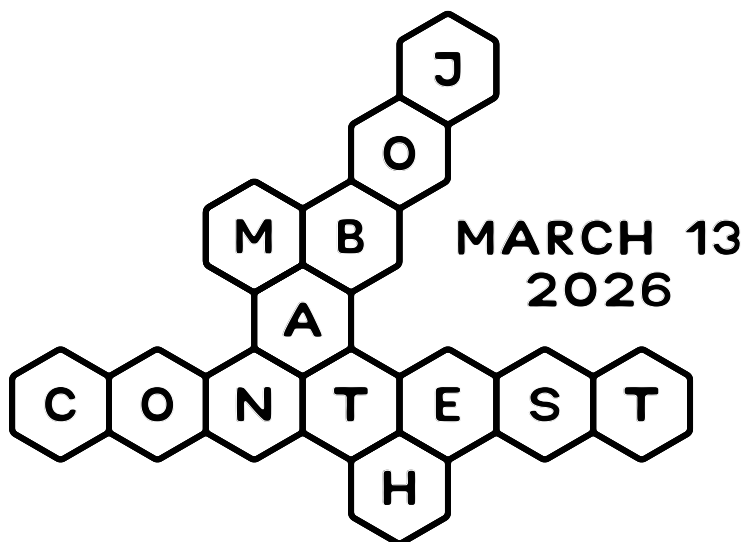


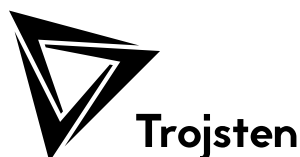


Vzorové riešenia
29. ročník Matematického Náboja

13. marca 2026



MATH.NABOJ.ORG



FAKULTA MATEMATIKY,
FYZIKY A INFORMATIKY
Univerzita Komenského
v Bratislave



Úloha 1. Jarka na jarmoku našla atrakciu, kde sa zhadzujú plechovky z políc. Každá z týchto plechoviek je označená nejakým číslom. Súťažiaci má možnosť zhodit' ľubovoľné z plechoviek. Keď sa rozhodne skončiť, zistí sa, či súčet čísel na ním zhodených plechovkách je 50 a ak áno, vyhral. V opačnom prípade má smolu. Určte, ktoré plechovky z obrázka má Jarka zhodit', a zapíšte ich čísla v rastúcom poradí.

				24						
		16			30					
			18			6			36	
9			33			28				3

Výsledok. 6, 16, 28

Riešenie. Väčšina z čísel na plechovkách sú násobky troch. Číslo 50 dáva zvyšok 2 po delení tromi. Z toho vyplýva, že aj na plechovkách, ktoré zhodí Jarka, musí súčet dávať zvyšok 2 po delení tromi. Jediné čísla, ktoré nie sú násobkami troch, sú 16 a 28. Z argumentu vyššie preto Jarka vie, že musí byť použité aspoň jedno z nich.

Ak by však Jarka zhodila iba jedno z nich, tak keďže 16 aj 28 dáva zvyšok 1 po delení tromi, výsledok by stále dával zvyšok 1 po delení tromi. To znamená, že Jarka musí zhodit' obe plechovky 16, 28. Tieto dokopy dávajú súčet 44, čiže do 50 chýba 6. To vie Jarka dostať iba zhoditím plechovky 6 (pretože jediná menšia plechovka je 3). Preto plechovky, ktoré Jarka chce zhodit', sú 6, 16, 28.

Úloha 2. Andrej ako zarytý programátor má červenú, zelenú a modrú kocku. Každá z nich má steny očíslované číslami 1 až 6. Andrej hodí všetkými tromi kockami naraz a zistí, aký súčet mu padol dokopy. Koľkými možnými spôsobmi mohol dostať výsledok 8?

Výsledok. 21

Riešenie. Ak by nezáležalo na poradí, existuje päť možností, ako mohol Andrej získať súčet 8 pri hode tromi kockami:

$$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2.$$

V prípade $6 + 1 + 1$ môže číslo 6 padnúť na červenej, zelenej alebo modrej kocke. Preto máme v prípade $6 + 1 + 1$ tri možnosti. Analogicky máme tri možnosti aj v prípadoch $4 + 2 + 2$ a $3 + 3 + 2$.

V prípade $5 + 2 + 1$ máme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností, ako rozdeliť tieto čísla medzi tri kocky. To isté platí aj v prípade $4 + 3 + 1$.

Celkovo teda dostávame $3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21$ možností.

Úloha 3. Baška ako učiteľka má veľa detí – konkrétne 4. Uvedomila si, že jej aktuálny vek je rovnaký ako súčet vekov jej troch najstarších detí. Zároveň, o 6 rokov bude jej vek rovnaký ako súčet vekov jej troch najmladších detí. O koľko je Baškino najstaršie dieťa staršie ako Baškino najmladšie dieťa?

Výsledok. 12

Riešenie. Nech a je Baškin vek a $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$ sú veki jej detí. Zo zadania vyplývajú rovnice

$$a = c_2 + c_3 + c_4 \quad \text{a} \quad a + 6 = (c_1 + 6) + (c_2 + 6) + (c_3 + 6).$$

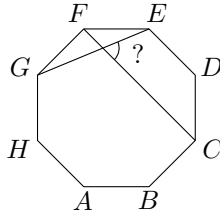
Dosadením prvej rovnice do druhej dostaneme $c_2 + c_3 + c_4 + 6 = c_1 + c_2 + c_3 + 18$, čo po úprave dáva $c_4 = c_1 + 12$. Najstaršie dieťa je teda o 12 rokov staršie ako najmladšie dieťa.

Úloha 4. Lukáš nevie určovať čas z ručičkových hodín, a tak si kúpil digitálne, ktoré zobrazujú časy od 00:00 do 23:59 (čiže sa vždy zobrazujú aj nuly na začiatku). Koľkokrát za deň nastane situácia, že na displeji sa zobrazujú práve štyri z piatich cifier 1, 2, 3, 4, 5 (no nezáleží na tom, v akom sú poradí)?

Výsledok. 36

Riešenie. Počet hodín musí byť dvojciferné číslo menšie alebo rovné 23, pričom obe cifry sú rôzne a vybrané z množiny $1, \dots, 5$. Jediné možnosti sú 12, 13, 14, 15, 21 a 23. Pre každú z týchto hodín sme už použili dve cifry, takže zostávajú tri cifry, z ktorých musíme vytvoriť minúty pomocou dvoch rôznych cifier. To možno urobiť $3 \cdot 2 = 6$ spôsobmi, a všetky takto vzniknuté dvojciferné čísla predstavujú platné minúty. Ku každej zo šiestich prípustných možností na počet hodín teda máme šesť možností na počet minút, spolu teda $6 \cdot 6 = 36$ možností.

Úloha 5. Uponáhľanému Marekovi povedali, že sa má na chvíľu zastaviť, a vykonal tak na značke STOP. Značka má tvar pravidelného osemuholníka $ABCDEFGH$. Pomôžte Marekovi zistiť, aká je veľkosť ostrého uhla medzi uhlopriečkami CF a EG .



Výsledok. $67,5^\circ$

Riešenie. Nech X je priesečník daných uhlopriečok. Namiesto počítania veľkosti uhla $\sphericalangle CXE$ budeme počítat veľkosť uhla $\sphericalangle FXG$, keďže sú rovnako veľké. Najprv si všimnime, že $|\sphericalangle GFX| = |\sphericalangle GFC| = 90^\circ$, pretože štvoruholník $BCFG$ je obdĺžnik.

Ďalej, keďže trojuholník EFG je rovnoramenný a $|\sphericalangle GFE| = 135^\circ$, platí, že $|\sphericalangle XGF| = |\sphericalangle EGF| = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22,5^\circ$. Z trojuholníka FGX potom dostávame, že $|\sphericalangle FXG| = 180^\circ - 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$.

Úloha 6. Keď bol Danko učiť matematiku, napísal na tabuľu päť rôznych kladných celých čísel $a < b < c < d < e$ aritmetickým priemerom 16. Aké je najväčšie možné d , ktoré mohlo byť na tabuli?

Výsledok. 36

Riešenie. Podmienka o aritmetickom priemere nám vraví, že

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 16,$$

čo vieme upraviť na $a + b + c + d + e = 80$. Aby sme našli čo najväčšie d , potrebujeme čo najviac znížiť ostatné čísla tak, aby sme nezmenili ich usporiadanie. Najmenšie možné hodnoty sú $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ a zároveň musí platiť $e \geq d + 1$. Preto

$$80 = a + b + c + d + e \geq 1 + 2 + 3 + d + (d + 1) = 7 + 2d,$$

z čoho dostávame $2d \leq 73$, teda $d \leq 36$ (kvôli tomu, že d je celé číslo). Už len ostáva overiť, či 36 ako druhé najväčšie číslo na tabuli naozaj vieme dosiahnuť. Všimnime si, že pre čísla $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 3, 36, 38)$ je ich súčet 80 a sú aj správne usporiadané. Najväčšia možná hodnota d je teda 36.

Úloha 7. Cestovateľ Skaloš narazil na starovekú skalnú bránu v púšti, kde priechod blokovala sfinga. Povedala mu: „Ak vyriešiš moju hádanku, pustím Ťa. Myslím si trojciferné číslo, ktoré

- je nepárne,
- má všetky cifry rôzne a zľava doprava sa zvyšujú,
- je deliteľné 9, no po odstránení ktorejkoľvek cifry deliteľné 9 už nebude
- a obsahuje cifru 6.

Ktoré číslo si myslím?“

Výsledok. 567

Riešenie. Z deliteľnosti číslom 9 vyplýva, že súčet cifier je 9 alebo 18. Zároveň nám to hovorí, že žiadna z použitých cifier nemôže byť cifra 9.

Keďže číslo je nepárne, cifra 6 nemôže byť na mieste jednotiek, takže sa nachádza na mieste stoviek alebo desiatok. Nemôže byť na mieste stoviek, pretože potom by najmenší možný súčet cifier bol $6 + 7 + 8 = 21 > 18$. Preto je 6 na mieste desiatok.

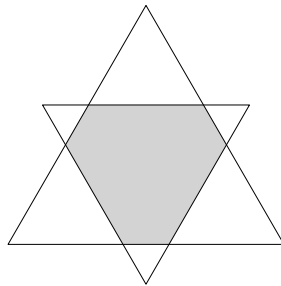
O cifre na mieste jednotiek už teda vieme, že musí byť aspoň 7, no zároveň to nemôže byť deviatka (spomenuté vyššie) ani osmička (číslo by nebolo nepárne). Preto jednotková cifra je 7, takže súčet cifier musí byť 18, z čoho už priamo vidíme, že cifra na mieste stoviek je 5.

Sfinga si teda myslela číslo 567.

Úloha 8. Nate si ako majster trojuholníkov vytvoril dva rovnostranné trojuholníky so stranami dĺžok 17 cm a 11 cm a uložil ich ako na obrázku, kde

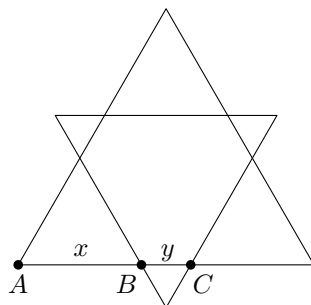
- prislúchajúce si strany sú rovnobežné,
- majú spoločný stred opísanej kružnice a
- ich prekryvom je šesťuholník (sivý na obrázku).

Určte v centimetroch obvod tohto šesťuholníka.

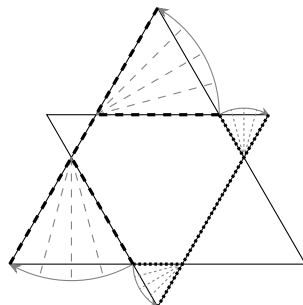


Výsledok. 28

Riešenie. Prekrytím vzniknú mimo vyznačeného šesťuholníka tri menšie a tri väčšie zhodné rovnostranné trojuholníky. Označme $|AB| = x$ a $|BC| = y$. Potom dĺžka strany väčšieho trojuholníka je $2x + y = 17$ a dĺžka strany menšieho trojuholníka je $x + 2y = 11$. Sčítaním oboch rovníc dostaneme $3x + 3y = 28$, čo je práve obvod daného šesťuholníka.



Iné riešenie. Strany šesťuholníka si premietneme na jednu stranu každého z daných rovnostranných trojuholníkov. Obvod šesťuholníka je potom presne súčtom dĺžok strán oboch rovnostranných trojuholníkov, teda $17 + 11 = 28$.



Úloha 9. Dominik ide na frisbee a potrebuje si vybrať, čo si oblečie. Vyberá si presne jedno tričko, jedny kraťasy, jeden pár ponožiek a jeden pár tenisiek. Okrem toho sa môže rozhodnúť, či si zoberie šiltovku. Pri ponožkách (a rovnako aj pri teniskách) si Dominik vždy vyberie jednofarebný pár.

Dominik má v skrini biele, žlté, zelené, modré a červené tričko; biele, čierne a sivé kraťasy aj šiltovky; biele, červené a oranžové ponožky; a biele a čierne tenisiky.

Dominik má však vkus, a biele ponožky si oblečie iba v prípade, že celý zvyšok jeho outfitu je tiež biely (vrátane šiltovky, ak ju má). Koľkými spôsobmi vie Dominik zvoliť svoj outfit na frisbee?

Výsledok. 242

Riešenie. Rozdeľme si úlohu na dva prípady. Najprv uvažujme, že Dominik si vyberie biele ponožky. Podľa podmienky ich môže mať len vtedy, ak je celý jeho outfit biely. Tričko, kraťasy aj tenisiky teda musia byť biele a šiltovku si buď nevezme, alebo bude tiež biela. To nám dáva 2 možnosti.

Teraz uvažujme iné ako biele ponožky, teda 2 možnosti. V tomto prípade už neplatí žiadne ďalšie obmedzenie. Máme 5 možností výberu trička, 3 možnosti pre kraťasy, 2 možnosti pre tenisiky a 4 možnosti pre šiltovku (žiadna, biela, čierna alebo sivá). Tento prípad teda dáva

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240$$

outfitov.

Sčítaním dostaneme celkový počet $240 + 2 = 242$.

Úloha 10. Filip opäť zabudol svoj PIN. Pamätá si však, že je to štvorciferné číslo a:

- cifra na mieste stoviek je dvojnásobkom cifry na mieste tisícok,
- cifra na mieste jednotiek je trojnásobkom cifry na mieste desiatok,
- keď všetky cifry umocníme na druhú a sčítame, dostaneme 95.

Aký je Filipov PIN?

Výsledok. 1239

Riešenie. Označme Filipov PIN ako \overline{ABCD} , kde A, B, C, D sú jeho cifry. Zo zadania platí $B = 2A, D = 3C$ a

$$95 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A^2 + (2A)^2 + C^2 + (3C)^2 = 5A^2 + 10C^2,$$

čo sa upraví na rovnicu $A^2 + 2C^2 = 19$. Keďže pravá strana je nepárna, aj A musí byť nepárne. Zároveň platí $A^2 \leq 19$, takže prichádzajú do úvahy len možnosti $A \in \{1, 3\}$.

Vyskúšaním týchto hodnôt zistíme, že vyhovuje iba $A = 1$, čo dáva $2C^2 = 18$, teda $C = 3$. Potom $B = 2$ a $D = 9$, takže hľadaný PIN je 1239.

Úloha 11. Baška má pozitívnu osobnosť, takže chce vyplniť každý obdĺžnik vo výraze

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$$

buď znamienkom plus, alebo znamienkom mínus, aby výsledok bol kladný. Koľkými spôsobmi to vie urobiť?

Výsledok. 16

Riešenie. Keďže súčet $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ je nepárne číslo a zmena ktoréhokoľvek znamienka zmení celkový súčet o párne číslo, tak súčet $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ nikdy nemôže byť 0.

Teraz, ak vezmeme ľubovoľnú voľbu znamienok a zameníme každé plus za mínus a každé mínus za plus, hodnota sa zmení z kladnej na zápornú alebo naopak. Každý výsledok vie mať teda priradený práve jeden výsledok s opačným znamienkom.

Pre každé z piatich políčok si môžeme nezávisle zvoliť buď plus, alebo mínus. Teda 2 možnosti voľby znamienka pre každú pozíciu a spolu $2^5 = 32$ možností. Keďže žiadna z nich nie je nulová, presne polovica musí byť kladná, takže Baška môže získať kladný výsledok 16 spôsobmi.

Úloha 12. V sčítaní pod seba na obrázku nižšie, každé písmeno reprezentuje číslicu v desiatkovej sústave. Rovnaké písmená reprezentujú rovnakú číslicu, rôzne písmená rôzne číslice.

$$\begin{array}{r} A \ A \ A \\ + \ A \ A \ B \\ + \ A \ C \ C \\ \hline 2 \ 0 \ 2 \ 6 \end{array}$$

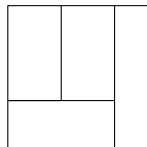
Nájdite trojciferné číslo \overline{ABC} .

Poznámka: Označením \overline{ABC} myslíme číslo, ktoré vznikne napísaním číslic A, B a C za seba.

Výsledok. 619

Riešenie. Keďže prvá číslica všetkých troch čísel je rovnaká, musí platiť $3A \leq 20$ a $3A \geq 18$, pretože pri sčítaní troch číslic nemôže vzniknúť prenos väčší než 2. Preto $A = 6$. Z toho vyplýva, že v stĺpci jednotiek sa číslica B a C sčítajú na 10. Teda zo stĺpca jednotiek sa do stĺpca desiatok prenáša 1. Preto musí byť $C = 9$, z čoho vyplýva, že $B = 1$. Takže $\overline{ABC} = 619$.

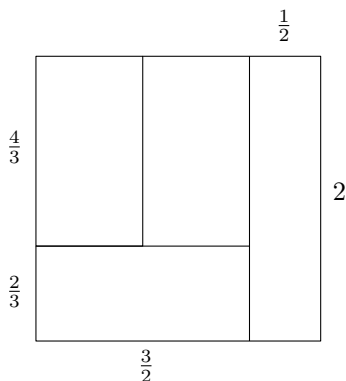
Úloha 13. Na obrázku je štvorec so stranou dĺžky 2 rozdelený na štyri obdĺžniky. Ak majú všetky obdĺžniky rovnaký obsah, nájdite súčet ich obvodov.



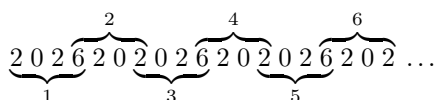
Poznámka: Úsečka, ktorú majú dva obdĺžniky spoločnú, sa počíta do oboch obvodov.

Výsledok. $\frac{53}{3} = 17\frac{2}{3}$

Riešenie. Keďže štvorec má obsah 4, každý obdĺžnik musí mať obsah 1. Z toho vyplýva, že šírka pravého obdĺžnika je $\frac{1}{2}$. Následne šírka ľavého dolného obdĺžnika je $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, a teda jeho výška je $1/\frac{3}{2} = \frac{2}{3}$. Potom spoločná výška zvyšných dvoch obdĺžnikov je $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Na výpočet celkového súčtu štyroch obvodov vezmeme obvod vonkajšieho štvorca, $4 \cdot 2 = 8$, a pripočítame dvojnásobok celkovej dĺžky vnútorných úsečiek, pretože každá sa započítava v dvoch obdĺžnikoch. Vnútorné dĺžky sú postupne 2, $\frac{3}{2}$ a $\frac{4}{3}$, takže dvojnásobok ich súčtu je $2 \cdot (2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{29}{3}$. Preto hľadaný súčet obvodov je $8 + \frac{29}{3} = \frac{53}{3}$.



Úloha 14. Marek tvorí dlhý reťazec číslíc tým, že píše blok štyroch číslíc 2026 za seba presne 2026-krát podľa nasledovných pravidiel. Najprv napíše 2026. Potom pokračuje s číslom 2026 napísaným odzadu, teda číslom 6202, pričom vynechá opakovanú cifru 6 v mieste napojenia. Ďalej pokračuje striedajúc čísla napísané odpredu (2026) a odzadu (6202), pričom zakaždým použije poslednú číslicu predošlého bloku ako prvú číslicu nasledujúceho bloku, takže susedné bloky majú spoločnú práve jednu cifru. Na obrázku nižšie je ukázaných prvých šesť z 2026 blokov.



Určite ciferný súčet výsledného čísla.

Výsledok. 12 158

Riešenie. Ciferný súčet po jednom napísaní 2026 je 10. Po prvom bloku každý párný blok pridá cifry 202, čím sa ciferný súčet zvýši o 4, a každý nepárny blok pridá 026, čím sa súčet zvýši o 8.

Týmto spôsobom sa zakaždým, keď sa po prvom bloku pridajú dva bloky, čo nastane 1012-krát ($1 + 2 \cdot 1012 = 2025$), zvýši súčet o 12. Na konci nám zostane 2026-ty blok, ktorý je párný, takže zvýši súčet o 4. Celkovo teda dostaneme $10 + 1012 \cdot 12 + 4 = 12\,158$.

Úloha 15. Je 8:00 hodín. Koľko bude hodín (aký bude čas) po ubehnutí 260320261998 hodín za predpokladu, že počas tohto intervalu nenastanú žiadne posuny času (ako letný čas a pod.).

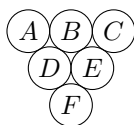
Výsledok. 14:00

Riešenie. Použitím kritérií deliteľnosti číslom 24 nájdeme číslo 260320261992, ktoré je deliteľné 24, pretože:

- je deliteľné 3: súčet jeho číslíc je $42 = 3 \cdot 14$;
- je deliteľné 8: 1000 je násobkom 8 ($8 \cdot 125$) a rovnako aj 992 ($8 \cdot 124$), teda aj $260320261 \cdot 1000 + 992$ je násobkom 8.

Týmto spôsobom je zvyšok po delení čísla 260320261998 číslom 24 rovný 6, keďže $260320261998 - 260320261992 = 6$, čo znamená, že čas bude 14:00.

Úloha 16. Strapec hrozna je usporiadaný ako na obrázku. Bobuľa hrozna sa dá zjesť, iba ak všetky bobule priamo pod ňou (jedna alebo dve bobule, ktorých sa dotýka dole) už boli zjedené. Napríklad bobuľa *D* musí byť zjedená pred *A* a *B*. Koľkými spôsobmi sa dá zjesť celý stravec?



Výsledok. 16

Riešenie. V počiatočnej situácii je jedinou bobuľou, ktorú možno zjesť, bobuľa F , pričom zostanú bobule A, B, C, D , a E . V tomto momente môžeme zjesť buď bobuľu D , alebo E . Situácia je zjavne symetrická, preto začneme s E , pričom zostanú bobule A, B, C , a D . Potom môžeme zjesť bobuľu C alebo D :

- Ak si vyberieme C , potom musíme zjesť D , a následne A a B v dvoch rôznych poradiach.
- Ak si vyberieme D , potom môžeme ako ďalšie zjesť A, B alebo C , a následne zvyšné dve v ľubovoľnom poradí ($3 \cdot 2$ možností).

Teda vždy začíname s F , potom si vyberieme medzi D alebo E a následne máme $2 + 6 = 8$ rôznych možností. Celkovo je teda $1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$ možných spôsobov, ako zjesť strapeč.

Úloha 17. Nech x je kladné celé číslo také, že

$$\text{nsn}(x, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \quad \text{a} \quad \text{nsn}(x, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

Koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať $\text{NSD}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$?

Poznámka: $\text{NSD}(a, b)$ a $\text{nsn}(a, b)$ označujú postupne najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel a a b .

Výsledok. 12

Riešenie. Číslo x musí mať tvar $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ (iné prvočísla sa nemôžu vyskytnúť, inak by sa objavili v nsn). Prvá podmienka je ekvivalentná s

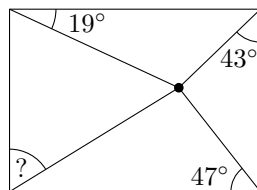
$$a = 6, \quad b \leq 3, \quad c \leq 4 \quad \text{a} \quad d \leq 2,$$

zatiaľ čo druhá podmienka znamená

$$a \leq 8, \quad b \leq 4, \quad c \leq 3 \quad \text{a} \quad d = 2.$$

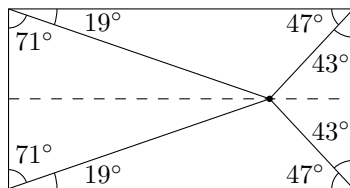
Z toho vyplýva, že v prvočíselnom rozklade čísla $\text{NSD}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ je exponent pri 2 rovný 2, exponent pri 3 môže byť ľubovoľné číslo od 0 do 3, exponent pri 5 môže byť ľubovoľné číslo od 0 do 2 a exponent pri 7 je rovný 2. Takýchto čísel je $4 \cdot 3 = 12$.

Úloha 18. Máme obdĺžnik, vnútri ktorého sa nachádza bod. Ak poznáme veľkosti troch vyznačených uhlov, nájdite veľkosť uhla označeného otáznikom (v stupňoch).



Výsledok. 71°

Riešenie. Dopočítaním doplnkov do 90° pri dvoch vrcholoch na pravej strane zistíme, že daný vnútorný bod leží na spoločnej osi dvoch zvislých strán obdĺžnika. Preto je celá konfigurácia súmerná podľa tejto osi. Z toho vyplýva, že hľadaný uhol je rovný $90^\circ - 19^\circ = 71^\circ$.



Úloha 19. Maťka chce zložiť náhrdelník z dvoch typov korálok. Kúpila si celkovo 100 korálok, pričom lacných bolo viac ako drahých. Celková cena lacných korálok bola 459 chechtákov. Každá drahá korálka stála o 13 chechtákov viac ako lacná. Všetky ceny v chechtákoch sú kladné celé čísla. Koľko chechtákov Maťka zaplatila za drahé korálky?

Výsledok. 1078

Riešenie. Nech c je počet lacných korálok a p ich (celočíselná) cena v chechtákoch. Potom $cp = 459$, a keďže spolu je 100 korálok a lacných je viac než drahých, platí $50 < c < 100$. Keďže cena je celé číslo, c musí byť deliteľ čísla $459 = 3^3 \cdot 17$, ktorý leží ostro medzi 50 a 100. Jediný taký deliteľ je $c = 51$. Teda $p = 459/51 = 9$ a každá drahá korálka stojí $p + 13 = 22$ chechtákov. Počet drahých korálok je $100 - 51 = 49$, takže Maťka zaplatila za drahé korálky $49 \cdot 22 = 1078$ chechtákov.

Úloha 20. V rovnici

$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot H}{N \cdot A \cdot B \cdot O \cdot J} = G \cdot A \cdot M \cdot E,$$

každé písmeno reprezentuje číslicu, rôzne písmena reprezentujú rôzne číslice a symbol \cdot značí násobenie. Koľko možných hodnôt môže nadobúdať súčin $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$?

Výsledok. 1

Riešenie. V rovnici sa vyskytuje 10 rôznych písmen ($M, A, T, H, N, B, O, J, G, E$), takže každá z číslic 0–9 sa použije práve raz, čo znamená, že niektoré písmeno sa rovná 0. Z toho vyplýva, že obe strany rovnosti sa nevyhnutne rovnajú 0. Konkrétne sa 0 nachádza na oboch stranách, pričom sa nevyskytuje v menovateli zlomku. Jediné také písmeno je M , teda $M = 0$. Preto $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O = 0$ bez ohľadu na hodnoty priradené zvyšným písmenám, takže súčin môže nadobúdať presne jednu hodnotu.

Úloha 21. Tri majáky ležia na pobreží, ktoré tvorí rovnú priamku. Vzďialenosť každej susednej dvojice majákov je 13 km. Lod' na mori sa nachádza 10 km od jedného z dvoch krajných majákov a 13 km od prostredného majáku. Ako ďaleko (v km) je lod' od druhého krajného majáku? Pre účely tejto úlohy predpokladajte, že Zem je plochá.

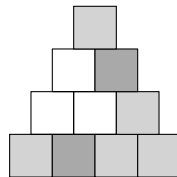
Výsledok. 24

Riešenie. Označme S polohu lode, A a B dva krajné majáky a M prostredný maják. Keďže $|MS| = |MA| = |MB| = 13$, body A, B a S ležia na tej istej kružnici so stredom M . Navyše, úsečka AB je jej priemerom. Z Tálesovej vety je teda trojuholník ABS pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole S . Keďže $|AB| = |MA| + |MB| = 26$ a $|AS| = 10$, z Pytagorovej vety máme

$$|BS| = \sqrt{|AB|^2 - |AS|^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Vzďialenosť lode k druhému krajnému majáku je 24 km.

Úloha 22. Koľkými spôsobmi je možné ofarbiť 10 tehličiek pyramídy výšky 4 jednou z troch farieb tak, aby každá podpyramída výšky 2 (orientovaná nahor) bola zafarbená buď všetkými tromi farbami, alebo iba jednou farbou? Príklad takého zafarbenia môžete vidieť na obrázku.



Výsledok. 81

Riešenie. Za daných podmienok je ofarbenie pyramídy jednoznačne určené zafarbením spodného riadku, pretože každé zafarbenie spodného riadku sa dá jednoznačne doplniť na zafarbenie celej pyramídy. Keďže pre každé políčko môžeme zvoliť jednu z troch farieb, existuje celkovo $3^4 = 81$ možných zafarbení.

Úloha 23. Vrcholy pravidelného 100-uholníka sú očíslované rôznymi číslami spomedzi $1, 2, \dots, 100$ tak, že absolútna hodnota rozdielu medzi ľubovoľnou dvojicou protilahlých vrcholov je to isté číslo n . Nájdite súčet všetkých možných hodnôt n .

Výsledok. 93

Riešenie. Nech n je kladné celé číslo, pre ktoré také rozostavenie existuje. Potom číslo 1 musí byť spárované s číslom $n + 1$ (v zmysle priradenia s protilahlým vrcholom, párom nazveme takú dvojicu protilahlých vrcholov). Ďalej 2 musí byť spárované s $n + 2$ a tak ďalej, až k sa spáruje s $n + k$, pre každé $k = 1, 2, \dots, n$. Teda nakoniec n je spárované s $2n$.

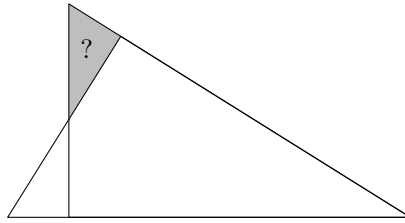
Teda každé číslo z bloku $\{1, 2, \dots, 2n\}$ je spárované s nejakým číslom z toho istého bloku. Tento blok môže byť oddelený od ostatných čísel $\{2n + 1, \dots, 100\}$. Ak $2n = 100$, tak $n = 50$. V opačnom prípade môžeme pokračovať s $2n + 1$, ktoré musí byť spárované s $3n + 1$ atď.

Nakoniec máme množinu $\{1, 2, \dots, 100\}$ rozdelenú na súvislé neprekrývajúce sa bloky dĺžky $2n$. To je možné iba vtedy, keď 100 je deliteľné $2n$, a to je možné iba vtedy, keď n je deliteľom 50.

Takáto konštrukcia vedie na vhodné párovanie pre každého deliteľa. Preto je riešením súčet všetkých kladných deliteľov 50, a teda

$$1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93.$$

Úloha 24. Dva zhodné pravouhlé trojuholníky s dĺžkami strán 5, 12, a 13 sú umiestnené tak, že zdieľajú vrchol s najmenším uhlom a čiastočne sa prekrývajú na stranách tak, ako je zobrazené na obrázku. Aký je obsah jedného trojuholníku z neprekrývajúcej sa oblasti?



Výsledok. $\frac{6}{5} = 1,2$

Riešenie. Keďže šedý trojuholník je pravouhlý a zdieľa ďalší uhol s veľkým trojuholníkom, tak je podobný veľkému trojuholníku. Najmenšiu stranu má dlhú $13 - 12 = 1$.

Pomer podobnosti medzi trojuholníkmi je potom $1 : 5$, a teda druhá odvesna šedého trojuholníka má dĺžku $\frac{12}{5}$. Hľadaný obsah je teda

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5}.$$

Úloha 25. Každý zo siedmich trpaslíkov si vybral kladné celé číslo. Každý vie čísla všetkých ostatných trpaslíkov. Snehulienka sa spýtala každého trpaslíka, aké číslo si vybral.

- Prvý trpaslík zostal mlčky sedieť.
- Druhý trpaslík odpovedal: „Ja mám rovnaké číslo, ako má prvý trpaslík.“
- Tretí trpaslík povedal: „Ja mám číslo rovné súčtu čísel prvého a druhého trpaslíka.“
- Štvrtý trpaslík povedal: „Ja mám číslo rovné súčtu čísel prvého, druhého a tretieho trpaslíka.“
- ...
- Siedmy trpaslík povedal: „Ja mám číslo rovné súčtu čísel prvého až šiesteho trpaslíka.“

Snehulienka sa taktiež dozvedela, že súčet všetkých čísel je 46. Je tiež známe, že presne jeden trpaslík klamal; všetci ostatní trpaslíci robili výroky vzťahujúce sa na skutočne zvolené čísla, nie na oznámené čísla. Určte všetky čísla, ktoré si mohol zvoliť klamajúci trpaslík.

Výsledok. 7, 14

Riešenie. Nech majú trpaslíci čísla a_1, a_2, \dots, a_7 .

Predpokladajme, že siedmy trpaslík povedal pravdu. To znamená, že jeho číslo je presne polovica celkového súčtu, takže

$$a_7 = \frac{46}{2} = 23.$$

Podľa podobnej úvahy musí šiesty trpaslík klamať, inak by jeho číslo bolo $\frac{23}{2}$.

Preto je jasné, že prvých päť trpaslíkov hovorilo pravdu. Ak $a_1 \geq 2$, tak súčet prvých piatich čísel je aspoň $2 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32$. Ak už ktorýkoľvek z posledných dvoch trpaslíkov hovorí pravdu, tak musí mať aspoň takéto číslo, a teda celkový súčet bude aspoň dvojnásobok, čo je spor. Preto musí $a_1 = 1$. To znamená, že

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 8.$$

Ak šiesty trpaslík povedal pravdu, tak $a_6 = 16$ a aby celkový súčet sedel, musí siedmy trpaslík mať $a_7 = 14$.

V opačnom prípade ak šiesty trpaslík klamal, vieme, že $a_7 = 16 + a_6 = 23$. Z čoho dostávame, že $a_6 = 7$.

Úloha 26. Predmet na Matfyzе má 13 prednášok očíslovaných $\{1, 2, \dots, 13\}$. Krtko vie, že bude môcť absolvovať práve 6 prednášok, ale prednášajúci dal podmienku, že predmet môže absolvovať iba vtedy, keď absolvuje aspoň jednu dvojicu prednášok, ktorých poradové čísla sa líšia o nepárne číslo. Koľko možností má Krtko, aby si vybral šesticu prednášok, ktoré absolvuje?

Výsledok. 1708

Riešenie. Dve zvolené prednášky sa líšia o nepárne číslo práve vtedy, keď majú ich poradové čísla rôznu paritu. Namiesto priameho počítania spočítame doplnok, teda počet takých výberov, ktoré neobsahujú nepárny rozdiel.

Medzi číslami $\{1, 2, \dots, 13\}$ je sedem nepárnych a šesť párnych čísel. Takže počet možností pre iba nepárne alebo iba párne prednášky je $\binom{7}{6} + \binom{6}{6} = 8$.

Keďže celkovo je $\binom{13}{6} = 1716$ možných výberov ako si vybrať 6 prednášok, tak počet možností s aspoň jedným nepárnym rozdielom je $1716 - 8 = 1708$.

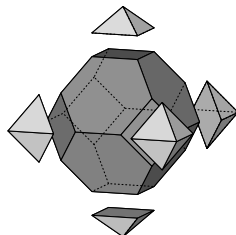
Úloha 27. Nech N je sedemciferné číslo také, že je deliteľné každou z jeho cifier. Ak sú všetky cifry N rôzne a nenulové, nájdite súčet cifier N .

Výsledok. 36

Riešenie. Keďže N má sedem rôznych nenulových cifier, aspoň jedna je párna, a teda N je párne. Ak by 5 bola jedna z cifier, tak N by končilo 0, čo nie je možné. Preto 5 sa nenachádza medzi ciframi čísla N .

Teraz N obsahuje 7 cifier z množiny $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, takže vynecháva práve jednu cifru z tejto množiny. Ak by bola vynechaná cifra 9, tak by N malo ciferný súčet 31, čo je v spore s deliteľnosťou 3. Preto cifra 9 je v čísle, a preto ciferný súčet musí byť deliteľný 9. A keďže $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$, musíme vynechať cifru 4, čím dosiahneme ciferný súčet 36. Jeden príklad takéhoto čísla je $N = 9867312$.

Úloha 28. Zrezaný osemsten je vyrobený odrezaním vrcholov pravidelného osemstenu tak, že zostane mnohosten s ôsmimi stenami tvaru pravidelného šesťuholníka a šiestimi stenami tvaru štvorca. Určte pomer objemu nového mnohostena a pôvodného osemstena.



Poznámka: Pravidelný osemsten je teleso s ôsmimi zhodnými stenami tvaru rovnostranného trojuholníka.

Výsledok. $\frac{8}{9}$

Riešenie. Pravidelný osemsten so stranou dĺžky a , má objem ka^3 , pre nejakú konštantu k (v skutočnosti $k = \sqrt{2}/3$ ale to nebude potrebné vo zvyšku riešenia). Pre výrobu zrezaného osemstena odrežeme z každého zo 6 vrcholov osemstena ihlan (so štvorcovou podstavou) s dĺžkou hrany $a/3$. Tieto ihlany vieme zlepiť a vyrobiť 3 menšie osemsteny s dĺžkou hrany $\frac{a}{3}$, objemom $k\frac{a^3}{27}$ a celkovým objemom $3k\frac{a^3}{27} = k\frac{a^3}{9}$. Teda objem zrezaného osemstena je $k\frac{8a^3}{9}$. Preto je pomer objemov týchto telies

$$\frac{1}{ka^3} \left(ka^3 - \frac{1}{9}ka^3 \right) = \frac{8}{9}.$$

Úloha 29. Nájdite všetky reálne riešenia rovnice

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Výsledok. $\pm 1, \pm 2$

Riešenie. Nech $a = 2^x + 2^{-x}$, potom $4^x + 4^{-x} = a^2 - 2$. Dosadením dostaneme

$$8(a^2 - 2) - 54a + 101 = 0,$$

čo sa zjednoduší na

$$8a^2 - 54a + 85 = 0.$$

Vyriešením tejto kvadratickej rovnice dostaneme

$$a_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85}}{2 \cdot 8} = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 2720}}{16} = \frac{54 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{54 \pm 14}{16}$$

s riešeniami

$$a_1 = \frac{17}{4} \text{ a } a_2 = \frac{5}{2}.$$

V prvom prípade máme

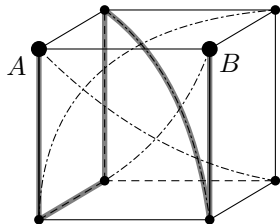
$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{17}{4},$$

čo vedie na $2^x = 4$ alebo $2^x = \frac{1}{4}$ s riešeniami $x = 2$ alebo $x = -2$. V druhom prípade máme

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2},$$

čo vedie na $2^x = 2$ alebo $2^x = \frac{1}{2}$ s riešeniami $x = 1$ alebo $x = -1$. Preto riešenia pôvodnej rovnice sú $x = \pm 1, \pm 2$.

Úloha 30. Na planéte *Railbox Prime*, ktorá má tvar kocky, sa nachádza osem miest, v každom vrchole jedno. Mestá sú poprepájané železničnými úsekmi: každá dvojica miest zdieľajúcich hranu je spojená povrchovou železnicou, každá dvojica miest v protiláhlých vrchoch planéty je spojená tunelom podzemnej železnice. Mišo by sa rád dostal z mesta A do mesta B (ktoré zdieľajú hranu, viď obrázok) tak, aby využil práve 5 železničných úsekov a žiadne mesto nenavštívil viac ako raz (vrátane A a B). Koľkými spôsobmi to môže spraviť, pokiaľ chce cestovať aspoň jedným tunelom? Na obrázku je vyznačená jedna možná cesta.



Výsledok. 28

Riešenie. Ofarbíme si mestá vo vrchoch dvoma farbami (ako 3D šachovnicu) tak, že každý úsek železnice (povrchový aj tunel) spája vždy mestá rôznych farieb. Mišo začína v meste jednej farby a končí v susednom meste (druhej farby) po presne 5 presunoch. Keďže na svojej ceste musí striedať farby miest, tak cestou navštívi po dve rôzne mestá z každej farby. Navyše platí, že každá dvojica miest rôznej farby je prepojená železnicou.

Najprv spočítame všetky cesty dĺžky 5 bez ohľadu na podmienku s tunelom. Takáto cesta má tvar

$$A \rightarrow b_1 \rightarrow a_2 \rightarrow b_2 \rightarrow a_3 \rightarrow B,$$

kde b_1, b_2 sú rôzne mestá rovnakej farby ako B a a_2, a_3 sú rôzne mestá rovnakej farby ako A . Máme $3 \cdot 2 = 6$ spôsobov ako zvoliť usporiadanú dvojicu (b_1, b_2) neobsahujúcu B a tiež $3 \cdot 2 = 6$ možností ako zvoliť usporiadanú dvojicu (a_2, a_3) neobsahujúcu A . Dokopy tak je $6 \cdot 6 = 36$ ciest dĺžky 5.

Z celkového počtu ešte odčítame cesty, ktoré neprechádzajú žiadnym tunelom, t. j. využívajú čisto hrany kocky. Prvý úsek nemôže viesť priamo do B , takže máme na začiatku práve dve možnosti. Ľahko vyskúšame, že v oboch prípadoch sú práve 4 možnosti ako cestu do B dokončiť, takže celkovo ide o $2 \cdot 4 = 8$ ciest po hranách kocky.

To znamená, že výsledný počet ciest dĺžky 5 prechádzajúcich aspoň jedným tunelom je $36 - 8 = 28$.

Úloha 31. Hlasovania o farbe budúročného Náboj trička sa zúčastnilo 2026 organizátorov, ktorí vyberali spomedzi 4 možností: *Azúrová*, *Běžová*, *Cyklámenová* a *Dáka iná*. Azúrová získala zo všetkých farieb najmenej hlasov, presne šesťkrát menej ako Běžová. Cyklámenová získala o presne 446 hlasov menej ako ostatné farby dokopy. Hlasovanie vyhrala Dáka iná s menej než 800 hlasmi. Každý organizátor dal práve jeden hlas práve jednej z týchto štyroch farieb. Koľko hlasov získala Azúrová?

Výsledok. 63

Riešenie. Označme jednotlivé počty hlasov postupne a, b, c, d . Tieto nezáporné celé čísla spĺňajú:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2026, \\ b &= 6a, \\ c &= (a + b + d) - 446, \\ a, b, c &< d < 800, \\ a &< b, c, d. \end{aligned}$$

Pripočítajme c k oboj stranám tretej rovnice. Dostaneme

$$2c = a + b + c + d - 446 = 2026 - 446 = 1580.$$

Odtiaľ vidíme, že $c = 790$ a pre zvyšné počty platí

$$a + b + d = 2026 - 790 = 1236.$$

Do tejto rovnice dosadíme za b jeho vyjadrenie z druhej rovnice. Dostaneme

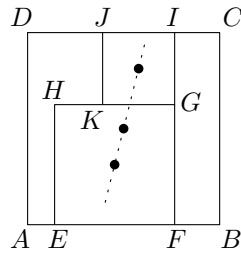
$$a + 6a + d = 1236, \quad \text{resp.} \quad d = 1236 - 7a.$$

Keďže $d < 800$ a zároveň $d > c = 790$, musí platiť $791 \leq d \leq 799$. Takže

$$791 \leq 1236 - 7a \leq 799, \quad \text{čiže} \quad 437 \leq 7a \leq 445.$$

Jediné číslo v tomto rozpätí, ktoré je deliteľné 7, je $441 = 7 \cdot 63$. Odpoveďou je teda $a = 63$. Vieme tiež dopočítať $b = 378$, $c = 790$ a $d = 795$ a vidíme, že všetky podmienky zo zadania sú splnené.

Úloha 32. Trojica štvorcov $ABCD$, $EFGH$ a $KGIJ$ je umiestnená tak, ako vidíme na obrázku: Body E a F ležia na úsečke AB , body I a J na úsečke CD , a bod K na úsečke GH . Navyše platí, že stredy týchto troch štvorcov ležia na priamke. Určte dĺžku úsečky FB , ak $|AD| = 7$ a $|HK| = 1$.



Výsledok. $\frac{12}{7}$

Riešenie. Nech a a b sú postupne dĺžky strán štvorcov $EFGH$ a $KGIJ$. Zo zadania dostávame

$$\begin{aligned} 7 &= |AD| = |JK| + |HE| = a + b, \\ 1 &= |HK| = |HG| - |KG| = a - b. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy dostaneme $a = 4$ a $b = 3$.

Priamka prechádzajúca stredmi všetkých troch štvorcov delí obsah každého z nich na dve polovice. Obsah obdĺžnika $FBCI$ tak môžeme spočítať ako

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = ab.$$

Ten istý obsah vieme spočítať aj ako $|FB| \cdot (a+b)$. Odtiaľ dostaneme vyjadrenie

$$|FB| = \frac{ab}{a+b} = \frac{12}{7}.$$

Úloha 33. Na tabuli je napísaných niekoľko čísel, medzi nimi aj číslo 2026. Vieme, že ak číslo 2026 zmažeme, aritmetický priemer čísel na tabuli sa zníži o 6. Ak by sme však naopak na tabuľu pripísali ďalšie číslo 2026, aritmetický priemer by sa zvýšil o 4. Určte súčet čísel, ktoré sú na začiatku napísané na tabuli.

Výsledok. 10010

Riešenie. Označme súčet pôvodných n čísel ako S . Podmienky zo zadania hovoria

$$\begin{aligned} \frac{S - 2026}{n - 1} &= \frac{S}{n} - 6, \\ \frac{S + 2026}{n + 1} &= \frac{S}{n} + 4. \end{aligned}$$

Tieto rovnice vieme roznásobiť a upraviť na

$$\begin{aligned} S &= 2032n - 6n^2, \\ S &= 2022n - 4n^2. \end{aligned}$$

Rôzne vyjadrenia súčtu S dáme do rovnosti, čím dostaneme

$$2032n - 6n^2 = 2022n - 4n^2 \Rightarrow 10n = 2n^2.$$

Keďže $n \neq 0$, tak vidíme, že $n = 5$, takže $S = 2032 \cdot 5 - 6 \cdot 5^2 = 5 \cdot (2032 - 30) = 10010$.

Úloha 34. Blcha skáče po obvode kružnice. Jej prvý skok ju posunie o stredový uhol 1° , t. j. uhol medzi polomerom do miesta, kde začala, a miesta, kde skončila, je 1° . Nasledujúce skoky sú vždy v tom istom smere, pričom sa posunie postupne o stredový uhol 2° , potom 3° , a tak ďalej. Po koľkom skoku sa blcha prvýkrát dostane na miesto, kde začínala?

Výsledok. 80

Riešenie. Po n skokoch prekonala blcha

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

stupňov. Hľadáme najmenšie n , pre ktoré je toto číslo násobkom 360, alebo ekvivalentne, pre ktoré je $n(n+1)$ násobkom $720 = 16 \cdot 9 \cdot 5$. Keďže n a $n+1$ sú nesúdeliteľné, každý z troch činiteľov musí deliť buď n , alebo $n+1$. Evidentne $n = 719$ spĺňa podmienky, no nemusí byť najmenšie. Preto najviac dva činitele budú deliť jedno z dvojice n a $n+1$. A keďže sú tri činitele, tak podľa Dirichletovho princípu aspoň dva budú deliť jedno z dvojice n a $n+1$. Teraz hľadáme najmenšie násobky $16 \cdot 9$, $16 \cdot 5$ a $9 \cdot 5$, aby číslo o 1 menšie alebo väčšie bolo deliteľné tretím z čísel. Možnosti sú teda

1. $n = 16 \cdot 9 = 144$, $n + 1 = 5 \cdot 29 = 145$,
2. $n = 16 \cdot 5 = 80$, $n + 1 = 9 \cdot 9 = 81$,
3. $n = 16 \cdot 14 = 224$, $n + 1 = 5 \cdot 5 \cdot 9 = 225$,

z čoho vidno, že najmenšie n je $n = 80$.

Úloha 35. V kráľovstve Na'boi sú tri magické sekty: Ohnivá sekta, Vodná sekta, a Veterná sekta. Každá sekta pozostáva z dvoch majstrov a dvoch učňov. Na obranu kráľovstva treba vytvoriť štyri bojové páry, každý pozostávajúci z jedného majstra a jedného učňa, avšak žiaden pár nesmie obsahovať dvoch členov tej istej sekty. Aby bola obrana spravodlivá, musí každá sekta prispieť do bojových párov aspoň jedným majstrom a aspoň jedným učňom. Koľkými spôsobmi vieme vytvoriť tieto štyri bojové páry?

Poznámka: Každý majster aj každý učeň je iný človek, takže záleží na tom, ktorého majstra či učňa vyberieme. Naopak na poradí, v ktorom sú páry napísané, nezáleží.

Výsledok. 768

Riešenie. Keďže vyberáme štyroch učňov a každá sekta musí prispieť aspoň jedným, ich rozdelenie medzi sekty bude v nejakom poradí $(2, 1, 1)$. To isté platí aj pre štyroch majstrov, takže aj ich rozdelenie medzi sekty bude $(2, 1, 1)$. Rozlíšime dva prípady.

V prvom prípade existuje sekta, ktorá zabezpečí aj dvoch majstrov, aj dvoch učňov. Túto sektu označíme X ; máme tri možnosti, ktorá sekta bude X . Zo zvyšných dvoch siekt vyberieme učňov $2 \cdot 2 = 4$ spôsobmi a majstrov tiež $2 \cdot 2 = 4$ spôsobmi.

V každom z týchto prípadov musíme k učňom z X priradiť majstrov zo zvyšných siekt, čo vieme spraviť dvoma spôsobmi. Akonáhle zafixujeme túto voľbu, musíme zvyšných dvoch učňov prideliť majstrom z X , čo sa dá opäť dvoma spôsobmi. Dokopy tak máme 4 prípustné možnosti ako spárovať majstrov a učňov. V tomto prípade tak dostaneme $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ možností.

V druhom prípade jedna sekta (X) zabezpečí dvoch učňov a iná sekta (Y) zabezpečí dvoch majstrov. Existujú 3 možnosti pre X a následne 2 možnosti pre odlišné Y . Zvyšných učňov zo zvyšných siekt opäť vyberieme $2 \cdot 2 = 4$ spôsobmi, a zvyšných majstrov analogicky $2 \cdot 2 = 4$ spôsobmi.

Pre každý takýto výber učňov a majstrov existuje $3 \cdot 2 = 6$ možností ako vytvoriť pár majster+učeň: dvaja učni z X môžu dostať ľubovoľných dvoch z trojice cudzích majstrov, a následne už je dané jednoznačne, kto s kým môže tvoriť bojovú dvojicu. V tomto prípade tak máme $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ možností.

Dokopy tak máme v oboch prípadoch až $192 + 576 = 768$ možností ako vytvoriť bojové páry.

Úloha 36. Nech x a y sú nenulové reálne čísla spĺňajúce $x + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$ a $y + \frac{1}{x} = 3\sqrt[3]{4}$. Určte hodnotu výrazu $x^2y + \frac{1}{xy^2}$.

Výsledok. $3\sqrt[3]{2}$

Riešenie. Všimnime si, že

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = \left(xy + \frac{1}{xy}\right) \left(x + \frac{1}{y}\right) - \left(x + \frac{1}{y}\right).$$

Navyše

$$xy + \frac{1}{xy} = \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Odtiaľ dostávame

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = 4 \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Úloha 37. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, v ktorom platí $|\sphericalangle ADB| = 48^\circ$ a $|\sphericalangle BDC| = 56^\circ$. Vnútri trojuholníka ABC zvolíme bod X tak, aby $|\sphericalangle XCB| = 24^\circ$ a aby priamka AX bola osou uhla $\sphericalangle BAC$. Určte veľkosť uhla $\sphericalangle CBX$ v stupňoch.

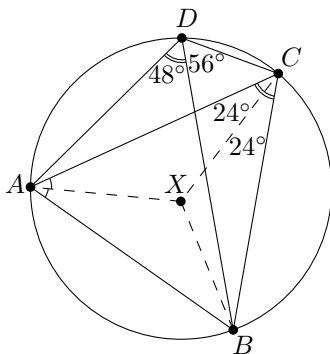
Poznámka: Tetivový štvoruholník je štvoruholník, ktorého vrcholy ležia na kružnici.

Výsledok. 38°

Riešenie. Uhly $\sphericalangle ADB$ a $\sphericalangle ACB$ sú zhodné, keďže sú obvodové k tej istej tetive. Vďaka tomu platí

$$|\sphericalangle ACX| = |\sphericalangle ACB| - |\sphericalangle XCB| = |\sphericalangle ADB| - |\sphericalangle XCB| = 48^\circ - 24^\circ = 24^\circ = |\sphericalangle XCB|.$$

To znamená, že CX je osou uhla $\sphericalangle ACB$, takže X je priesečníkom osí uhlov v trojuholníku ABC (t. j. stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC).



Teraz môžeme spočítať hľadaný uhol. Platí

$$|\sphericalangle CBX| = \frac{|\sphericalangle CBA|}{2} = \frac{180^\circ - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ACB|}{2} = \frac{180^\circ - 56^\circ - 48^\circ}{2} = 38^\circ.$$

Využili sme fakt, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$, ktorý vyplýva z toho, že ide o obvodové uhly nad tetivou BC .

Úloha 38. *Naboicula simplex* má mimoriadne primitívny mozog rozdelený na pravú a ľavú hemisféru, pričom každá je zložená z dvoch typov buniek: neurónov a podporných buniek. Žiadna bunka nie je prepojená s bunkou z rovnakej hemisféry, avšak prepojená je každá dvojica buniek patriacich rôznym hemisféram.

Jeden jedinec *Naboiculy simplex* má 168 spojení medzi dvoma neurónmi, 48 spojení medzi dvoma podpornými bunkami a 191 spojení medzi neurónom a podpornou bunkou. Určte celkový počet neurónov v mozgu takéhoto jedinca.

Výsledok. 29

Riešenie. Označme n_1, p_1 postupne počet neurónov a podporných buniek v jednej a n_2, p_2 postupne počet neurónov a podporných buniek v druhej hemisfére. Vieme, že $n_1 n_2 = 168$, $p_1 p_2 = 48$ a $n_1 p_2 + n_2 p_1 = 191$. Dokopy tak máme

$$(n_1 + p_1)(n_2 + p_2) = 168 + 48 + 191 = 407 = 11 \cdot 37$$

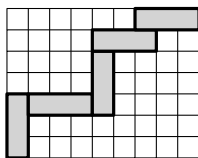
spojení, takže aby v každej hemisfére bola bunka z oboch typov, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že $n_1 + p_1 = 11$ a $n_2 + p_2 = 37$. Podobne vieme určiť, že

$$(n_1 - p_1)(n_2 - p_2) = 168 + 48 - 191 = 25.$$

Takže aby bolo n_1 deliteľom 168 a p_1 deliteľom 48, musí nutne platiť $n_1 = 8$ a $p_1 = 3$. Následne $n_2 = 168/8 = 21$ a celkový počet neurónov je $n_1 + n_2 = 29$.

Iné riešenie. Použijeme značenie z predošlého riešenia. Číslo $n_1 p_2 + n_2 p_1$ je nepárne, takže práve jeden zo sčítancov je nepárny. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je to $n_1 p_2$. To však znamená, že aj n_1 , aj p_2 sú nepárne. Na druhú stranu, keďže $168 = 2^3 \cdot 21$ a $48 = 2^4 \cdot 3$, tak n_2 musí byť deliteľné 2^3 a p_1 musí byť deliteľné 2^4 . Súčin $n_2 p_1$ je teda násobkom $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$. Keďže je navyše $n_2 p_1$ číslo menšie ako 191, musí platiť $n_2 p_1 = 128$, pričom $n_2 = 2^3 = 8$ (a $p_1 = 2^4 = 16$). Teraz už ľahko dopočítame $n_1 = 168/8 = 21$ a výsledok $n_1 + n_2 = 21 + 8 = 29$.

Úloha 39. Nate sa hrá s piatimi rovnými kriedami rozmeru 1×3 . Chcel by z nich vytvoriť súvislú cestu z ľavého dolného do pravého horného okraja mriežky 7×9 . Kriedu si vieme predstaviť ako zloženú z dvoch okrajových a jedného stredového políčka, pričom každé dve po sebe idúce kriedy na ceste sa musia dotýkať hranou svojich okrajových políčok. Na obrázku nižšie môžete vidieť jednu takú cestu. Koľko rôznych ciest Nate môže vytvoriť?



Výsledok. 75

Riešenie. Keďže Nate má iba päť kried, cesta sa nikdy nemôže pohybovať na juh ani na západ – každá krieda okrem prvej vie súradnice koncového políčka zvýšiť maximálne o 3 (a prvá o 2), pričom my sa potrebujeme dostať z políčka $(1, 1)$ do políčka $(9, 7)$. Koniec cesty sa teda vždy posúva iba na sever alebo na východ.

Počet ciest určíme postupným vyplňaním tabuľky 7×9 nasledovným spôsobom: do každého políčka zapíšeme počet ciest do tohto políčka z kried, ktorých posledné okrajové políčko leží práve v tomto políčku. Po položení prvej kriedy z ľavého dolného rohu musí byť jej koniec presne o dve políčka ďalej: buď dve doprava (vodorovná krieda), alebo dve

hore (zvislá krieda). Preto do políčok $(1, 3)$ a $(3, 1)$ zapíšeme číslo 1. Zvyšok tabuľky vyplníme postupne smerom k pravému hornému rohu. Ak chceme určiť hodnotu v políčku (x, y) , uvažujeme, akými spôsobmi tam môže krieda končiť. Krieda končiaca v (x, y) môže byť zvislá alebo vodorovná a v oboch prípadoch sa musí dotýkať predchádzajúcej kriedy okrajovým políčkom. Dostávame štyri možné okrajové políčka predchádzajúcej kriedy – $(x, y - 3)$ a $(x - 1, y - 2)$ v prípade zvislej kriedy a $(x - 3, y)$ a $(x - 2, y - 1)$ v prípade vodorovnej kriedy.

Každé z týchto políčok predstavuje korektný spôsob, ako predĺžiť existujúcu cestu o jednu kriedu. Preto do políčka (x, y) zapíšeme súčet hodnôt v políčkach $(x - 3, y)$, $(x - 2, y - 1)$, $(x - 1, y - 2)$, $(x, y - 3)$, pričom políčka mimo mriežky prispievajú hodnotou 0.

0	0	4	0	0	22	0	0	75
1	0	0	6	0	0	22	0	0
0	1	0	0	6	0	0	18	0
0	0	2	0	0	6	0	0	13
1	0	0	2	0	0	4	0	0
0	0	0	0	1	0	0	2	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1

Po vyplnení celej tabuľky dostaneme v pravom hornom rohu číslo 75, čo je presne počet všetkých platných ciest z kried z ľavého dolného do pravého horného rohu.

Iné riešenie. Položme päť kried za sebou od rohu $(0, 0)$ tak, že sa navzájom dotýkajú iba v rohoch (roh koncového políčka jednej kriedy s rohom koncového políčka nasledujúcej). Každá krieda posunie okrajové políčko buď o $(+1, +3)$ („hore“), alebo o $(+3, +1)$ („doprava“). Po piatich kriedach je okrajovým políčkom políčko (x, y) s vlastnosťou $x + y = 20$.

Nech Z je počet zvislých kried a V počet vodorovných kried. Potom $Z + V = 5$ a

$$(x, y) = (Z + 3V, 3Z + V).$$

Aby sme z reťaze dotýkajúcej sa iba v rohoch dostali korektnú cestu, kde sa susedné kriedy dotýkajú celou hranou, musíme „opraviť“ každý zo štyroch spojov medzi po sebe idúcimi kriedami. Pri každom spoji si zvolíme jednu z dvoch možností: buď posunieme celý zvyšok cesty (od nasledujúcej kriedy až po piatu) o jedno políčko doľava, alebo o jedno políčko nadol. Tak zabezpečíme, že dve susedné kriedy budú mať spoločnú hranu namiesto spoločného rohu.

Nech ℓ je počet spojov, pri ktorých zvolíme posun doľava, a d počet spojov s posunom nadol. Keďže sú presne štyri spoje, platí $\ell + d = 4$. Po vykonaní všetkých posunov sa okrajové políčko (x, y) presunie na $(x - \ell, y - d)$. Aby sme dostali cestu z $(0, 0)$ do pravého horného rohu $(9, 7)$, musí platiť $(x - \ell, y - d) = (9, 7)$.

Preskúmajme jednotlivé možnosti (Z, V) :

- $(5, 0)$: $(x, y) = (5, 15)$ – Keďže $5 < 9$, nedá sa opraviť na $(9, 7)$.
- $(4, 1)$: $(x, y) = (7, 13)$ – Tiež sa nedá opraviť.
- $(3, 2)$: $(x, y) = (9, 11)$ – Platí $\ell = 9 - 9 = 0$, $d = 11 - 7 = 4$ (všetky posuny nadol). Existuje $\binom{5}{3} = 10$ spôsobov, ako zoradiť kriedy rôznych orientácií za seba, no potom pre každé zoradenie iba 1 spôsob opravy, spolu 10 ciest.
- $(2, 3)$: $(x, y) = (11, 9)$ – Platí $\ell = 11 - 9 = 2$, $d = 9 - 7 = 2$. Existuje $\binom{5}{2} = 10$ spôsobov, ako zoradiť kriedy a pre každé zoradenie $\binom{4}{2} = 6$ spôsobov, ako vybrať, kde budú posuny doľava, spolu $10 \cdot 6 = 60$ ciest.
- $(1, 4)$: $(x, y) = (13, 7)$ – Platí $\ell = 13 - 9 = 4$, $d = 7 - 7 = 0$ (všetky posuny doľava). Existuje $\binom{5}{1} = 5$ zoradení kried a jediný spôsob opravy, spolu 5 ciest.
- $(0, 5)$: $(x, y) = (15, 5)$ – Ani toto sa nedá opraviť.

Celkovo teda dostaneme $10 + 60 + 5 = 75$ ciest.

Úloha 40. Nech a, b, c, d sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c + d = 2$ a $\frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$. Určte hodnotu výrazu

$$\frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}.$$

Výsledok. 507

Riešenie. Označme $X = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$ a $Y = \frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}$.

Uvedomme si, že $a + 2b$ z menovateľa vystupuje aj v rozdieli štvorcov $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$. Ak by sme teda dosiahli, že toto bude čitateľom zlomku, výraz sa výrazne zjednoduší. Všimnime si, že na takúto kombináciu nám stačí spočítať $X - 4Y$. Z toho dostaneme

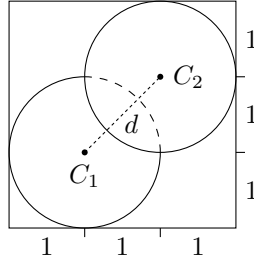
$$\begin{aligned} X - 4Y &= \frac{a^2 - 4b^2}{a + 2b} + \frac{b^2 - 4c^2}{b + 2c} + \frac{c^2 - 4d^2}{c + 2d} + \frac{d^2 - 4a^2}{d + 2a} = (a - 2b) + (b - 2c) + (c - 2d) + (d - 2a) = \\ &= -a - b - c - d = -(a + b + c + d) = -2. \end{aligned}$$

Nakoniec už len vyjadríme $Y = \frac{1}{4}(X + 2) = \frac{2026+2}{4} = 507$.

Úloha 41. V krabici tvaru kvádra so štvorcovou podstavou so stranou dĺžky 3 a výškou a sa nachádzajú dve pingpongové loptičky, každá s polomerom 1. Prvá loptička je umiestnená tak, že sa dotýka dvoch susedných zvislých stien krabice, spodnej steny krabice a druhej loptičky. Druhá loptička sa dotýka zvyšných dvoch zvislých stien krabice, hornej steny krabice a prvej loptičky. Určite výšku a krabice.

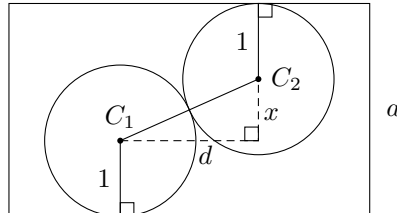
Výsledok. $2 + \sqrt{2}$

Riešenie. Nech C_1 a C_2 sú stredy dvoch loptičiek a nech d je vodorovná vzdialenosť medzi týmito stredmi, teda dĺžka priemetu úsečky C_1C_2 na hornú (alebo dolnú) stenu krabice. Pri pohľade zhora dostaneme štvorec so stranou dĺžky 3, kde C_1 je vo vzdialenosti 1 od dvoch susedných strán a C_2 je vo vzdialenosti 1 od zvyšných dvoch susedných strán.



Z toho vyplýva, že v tomto pohľade zhora ležia priemety C_1 a C_2 v protiľahlých vrcholoch štvorca so stranou 1. Preto $d = \sqrt{2}$.

Ďalej uvažujme zvislú rovinu kolmú na základňu krabice, ktorá prechádza cez C_1 a C_2 . Prienik tejto roviny s krabicou je obdĺžnik hľadanej výšky a a úsečka C_1C_2 leží v tejto rovine. Nech x je zvislá vzdialenosť medzi C_1 a C_2 .



Keďže sa loptičky dotýkajú a každá má polomer 1, vzdialenosť medzi ich stredmi je $|C_1C_2| = 2$. V pravouhlom trojuholníku s vodorovnou odvesnou d a zvislou odvesnou x platí $|C_1C_2|^2 = d^2 + x^2$, takže $x = \sqrt{2^2 - d^2} = \sqrt{2}$.

Nakoniec, prvá loptička sa dotýka spodnej steny a druhá loptička hornej steny, takže výška krabice je súčet polomeru prvej loptičky, zvislej vzdialenosti medzi stredmi a polomeru druhej loptičky: $a = 1 + x + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

Úloha 42. Koľkými spôsobmi sa dá tabuľka 3×3 vyplniť číslicami $0, 1, \dots, 9$ tak, že každé políčko obsahuje práve jednu číslicu, žiadna číslica nie je použitá viac ako raz a pre šesť súčtov tvorených tromi riadkami a tromi stĺpcami platí, že sú buď všetky párne, alebo všetky nepárne? Príklad vyhovujúcej tabuľky, v ktorej sú všetky súčty riadkov a stĺpcov párne, je uvedený nižšie:

1	2	3
5	4	7
6	0	8

Výsledok. 259200

Riešenie. Keďže $0 + 1 + \dots + 9 = 45$ je nepárne, vynechanie nepárnej číslice dáva súčet celej tabuľky párny, a teda všetky súčty riadkov a stĺpcov musia byť párne. To je možné zaradiť použitím 4 nepárnych a 5 párnych číslic len vtedy, ak jeden riadok a jeden stĺpec dokopy (5 políčok) obsahujú práve všetky párne čísla. Preto môžeme spočítať všetky takéto tabuľky takto: najprv vyberieme vynechanú nepárnu číslicu (5 spôsobov), potom vyberieme riadok a stĺpec obsahujúce iba párne číslice ($3 \cdot 3 = 9$ spôsobov), potom rozmiestnime nepárne číslice ľubovoľným spôsobom ($4! = 24$ spôsobov) a nakoniec rozmiestnime párne číslice ľubovoľným spôsobom ($5! = 120$ spôsobov).

Podobne, ak vynecháme párnú číslicu, súčet všetkých troch riadkov bude nepárny, a teda všetky riadky a stĺpce musia mať nepárny súčet. Jediný spôsob, ako umiestniť päť nepárnych číslic do tabuľky 3×3 tak, aby každý riadok a stĺpec obsahoval jednu alebo tri z nich, je vložiť ich do jedného riadku a jedného stĺpca. Počet takýchto tabuliek sa vypočíta analogicky ako v predchádzajúcom prípade, len s vymenenými rolami párnych a nepárnych číslic. Preto celkový počet je rovný $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 120 = 259\,200$.

Úloha 43. Súčet štyroch navzájom rôznych kladných celých čísel a, b, c a d je 20000. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu $\text{nsn}(a, b, c, d)$, kde nsn označuje najmenší spoločný násobok.

Výsledok. 9600

Riešenie. Nech $L = \text{nsn}(a, b, c, d)$ a nech BUNV $a > b > c > d$. Tieto čísla sú delitele L , čiže $L = aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1$ pre nejaké kladné celé čísla a_1, b_1, c_1, d_1 . Je zrejmé, že $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$. Preto $a_1 \geq 1, b_1 \geq 2, c_1 \geq 3, d_1 \geq 4$. To znamená, že

$$a \leq L, \quad b \leq \frac{L}{2}, \quad c \leq \frac{L}{3}, \quad d \leq \frac{L}{4}.$$

Z toho plynie

$$20000 = a + b + c + d \leq L \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25L}{12},$$

čiže $L \geq 12 \cdot 20000/25 = 9600$.

Aby sme ukázali, že $L = 9600$ sa dá dosiahnuť, stačí položiť $a = 9600, b = \frac{9600}{2}, c = \frac{9600}{3}$, a $d = \frac{9600}{4}$, čo sú všetko celé čísla. Súčet týchto štyroch čísel je $9600 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 20000$. Preto 9600 je hľadaná minimálna hodnota L .

Úloha 44. Postupnosť a_1, a_2, a_3, \dots definovaná ako $a_n = \frac{n^2}{1.001^n}$ nadobúda maximálnu hodnotu v a_m . Nájdite m .

Výsledok. 2001

Riešenie. Všimnime si, že $a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)^2}{1.001n^2} = \frac{1000(n+1)^2}{1001n^2}$. Potom $a_{n+1} > a_n$ (čiže $a_{n+1}/a_n > 1$) dáva $2000n + 1000 > n^2$, a teda $n(n - 2000) < 1000$. Ľahko overíme, že táto podmienka je splnená, keď $n \leq 2000$, keďže ľavá strana je nekladná, a nesplnená pre $n \geq 2001$. Preto je postupnosť ostro rastúca do 2001 a, podobne, ostro klesajúca ďalej, čiže $a_1 < a_2 < \dots < a_{2000} < a_{2001} > a_{2002} > \dots$. Takže maximum postupnosti nastáva pre a_{2001} .

Úloha 45. Päť kamarátov si objednáva miesta na predstavenie. Všetci chcú sedieť v jednom rade, ktorý ma nasledujúce rozmiestnenie (stena, štyri bloky šiestich sedadiel rozdelených tromi uličkami a stena).

$$|\ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ _ \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ _ \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ _ \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ |$$

Kamaráti sú hanbliví, a preto si chcú vybrať miesta tak, aby všetci mohli opustiť svoje miesto bez toho, aby obťažovali cudzích divákov (a to aj v prípade, že bude zaplnený cudzími divákmi celý zvyšok radu). Koľko rôznych možností na objednanie miest majú kamaráti? (Miesta nie sú viazané na mená.)

Výsledok. 252

Riešenie. Podmienka, že všetci môžu opustiť svoje miesto bez obťažovania neznámych divákov znamená, že rezervované miesta musia tvoriť najviac tri ostrovčeky okolo uličiek.

Na to potrebujeme aspoň $2 \cdot 3 - 1 = 5$ oddeľovačov:

- *nepárny* oddeľovač reprezentuje uličku samotnú,
- *párny* reprezentuje neprázdnu skupinu neobsadených sedadiel v bloku, ktorá nesusedí so stenou.

Tvrdíme, že takéto rozloženia zodpovedajú všetkým vyhovujúcim možnostiam. Napríklad zoberme jedno také rozloženie:

$$_ \emptyset K _ \emptyset K K _ K K,$$

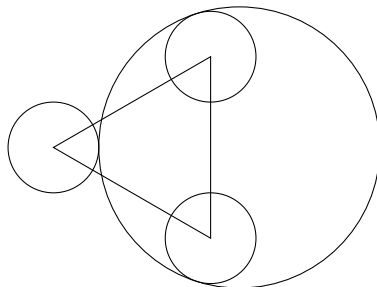
kde K je kamarát, $_$ je ulička a \emptyset je skupina kamarátmi neobsadených sedadiel. Takéto označenie korešponduje s tým, že z ľavého bloku nie je kamarátmi obsadené žiadne miesto, v druhom bloku je obsadené iba jedno miesto dostupné zo strednej uličky a v treťom a štvrtom blokoch sú dostupné z pravej uličky dve a dve miesta. Na druhej strane, pre každé možné obsadenie miest existuje práve jedno takéto reprezentácia. Celý blok nemôže byť obsadený iba kamarátmi, keďže sedadiel je šesť a kamarátov päť, a teda aspoň jedno miesto musí zostať voľné.

Počítame možné usporiadania piatich kamarátov (nerozlíšiteľných pretože si ešte len tie lístky objednávajú) a piatich oddeľovačov (majú rozličný charakter, ale ten je daný poradím, ako je spomenuté skôr v riešení, teda nie je potrebné ich rozlišovať pri počítaní). Preto vyberáme 5 pozícií z $5 + 5$ čo dáva

$$\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

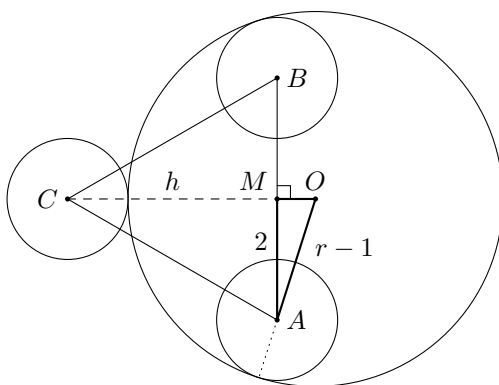
možností.

Úloha 46. Uvažujme rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 4. V každom vrchole trojuholníka je stred kružnice s polomerom 1. Určte polomer väčšej kružnice, ktorá sa dotýka vnútorným dotykcom dvoch malých kružníc a poslednej vonkajším dotykcom.



Výsledok. $\frac{3\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Riešenie. Označme rovnostranný trojuholník ABC a nech je stred veľkej kružnice O a polomer r . Nech má vnútorný dotyk s kružnicami okolo A a B a vonkajší dotyk s kružnicou okolo C . Výška trojuholníka je $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$. Keďže $|OA| = |OB|$, bod O leží na osi úsečky AB . Nech M je stred úsečky AB , teda $|AM| = 2$ a $|CM| = h$.



Z podmienok dotykov, $|OA| = |OB| = r - 1$ a $OC = r + 1$. Keďže O leží na priamke CM , dostávame

$$|OM| = |OC| - |CM| = r + 1 - h.$$

(Toto platí iba za predpokladu, že O leží mimo trojuholníka ABC . Ak naopak O leží vo vnútri, tak $|OM| = |CM| - |OC|$; avšak v oboch prípadoch budeme pokračovať s používaním $|OM|^2$, ktoré nezávisí na konfigurácii.)

V pravouhlom trojuholníku OMA vieme z Pytagorovej vety, že

$$|OA|^2 = |OM|^2 + |AM|^2 \quad \text{alebo} \quad (r - 1)^2 = (r + 1 - h)^2 + 2^2.$$

Roznásobením a zjednodušením dostaneme

$$r = \frac{h^2 - 2h + 4}{2(h - 2)}.$$

Dosadením $h = 2\sqrt{3}$ dostaneme výsledok $r = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$.

Úloha 47. KMS miestnosť je plná trpaslíkov vysokých 1,2 m, a FKS miestnosť je plná obrov vysokých 4 m. Po tom čo sa 35 obrov a 24 trpaslíkov presunulo zo svojej miestnosti do druhej, ukázalo sa, že v oboch miestnostiach je rovnaká priemerná výška. Aký je najmenší možný celkový počet magických bytostí, aby toto mohlo nastať?

Výsledok. 117

Riešenie. Nech t a o sú postupne celkové počty trpaslíkov a obrov. Po výmene máme $t - 24$ trpaslíkov a 35 obrov v KMS miestnosti a 24 trpaslíkov a $o - 35$ obrov v FKS miestnosti. Pre jednoduchosť označme $t_1 = t - 24$, $t_2 = 35$, $o_1 = 24$ a $o_2 = o - 35$, a označme výšky trpaslíkov a obrov postupne ako v_t a v_o . Zhodujúca sa priemerná výška je

$$\frac{t_1 v_t + o_1 v_o}{t_1 + o_1} = \frac{t_2 v_t + o_2 v_o}{t_2 + o_2}.$$

Zjednodušením rovnice dostaneme

$$(v_o - v_t)(o_1 t_2 - t_1 o_2) = 0.$$

Keďže v_o je rôzne od v_t , tak to znamená, že $o_1 t_2 - t_1 o_2 = 0$ alebo $\frac{o_1}{t_1} = \frac{o_2}{t_2}$. Teda, aby bola priemerná výška v oboch miestnostiach rovnaká, musí byť pomer trpaslíkov a obrov rovnaký a na presných výškach to nezávisí. Použijúc známe hodnoty o_1 a t_2 dostaneme

$$t_1 o_2 = o_1 t_2 = 35 \cdot 24 = 840.$$

Naším cieľom je však minimalizovať množstvo čarovných bytostí $t + o$, takže je to ekvivalentné s minimalizovaním $t_1 + o_2$, keďže $t + o = t_1 + o_2 + 24 + 35$. Pre dve kladné čísla s daným súčinom, je ich súčet najmenší práve vtedy, keď je ich rozdiel najmenší. To vyplýva z $(t_1 + o_2)^2 = (t_1 - o_2)^2 + 4t_1 o_2$. Preto hľadáme rozklad čísla 840 na dve kladné celé čísla, ktoré sú blízko pri sebe. Optimálnym riešením je teda $840 = 28 \cdot 30$.

Preto t_1 a o_2 sú 28 a 30 (v ľubovoľnom poradí) a najmenší celkový počet magických bytostí je $t + o = 28 + 30 + 24 + 35 = 117$.

Úloha 48. Šesť vedúcich sa stretne pri stole a náhodne sa okolo neho pousádzajú. Vedúci majú postupne jedno, dve, tri, štyri, päť a šesť es v rukáve. Je zrejmé, že kde sa dvaja hádajú, vyhrá ten, kto má viac es v rukáve. Proces vyberania hlavného vedúceho by zrejme vedel byť jednoduchší, no oni to robia takto – kým je pri stole stále viac ako jeden vedúci, vyberie sa náhodný vedúci. Ten sa poháda s vedúcim vedľa neho po smere hodinových ručičiek, pričom porazený aj so stoličkou odíde od stola. Aká je pravdepodobnosť, že v poslednom kole o pozíciu hlavného vedúceho bojujú vedúci, ktorí majú 5 a 6 es v rukáve?

Výsledok. 7/15

Riešenie. Usadíme šiestich vedúcich náhodne okolo stola a sústreďme sa len na to, či sa vedúci s 5 a 6 esami stretnú skôr ako v poslednom kole (keďže inak ani jeden z nich nemôže prehrať). V ľubovoľnom okamihu môžeme zostávajúcich vedúcich zapísať v smere hodinových ručičiek ako $5, A_1, \dots, A_a, 6, B_1, \dots, B_b$, kde a je počet zostávajúcich vedúcich medzi 5 a 6 (v smere hodinových ručičiek od 5 k 6) a b je počet vedúcich na druhej strane.

Označme $f(a, b)$ pravdepodobnosť, že posledný súboj bude medzi 5 a 6 pri takejto konfigurácii. Je zrejmé, že táto pravdepodobnosť závisí iba od čísel a a b , nie od konkrétnych hodnôt vedúcich A_i a B_i . Každý z A_i a B_i má totiž najviac 4 esá, takže každý súboj s 5 alebo 6 vždy vyradí slabšieho, zatiaľ čo súboje medzi A_i (resp. medzi B_i) len zmenšujú príslušnú skupinu o jedného.

Ak $a = 0$ alebo $b = 0$, potom sú 5 a 6 susedia a zostáva $n = a + b + 2$ vedúcich. V tejto situácii v každom kroku práve jeden výber vyzývateľa (buď 5 alebo 6; podľa toho, kto je napravo) vedie okamžite k ich vzájomnému súboju, v ktorom je 5 vyradený; všetky ostatné voľby vyradia niekoho iného. Pravdepodobnosť, že 5 prežije až do posledného kola, sa teda rovná

$$f(a, 0) = f(0, b) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{2}{n} = \frac{2}{a+b+2}.$$

Pozrime sa teraz na situáciu, keď $a, b \geq 1$ a označme $n = a + b + 2$ počet zostávajúcich vedúcich. Uvažujme úsek vedúcich v smere hodinových ručičiek od 5 po vedúceho tesne pred 6. Tento úsek má $a + 1$ členov, konkrétne $5, A_1, \dots, A_a$. Ak náhodne vybraný vyzývateľ patrí do tohto úseku, nasledujúci súboj sa odohrá v rámci tohto úseku (vyzvaný je vždy najbližší vedúci po smere hodinových ručičiek, stále v úseku, okrem A_a , ktorý vyzve 6), a v každom prípade je vyradený niektorý z A_1, \dots, A_a . Výber vyzývateľa z tohto úseku preto zníži a o 1.

Rovnakou úvahou úsek od 6 po vedúceho tesne pred 5 má $b + 1$ členov a výber vyzývateľa z tohto úseku zníži b o 1. Keďže vyzývateľ sa vyberá rovnomerne náhodne spomedzi n zostávajúcich vedúcich, pre $a, b \geq 1$ platí rekurentný vzťah

$$f(a, b) = \frac{a+1}{n} f(a-1, b) + \frac{b+1}{n} f(a, b-1).$$

Na začiatku je $a + b = 4$. Použitím okrajových hodnôt

$$f(0, 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad f(0, 3) = \frac{2}{5}, \quad f(0, 2) = \frac{1}{2}, \quad f(0, 1) = \frac{2}{3}$$

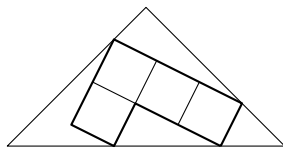
a symetrie $f(a, b) = f(b, a)$ dostaneme

$$f(1, 1) = \frac{2}{3}, \quad f(1, 2) = \frac{3}{5}, \quad f(1, 3) = \frac{8}{15}, \quad f(2, 2) = \frac{3}{5}.$$

Keďže počiatočné rozsadenie je náhodné, medzera a medzi 5 a 6 (v smere hodinových ručičiek) je s rovnakými pravdepodobnosťami $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Hľadaná pravdepodobnosť je teda priemerom príslušných pravdepodobností, a to

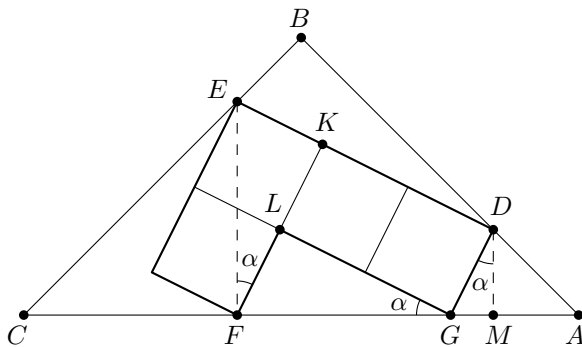
$$\frac{1}{5} (f(0, 4) + f(1, 3) + f(2, 2) + f(3, 1) + f(4, 0)) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{15}.$$

Úloha 49. Lukášov príviesok v tvare písmena L pozostáva zo štyroch zhodných štvorcov, ktoré sú pospájané hranami. Teri mu naň kúpila škatuľku v tvare pravouhlého rovnoramenného trojuholníka, do ktorej si ho môže uložiť tak, že sa krabičky dotýka v štyroch bodoch ako na obrázku. Aký je pomer obsahov príviesku a škatuľky?



Výsledok. 80/169

Riešenie. Označme body ako na obrázku nižšie. Ak zvolíme dĺžku strany malých štvorcov rovnú 1, stačí vypočítať dĺžku jednej strany trojuholníka ABC , napríklad prepony AC .



Pomocou pomocnej úsečky EF dostaneme pravouhlý trojuholník EFK s $\angle EKF = 90^\circ$ a dĺžkami $|EK| = 1$, $|KF| = 2$ a $|EF| = \sqrt{5}$. Keďže $|GL| = 2$, $|LF| = 1$ a zároveň $\angle FLG = 90^\circ$, trojuholníky EFK a FGL sú zhodné. Odtiaľ dostávame $|GF| = |EF| = \sqrt{5}$. Nech $\alpha = \angle LGF$. Potom $\angle KFE = \alpha$ a z toho vyplýva, že $\angle GFE = 90^\circ$, pretože uhol α dopĺňa $\angle GFL$ do 90° . V kombinácii s tým, že $\angle ECF = 45^\circ$ to znamená, že trojuholník FEC je rovnoramenný pravouhlý trojuholník s dĺžkou strany $|FC| = \sqrt{5}$.

Teraz zostrojíme druhú pomocnú úsečku tak, že z bodu D spustíme kolmicu na priamku AC a označíme päť kolmice ako M . Keďže $\angle LGF + \angle MGD = 90^\circ$, dostaneme $\angle GDM = \alpha$, a teda trojuholník MDG je podobný trojuholníku FGL , pričom jeho strany sú $\sqrt{5}$ -krát menšie. Preto majú strany trojuholníka MDG dĺžky $|MG| = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $|MD| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ a $|DG| = 1$. Ešte si všimnime, že aj $EF \parallel DM$, z čoho už ľahko vidíme, že aj trojuholník MAD je rovnoramenný pravouhlý. Preto $|AM| = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Teraz už vieme spočítať

$$|AC| = |AM| + |MG| + |GF| + |FC| = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = \frac{3 + 2 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Obsah trojuholníka ABC je teda

$$\frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{|AC|}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{13}{\sqrt{10}} \right)^2 = \frac{169}{20}$$

a hľadaný pomer obsahov zas

$$\frac{4}{\frac{169}{20}} = \frac{80}{169}.$$

Úloha 50. Jožtek má rád číslo dävät. A keď už nemôže mať dävät, tak aspoň štyridsaťdävät. Majme postupnosť $(a_n)_{n=1}^\infty$, ktorej prvé členy sú $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ a pre $n \geq 1$ spočítame ďalší člen ako $a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} + 3^{a_{n+1}} + 3^{a_n}$. Aký je zvyšok a_{22} po delení 49?

Výsledok. 11

Riešenie. Člen a_{22} je súčtom mocnín čísla 3, pričom jeho zvyšok po delení 49 môžeme určiť pomocou Eulerovej vety. Keďže sú 3, 49 nesúdeliteľné a $\varphi(49) = 42$, podľa Eulerovej vety platí

$$3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 42} \pmod{49}.$$

Na výpočet $a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \pmod{49}$ teda stačí poznať $a_{21}, a_{20}, a_{19} \pmod{42}$. Podľa čínskej zvyškovej vety to znamená určiť zvyšky po delení 6 a 7.

Najprv si všimnime, že pre $n \geq 4$ je každý člen a_n súčtom troch mocnín čísla 3, teda je nepárny a deliteľný tromi. Preto $a_n \equiv 3 \pmod{6}$. Keďže $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ (opäť z Eulerovej vety), môžeme sa opäť v exponente pozerať iba na zvyšok po delení 6. Pre $n \geq 4$ dostaneme teda $3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 6} \equiv 3^3 \pmod{7}$.

Pre $n \geq 7$ (aby $n - 3 \geq 4$) potom platí

$$a_n = 3^{a_{n-1}} + 3^{a_{n-2}} + 3^{a_{n-3}} \equiv 3^3 + 3^3 + 3^3 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Spojením kongruencií $a_n \equiv 3 \pmod{6}$ a $a_n \equiv 4 \pmod{7}$ dostaneme pre $n \geq 7$ pomocou čínskej zvyškovej vety $a_n \equiv 39 \equiv -3 \pmod{42}$. Z Eulerovej vety teda ešte raz vyplýva $3^{a_n} \equiv 3^{-3} \pmod{49}$, kde záporný exponent vyjadruje mocninu inverzného prvku modulo 49. Nakoniec

$$a_{22} \equiv 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \equiv 3^{-3} + 3^{-3} + 3^{-3} = 3^{-2} = 9^{-1} \equiv 11 \pmod{49},$$

keďže $9 \cdot 11 = 99 \equiv 1 \pmod{49}$. Hľadaný zvyšok je teda 11.

Úloha 51. Danko začína s prázdnu palivovou nádržou na začiatku nekonečnej cesty. Pre každé celé číslo $n \geq 0$ existuje obchodník nachádzajúci sa n^2 kilometrov od štartu. Danko si od každého obchodníka môže kúpiť ľubovoľné celočíselné množstvo litrov paliva. Obchodníci však neradi predávajú veľké množstvo paliva, takže cena za liter sa zvyšuje s každým ďalším zakúpeným litrom: u každého obchodníka prvý liter stojí 1 euro, druhý liter 2 eurá, tretí 3 eurá a tak ďalej. Každý liter umožní Dankovi prejsť 1 km. Zásoba obchodníkov aj Dankova nádrž sú neobmedzené. Ak má Danko 730 eur, aká je maximálna vzdialenosť, ktorú môže po ceste precestovať?

Výsledok. 123

Riešenie. Na dosiahnutie obchodníka vo vzdialenosti n^2 km vieme kúpiť palivo od n predchádzajúcich obchodníkov. Určite nevieme dosiahnuť nižšie náklady, ako keď kúpime presne n litrov od každého obchodníka, pretože za cenu i nevieme kúpiť viac ako n litrov, a zároveň v našej konštrukcii kúpime n litrov za n najlacnejších cien.

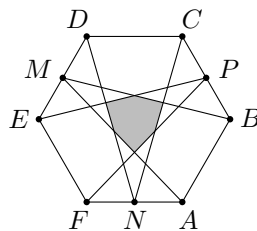
Musíme si však overiť, že plán „pri každom obchodníkovi, ktorého stretnem, kúpim n litrov paliva“ skutočne funguje (t. j. umožňuje Dankovi úspešne dosiahnuť kilometer n^2); nesmie sa stať, že mu dôjde palivo predtým, než dorazí k niektorému z predchádzajúcich obchodníkov. Dokážeme jednoduchou indukciou, že tento plán nezlyhá. Prípád $n = 0$ je jasný: na dosiahnutie 0 km nie je potrebné kupovať žiadne palivo. Teraz predpokladajme, že už vieme, že je možné dosiahnuť n^2 km kúpou n litrov u každého z n obchodníkov. Potom, ak namiesto toho kúpime $n + 1$ litrov, určite nám palivo nedôjde pred kilometrom n^2 . Z toho vyplýva, že dokážeme kúpiť $n + 1$ litrov aj u obchodníka na n^2 km a po týchto $n + 1$ nákupoch po $n + 1$ litrov Danko úspešne dosiahne $(n + 1)^2$ km.

Tento argument ukazuje, že náklady na dosiahnutie n^2 km sú aspoň

$$C_n = n(1 + 2 + \dots + n) = n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Z toho, že $C_{11} = 726 \leq 730 < 936 = C_{12}$, vyplýva, že 11² km je možné dosiahnuť, ale 12² km už nie. Použitie zvyšných 4 eur na kúpu 2 ďalších litrov pri poslednom obchodníkovi umožní dosiahnuť 123 km; dosiahnuť 124 km rovnakým spôsobom by však znamenalo prekročiť rozpočet o 2 eurá.

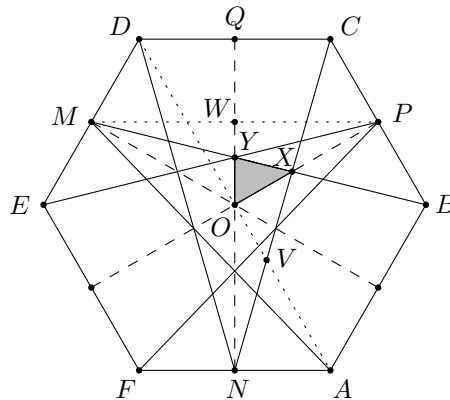
Úloha 52. Nech $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník s obsahom 420. Nech M , N , a P sú postupne stredy strán DE , FA a BC . Úsečky AM , BM , CN , DN , EP a FP ohraničujú sivú oblasť (na obrázku). Určte obsah tejto oblasti.



Výsledok. 36

Riešenie. Zafarbenú oblasť možno rozložiť na šesť zhodných trojuholníkov, čo znamená, že stačí vypočítať obsah jedného takého trojuholníka. Nech O je stred šesťuholníka, X priesečník BM a CN , a Y priesečník BM a PE . Okrem toho zavedieme niekoľko pomocných bodov: Q je stred úsečky CD , V priesečník AD a CN a W priesečník PM a QN .

Ukážeme, že $|OX| : |OP| = 2 : 5$ a $|OY| : |OQ| = 2 : 7$.



Keďže trojuholníky NAV a CDV sú podobné a $|NA| = \frac{1}{2}|CD|$, máme $|AV| : |VD| = 1 : 2$, z čoho $|OV| = \frac{1}{3}|OA|$. Ďalej trojuholník OVX je podobný s PCX , a keďže $|PC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|OA|$, máme $|OV| : |PC| = 2 : 3$, čo je tiež rovné $|OX| : |PX|$. Teda $|OX| : |OP| = 2 : 5$.

Na dokázanie $|OY| : |OQ| = 2 : 7$ využijeme podobnosť trojuholníkov OBY a WMY s $|WM| = \frac{3}{4}|OB|$, z čoho plynie $|OY| : |YW| = 4 : 3$. Spojením tohto s $|OW| = |WQ|$ ľahko dostaneme $|OY| : |OQ| = 2 : 7$.

Označme hranatými zátvorkami obsah trojuholníka. Trojuholníky OXY a OPQ majú spoločný uhol POQ , takže

$$\frac{[OXY]}{[OPQ]} = \frac{|OX|}{|OP|} \cdot \frac{|OY|}{|OQ|} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}.$$

Ďalej trojuholník OPQ je rovnostranný so stranou, ktorej dĺžka je $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -násobkom dĺžky strany ABO , takže $[OPQ] = \frac{3}{4}[ABO]$. Preto

$$\frac{[OXY]}{[ABO]} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}.$$

Keďže zafarbená oblasť pozostáva zo šiestich kópií OXY a šesťuholník pozostáva zo šiestich kópií ABO , platí rovnaký pomer. Preto obsah vyznačenej časti je $\frac{3}{35} \cdot 420 = 36$.

Úloha 53. Marek je majstrom algebraických úprav, takže vzal všetky výrazy $\pm a \pm b \pm c \pm d$ (dokopy 16 výrazov pre všetky možné kombinácie znamienok) a navzájom ich vynásobil, čím získal polynóm v premenných a, b, c, d . Potom zahodil všetky členy, v ktorých aspoň jedna premenná chýbala. Aký bol súčet koeficientov všetkých zostávajúcich členov?

Výsledok. -328

Riešenie. Nech P je polynóm zo zadania. Ak všetkým štyrom premenným priradíme hodnotu 1, súčin obsahuje činiteľ $(1 + 1 - 1 - 1) = 0$, takže súčet všetkých koeficientov polynómu P sa rovná 0. Vypočítajme súčet koeficientov zahodených členov. Urobíme to pomocou princípu inklúzie a exklúzie.

Chceme určiť súčet koeficientov členov, ktorým chýba aspoň jedna premenná. Na začiatok uvažujme prípad, keď jedna pevne zvolená premenná je nulová. Toto sčítame cez všetky štyri možnosti, ktorá premenná to je, čím každý mnohočlen, ktorý nemá premennú, započítame aspoň raz. Aby sme sčítali koeficienty členov, ktoré neobsahujú (napríklad) d , vypočítame hodnotu P pre $a = b = c = 1$ a $d = 0$, čím získame

$$P(1, 1, 1, 0) = ((1 + 1 + 1)(1 + 1 - 1)(1 - 1 + 1)(1 - 1 - 1)(-1 + 1 + 1)(-1 + 1 - 1)(-1 - 1 + 1)(-1 - 1 - 1))^2 = 9^2 = 81.$$

Súčtom cez štyri možnosti chýbajúcej premennej dostaneme $4 \cdot 81 = 324$, ale v tomto súčte sme každý člen s iba dvoma premennými započítali dvakrát, takže musíme odčítať $P(1, 1, 0, 0) = 0$ šesťkrát, pretože existuje šesť dvojíc premenných. Nakoniec musíme pripočítať členy s iba jednou premennou, takže pripočítame $P(1, 0, 0, 0) = 1$ štyrikrát. Celkovo tieto koeficienty dávajú súčet $324 + 4 = 328$. Keďže celkový súčet všetkých koeficientov P je 0, súčet koeficientov zvyšných jednočlenov (tých, ktoré obsahujú všetky štyri premenné) je -328 .

Úloha 54. Kubko má 9000 zhodných rovnostranných trojuholníkov. Koľko rôznych štvoruholníkov z nich vie poskladať rozmiestnením všetkých 9000 trojuholníkov bez prekryvania sa? Zhodné štvoruholníky pokladáme za rovnaké.

Výsledok. 30

Riešenie. Vrchol štvoruholníka vytvorený spojením rovnostranných trojuholníkov môže mať iba uhol veľkosti 60° alebo 120° . Keďže súčet vnútorných uhlov štvoruholníka musí byť 360° , štyri uhly musia byť $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ a 120° . Existujú dva typy štvoruholníkov, ktoré sa dajú zložiť, v závislosti od toho, či sú rovnaké uhly oproti sebe alebo susedia – rovnobežníky a rovnoramenné lichobežníky.

Čo sa týka rovnobežníkov, ak majú strany a a b , potom sa skladajú z $2ab$ trojuholníkov (možno ich chápať ako ab rovnobežníkov zložených iba z 2 trojuholníkov), takže hľadáme dvojice a, b také, že $ab = 4500$. Existuje 18 takýchto dvojíc (pretože existuje $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ deliteľov čísla $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$).

Pri lichobežníkoch si všimnime, že ich možno považovať za rozdiel dvoch veľkých rovnostranných trojuholníkov. Trojuholník so stranou n sa skladá z n^2 trojuholníkov (ak by sme si ho rozdelili na riadky, je to súčet prvých n nepárnych čísel), takže chceme, aby platilo $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 9000$, kde a je dlhšia základňa lichobežníka a b kratšia. Opäť hľadáme dvojice deliteľov, ale v tomto prípade musia byť obe hodnoty $a + b$ a $a - b$ párne, aby sústava rovníc mala celočíselné riešenie. Číslo 9000 má $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ párnych deliteľov, pri ktorých je aj podiel páry (tieto zodpovedajú deliteľom čísla $9000/4 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$) a tie vedú k 12 vyhovujúcim dvojiciam $a + b$ a $a - b$, čo zodpovedá 12 vyhovujúcim dvojiciam a a b .

Celkovo teda existuje $18 + 12 = 30$ možných štvoruholníkov.

Úloha 55. Denys na okno zavesil reťaz vianočných svetielok s 10 žiarovkami, ale, nanešťastie, nie všetky žiarovky svietili. Vieme, že neexistujú štyri po sebe idúce žiarovky, ktoré striedavo svietia a nesvietia (čiže svieti, nesvieti, svieti, nesvieti ani nesvieti, svieti, nesvieti, svieti). Koľko rôznych konfigurácií svietenia žiaroviek môže existovať?

Výsledok. 548

Riešenie. Označme svietiacu žiarovku 1 a nesvietiacu 0. Potom úlohou je spočítať binárne postupnosti dĺžky 10, ktoré neobsahujú 0101 ani 1010 ako súvislý blok. Na začiatok zmeňme hodnoty na všetkých párych pozíciách na opačné (nahradíme x_i hodnotou $1 - x_i$ pre párne i a ponechajme x_i pre nepárne i nezmenené); táto zmena aplikovaná dvakrát vráti postupnosť do pôvodného stavu, takže ide o bijekciu. Navyše, toto preklopenie zmení striedavý blok 0101 alebo 1010 na konštantný blok 0000 alebo 1111, a naopak. Preto pôvodné postupnosti sú v bijekcii s binárnymi postupnosťami dĺžky 10, ktoré neobsahujú blok štyroch po sebe idúcich rovnakých čísel, čo sa ľahšie počíta.

Nech B_n označuje počet binárnych postupností dĺžky n , ktoré neobsahujú blok štyroch po sebe idúcich rovnakých čísel; tvrdíme, že pre $n > 3$ tieto čísla spĺňajú vzorec $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$. Vezmime si vyhovujúcu postupnosť dĺžky n a pozrime sa na maximálny koncový blok rovnakých čísel; podľa obmedzenia má tento blok dĺžku 1, 2 alebo 3 a tieto tri prípady sú disjunktné. Ak má koncový blok dĺžku $k \in \{1, 2, 3\}$, vymazanie posledných k čísel dáva vyhovujúcu postupnosť dĺžky $n - k$. Naopak, z každej vyhovujúcej postupnosti dĺžky $n - k$ môžeme pridaním bloku dĺžky k , ktorý pozostáva z opačnej číslice, než je aktuálne posledná (t.j. pridáme k -krát číslicu opačnú k práve poslednej), získať vyhovujúcu postupnosť dĺžky n s koncovým blokom dĺžky k . Týmto spôsobom vieme počet vyhovujúcich postupností dĺžky n vyjadriť z počtov vyhovujúcich postupností dĺžok $n - 1$, $n - 2$ a $n - 3$.

Pre $n \leq 3$ nemáme zlé postupnosti, takže $B_1 = 2$, $B_2 = 4$ a $B_3 = 8$, keďže všetky binárne postupnosti dĺžky n vyhovujú. Použitím rekurentného vzťahu $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$ postupne vypočítame $B_4 = 14$, $B_5 = 26$, $B_6 = 48$, $B_7 = 88$, $B_8 = 162$, $B_9 = 298$ a nakoniec $B_{10} = 548$.

Úloha 56. Nájdite kladné celé číslo a , ktoré je riešením rovnice

$$\left(\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2}\right)^5 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)^2.$$

Výsledok. 2525

Riešenie. Keďže

$$\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2} = \frac{23 + 5\sqrt{21}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^2,$$

zadanie sa redukuje na

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)^5.$$

Táto rovnosť sa dá ďalej rozpísať ako

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a^2 - 4} &= \frac{5^5 + \binom{5}{2} \cdot 5^3 \cdot 21 + \binom{5}{4} \cdot 5^1 \cdot 21^2}{16} + \frac{\binom{5}{1} \cdot 5^4 \cdot \sqrt{21} + \binom{5}{3} \cdot 5^2 \cdot \sqrt{21}^3 + \sqrt{21}^5}{16} \\ &= \frac{3125 + 10 \cdot 2625 + 25 \cdot 441}{16} + \frac{(5^5 + 21 \cdot 250 + 21^2) \cdot \sqrt{21}}{16} \\ &= 2525 + 551 \cdot \sqrt{21}. \end{aligned}$$

Porovnanie racionálnych a iracionálnych zložiek dáva $a = 2525$ a $\sqrt{a^2 - 4} = 551 \cdot \sqrt{21}$. Keďže a je celé číslo, musí byť 2525. Aby sme si overili toto riešenie, stačí dosadiť $a = 2525$ do $a^2 - 4$, z čoho vyjde $2525^2 - 4 = (2525 - 2)(2525 + 2) = 2523 \cdot 2527 = 3 \cdot 29^3 \cdot 7 \cdot 19^2 = 551^2 \cdot 21$.

Iné riešenie. Nech $\alpha = \frac{1}{2}(23 + \sqrt{23^2 - 4})$. Keďže α je koreňom polynómu $t^2 - 23t + 1 = 0$ a druhý koreň je α^{-1} , máme $\alpha + \alpha^{-1} = 23$.

Označme $\beta = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$. Potom β je koreňom polynómu $t^2 - at + 1 = 0$, takže podobne ako v predchádzajúcom prípade, $\beta + \beta^{-1} = a$. Keďže a je kladné, β musí byť kladná tiež.

V tomto značení je zadaná rovnica $\alpha^5 = \beta^2$. Nech $x = \beta^{1/5}$ (takže $x > 0$). Potom $x^2 = \alpha$, a teda $x^2 + x^{-2} = 23$. Položme $y = x + x^{-1}$; potom $y > 0$ a $y^2 = x^2 + x^{-2} + 2 = 25$, takže $y = 5$.

Naším cieľom je nájsť $a = x^5 + x^{-5}$; preto rozpíšeme

$$y^5 = (x + x^{-1})^5 = (x^5 + x^{-5}) + 5(x^3 + x^{-3}) + 10(x + x^{-1}),$$

takže

$$a = y^5 - 5(x^3 + x^{-3}) - 10y.$$

Ostáva vyjadriť $x^3 + x^{-3}$ pomocou y , čo sa dá urobiť podobným spôsobom:

$$y^3 = (x + x^{-1})^3 = (x^3 + x^{-3}) + 3(x + x^{-1}),$$

teda

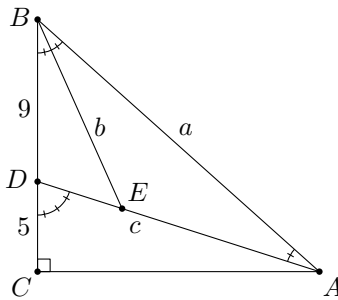
$$x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y.$$

Spojením s predošlou rovnicou dostaneme $a = y^5 - 5y^3 + 5y$, čo sa po dosadení $y = 5$ rovná 2525.

Úloha 57. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C leží bod D na úsečke BC tak, že $|BD| = 9$ a $|DC| = 5$. Ak navyše $|\sphericalangle ADC| = 3|\sphericalangle BAD|$, určte dĺžku $|AB|$.

Výsledok. 21

Riešenie. Zo súčtu uhlov v trojuholníku ABD dostaneme, že $|\sphericalangle ABD| = 2|\sphericalangle DAB|$. Nech os uhla ABD pretne AD v bode E . Keďže BE rozpoľuje uhol ABD , máme $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EBD| = |\sphericalangle DAB|$. Preto $|AE| = |EB|$, a teda trojuholníky DBE a DAB sú podobné. Z podobnosti máme $|DB| : |DA| = |DE| : |DB| = |BE| : |AB|$.



Nech $|AB| = a$, $|AE| = |EB| = b$ a $|AD| = c$. Potom $|DE| = c - b$ a pomery dávajú

$$\frac{9}{c} = \frac{c - b}{9} = \frac{b}{a}.$$

Preto $c^2 = bc + 81$ a $bc = 9a$, z čoho plynie $c^2 = 9a + 81$.

Keďže trojuholníky ACD a ABC sú pravouhlé s pravým uhlom pri C , máme

$$|AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 = a^2 - (9 + 5)^2 = a^2 - 196,$$

a tiež

$$|AC|^2 = |AD|^2 - |DC|^2 = c^2 - 25.$$

Porovnaním týchto výrazom a využitím $c^2 = 9a + 81$ dostaneme

$$a^2 - 196 = 9a + 56 \quad \text{alebo} \quad a^2 - 9a - 252 = 0.$$

Táto rovnica má iba jedno kladné riešenie, a to $a = 21$.