej płytki jest zawsze bardziej do góry lub bardziej na prawo od poprzedniej. Wypełniamy teraz wszystkie pola tej tablicy wpisując w każde pole liczbę możliwych ścieżek o końcu jednej z płytek w tym polu.

Pierwsze trimino może mieć koniec albo dokładnie 2 pola nad polem startowym, albo dokładnie 2 pola na prawo od niego, zatem w pola o współrzędnych $(0, 2)$ i $(2, 0)$ wpisujemy liczby 1, a w pola $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 1)$ wpisujemy 0.

Teraz wypełniamy indukcyjnie pozostałe pola, przy czym jeśli pole (x, y) ma wartość N, to dodajemy N do pól $(x + 3, y)$, $(x + 2, y + 1)$, $(x + 1, y + 2)$ i $(x, y + 3)$, oczywiście pod warunkiem, że współrzędne te występują wewnątrz naszej planszy. Zauważmy, że po wypełnieniu przekątnej $\{(x, y) :\ x + y = c\}$ wypełniamy za jej pomocą przekątną $\{(x, y) :\ x + y = c + 3\}$, więc startując z przekątnej $\{(x, y) :\ x + y = 2\}$ po czterech krokach wypełnimy pole $(8, 6)$ jako jedyne pole przekątnej $\{(x, y) :\ x + y = 14\}$ zawarte w naszej planszy. Dokładne liczby otrzymane w tym procesie zostały wypisane na rysunku poniżej. Możemy odczytać, że liczba poszukiwanych ścieżek to 75.

0	0	4	0	0	22	0	0	75
1	0	0	6	0	0	22	0	0
0	1	0	0	6	0	0	18	0
0	0	2	0	0	6	0	0	13
1	0	0	2	0	0	4	0	0
0	0	0	0	1	0	0	2	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1

Alternatywne rozwiązanie. Ułóżmy pięć płytek trimino zaczynając w polu $(0, 0)$ w taki sposób, że każde dwa sąsiednie stykają się jedynie narożnikiem (a nie krawędzią, jak w zadaniu). W ten sposób każde nowe trimino przesuwa koniec naszej ścieżki o wektor $[+1, +3]$ lub $[+3, +1]$ (w zależności od sposobu jego ułożenia). Po pięciu trimino koniec ścieżki jest na polu o współrzędnych (x, y), przy czym $x + y = 20$. Jeśli G to liczba płytek ustawionych w górę, a P to liczba płytek ustawionych w prawo, to $G + P = 5$ oraz $(x, y) = (G + 3P, 3G + P)$.

W celu uzyskania dobrej ścieżki, opisanej w treści zadania, musimy „naprawić” wszystkie 4 łączenia płytek, aby stykały się krawędziami. Każde połączenie może być naprawione na dwa sposoby – przesuwając trimino (oraz wszystkie następne po nim) o jedno pole w dół, lub o jedno pole w lewo. Niech d oznacza liczbę przesunięć w dół, a ℓ liczbę przesunięć w lewo, oczywiście $d + \ell = 4$ oraz końcowe pole ścieżki ma współrzędne $(x - \ell, y - d)$. Dobra ścieżka musi spełniać warunek $x - \ell = 9$ i $y - d = 7$.

Rozpatrzmy wszystkie przypadki par liczb (G, P):

- $(5, 0)$: $(x, y) = (5, 15)$ nie może osiągnąć $(9, 7)$ w czterech zmianach połączeń.
- $(4, 1)$: $(x, y) = (7, 13)$ również nie jest możliwe naprawienie tej ścieżki.
- $(3, 2)$: $(x, y) = (9, 11)$ wymaga $\ell = 0$, $d = 4$ (wszystkie zmiany są w dół). Istnieje $\binom{5}{3} = 10$ takich ścieżek, każda naprawiona na jeden sposób, więc łącznie 10 możliwości.
- $(2, 3)$: $(x, y) = (11, 9)$ wymaga $\ell = 2$, $d = 2$. Istnieje $\binom{5}{2} = 10$ początkowych ułożeń oraz $\binom{4}{2} = 6$ możliwości jak je naprawić, zatem mamy łącznie $10 \cdot 6 = 60$ możliwych ścieżek.
- $(1, 4)$: $(x, y) = (13, 7)$ wymaga $\ell = 4$, $d = 0$ (wszystkie zmiany są w lewo). Istnieje $\binom{5}{1} = 5$ początkowych ustawień, każde naprawione na jeden sposób, czyli łącznie 5 możliwości.
- $(0, 5)$: $(x, y) = (15, 5)$ niemożliwe do naprawy w czterech zmianach połączeń.

Podsumowując, otrzymaliśmy $10 + 60 + 5 = 75$ dobrych ścieżek.

Zadanie 40. Niech a, b, c, d będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$a + b + c + d = 2 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026.$$

Podaj wartość wyrażenia

$$\frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}.$$

Wynik. 507

Rozwiązanie. Niech $X = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$ oraz $Y = \frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}$. Skoro wyrażenie $a+2b$ pojawia się mianowniku, to moglibyśmy je skrócić gdyby w liczniku pojawiło się wyrażenie $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$, podobnie z pozostałymi mianownikami. Zatem

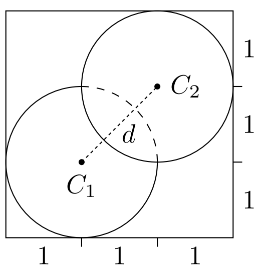
$$X - 4Y = \frac{a^2 - 4b^2}{a+2b} + \frac{b^2 - 4c^2}{b+2c} + \frac{c^2 - 4d^2}{c+2d} + \frac{d^2 - 4a^2}{d+2a} = (a - 2b) + (b - 2c) + (c - 2d) + (d - 2a) = -2.$$

Stąd dostajemy $X - 4Y = -2$, czyli $Y = \frac{1}{4}(X + 2) = \frac{2026+2}{4} = 507$.

Zadanie 41. Do pudełka w kształcie prostopadłościanu o wysokości a i podstawie będącej kwadratem o boku długości 3 wsadzono dwie piłeczki do ping-ponga będące kulami o promieniu 1. Pierwsza piłeczka jest tak umieszczona, że dotyka dwóch sąsiadujących pionowych ścian pudełka, dolną ścianę pudełka i drugą piłeczkę. Natomiast druga piłeczka jest tak umieszczona, że dotyka dwóch pozostałych pionowych ścian pudełka, górną ścianę pudełka i pierwszą piłeczkę. Wyznacz wysokość a tego pudełka.

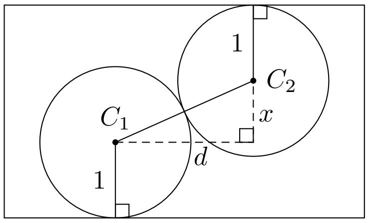
Wynik. $2 + \sqrt{2}$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez C_1 oraz C_2 środki piłeczek, a przez d poziomą odległość pomiędzy ich środkami, czyli długość odcinka C_1C_2 zrzutowanego na podstawę pudełka. Patrząc na zadaną konfigurację z góry, widzimy kwadrat o boku 3, rzut punktu C_1 znajdujący się w odległości 1 od dwóch sąsiednich ścian i rzut punktu C_2 będący w odległości 1 od dwóch innych sąsiednich ścian.



W tym widoku, rzuty punktów C_1 i C_2 leżą na przeciwległych rogach kwadratu o boku długości 1, a zatem $d = \sqrt{2}$.

Następnie rozważmy pionową płaszczyznę prostopadłą do podstawy, która przechodzi przez punkty C_1 i C_2. Część wspólna tej płaszczyzny z pudełkiem jest prostokątem o szukanej wysokości a. Niech x oznacza pionową odległość między punktami C_1 oraz C_2.



Skoro piłki się dotykają i mają promień 1, to odległość między ich środkami wynosi $C_1C_2 = 2$. W trójkącie prostokątnym z poziomą przyprostokątną d i pionową x zachodzi $C_1C_2^2 = d^2 + x^2$, więc $x = \sqrt{2^2 - d^2} = \sqrt{2}$. Pierwsza piłka dotyka dolnej podstawy pudełka, a druga górnej, więc wysokość pudełka jest sumą promienia pierwszej piłki, pionowej odległości między środkami piłek oraz promienia drugiej piłki: $a = 1 + x + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

Zadanie 42. Na ile sposobów można wypełnić tabelę 3×3 cyframi $0, 1, \ldots, 9$ w taki sposób, aby w każdym polu znalazła się dokładnie jedna cyfra, żadna cyfra nie została wykorzystana więcej niż raz oraz by wszystkie sześć sum cyfr w każdym rzędzie i w każdej kolumnie było tej samej parzystości? Przykład tabeli spełniającej te warunki, w której wszystkie wiersze i kolumny mają parzyste sumy cyfr, jest pokazany poniżej:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 8 \end{matrix}$$

Wynik. 259 200

Rozwiązanie. Skoro $0+1+\ldots+9 = 45$ jest liczbą nieparzystą, to pominięcie nieparzystej cyfry daje parzystą sumę cyfr w całej tabeli, zatem w takim przypadku wszystkie sześć sum rzędów i kolumn musi być parzyste. Takie rozmieszczenie można otrzymać korzystając z 4 cyfr nieparzystych i 5 cyfr parzystych tylko jeśli jeden rząd i jedna kolumna (5 pól) zawierają wszystkie cyfry parzyste. Zatem możemy policzyć wszystkie takie tabele poprzez wybranie cyfry, którą pomijamy (5 sposobów), następnie wybranie rzędu i kolumny, w których będą tylko cyfry parzyste ($3 \cdot 3 = 9$ sposobów), rozmieszczenie cyfr nieparzystych w dowolny sposób ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby) i finalnie rozmieszczenie liczb parzystych w dowolny sposób ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ sposobów).

Podobnie, jeśli pominiemy parzystą cyfrę, to suma wszystkich trzech rzędów (pozostałych cyfr) będzie nieparzysta, więc wszystkie rzędy i kolumny muszą dać nieparzyste sumy. Jedyny sposób rozmieszczenia pięciu nieparzystych liczb w tabeli 3×3 tak, aby każdy rząd i kolumna zawierały jedną lub trzy takie cyfry to umieścić je w jednym rzędzie i jednej kolumnie. Liczbę tabel w tym przypadku możemy policzyć tak samo jak w poprzednim przypadku, zmieniając role cyfr parzystych i nieparzystych. Zatem łączna liczba tabel to $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 120 = 259\,200$.

Zadanie 43. Suma czterech parami różnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c i d wynosi 20 000. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $\mathrm{NWW}(a, b, c, d)$, gdzie NWW oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność.

Wynik. 9600

Rozwiązanie. Oznaczmy $L = \mathrm{NWW}(a, b, c, d)$ i przyjmijmy, że $a > b > c > d$ bez straty ogólności. Te liczby są dzielnikami L, więc $L = aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich a_1, b_1, c_1, d_1. Nietrudno zauważyć, że $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$. Zatem $a_1 \geqslant 1$, $b_1 \geqslant 2$, $c_1 \geqslant 3$, $d_1 \geqslant 4$. To oznacza, że

$$a \leqslant L, \quad b \leqslant \frac{L}{2}, \quad c \leqslant \frac{L}{3}, \quad d \leqslant \frac{L}{4}.$$

Z tych zależności wynika, że

$$20\,000 = a + b + c + d \leqslant L \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25L}{12},$$

czyli $L \geqslant 12 \cdot 20\,000/25 = 9\,600$.

Aby udowodnić, że równość $L = 9\,600$ jest możliwa wystarczy przyjąć $a = 9\,600$, $b = \frac{9\,600}{2} = 4\,800$, $c = \frac{9\,600}{3} = 3\,200$ oraz $d = \frac{9\,600}{4} = 2\,400$. Suma tych czterech liczb wynosi $9\,600 + 4\,800 + 3\,200 + 2\,400 = 20\,000$. Zatem $9\,600$ jest rzeczywiście szukaną najmniejszą wartością liczby L.

Zadanie 44. Ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zadany jest wzorem $a_n = \dfrac{n^2}{1.001^n}$. Znajdź wartość n, dla której ten ciąg osiąga wartość największą.

Wynik. 2001

Rozwiązanie. Zauważmy, że $a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)^2}{1{,}001n^2} = \frac{1000(n+1)^2}{1001n^2}$. Nierówność $a_{n+1} > a_n$, czyli równoważnie $a_{n+1}/a_n > 1$, sprowadza się więc do $2000n + 1000 > n^2$, czyli $n(n-2000) < 1000$. Łatwo sprawdzić, że ta zależność zachodzi gdy $n \leqslant 2000$, bo wtedy lewa strona jest niedodatnia i nie zachodzi dla $n \geqslant 2001$. Zatem ten ciąg jest ściśle rosnący aż do wyrazu numer 2001 i z tego samego powodu, ściśle malejący od tego wyrazu. Czyli $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2000} < a_{2001}$ oraz $a_{2001} > a_{2002} > \ldots$. Zatem szukane $m = 2001$.

Zadanie 45. Pięciu przyjaciół wybiera się do teatru. Wybierają miejsca w jednym rzędzie, którego układ wygląda następująco:

Czyli: ściana, cztery bloki po sześć miejsc oddzielone trzema przejściami i druga ściana. Przyjaciele są nieśmiali, więc chcą tak wybrać pięć miejsc, aby, nawet jeśli wszystkie inne zostaną zajęte, mogli opuścić swoje miejsca bez konieczności proszenia nieznajomych osób o wstanie. Ile istnieje takich pięcioelementowych zbiorów miejsc?

Wynik. 252

Rozwiązanie. Warunek by każdy mógł bezproblemowo opuścić swoje miejsce oznacza, że wybrane miejsca muszą tworzyć spójne grupy miejsc przylegających do przejść. Chcemy więc podzielić przyjaciół na trzy grupy (niektóre mogą być puste), każda odpowiadająca osobom siedzącym przy danym przejściu. Aby to zrobić, wstawiamy $2 \cdot 3 - 1 = 5$ przegródek:

- przegródki na miejscach nieparzystych oznaczają przejścia;
- przegródki na miejscach parzystych oznaczają pozostawione miejsca pomiędzy grupami przyjaciół.

Twierdzimy, że te konfiguracje odpowiadają wszystkim poprawnym wyborom miejsc. Weźmy jedną z takich konfiguracji, np. sekwencję

$$\_\,\emptyset\, P\,\_\,\emptyset\, P\, P\,\_\, P\, P,$$

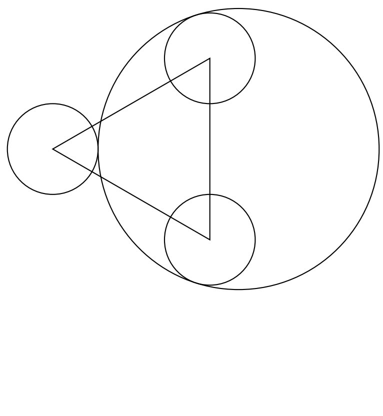
gdzie każde P oznacza jednego z przyjaciół, _ oznacza przejście, a $\emptyset$ oznacza grupę pustych miejsc. Patrząc od lewej, interpretujemy to następująco: z pierwszego bloku nie wybrano żadnego miejsca. W drugim bloku wybrano jedno miejsce przylegające do drugiego przejścia. W trzecim bloku wybrano dwa skrajne prawe miejsca, a w ostatnim bloku – dwa skrajne lewe miejsca. Z drugiej strony, istnieje dokładnie jeden sposób zakodowania każdego poprawnego wyboru miejsc, gdyż każda grupa przyjaciół musi siedzieć przy jednym przejściu, a pomiędzy przejściami musi być jedna grupa pozostawionych miejsc.

Policzymy rozmieszczenia pięciu przyjaciół (zgodnie z treścią zadania, nie rozróżniamy kto siedzi na jakim miejscu) oraz pięciu przegródek (mają dwa różne znaczenia, ale wynikają one z kolejności, więc nie potrzebujemy dodatkowego rozróżnienia podczas zliczania). Zatem musimy wybrać 5 pozycji spośród 10 możliwości, co daje

$$\binom{10}{5} = 252$$

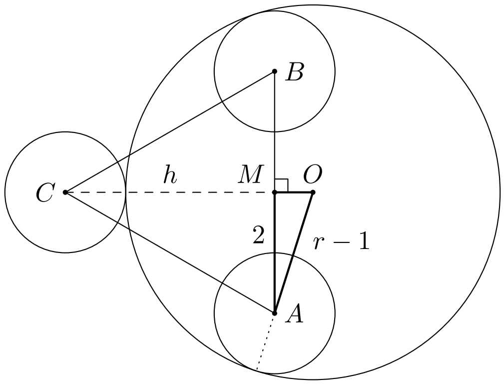
szukanych wyborów miejsc dla przyjaciół.

Zadanie 46. Rozważmy trójkąt równoboczny o boku długości 4 i narysujmy trzy okręgi o promieniu 1 i środkach w każdym wierzchołku trójkąta. Znajdź promień większego okręgu, stycznego wewnętrznie do dwóch z tych trzech okręgów i zewnętrznie do trzeciego z nich.



Wynik. $\frac{3\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Rozwiązanie. Niech ABC będzie rozważanym trójkątem równobocznym i niech „duży" okrąg ma środek w punkcie O i promień równy r. Załóżmy, że jest on styczny wewnętrznie do okręgów o środkach A i B oraz zewnętrznie do okręgu o środku w C. Wysokość trójkąta ABC to $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$. Ponieważ $OA = OB$, to punkt O leży na symetralnej odcinka AB. Niech punkt M będzie środkiem odcinka AB; wtedy $AM = 2$ i $CM = h$.



Z warunków zapewniających styczność wynika, że $OA = OB = r - 1$ oraz $OC = r + 1$. Skoro punkt O leży na prostej CM, to mamy

$$OM = OC - CM = r + 1 - h.$$

(Tu zakładamy, że punkt O leży na zewnątrz trójkąta ABC. Gdyby punkt O leżał wewnątrz tego trójkąta, to $OM = CM - OC$, czyli wartość OM^2, z której dalej korzystamy, byłaby taka sama.)

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym OMA dostajemy

$$OA^2 = OM^2 + AM^2, \quad \text{czyli} \quad (r-1)^2 = (r+1-h)^2 + 2^2.$$

Po wymnożeniu i uproszczeniu otrzymujemy

$$r = \frac{h^2 - 2h + 4}{2(h-2)}.$$

Podstawiając $h = 2\sqrt{3}$ dostajemy szukany wynik $r = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$.

Zadanie 47. W magicznej chatce są dwa pokoje: w jednym z nich są same krasnoludki, każdy o wzroście 1,2 m, a w drugim same cyklopy, każdy o wzroście 4 m. Gdy 35 cyklopów i 24 krasnoludki zamieniły pokoje, średni wzrost stworzeń w każdym pokoju był taki sam. Jaka jest najmniejsza łączna liczba krasnoludków i cyklopów, dla których jest to możliwe?

Wynik. 117

Rozwiązanie. Niech d i c oznaczają odpowiednio liczbę krasnoludków i cyklopów. Po zamianie mamy $d-24$ krasnoludków i 35 cyklopów w pierwszym pokoju oraz 24 krasnoludki i $c-35$ cyklopów w drugim. Dla wygody przyjmijmy oznaczenia $d_1 = d - 24$, $c_1 = 35$, $d_2 = 24$ i $c_2 = c - 35$ oraz oznaczmy wzrost krasnoludka przez h_d, a cyklopa przez h_c. Średni wzrost będzie równy

$$\frac{d_1 h_d + c_1 h_c}{d_1 + c_1} = \frac{d_2 h_d + c_2 h_c}{d_2 + c_2}.$$

Po uproszczeniu tego równania otrzymujemy

$$(h_c - h_d)(c_1 d_2 - d_1 c_2) = 0.$$

Wartość h_c jest różna od wartości h_d, co implikuje, że $c_1 d_2 - d_1 c_2 = 0$, czyli $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$. Intuicyjnie ten wynik ma sens; aby średni wzrost był taki sam w każdym pokoju to stosunek liczby krasnoludków do liczby cyklopów w każdym pokoju również musi być taki sam. Faktyczny wzrost nie ma znaczenia. Korzystając ze znanych wartości c_1 oraz d_2 dostajemy

$$d_1 c_2 = c_1 d_2 = 35 \cdot 24 = 840.$$

Naszym celem jest zminimalizowanie łącznej liczby stworzeń $d+c$, co jest równoważne ze zminimalizowaniem wartości d_1+c_2, ponieważ $d+c = d_1+c_2+24+35$. Dla dwóch liczb dodatnich o ustalonym iloczynie ich suma jest zminimalizowana, gdy te dwie liczby są tak bliskie sobie jak to możliwe; wynika to np. z tożsamości $(d_1 + c_2)^2 = (d_1 - c_2)^2 + 4d_1c_2$. Ponieważ szukamy rozkładu liczby 840 na dwie liczby całkowite możliwie bliskie sobie. Łatwo znajdujemy optymalną parę $840 = 28 \cdot 30$.

Zatem d_1 i c_2 to 28 i 30 (w dowolnej kolejności), a minimalna liczba stworzeń wynosi $d+c = 28+30+24+35 = 117$.

Zadanie 48. Sześciu piratów wchodzi do tawerny i siada w losowej kolejności przy okrągłym stole. Każdy z nich ma przypisany numer od 1 do 6 (każdy inny), który określa ich poziom umiejętności: wyższy numer zawsze wygra pojedynek z niższym. Aby zdecydować, kto powinien być przywódcą bandy, przeprowadzają następujący rytuał: w każdej rundzie losują jednego z piratów przy stole, który musi wyzwać do pojedynku pirata siedzącego po jego lewej stronie; przegrany w pojedynku odchodzi od stołu. Po pięciu rundach przy stole pozostanie tylko jeden pirat. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ostatni pojedynek zostanie rozegrany pomiędzy najmocniejszymi piratami, o numerach 5 i 6?

Wynik. $\frac{7}{15}$

Rozwiązanie. Przyjrzyjmy się położeniu dwóch najmocniejszych piratów, czyli numerów 5 i 6. Przyjmijmy, że ustawienie numerów przy stole ma postać (zgodnie z ruchem wskazówek zegara): $5, A_1, \ldots, A_a, 6, B_1, \ldots, B_b$, gdzie a i b to liczba piratów siedzących pomiędzy numerami 5 i 6. Niech $f(a,b)$ oznacza prawdopodobieństwo sukcesu (czyli ostatniego pojedynku między 5 i 6) przy takim układzie przy stole. Widzimy, że istotnie zależy ono jedynie od liczb a i b, a nie zależy od ustawienia pozostałych liczb przy stole, ponieważ 5 i 6 wygrają każdy pojedynek z piratami A_i, B_i, a pojedynek wewnątrz bloku A lub B jedynie redukuje jego długość o 1.

Jeśli $a = 0$ lub $b = 0$, to numery 5 i 6 są sąsiednie już na początku. Zatem w każdym losowaniu jedynie jeden wybór wymusza ich pojedynek, który chcemy uniknąć, czyli

$$f(a,0) = f(0,b) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{n} = \frac{2}{a+b+2},$$

gdzie $n = a + b + 2$ to liczba piratów w grze.

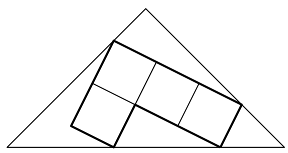
Przyjmijmy, że $a, b \geqslant 1$ oraz $n = a + b + 2$, jak poprzednio. Rozważmy zbiór sąsiednich piratów $5, A_1, \ldots, A_a$, czyli zawierający $a + 1$ osób. Jeśli którykolwiek z tych piratów zostanie wybrany, to nie wpłynie to na pozostałych (poza zbiorem), gdyż pojedynek rozegra się wewnątrz tego zbioru lub będzie pojedynkiem $A_a - 6$, co skończy się eliminacją A_a. Zatem wybór gracza z tego zbioru zmniejsza a o 1. Analogicznie, wybór gracza spoza tego zbioru zmniejsza b o 1. Wynika stąd, że

$$f(a,b) = \frac{a+1}{n} f(a-1,b) + \frac{b+1}{n} f(a,b-1).$$

Na początku mamy $a + b = 4$. Możemy teraz obliczyć każdą wartość $f(a,b)$ bazując na przypadkach brzegowych: $f(0,4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $f(0,3) = \frac{2}{5}$, $f(0,2) = \frac{1}{2}$, $f(0,1) = \frac{2}{3}$ oraz symetrii $f(a,b) = f(b,a)$. Ponieważ wybór miejsc przy stole jest losowy, więc wartość a jest wybrana ze zbioru $\{0,1,2,3,4\}$ z jednakowym prawdopodobieństwem, czyli prawdopodobieństwo sukcesu w opisanej grze wynosi

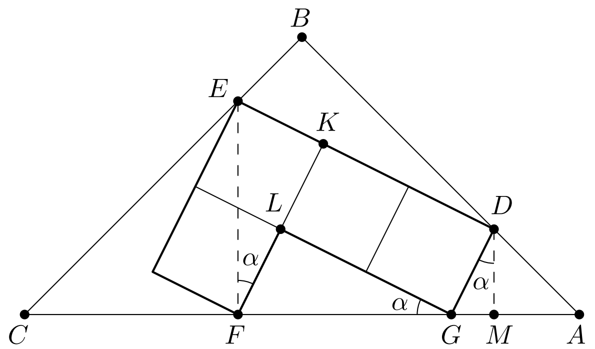
$$\frac{1}{5}\big(f(0,4) + f(1,3) + f(2,2) + f(3,1) + f(4,0)\big) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{8}{15} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{15}.$$

Zadanie 49. Tetromino w kształcie litery „L”, złożone z czterech przystających kwadratów złączonych bokami, wpisane jest w równoramienny trójkąt prostokątny, jak na obrazku poniżej. Jaki jest stosunek pola tego tetromina do pola trójkąta?



Wynik. $\frac{80}{169}$

Rozwiązanie. Oznaczmy punkty jak na rysunku poniżej. Jeśli ustalimy długość boku każdego z kwadratów w tetrominie jako 1, to aby poznać szukany stosunek wystarczy obliczyć długość jednego z boków trójkąta ABC, np. przeciwprostokątnej AC.



Korzystając z prostej pomocniczej EF otrzymujemy trójkąt prostokątny EFK, w którym $\angle EKF = 90°$, a boki mają długości $EK = 1$, $KF = 2$ i $EF = \sqrt{5}$. Skoro $GL = 2$ i $LF = 1$ oraz $\angle FLG = 90°$, to trójkąty EFK i FGL są przystające. Otrzymujemy stąd, że $GF = EF = \sqrt{5}$. Niech α oznacza miarę kąta $\angle LGF$. Wtedy także $\angle KFE = \alpha$ i możemy wywnioskować, że $\angle GFE = 90°$, ponieważ kąt α dopełnia kąt $\angle GFL$ do $90°$. To jednakże oznacza, że trójkąt FEC jest równoramiennym trójkątem prostokątnym o boku długości $FC = \sqrt{5}$. Teraz wprowadzimy kolejną prostą pomocniczą rzutując prostopadle punkt D na prostą AC tworząc punkt M. Z równości $\angle LGF + \angle MGD = 90°$ dostajemy $\angle GDM = \alpha$, więc trójkąt MDG jest podobny do trójkąta FGL w skali $\sqrt{5}$. Zatem długości boków trójkąta MDG to $MG = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $MD = \frac{2}{\sqrt{5}}$ oraz $DG = 1$. Skoro trójkąt MAD jest również równoramiennym trójkątem prostokątnym, to finalnie dostajemy $AM = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Zatem

$$AC = AM + MG + GF + FC = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = \frac{3 + 2 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Wynika z tego, że pole trójkąta ABC wynosi

$$\frac{1}{2}AB^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{AC}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{169}{20},$$

a szukany stosunek $\frac{4}{\frac{169}{20}} = \frac{80}{169}$.

Zadanie 50. Ciąg a_n zdefiniowany jest następująco: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ oraz $a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} + 3^{a_{n+1}} + 3^{a_n}$ dla $n \geqslant 1$. Ile wynosi reszta z dzielenia a_{22} przez 49?

Wynik. 11

Rozwiązanie. Wyraz a_{22} jest sumą potęg liczby 3, których wartość modulo 49 można wyznaczyć korzystając z twierdzenia Eulera. Skoro $\mathrm{NWD}(3, 49) = 1$ i $\varphi(49) = 42$, to

$$3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 42} \pmod{49}.$$

Aby obliczyć $a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \pmod{49}$ wystarczy znać wartości $a_{21}, a_{20}, a_{19} \pmod{42}$. Korzystając z chińskiego twierdzenia o resztach, jest to równoważne wyznaczeniu tych wartości modulo 6 i 7. Najpierw zauważmy, że dla $n \geqslant 4$ każdy wyraz a_n jest sumą trzech potęg liczby 3, a więc jest liczbą nieparzystą i podzielną przez 3, czyli $a_n \equiv 3 \pmod{6}$. Skoro $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ (ponownie z twierdzenia Eulera), to $3^{a_n} \equiv 3^3 \pmod{7}$ dla $n \geqslant 4$. Dla $n \geqslant 7$ (więc $n-1, n-2, n-3 \geqslant 4$) mamy

$$a_n = 3^{a_{n-1}} + 3^{a_{n-2}} + 3^{a_{n-3}} \equiv 3^3 + 3^3 + 3^3 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Łącząc udowodnione kongruencje za pomocą chińskiego twierdzenia o resztach otrzymujemy $a_n \equiv 39 \equiv -3 \pmod{42}$ dla $n \geqslant 7$. Używając po raz kolejny twierdzenia Eulera dostajemy $3^{a_n} \equiv 3^{-3} \pmod{49}$ dla $n \geqslant 7$, gdzie ujemny wykładnik oznacza odwrotność modulo. Ostatecznie otrzymujemy

$$a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \equiv 3^{-3} + 3^{-3} + 3^{-3} = 3^{-2} = 9^{-1} \equiv 11 \pmod{49},$$

bo $9 \cdot 11 = 99 \equiv 1 \pmod{49}$. Stąd szukana reszta wynosi 11.

Zadanie 51. Na początku nieskończenie długiej drogi Grześ siedzi w swojej Ducii Daster z pustym bakiem. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$, dokładnie n^2 kilometrów od startu stoi handlarz z paliwem. Grześ może od każdego z nich kupić całkowitą liczbę litrów paliwa. Handlarze nie lubią sprzedawać dużych ilości paliwa, dlatego koszt za litr u danego handlarza rośnie z każdym kolejnym kupionym u niego litrem: pierwszy kosztuje 1 zł, drugi kosztuje 2 zł, trzeci kosztuje 3 zł i tak dalej. Każdy litr paliwa pozwala Grzesiowi przejechać dokładnie 1 km. Zarówno zapas paliwa u każdego z handlarzy, jak i pojemność baku samochodu Grzesia są nieograniczone. Ile najwięcej kilometrów Grześ może przejechać za 730 zł?

Wynik. 123

Rozwiązanie. Aby dotrzeć do handlarza stojącego n^2 kilometrów od startu, Grześ może kupić paliwo od każdego z poprzednich n handlarzy. Minimalny koszt możemy osiągnąć kupując dokładnie n litrów paliwa od każdego handlarza, ponieważ każdy „nierównomierny" zakup jedynie zwiększa łączny koszt.

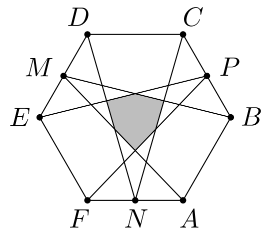
Możemy pokazać, że istotnie strategia „kup n litrów u każdego handlarza" pozwoli osiągnąć n^2 kilometrów (czyli, że nie zabraknie paliwa nigdzie po drodze). Pokazujemy to przez prostą indukcję. Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że możliwe jest osiągnięcie k^2 kilometrów kupując u każdego k litrów. Wtedy jeśli zmienimy strategię na kupno $k + 1$ litrów na pewno nie zabraknie tego paliwa do k^2 kilometrów, a wtedy kupujemy kolejne $k + 1$ litrów łącznie kupując przez całą drogę $(k + 1)^2$ litrów, czyli dokładnie tyle, by osiągnąć $(k + 1)^2$ kilometrów, stąd teza indukcyjna zachodzi.

Zatem koszt, aby przejechać n^2 kilometrów wynosi co najmniej

$$C_n = n\,(1 + 2 + \ldots + n) = n\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

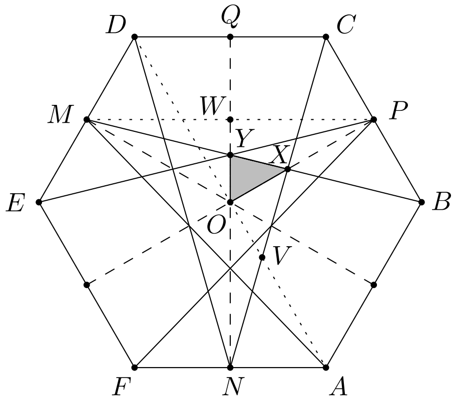
Skoro $C_{11} = 726 \leqslant 730 < C_{12}$, to Grześ może przejechać 11^2 km za taką kwotę, ale nie może przejechać 12^2 km. Za pozostałe 4 zł może kupić kolejne 2 litry 11^2 kilometrów od startu, co pozwoli mu przejechać w sumie 123 kilometry. Chcąc przejechać 124 kilometry Grześ musiałby wydać 2 zł więcej. Taki sposób tankowania jest optymalny pod względem wydanych pieniędzy: nie ma sensu kupować więcej paliwa od ostatniego handlarza, a zwiększanie ilości paliwa zakupionego od wcześniejszych handlarzy kosztuje co najmniej 12 zł więcej za litr.

Zadanie 52. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem foremnym o polu równym 420. Niech punkty M, N i P będą odpowiednio środkami boków DE, FA i BC. Odcinki AM, BM, CN, DN, EP i FP ograniczają zacieniowaną figurę zaznaczoną na rysunku. Wyznacz pole tej figury.



Wynik. 36

Rozwiązanie. Zacieniowany obszar można rozłożyć na sześć przystających trójkątów; obliczymy pole jednego z nich. Niech punkt O będzie środkiem sześciokąta, X punktem przecięcia prostych BM i CN, a Y punktem przecięcia prostych BM i PE. Ponadto zdefiniujmy następujące punkty: Q jako środek odcinka CD, V jako punkt przecięcia prostych AD i CN oraz W jako punkt przecięcia prostych PM i QN. Pokażemy, że $OX : OP = 2 : 5$ oraz $OY : OQ = 2 : 7$.



Skoro trójkąty NAV i CDV są podobne oraz $NA = \frac{1}{2}CD$, to $AV : VD = 1 : 2$, więc $OV = \frac{1}{3}OA$. Trójkąt OVX jest podobny do trójkąta PCX oraz $PC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}OA$, czyli $OV : PC = 2 : 3$, co jest równe stosunkowi $OX : PX$. Wnioskujemy stąd, że $OX : OP = 2 : 5$.

W celu pokazania, że $OY : OQ = 2 : 7$, wykorzystamy podobieństwo trójkątów OBY i WMY. Wynika z niego równość $WM = \frac{3}{4}OB$, co oznacza, że $OY : YW = 4 : 3$. Łącząc tę równość z równością $OW = WQ$, dostajemy $OY : OQ = 2 : 7$.

Trójkąty OXY i OPQ mają wspólny kąt $\angle POQ$, więc

$$\frac{P_{OXY}}{P_{OPQ}} = \frac{OX}{OP} \cdot \frac{OY}{OQ} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}.$$

Ponadto, trójkąt OPQ jest równoboczny o boku długości $\frac{\sqrt{3}}{2}$ boku trójkąta ABO, więc $P_{OPQ} = \frac{3}{4}P_{ABO}$. Zatem

$$\frac{P_{OXY}}{P_{ABO}} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}.$$

Zacieniowana figura składa się z sześciu kopii trójkąta OXY, a sześciokąt składa się z sześciu kopii trójkąta ABO, więc stosunek pól tych figur jest taki sam. Wynika z tego, że pole zacieniowanej figury to $\frac{3}{35} \cdot 420 = 36$.

Zadanie 53. Dorotka jest mistrzynią przekształceń algebraicznych, dlatego rozważyła wszystkie wyrażenia postaci $\pm a \pm b \pm c \pm d$ (łącznie 16 wyrażeń, po jednym dla każdej kombinacji znaków), pomnożyła je przez siebie i otrzymała w ten sposób wielomian czterech zmiennych a, b, c, d. Następnie odrzuciła jednomiany, w których nie było wszystkich czterech zmiennych. Jaka jest suma współczynników przy pozostałych jednomianach?

Wynik. -328

Rozwiązanie. Niech P będzie wielomianem z treści zadania. Przypisując każdej zmiennej wartość 1 obliczony iloczyn zawiera $(1+1-1-1)=0$ jako jeden z czynników, zatem suma wszystkich współczynników wielomianu P wynosi 0. Policzymy teraz sumę współczynników przy odrzuconych jednomianach korzystając w tym celu z zasady włączeń i wyłączeń.

Aby rozpocząć obliczanie sumy współczynników przy jednomianach, w których nie ma co najmniej jednej zmiennej, rozważymy sytuacje gdzie ustalona zmienna przyjmuje wartość zero, a następnie zsumujemy otrzymane wartości. W ten sposób każdy jednomian, w którym brakuje jakiejś zmiennej policzymy co najmniej raz. Aby zsumować sumę współczynników przy jednomianach niezawierających, na przykład d, obliczamy wartość P w punkcie $a=b=c=1$ i $d=0$ otrzymując, że $P(1,1,1,0)$ jest równe

$$\big((1+1+1)(1+1-1)(1-1+1)(1-1-1)(-1+1+1)(-1+1-1)(-1-1+1)(-1-1-1)\big)^2 = 9^2 = 81.$$

Sumując te wartości dla każdej z czterech „brakujących” zmiennych dostajemy $4\cdot 81 = 324$. W tej sumie dwukrotnie liczymy każde wyrażenie z tylko dwoma zmiennymi, zatem musimy odjąć $P(1,1,0,0)=0$ sześć razy, ponieważ jest sześć par zmiennych. Finalnie, musimy dodać z powrotem wszystkie wyrażenia z tylko jedną zmienną, zatem dodajemy $P(1,0,0,0)=1$ cztery razy. Łącznie te współczynniki sumują się do $324+4=328$, a skoro suma wszystkich współczynników wielomianu P jest równa zero, to suma współczynników przy pozostałych jednomianach (tych zawierających wszystkie cztery zmienne) wynosi -328.

Zadanie 54. Kacper ma 9 000 przystających trójkątów równobocznych. Ile różnych czworokątów, składających się ze wszystkich 9 000 trójkątów, da się ułożyć bez nakładania trójkątów na siebie? Czworokąty przystające do siebie uznajemy za takie same.

Wynik. 30

Rozwiązanie. Kąt przy wierzchołku czworokąta utworzony przez złączenie dwóch przystających trójkątów równobocznych może mieć miarę jedynie $60°$ lub $120°$. Ponieważ suma kątów w czworokącie wynosi $360°$, to miary kątów utworzonego czworokąta muszą być równe $60°, 60°, 120°$ i $120°$. Można zatem ułożyć tylko dwa rodzaje czworokątów: równoległoboki lub trapezy równoramienne, w zależności od wzajemnego położenia równych kątów.

W przypadku równoległoboków jeśli oznaczymy długości boków utworzonej figury jako a i b, to składać się ona będzie z $2ab$ trójkątów (możemy pomyśleć o ab równoległobokach złożonych tylko z dwóch trójkątów), zatem szukamy takich par $\{a,b\}$, że $ab=4500$. Jest ich 18, bo liczba 4500 ma 36 dzielników.

W przypadku trapezów zauważmy, że możemy rozważać taki trapez jako różnicę dwóch trójkątów równobocznych. Trójkąt o boku n składa się z n^2 trójkątów (jeśli podzielimy go na warstwy to otrzymamy sumę n pierwszych liczb nieparzystych), zatem chcemy aby $a^2-b^2=(a+b)(a-b)=9000$, gdzie a to długość dłuższej podstawy, a b to długość krótszej podstawy tego trapezu. Ponownie szukamy par dzielników, ale teraz zarówno $a+b$ jak i $a-b$ muszą być parzyste, aby powstały układ równań miał rozwiązanie całkowite. Liczba 9000 ma 24 dzielniki parzyste o tej własności, że iloraz 9000 przez ten dzielnik również jest parzysty (odpowiadają one dzielnikom $9000/4$). Dają one 12 par $a+b$ i $a-b$ spełniających wszystkie warunki, które wyznaczają 12 spełniających warunki liczb a i b.

Łącznie zatem jest $18+12=30$ szukanych czworokątów.

Zadanie 55. Łukasz powiesił w oknie lampki choinkowe składające się z 10 żarówek ustawionych w linii. Niestety nie wszystkie z nich się świecą. Wiadomo, że nie ma czterech kolejnych żarówek, które świecą naprzemiennie (to znaczy nie ma pod rząd świecącej, nieświecącej, świecącej, nieświecącej, ani nieświecącej, świecącej, nieświecącej, świecącej). Na ile różnych sposobów mogą świecić się lampki Łukasza?

Wynik. 548

Rozwiązanie. Oznaczmy świecącą żarówkę przez 1, a nieświecącą przez 0, wtedy zadanie polega na zliczeniu ciągów binarnych długości 10, które nie zawierają bloków 0101 i 1010. Zdefiniujmy przekształcenie polegające na odwróceniu wartości na wszystkich pozycjach parzystych (czyli zastępujemy x_i przez $1-x_i$ dla parzystych i, a dla nieparzystych pozostawiamy bez zmian). Zastosowanie tego przekształcenia dwa razy daje z powrotem początkowy ciąg, więc jest to bijekcja. Ponadto, taka zamiana powoduje, że naprzemienny blok 0101 lub 1010 zmienia się odpowiednio w 0000 lub 1111. Wobec tego pierwotne ciągi są w bijekcji z ciągami, które nie zawierają bloku czterech kolejnych jednakowych bitów, co jest wygodniejsze do zliczania.

Niech B_n oznacza liczbę ciągów binarnych długości n, które nie zawierają bloku czterech kolejnych jednakowych bitów. Pokażemy, że dla $n>3$ zachodzi $B_n = B_{n-1}+B_{n-2}+B_{n-3}$. Weźmy dowolny poprawny ciąg długości n i spójrzmy na ostatnie cyfry. Najdłuższy możliwy blok jednakowych cyfr może składać się z jednej, dwóch lub trzech cyfr, a przypadki te są rozłączne. Jeśli nasz blok jednakowych cyfr jest długości $k\in\{1,2,3\}$, usunięcie ostatnich k cyfr daje poprawny ciąg długości $n-k$. Odwracając sytuację, z dowolnego poprawnego ciągu długości $n-k$, możemy stworzyć poprawny ciąg długości n dopisując jednoznacznie wyznaczony blok długości k (najpierw dopisując cyfrę przeciwną do ostatniej, a następnie powtarzając ją tak, aby łącznie dopisać k cyfr). Zatem poprawne ciągi długości n są w bijekcji z poprawnymi ciągami długości $n-1$, $n-2$ i $n-3$, co prowadzi do powyższej zależności rekurencyjnej.

Dla $n \leqslant 3$ można w łatwy sposób policzyć, że $B_1 = 2$, $B_2 = 4$ i $B_3 = 8$ bo wszystkie ciągi spełniają warunek. Korzystając z udowodnionej rekurencji otrzymujemy $B_4 = 14$, $B_5 = 26$, $B_6 = 48$, $B_7 = 88$, $B_8 = 162$, $B_9 = 298$ i ostatecznie $B_{10} = 548$.

Zadanie 56. Znajdź dodatnią liczbę całkowitą a spełniającą równanie

$$\left(\frac{23+\sqrt{23^2-4}}{2}\right)^5 = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^2.$$

Wynik. 2525

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$\frac{23+\sqrt{23^2-4}}{2} = \frac{23+5\sqrt{21}}{2} = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2.$$

W takim razie zadanie sprowadza się do rozwiązania równania

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^5.$$

Przekształcając dalej otrzymujemy

$$\begin{aligned} a+\sqrt{a^2-4} &= \frac{5^5+\binom{5}{2}\cdot 5^3\cdot 21+\binom{5}{4}\cdot 5^1\cdot 21^2}{16} + \frac{\binom{5}{1}\cdot 5^4\cdot\sqrt{21}+\binom{5}{3}\cdot 5^2\cdot\sqrt{21}^3+\sqrt{21}^5}{16} \\ &= \frac{3125+10\cdot 2625+25\cdot 441}{16} + \frac{(5^5+21\cdot 250+21^2)\cdot\sqrt{21}}{16} \\ &= 2525+551\cdot\sqrt{21}. \end{aligned}$$

Porównując części wymierne i niewymierne otrzymujemy $a = 2525$. Aby sprawdzić czy rzeczywiście jest to rozwiązanie, wystarczy podstawić $a = 2525$ do wyrażenia a^2-4, co daje dokładnie $2525^2-4 = 6375621 = 551^2\cdot 21$. Rozwiązanie jest unikalne: dla $a \geqslant 2$ wyrażenie $a+\sqrt{a^2-4}$ jest ściśle rosnące (oba składniki rosną wraz z a), więc równanie może mieć co najwyżej jedno dodatnie rozwiązanie całkowite.

Alternatywne rozwiązanie. Niech $\alpha = \frac{1}{2}(23+\sqrt{23^2-4})$. Skoro α jest pierwiastkiem równania $t^2-23t+1=0$, a drugim pierwiastkiem jest α^{-1}, to zachodzi równość $\alpha+\alpha^{-1} = 23$. Niech $\beta = \frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4})$. Jest to pierwiastek równania $t^2-at+1=0$ i jak w poprzednim przypadku $\beta+\beta^{-1} = a$. Z treści wiemy, że a jest ograniczone do liczb dodatnich, więc β również musi być liczbą dodatnią.

Dane równanie to $\alpha^5 = \beta^2$. Niech $x = \beta^{1/5}$, więc $x > 0$. Wtedy $x^2 = \alpha$ i $x^2+x^{-2} = 23$. Następnie niech $y = x+x^{-1}$ (więc $y > 0$) oraz $y^2 = x^2+x^{-2}+2 = 25$, czyli $y = 5$.

Naszym celem jest znalezienie wartości $a = x^5+x^{-5}$; wykorzystując poprzednie równości i podnosząc do odpowiedniej potęgi otrzymujemy

$$y^5 = (x+x^{-1})^5 = (x^5+x^{-5})+5(x^3+x^{-3})+10(x+x^{-1}),$$

więc

$$a = y^5-5(x^3+x^{-3})-10y.$$

Pozostało nam wyrazić x^3+x^{-3} za pomocą y, co można uczynić w podobny sposób

$$y^3 = (x+x^{-1})^3 = (x^3+x^{-3})+3(x+x^{-1}),$$

więc

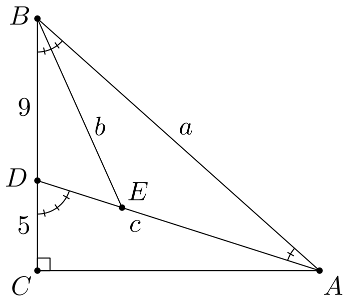
$$x^3+x^{-3} = y^3-3y.$$

Łącząc to z poprzednim równaniem, otrzymujemy $a = y^5-5y^3+5y$, co jest równe 2525 po podstawieniu $y = 5$.

Zadanie 57. W trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym przy wierzchołku C na boku BC znajduje się taki punkt D, że $BD = 9$ i $DC = 5$. Wyznacz długość odcinka AB, zakładając, że $\angle ADC = 3\angle BAD$.

Wynik. 21

Rozwiązanie. Z bezpośredniej analizy kątów mamy $\angle ABD = 2\angle DAB$. Narysujmy dwusieczną $\angle ABC$, która przecina AD w punkcie E. Skoro BE dzieli $\angle ABD$ na dwa równe kąty, to $\angle ABE = \angle EBD = \angle DAB$ oraz $AE = EB$. Stąd wynika, że trójkąty DBE i DAB są podobne, więc $DB : DA = DE : DB = BE : AB$.



Niech $AB = a$, $AE = EB = b$ i $AD = c$. Wtedy $DE = c - b$ i dostajemy

$$\frac{9}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c-b}{9}.$$

Stąd otrzymujemy $c^2 = bc + 81$ i $bc = 9a$, co w uproszczeniu daje $c^2 = 9a + 81$. Skoro trójkąty ACD i ABC są prostokątne z kątem prostym przy wierzchołku C, to

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = a^2 - (9+5)^2 = a^2 - 196$$

oraz

$$AC^2 = AD^2 - DC^2 = c^2 - 25.$$

Przyrównując te wyrażenia i podstawiając $c^2 = 9a + 81$ otrzymujemy

$$a^2 - 196 = 9a + 56,$$

$$a^2 - 9a - 252 = 0.$$

Równanie to ma tylko jedno dodatnie rozwiązanie $a = 21$.