

Naloga 1. Na sejmu je pri posebni igri zbijanja pločevink vsaka pločevinka oštevilčena. Podrete lahko poljubne pločevinke in zmagate samo, če je vsota števil podrlih pločevink natanko 50. Poiščite tako zmagovalno množico pločevink (prikazanih na spodnji sliki) in zapišite njene elemente v naraščajočem vrstnem redu.

24			
16	30		
18	6	36	
9	33	28	3

Rezultat. 6, 16, 28

Rešitev. Večina števil na pločevinkah je večkratnikov števila 3. Ostanek pri deljenju števila 50 s 3 je enak 2, zato mora tudi vsota števil na izbranih pločevinkah pri deljenju s 3 dati ostanek 2. Torej mora biti vključeno vsaj eno število, ki ni deljivo s 3. Taki števili sta samo 16 in 28.

Ne moremo uporabiti samo enega od teh dveh števil, saj obe števili dasta ostanek 1 pri deljenju s 3. Poleg tega, če prištejemo poljubno število večkratnikov števila 3 bodisi številu 16 ali 28, to ne bo spremenilo ostanka pri deljenju s 3, torej vsota ne more biti 50. Od tod sledi, da moramo uporabiti tako število 16 kot tudi 28. Njuna vsota je $16 + 28 = 44$, kar da ostanek 2 pri deljenju s 3. Da dosežemo skupno vsoto 50, potrebujemo še $50 - 44 = 6$, ki se pojavi na eni od pločevink in je ne moremo doseči kot vsoto števil na ostalih pločevinkah. Pločevinke, ki jih moramo podreti so torej 6, 16 in 28.

Naloga 2. Tereza ima tri standardne 6-strane kocke: rdečo, modro in rumeno. Vsaka kocka ima ploskve oštevilčene od 1 do 6. Tereza vrže vse tri kocke hkrati in nato sešteje dobljena tri števila v skupno vsoto. Na koliko načinov lahko dobi skupno vsoto enako 8?

Rezultat. 21

Rešitev. Obstaja pet načinov, da dobimo število 8 kot skupno vsoto pri metu treh kock:

$$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2.$$

V primeru $6 + 1 + 1$, se lahko število 6 pojavi na rdeči, modri ali rumeni kocki. Imamo torej tri možnosti za vsoto $6 + 1 + 1$. Po analogiji imamo tri možnosti tudi v primerih $4 + 2 + 2$ in $3 + 3 + 2$. V primeru $5 + 2 + 1$ imamo $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možnosti za razporeditev števil na tri kocke različnih barv. Enako velja v primeru $4 + 3 + 1$. Skupno je torej $3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21$ načinov.

Naloga 3. Adam ima štiri otroke. Njegova trenutna starost je enaka vsoti starosti njegovih treh najstarejših otrok, čez šest let pa bo njegova starost enaka vsoti starosti njegovih treh najmlajših otrok. Kolikšna je starostna razlika med Adamovim najmlajšim in najstarejšim otrokom?

Rezultat. 12

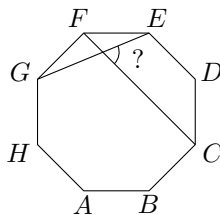
Rešitev. Naj bo a Adamova starost in $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$ starosti njegovih otrok. Navodilo naloge implicira dve enačbi: $a = c_2 + c_3 + c_4$ in $a + 6 = (c_1 + 6) + (c_2 + 6) + (c_3 + 6)$. S substitucijo prve enačbe v drugo dobimo $c_2 + c_3 + c_4 + 6 = c_1 + c_2 + c_3 + 18$, kar poenostavimo v $c_4 = c_1 + 12$. Zaključimo, da je najstarejši otrok 12 let starejši od najmlajšega otroka.

Naloga 4. Digitalna ura prikazuje čas od 00:00 do 23:59. Kolikokrat v celotnem dnevu se na zaslonu prikažejo natanko štiri izmed petih števk 1, 2, 3, 4, 5 (v poljubnem vrstnem redu)?

Rezultat. 36

Rešitev. Ura mora biti dvomestno število, ki ne presega 23, s števčkama iz množice $\{1, \dots, 5\}$. Edine možnosti so 12, 13, 14, 15, 21 in 23. Za vsako tako uro smo porabili dve števki, torej ostanejo tri števke iz katerih moramo sestaviti minute, tako da uporabimo dve različni števki. To lahko naredimo na $3 \cdot 2 = 6$ načinov, pri čemer so vsa dobljena števila veljavne minute. Torej za vsako od šestih možnih ur dobimo šest veljavnih časov, kar skupno da $6 \cdot 6 = 36$ časov.

Naloga 5. Če je $ABCDEFGH$ pravilen osemkotnik, kolikšna je velikost ostrega kota med diagonalama CF in EG v stopinjah?



Rezultat. 67.5°

Rešitev. Naj bo X presečišče diagonal CF in EG . Namesto, da bi izračunali $\angle CXE$, kot je nakazano na sliki, bomo izračunali velikost kota $\angle FXG$, ki je enaka velikosti kota $\angle CXE$. Najprej opazimo, da je $\angle GFX = \angle GFC = 90^\circ$, saj je $BCFG$ pravokotnik. Poleg tega, ker je trikotnik EFG enakokrak in je $\angle GFE = 135^\circ$, imamo $\angle XGF = \angle EGF = 22.5^\circ$. Zato iz trikotnika FGX sklepamo, da je $\angle FXG = 180^\circ - 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$.

Naloga 6. Naj bo a, b, c, d, e pet različnih pozitivnih celih števil, za katera velja $a < b < c < d < e$, in naj bo njihova aritmetična sredina enaka 16. Določite največjo možno vrednost števila d .

Rezultat. 36

Rešitev. Ker je

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 16,$$

sledi, da je $a + b + c + d + e = 80$. Da maksimiramo d , moramo ostala števila minimizirati, pri čemer upoštevamo vrstni red. Najmanjše možne vrednosti so $a = 1, b = 2, c = 3$ in $e \geq d + 1$. Torej

$$80 = a + b + c + d + e \geq 1 + 2 + 3 + d + (d + 1) = 7 + 2d,$$

od koder sledi, da je $2d \leq 73$ in posledično $d \leq 36$ (d je celo število). Ta meja je dosežena z $(a, b, c, d, e) = (1, 2, 3, 36, 38)$, kar se sešteje v 80 in zadošča vrstnemu redu. Tako je največja možna vrednost d enaka 36.

Naloga 7. Popotnik je prišel do starodavnih kamnitih vrat v puščavi in tam naletel na sfingo, ki mu je zapirala pot. Sfinga je rekla: "Odgovori na mojo uganko in lahko boš šel mimo. Razmišljam o trimestnem številu s temi lastnostmi:

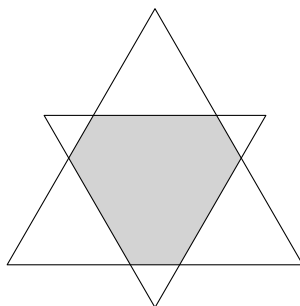
- je liho;
- njegove številke so vse različne in vrednosti števk naraščajo od leve proti desni;
- deljivo je z 9, če pa odstranimo katero koli števko, ni več deljivo z 9;
- ena od njegovih števk je 6."

Katero število je izbrala sfinga?

Rezultat. 567

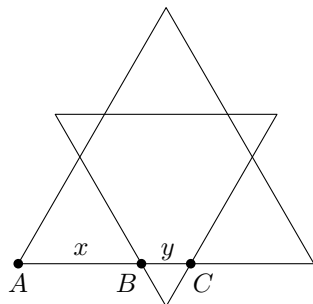
Rešitev. Ker je iskano število deljivo z 9, je vsota njegovih števk 9 ali 18. Ker je število liho, 6 ne more biti na mestu enic, torej je na mestu stotic ali desetec. Ne more biti na mestu stotic, saj bi bila sicer najmanjša možna vsota števk $6 + 7 + 8 = 21 > 18$. Torej je 6 na mestu desetec. To pomeni, da je števka na mestu enic vsaj 7 in posledično je vsota števk 18, vsota števk na mestih enic in stotic pa 12. Imamo naslednje možnosti za stotice in enice: $(3, 9)$, $(4, 8)$ in $(5, 7)$. Prva ne more biti iskana rešitev saj z brisanjem 9 dobimo število 36, ki je deljivo z 9. Druga možnost je izključena, ker je število, ki ga dobimo sodo. Ostane torej samo $(5, 7)$. Sfingino število je torej 567.

Naloga 8. Dva enakostranična trikotnika sta postavljena kot prikazuje slika. Vsaka stranica enega trikotnika je vzporedna eni stranici drugega trikotnika. Trikotnika imata skupno središče očrtane krožnice. Dolžine stranic so 17 cm (večji trikotnik) in 11 cm (manjši trikotnik). Lik v preseku obeh trikotnikov je šestkotnik (osenčen na sliki). Določite obseg tega šestkotnika (v cm).

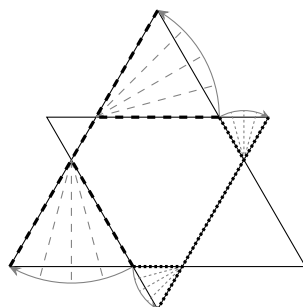


Rezultat. 28

Rešitev. Prekrivanje ustvari tri manjše in tri večje skladne enakostranične trikotnike zunaj osenčenega šestkotnika. Naj bo $AB = x$ in $BC = y$. Potem je dolžina stranice večjega trikotnika enaka $2x + y = 17$ in dolžina stranice manjšega trikotnika je $x + 2y = 11$. Če seštejemo ti dve enačbi dobimo $3x + 3y = 28$, kar je natanko obseg osenčenega šestkotnika.



Alternativna rešitev: Ta rešitev ponuja dokaz brez besed, tako da stranice šestkotnika preslikamo na eno stran vsakega od dveh danih enakostraničnih trikotnikov. Torej je obseg šestkotnika natanko vsota dolžin stranic danih enakostraničnih trikotnikov, in sicer $17 + 11 = 28$.



Naloga 9. Ana se želi obleči za športni dan. Oblečeno mora imeti natanko eno majico, ene hlače, en par nogavic in en par superg. Poleg tega ima lahko lase spete z elastiko. Vsak par nogavic se mora ujemati (obe nogavici sta enake barve) in vsak par superg se mora ujemati (obe supergi sta enake barve). Ana ima na voljo belo, rumeno, zeleno, modro in rdečo majico. Hlače in elastike ima na voljo v beli, črni in sivi barvi, nogavice v beli, rdeči in oranžni barvi ter superge bele in črne barve. Bele nogavice ima obute samo, če je vsa v belem (vključujoč elastiko, če ima spete lase). Na koliko načinov se lahko Ana obleče za športni dan?

Rezultat. 242

Rešitev. Ana mora imeti oblečeno natanko eno majico, ene hlače, en par nogavic in en par superg in ima lahko lase spete v čop ali pa ne.

Najprej obravnavajmo primer, ko ima Ana obute bele nogavice. Glede na navodilo ima te obute samo, če je cela v belem. Torej morajo biti majica, hlače in superge vse bele. Če ima čop, je bela tudi elastika, lahko pa čopa nima. To nam da 2 možni opravi.

Sedaj obravnavajmo še primer, ko nima obutih belih nogavic (torej so nogavice lahko rdeče ali oranžne), kar nam daje 2 možnosti. Dalje imamo 5 možnih izbir za majico, 3 možne izbire za hlače, 2 možni izbiri za superge in 4 možne izbire za elastiko (bela, črna, siva ali brez elastike). V tem primeru imamo torej

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240$$

možnih oprav.

Ko oba primera združimo dobimo $240 + 2 = 242$ možnosti.

Naloga 10. Poiščite štirimestno število z naslednjimi lastnostmi:

- številka na mestu stotic je dvokratnik številke na mestu tisočic,
- številka na mestu enic je trikratnik številke na mestu desetic,
- če vsako števko kvadriramo, je vsota dobljenih kvadratov enaka 95.

Rezultat. 1239

Rešitev. Naj $\overline{ABCD}$ označuje iskano število, s števki A, B, C in D . Iz pogojev dobimo $B = 2A$ in $D = 3C$. Torej je

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A^2 + (2A)^2 + C^2 + (3C)^2 = 5A^2 + 10C^2 = 95,$$

kar lahko poenostavimo do $A^2 + 2C^2 = 19$. Ker imamo na desni strani liho število, mora biti A liho število; poleg tega je A števka in velja $A^2 \leq 19$, torej mora veljati $A \in \{1, 3\}$. S preizkušanjem teh dveh možnosti ugotovimo, da je $A = 1$, kar nam dalje da $2C^2 = 18$ in posledično je $C = 3$. Torej je $B = 2$, $D = 9$, in iskano število je 1239.

Naloga 11. Alja je pozitivna oseba, zato želi v vsak kvadrater v izrazu

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$$

zapisati plus ali minus tako, da bo rezultat pozitivno število. Na koliko načinov lahko to naredi?

Rezultat. 16

Rešitev. Najprej opazimo, da je vsota $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ vedno različna od 0; to velja zato, ker je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ liho število in sprememba enega predznaka spremeni vsoto za sodo mnogo, torej bo rezultat vedno liho število. Če sedaj obravnavamo poljubno razporeditev predznakov in v tej vse predznake zamenjamo (torej vse pluse zamenjamo za minuse in vse minuse za pluse), se bo vsota spremenila iz pozitivne v negativno ali obratno, kar nam da popolno ujemanje med pozitivnimi in negativnimi rezultati. Za vsakega od petih kvadratkov lahko neodvisno izberemo plus ali minus, s čimer imamo 2 možnosti za vsak kvadrater in $2^5 = 32$ možnosti skupaj. Ker se nobena od teh možnosti ne sešteje v 0, mora biti natanko polovica seštevov pozitivnih in polovica negativnih. Torej lahko Alja dobi pozitiven rezultat na 16 načinov.

Naloga 12. V spodnjem zapisu za seštevanje predstavlja vsaka črka eno števko. Ista črka označuje eno števko in različne črke označujejo različne številke.

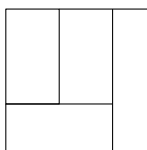
$$\begin{array}{r} A \quad A \quad A \\ + \quad A \quad A \quad B \\ + \quad A \quad C \quad C \\ \hline 2 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \end{array}$$

Poiščite trimestno število ABC .

Rezultat. 619

Rešitev. Ker je prva števka vseh treh števil enaka, mora za A veljati $3A \leq 20$ in $3A \geq 18$, saj lahko pri seštevanju treh števk prenesemo naprej največ 2. Torej je $A = 6$. Sedaj se morata v stolpcu enic B in C sešteti v 10, kar pomeni, da se v stolpec od desetic prenese 1. Zato mora biti $C = 9$ in posledično je $B = 1$. Zaključimo, da je $ABC = 619$.

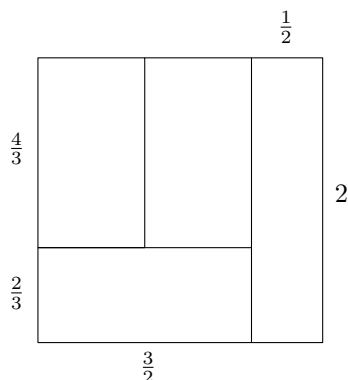
Naloga 13. Na sliki je kvadrat z dolžino stranice enako 2, razdeljen na štiri pravokotnike. Kolikšna je vsota obsegov pravokotnikov, če vemo, da imajo vsi pravokotniki enako ploščino?



Opomba: Stranice, ki so skupne dvem pravokotnikom štejemo v vsoto za vsakega od njih.

Rezultat. $\frac{53}{3} = 17\frac{2}{3}$

Rešitev. Ker ima kvadrat ploščino enako 4, mora imeti vsak od pravokotnikov ploščino enako 1. S tem takoj dobimo, da mora biti širina desnega pravokotnika enaka $\frac{1}{2}$ in širina spodnjega pravokotnika enaka $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, torej je njegova višina $1/\frac{3}{2} = \frac{2}{3}$. Posledično je višina preostalih dveh pravokotnikov enaka $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Da dobimo vsoto obsegov vseh pravokotnikov lahko sedaj obsegu kvadrata, t.j. $4 \cdot 2 = 8$, prištejemo dvakratnik vsote notranjih segmentov, saj vsak izmed njih pripada dvem pravokotnikom. Dolžine teh segmentov so 2, $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, torej je dvakratnik njihove vsote $2 \cdot (2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{29}{3}$. Vsota, ki jo iščemo je zato $8 + \frac{29}{3} = \frac{53}{3}$.



Naloga 14. Tim tvori dolgo zaporedje števk tako, da zapiše štirimestni niz 2026 zaporedoma 2026-krat, upošteva je naslednja pravila. Začne tako, da zapiše 2026, nato nadaljuje z 6202, kar je 2026 v obratnem vrstnem redu, s tem da izpusti števko 6, ki se ponovi ob spoju. Nadaljuje tako, da se izmenjujeta običajni in obratni zapis števila 2026, pri čemer se vsakič zadnjo števko niza upošteva kot prvo števko niza, ki sledi. Tako si zaporedna niza delita natanko eno števko. Na spodnji sliki imamo prikazanih prvih šest od skupnih 2026 ponovitev niza.

$$\underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_1 \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_2 \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_3 \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_4 \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_5 \underbrace{2\ 0\ 2\ 6}_6 \dots$$

Določite vsoto števk v tako dobljenem številu.

Rezultat. 12 158

Rešitev. Ko enkrat zapišemo 2026, je vsota števk enaka 10. Po prvi pojavitvi, bo vsak niz na sodem mestu vseboval število 202, kar poveča vsoto števk za 4 in bo vsak niz na lihem mestu vseboval število 026, kar vsoto števk poveča za 8.

Torej se bo vsakič, ko po prvem zapisu dodamo dva niza, kar se zgodi 1012 krat ($1 + 2 \cdot 1012 = 2025$), vsota števk povečala za 12. Zadnji dodan niz (2026-ti) je na sodem mestu in bo povečal vsoto števk še za 4. Skupaj torej dobimo $10 + 1012 \cdot 12 + 4 = 12\,158$

Naloga 15. Ura je 8 zjutraj. Koliko bo ura čez 260320261998 ur, če privzamemo, da se v tem času ura ne spremeni (za prehod iz poletnega v zimski čas, ali obratno)?

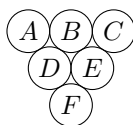
Rezultat. 14 = 2 PM

Rešitev. Ker ima dan 24 ur, se določen čas v dnevu ponovi vsakih 24 ur. Zato zadostuje, da poiščemo ostanek pri deljenju števila $N = 260320261998$ s 24. To lahko naredimo z običajnim deljenjem, ali pa tako, da poiščemo ostanka pri deljenju s 3 in 8 in rezultat združimo.

Ker je vsota števk števila N deljiva s 3 je tudi samo število N deljivo s 3. Ostanek pri deljenju z 8 pa določa število, ki ga tvorijo zadnje tri števke, torej 998. Ostanek pri deljenju števila 998 z 8 je enak 6, zato je tudi ostanek pri deljenju števila N z 8 enak 6. Zato mora biti ostanek pri deljenju s 24 enak številu, manjšemu od 24, ki je deljivo s 3 in ima pri deljenju z 8 ostanek enak 6; edina možnost je 6.

Torej bo po N urah ura toliko, kolikor bi bila po 6 urah, kar nanese na 2 popoldan ($8 + 6 = 14$).

Naloga 16. Imamo grozdje z jagodami, razporejenimi kot na spodnji sliki. Jagodo lahko pojemo samo, če smo pred tem pojedli jagode, ki ležijo neposredno pod njo (tj. eno ali dve jagodi, ki se je dotikajo s spodnje strani). Na primer, jagodo D moramo pojesti preden lahko pojemo jagodi A in B . Na koliko različnih načinov lahko pojemo grozdje?



Rezultat. 16

Rešitev. Najprej moramo pojesti jagodo F . Ostanejo nam jagode A, B, C, D , in E .

Sedaj lahko pojemo bodisi jagodo D bodisi jagodo E . Situacija je očitno simetrična, zato pojemo najprej jagodo E , s čimer nam ostanejo jagode A, B, C , in D . Sedaj lahko pojemo bodisi jagodo C bodisi jagodo D :

- Če se odločimo za jagodo C , moramo za tem pojesti jagodo D in nato ali jagodo A ali jagodo B (2 možnosti)

- Če se odločimo za jagodo D , lahko za tem pojemo eno izmed jagod A, B , ali C in za tem še preostali dve v poljubnem vrstnem redu. ($3 \cdot 2$ možnosti)

Torej bomo vedno najprej pojedli jagodo F , nato imamo izbiro med jagodama D in E , za tem pa nam preostane $2 + 6 = 8$ različnih možnosti. Skupno imamo torej $1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$ možnosti, kako pojesti grozd.

Naloga 17. Naj bo x pozitivno celo število, za katerega velja

$$v(x, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \quad \text{in} \quad v(x, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

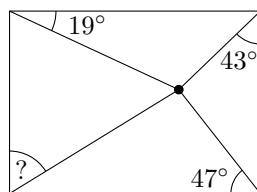
Koliko različnih vrednosti lahko zavzame $D(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$?

Opomba: $D(a, b)$ označuje največji skupni delitelj, $v(a, b)$ pa najmanjši skupni večkratnik števil a in b .

Rezultat. 12

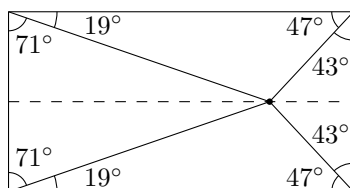
Rešitev. Število x mora biti oblike $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ (druga praštevila se ne morejo pojaviti, saj bi se sicer pojavila že v najmanjših skupnih večkratnikih). Prvi pogoj je ekvivalenten $a = 6$, $b \leq 3$, $c \leq 4$ in $d \leq 2$, medtem ko se drugi pogoj prevede v $a \leq 8$, $b \leq 4$, $c \leq 3$ in $d = 2$. To pomeni, da je v praštevilskega razcepu $\gcd(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$, eksponent števila 2 enak 2, eksponent števila 3 katerokoli število med 0 in 3, eksponent števila 5 katerokoli število med 0 in 2, in eksponent števila 7 enak 2. Zaključimo, da je takih števil $4 \cdot 3 = 12$.

Naloga 18. Na spodnji skici je prikazan pravokotnik in točka v pravokotniku. Podane so tudi velikosti treh kotov. Poiščite velikost kota (v stopinjah), označenega z vprašajem.



Rezultat. 71

Rešitev. Če pri obeh ogliščih na desni strani izračunamo komplementarna kota do 90° , ugotovimo, da dana notranja točka leži na simetrijski osi, ki povezuje navpični stranici pravokotnika. To pomeni, da je celotna konfiguracija simetrična glede na to os. Zaključimo, da iskani kot znaša $90^\circ - 19^\circ = 71^\circ$.



Naloga 19. Alina želi sestaviti ogrlico iz dveh vrst perlic. Kupila je 100 perlic, pri čemer je bilo cenejših perlic več kot dražjih. Skupna cena vseh cenejših perlic je znašala 459 zlatih kovancev. Poleg tega je cena ene drage perlice za 13 zlatih kovancev višja od cene ene poceni perlice. Vse cene, izražene v zlatih kovancih, so pozitivna cela števila. Koliko zlatih kovancev je Alina plačala za drage perlice?

Rezultat. 1078

Rešitev. Naj bo c število poceni kroglic in p njihova (celoštevilska) cena v florinih. Potem je $cp = 459$ in ker je skupno 100 kroglic, pri čemer je cenejših kroglic več kot dražjih, imamo $50 < c < 100$. Ker je cena celo število, mora biti c delitelj števila $459 = 3^3 \cdot 17$, ki leži strogo med 50 in 100, in edini tak delitelj je $c = 51$. Torej, $p = 459/51 = 9$, in vsaka draga kroglica stane $p + 13 = 22$ florinov. Število dragih kroglic je $100 - 51 = 49$, kar pomeni, da Alina za drage kroglice plača $49 \cdot 22 = 1078$ florinov.

Naloga 20. V enačbi

$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot H}{N \cdot A \cdot B \cdot O \cdot J} = G \cdot A \cdot M \cdot E,$$

vsaka črka predstavlja števko, različne črke predstavljajo različne številke, simbol $\cdot$ pa označuje množenje. Koliko različnih vrednosti lahko zavzame produkt $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$?

Rezultat. 1

Rešitev. V enačbi je 10 različnih števk ($M, A, T, H, N, B, O, J, G, E$), zato so vse številke 0–9 uporabljene natanko enkrat, kar pomeni, da je ena izmed črk enaka 0. Od tod sledi, da sta obe strani enačbe nujno enaki 0. Natančneje, 0 se pojavi na obeh straneh, pri čemer se ne pojavi v imenovalcu ulomka. Edina taka črka je M , zato je $M = 0$. Posledično je $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O = 0$ ne glede na vrednosti, ki jih dodelimo ostalim črkam, zato lahko ta produkt zavzame natanko eno vrednost.

Naloga 21. Trije svetilniki ležijo na dolgi obali, ki poteka v ravni liniji. Razdalja med dvema sosednjima svetilnikoma znaša 13 km. Ladja na morju je oddaljena 10 km od enega od krajnih svetilnikov in 13 km od srednjega svetilnika. Kako daleč (v km) je ladja od drugega krajnega svetilnika? Ukrivljenost Zemlje zanemarite.

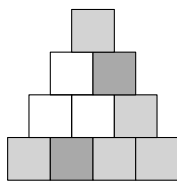
Rezultat. 24

Rešitev. Naj S označuje lego ladje, A in B robna svetilnika, M pa srednji svetilnik. Ker velja $MS = MA = MB = 13$, točke A , B , in S vse ležijo na krožnici s središčem M . Poleg tega je daljica AB premer te krožnice. Po Talesovem izreku je zato trikotni ABS pravokoten v točki S . Ker velja $AB = MA + MB = 26$ in $AS = 10$, iz Pitagorovega izreka sledi

$$BS = \sqrt{AB^2 - AS^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Zato je razdalja od ladje do drugega robnega svetilnika 24 km.

Naloga 22. Na koliko načinov lahko vsakemu od desetih gradnikov piramide višine 4 dodelimo eno od treh barv, tako da je vsaka podpiramida višine 2 (usmerjena navzgor) pobarvana bodisi z vsemi tremi barvami bodisi samo z eno barvo? Primer takega barvanja je prikazan na spodnji sliki.



Rezultat. 81

Rešitev. Pod danimi pogoji je barvanje piramide v celoti določeno z barvanjem spodnje vrstice, saj je vsako barvanje spodnje vrstice mogoče enolično dopolniti do barvanja celotne piramide. Ker je za vsak gradnik mogoče izbrati tri barve, je skupno $3^4 = 81$ možnih barvanj.

Naloga 23. Ogljišča pravilnega stokotnika so označena s števili $1, 2, \dots, 100$ tako, da je absolutna vrednost razlike med vsakim parom diametralno nasprotnih števil enaka fiksnemu številu n . Poiščite vsoto vseh možnih različnih vrednosti n .

Rezultat. 93

Rešitev. Naj bo n pozitivno celo število, za katero takšna razporeditev obstaja. Potem mora biti število 1 v paru z $n + 1$ (v smislu, da sta postavljeni na diametralno nasprotni mesti; v nadaljevanju bomo takšne pare preprosto imenovali *pari*). Nato mora biti 2 v paru z $n + 2$, in če nadaljujemo na ta način, vidimo, da mora biti k v paru z $n + k$ za vse $k = 1, 2, \dots, n$. Število n je potem v paru z $2n$.

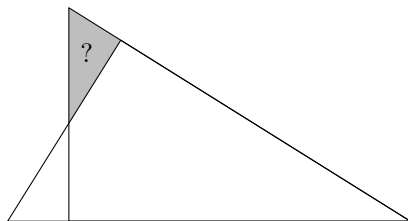
Tako je vsako število iz bloka $\{1, 2, \dots, 2n\}$ v paru z drugim številom iz istega bloka, ta blok pa je mogoče ločiti od preostalih števil $\{2n + 1, \dots, 100\}$. Če je $2n = 100$, se postopek zaključi. V nasprotnem primeru ponovimo isti argument, začenši z $2n + 1$, ki mora biti povezan s $3n + 1$, in nadaljujemo analogno.

Sčasoma se množica $\{1, 2, \dots, 100\}$ razdeli na disjunktno bloke dolžine $2n$. To je mogoče, če in samo če je 100 deljivo z $2n$, torej če in samo če je n pozitivni delitelj števila 50.

Zlahka vidimo, da ta konstrukcija da veljavno razporeditev v pare za vsak tak delitelj (s sestavljanjem $\frac{100}{2n}$ blokov kot zgoraj). Sledi, da je odgovor vsota vseh pozitivnih deliteljev števila 50, kar je

$$1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93.$$

Naloga 24. Vzemite dve kopiji pravokotnega trikotnika z dolžinami stranic 5, 12 in 13 ter ju postavite eno na drugo tako, da si delita oglišče z najmanjšim kotom in se delno prekrivata vzdolž svojih stranic, kot je prikazano na spodnji sliki. Kolikšna je ploščina enega od trikotnikov, ki tvorita neprekriti del?



Rezultat. $\frac{6}{5} = 1,2$

Rešitev. Sivi trikotnik je podoben velikemu pravokotnemu trikotniku, pri čemer je dolžina njegove najkrajše stranice enaka $13 - 12 = 1$, saj sta oba pravokotna in si delita še drug kot (zgornji kot na naši sliki).

Zato je razmerje podobnosti med tema dvema pravokotnima trikotnikoma $1 : 5$ in druga kateta v sivem trikotniku ima dolžino $\frac{12}{5}$. Posledično je iskana ploščina

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5}.$$

Naloga 25. Vsak izmed sedmih palčkov si je izbral pozitivno celo število. Vsi poznajo števila, ki so jih izbrali ostali. Sneguljčica je vsakega palčka vprašala, katero število je izbral.

- 1. palček je molčal.
- 2. palček je rekel: "Moje število je enako številu 1. palčka."
- 3. palček je rekel: "Moje število je enako vsoti števil 1. in 2. palčka."
- 4. palček je rekel: "Moje število je enako vsoti števil 1., 2. in 3. palčka."
- ...
- 7. palček je rekel: "Moje število je enako vsoti števil od 1. do 6. palčka."

Znano je, da je vsota sedmih izbranih števil 46. Znano je tudi, da je natanko eden izmed palčkov lagal. Vsi ostali palčki so podali izjave o številih, ki so jih dejansko izbrali, in ne o številih, ki so jih navedli. Poiščite vsa števila, ki bi jih lahko izbral palček, ki je lagal.

Rezultat. 7, 14

Rešitev. Naj bodo izbrana števila palčkov $a_1, a_2, \dots, a_7$.

Predpostavimo, da je 7. palček govoril resnico. Potem je njegovo število enako natanko polovici celotne vsote, torej

$$a_7 = \frac{46}{2} = 23.$$

Po isti logiki bi moral 6. palček lagati; sicer bi bilo njegovo število $\frac{23}{2}$.

Zato smo prepričani, da je prvih pet palčkov govorilo resnico. Če je $a_1 \geq 2$, potem je vsota prvih petih števil vsaj $2 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32$. Glede na to, da bi se ta vsota vsaj podvojila s tistim od zadnjih dveh palčkov, ki je govoril resnico, sklepamo, da je $a_1 = 1$. To določi tudi vrednosti:

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 8.$$

Če je šesti palček govoril resnico, potem je $a_6 = 16$, torej mora biti a_7 , da bi zadostili pravilni vsoti, enak 14.

V nasprotnem primeru, če je šesti palček lagal, vemo, da je $a_7 = 16 + a_6$, zato lahko izračunamo a_6 takole:

$$a_1 + \dots + a_7 = 46 \Leftrightarrow 16 + a_6 + 16 + a_6 = 46 \Leftrightarrow a_6 = 7.$$

Naloga 26. Za komunikacijo s satelitom v orbiti je potrebno iz nabora kanalov $\{1, 2, \dots, 13\}$ izbrati šest različnih kanalov, pri čemer je pomembna le množica kanalov — dva izbora veljata za enaka, če vsebujeta istih šest kanalov, ne glede na vrstni red. Da bi dosegli najboljšo hitrost prenosa, mora izbor vsebovati vsaj en par kanalov, katerih številki se razlikujeta za liho celo število. Koliko takšnih naborov kanalov je mogočih?

Rezultat. 1708

Rešitev. Dva izbrana kanala se razlikujeta za liho število natanko takrat, ko sta različne parnosti. Namesto neposrednega štetja bomo prešteli komplement: odšteli bomo izbore, ki nimajo lihih razlik.

Nabor šestih kanalov nima lihih razlik natanko takrat, ko ima vsak par sodo razliko, kar se zgodi le, če so vsi kanali iste parnosti. V množici $\{1, 2, \dots, 13\}$ je sedem lihih kanalov in šest sodih kanalov, zato je število vseh lihih ali vseh sodih izborov $\binom{7}{6} + \binom{6}{6} = 7 + 1 = 8$.

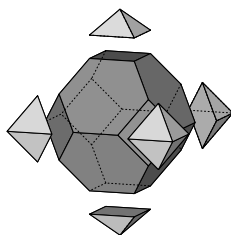
Ker obstaja skupaj $\binom{13}{6} = 1716$ možnosti za izbiro šestih kanalov, je število naborov z vsaj eno liho razliko $1716 - 8 = 1708$.

Naloga 27. Naj bo N sedemmestno število, ki je deljivo z vsako od svojih števk. Poiščite vsoto števk števila N , pri čemer velja, da so vse števk števila N med sabo različne in neničelne.

Rezultat. 36

Rešitev. Ker ima N sedem različnih neničelnih števk, je vsaj ena izmed njih soda, zato je N sodo število. Če bi bila med števki 5, bi deljivost s 5 zahtevala, da se N konča z 0, kar je v nasprotju s pogojem, da so vse števk neničelne; zato je števka 5 izključena. Število N torej uporablja sedem števk iz množice $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, kar pomeni, da iz te množice izpusti natanko eno števko. Števke 9 ne more izpustiti: če bi bila 9 izpuščena, bi bila množica števk $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ z vsoto 31, zato N ne bi prestalo testa deljivosti s 3, čeprav vsebuje števko 3, kar je protislovje. Zato se mora 9 pojaviti med števki števila N , kar pomeni, da je N (in s tem njegova vsota števk) deljivo z 9. Ker je $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$, moramo izpustiti števko 4, da dobimo vsoto števk 36, ki je edini možni večkratnik števila 9. Primer takšnega števila je $N = 9867312$.

Naloga 28. Prisekani oktaeder dobimo tako, da oglišča pravilnega oktaedra odrežemo na tak način, da preostanek tvori polieder z osmimi pravilnimi šestkotnimi ploskvami in šestimi kvadratnimi ploskvami. Kolikšen del prostornine prvotnega oktaedra predstavlja prostornina prisekanega oktaedra? Rezultat izrazite z ulomkom.



Opomba: Pravilni oktaeder je telo z osmimi identičnimi enakostraničnimi trikotnimi ploskvami.

Rezultat. $\frac{8}{9}$

Rešitev. Pravilni oktaeder z dolžino roba a ima prostornino ka^3 za neko konstanto k (dejansko ni težko pokazati, da je $k = \sqrt{2}/3$, vendar to za rešitev ni potrebno). Da dobimo prisekani oktaeder, pri vsakem od 6 oglišč oktaedra odstranimo pol oktaedra (piramido s kvadratno osnovno ploskvijo) z dolžino roba $a/3$. Odstranjena prostornina je enakovredna trem oktaedrom, od katerih ima vsak dolžino roba $\frac{a}{3}$. Skupna odstranjena prostornina je torej $3 \cdot k \left(\frac{a}{3}\right)^3 = ka^3/9$. Delež prostornine prisekanega oktaedra glede na prostornino prvotnega oktaedra je tako

$$\frac{1}{ka^3} \left(ka^3 - \frac{1}{9}ka^3 \right) = \frac{8}{9}.$$

Naloga 29. Poišči vse realne rešitve enačbe

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Rezultat. $\pm 1, \pm 2$

Rešitev. Naj bo $a = 2^x + 2^{-x}$. Potem je $4^x + 4^{-x} = a^2 - 2$. Z vstavljanjem v enačbo dobimo

$$8(a^2 - 2) - 54a + 101 = 0,$$

kar se poenostavi v

$$8a^2 - 54a + 85 = 0.$$

Reševanje te kvadratne enačbe nas pripelje do

$$a_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85}}{2 \cdot 8} = \frac{54 \pm \sqrt{2916 - 2720}}{16} = \frac{54 \pm \sqrt{196}}{16} = \frac{54 \pm 14}{16},$$

z rezultatoma

$$a_1 = \frac{17}{4} \quad \text{in} \quad a_2 = \frac{5}{2}.$$

V prvem primeru imamo

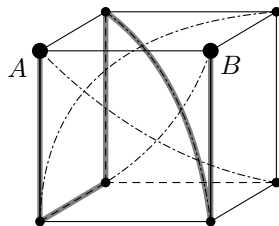
$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{17}{4},$$

kar vodi do $2^x = 4$ ali $2^x = \frac{1}{4}$, oziroma $x = 2$ ali $x = -2$. V drugem primeru imamo

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2},$$

kar vodi do $2^x = 2$ ali $2^x = \frac{1}{2}$, oziroma $x = 1$ ali $x = -1$. Rešitve prvotne enačbe so torej $x = \pm 1, \pm 2$.

Naloga 30. Na kockastem planetu *Vagon X* je osem mest, po eno v vsakem oglišču. Železnice potekajo vzdolž vsakega roba, tako da so mesta, povezana z robom, neposredno povezana. Poleg tega obstajajo štiri “tunelske železnice”, ki prebadajo planet in vsaka povezuje par nasprotnih oglišč. Obiskovalec začne v mestu *A* in želi doseči sosednje mesto *B* (oddaljeno za en rob) preko natanko petih železniških odsekov, pri čemer nobenega mesta ne obišče več kot enkrat, ob prihodu pa se ustavi. Obiskovalec želi na svoji poti uporabiti vsaj eno tunelsko železnico. Koliko takšnih poti je mogočih? Spodnja slika prikazuje primer ene takšne poti.



Rezultat. 28

Rešitev. Osem ogliščnih mest pobarvamo z dvema barvama kot 3D šahovnico, tako da vsak železniški odsek (bodisi robni bodisi tunelski) vedno vodi iz mesta ene barve v mesto druge barve. Ker obiskovalec začne v mestu ene barve in mora končati v sosednjem mestu druge barve v natanko petih odsekih, se morajo barve na poti izmenjevati. Zato mora obiskati natanko dve vmesni mesti vsake barve, pri čemer morajo biti vsa obiskana mesta različna. Poleg tega je v tej konfiguraciji s tuneli vsak par mest različnih barv neposredno povezan z železniškim odsekom.

Najprej preštejmo vse poti dolžine 5, ne glede na pogoj o tunelih. Vsaka pot je oblike

$$A \rightarrow o_1 \rightarrow e_2 \rightarrow o_2 \rightarrow e_3 \rightarrow B,$$

kjer sta o_1, o_2 različni mesti barve mesta *B* in sta e_2, e_3 različni mesti barve mesta *A*. Obstaja $3 \cdot 2$ načinov za izbiro urejenega para (o_1, o_2) izmed treh mest barve mesta *B* (razen mesta *B* samem), in $3 \cdot 2$ načinov za izbiro urejenega para (e_2, e_3) izmed treh mest barve mesta *A* (razen mesta *A* samem). Skupaj je torej $(3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = 36$ poti dolžine 5.

Sedaj odštejmo poti, ki sploh ne uporabljajo tunelov, tj. poti, ki uporabljajo le robne železnice. Prva poteza ne sme iti neposredno v *B*, zato sta možni le dve prvi potezi. Za vsako od teh dveh prvih potez se izkaže, da obstajajo natanko 4 načini za dokončanje poti dolžine 5 do *B* z uporabo izključno robov, kar nanese $2 \cdot 4 = 8$ takšnih poti.

Število poti dolžine 5, ki uporabljajo vsaj en tunnel, je torej $36 - 8 = 28$.

Naloga 31. Recimo, da imamo volitve z 2026 volivci in štirimi kandidati - *A*, *B*, *C* in *D*. Kandidat *A* se je odrezal najslabše, dobil je eno šestino od števila glasov, ki jih je dobil kandidat *B*. Kandidat *C* je dobil natanko 446 glasov manj kot je seštevek glasov vseh ostalih kandidatov. Kandidat *D* je zmagal volitve z manj kot 800 glasovi. Vsak volivec je oddal natanko en glas za enega izmed štirih kandidatov. Koliko glasov je dobil kandidat *A*?

Rezultat. 63

Rešitev.

Z a , b , c in d označimo število pripadajočih glasov vsakega kandidata. To so naravna števila, ki zadoščajo pogojem

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2026, \\ b &= 6a, \\ c &= (a + b + d) - 446, \\ a, b, c &< d < 800, \\ a &< b, c, d. \end{aligned}$$

Če tretjemu pogoju prištejemo c na obeh straneh, dobimo

$$2c = a + b + c + d - 446 = 2026 - 446 = 1580.$$

Potem je $c = 790$ in od tod sledi, da

$$a + b + d = 2026 - 790 = 1236.$$

Glasove b izrazimo z a in dobimo

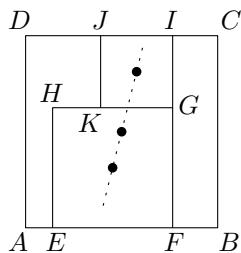
$$a + 6a + d = 1236 \quad \text{ali} \quad d = 1236 - 7a.$$

Ker je $d < 800$ in $d > c = 790$, dobimo $791 \leq d \leq 799$. Potem je

$$791 \leq 1236 - 7a \leq 799 \quad \text{or} \quad 437 \leq 7a \leq 445.$$

Edino število deljivo s 7 v danem intervalu je $441 = 7 \cdot 63$. Odgovor je torej $a = 63$. Za tem lahko izračunamo še $b = 378$, $c = 790$, $d = 795$ ter opazimo, da so zadoščeni vsi pogoji iz navodil naloge.

Naloga 32. Trije kvadrati $ABCD$, $EFGH$ in $KGIJ$ so razporejeni kot je prikazano na sliki. Točki E in F ležita na daljici AB , točki I in J ležita na daljici CD in točka K leži na daljici GH . Nadalje, središča vseh treh kvadratov ležijo na isti premici. Podani sta dolžini daljic $|AD| = 7$ in $|HK| = 1$. Poiščite dolžino $|FB|$.



Rezultat. 12/7

Rešitev. Naj bosta a in b dolžini stranic kvadratov $EFGH$ in $KGIJ$. Iz navodil naloge, dobimo enačbi $7 = AD = JK + HE = a + b$ in $1 = HK = HG - KG = a - b$. Rešitev tega sistema linearnih enačb nam da $a = 4$ in $b = 3$.

Premica skozi središča kvadratov razdeli ploščino vsakega kvadrata na dva enaka dela. Od tod sledi, da lahko ploščino pravokotnika $FBCI$ izračunamo z

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = ab.$$

Ploščino pravokotnika $FBCI$ je podana tudi kot $FB \cdot (a+b)$. Iz teh dveh enačb dobimo $FB = \frac{ab}{a+b} = \frac{12}{7}$.

Naloga 33. Na tabli imamo zapisana števila, eno izmed njih je 2026. Če število 2026 izbrisemo, se aritmetična sredina na tabli zapisanih števil zmanjša za 6. Če pa namesto tega zapišemo na tablo 2026 še enkrat, se aritmetična sredina poveča za 4. Poiščite vsoto vseh števil, ki so bila prvotno zapisana na tabli.

Rezultat. 10010

Rešitev.

Naj bo vsota n števil, ki so zapisana na tabli enaka S . Potem

$$\begin{aligned} \frac{S - 2026}{n - 1} &= \frac{S}{n} - 6, \\ \frac{S + 2026}{n + 1} &= \frac{S}{n} + 4. \end{aligned}$$

Dobljeni enačbi lahko poenostavimo:

$$\begin{aligned} S &= 2032n - 6n^2, \\ S &= 2022n - 4n^2. \end{aligned}$$

Če prvi enačbi odštejemo drugo in če vemo, da n ne more biti enak nič dobimo

$$S - S = (2032 - 2022)n + (-6 + 4)n^2 \Rightarrow 2n^2 = 10n \Rightarrow n = 5.$$

Od tod sledi, $S = 2032n - 6n^2 = 10010$

Naloga 34. Bolha skače po krožnici. S svojim prvim skokom oklene središčni kot velikosti 1° (torej, kot med daljicama od središča do začetne in od središča do končne točke skoka je enak 1°). Z vsakim nadaljnjim skokom v isti smeri pa poveča oklepajoči kot za najprej 2° , zatem 3° in tako dalje. S katerim skokom se bo bolha vrnila na svojo začetno točko?

Rezultat. 80

Rešitev. Po n skokih bo bolha oklenila stopinj. Iščemo najmanjši n , ki je večkratnik števila 360; Ekvivalentno, želimo, da je $n(n+1)$ večkratnik števila $720 = 16 \cdot 9 \cdot 5$. Vsak od treh faktorjev mora deliti bodisi n , bodisi $n+1$, saj sta si števili n in $n+1$ tuji. Začnemo z ogledom večkratnikov največjega faktorja 16 - s tem dobimo kandidate za n : 15, 16, 31, 32, 47, 48, 63, 64, 79, in končno 80, ki je tudi sam deljiv z 5 in $n+1 = 81$, kar je deljivo z 9. Zaključimo, da je 80 iskano število skokov.

Naloga 35.

V kraljestvu imenovanem Naboia, imamo tri magične cehe: Ceh Ognja, Ceh Vode in Ceh Vetra. Vsak ceh je sestavljen iz dveh čarodejev mojstrov ter dveh čarodejev vajencev. Za obrambo kraljestva morajo sestaviti štiri pare, kjer mora vsak par vsebovati čarodeja mojstra in čarodeja vajenca, vendar noben par ne sme vsebovati čarodejev iz istega ceha. Dodatno, vsak ceh mora prispevati vsaj enega mojstra in vsaj enega vajenca v te štiri pare. Na koliko načinov lahko sestavimo pare?

Pozor: Vsak mojster in vajenec je svoja oseba, torej je pomembno kateri čarodej se pojavi v določenem paru. Vrstni red naštevanja štirih parov ni pomemben.

Rezultat. 768

Rešitev. Ker izberemo štiri vajence in ker mora vsak ceh poslati vsaj enega vajenca, mora biti porazdelitev vajencev med cehi enaka $(2, 1, 1)$ v nekem vrstnem redu. Podobno štirje mojstri so izbrani in vsak ceh mora poslati vsaj enega mojstra, torej mora biti tudi porazdelitev mojstrov enaka $(2, 1, 1)$.

Ločimo dva primera

V *prvem primeru* posamezni ceh prispeva tako dva vajenca kot dva mojstra. Označimo tak ceh z X . Imamo 3 različne možnosti za izbiro X -a. Iz preostalih dveh cehov lahko izberemo vajence na $2 \cdot 2 = 4$ načine in posobno lahko izberemo mojstre na $2 \cdot 2 = 4$ načine.

Za vsako takšno izbiro, morata biti dva izbrana vajenca iz X v paru z dvema mojstroma iz drugih dveh cehov, kar lahko izberemo na 2 načina. Ko imamo to enkrat določeno, moramo postaviti preostala dva vajenca v par z mojstroma iz X , kar zopet lahko storimo na 2 načina. Imamo torej $2 \cdot 2 = 4$ načine kako tvoriti pare mojstrov in vajencev v tem primeru. Skupaj torej ta primer prispeva $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ parov.

V *drugem primeru* pa en ceh X prispeva dva vajenca, medtem ko drug ceh (Y) prispeva dva mojstra. Ceh X lahko izberemo na 3 načine, in ko je enkrat izbran, lahko ceh Y izberemo na 2 načina. Preostale vajence lahko izberemo iz preostalih dveh cehov na $2 \cdot 2 = 4$ načine, prav tako lahko na 4 načine izberemo preostale mojstre. Za vsak tak izbor imamo $3 \cdot 2 = 6$ dopustnih načinov kako tvoriti pare mojster-vajenec: Dva vajenca iz ceha X sta lahko dodeljena kateremukoli izmed treh prostih mojstrov in ko to izberemo, so preostali vajenci in mojstri postavljeni v pare na enoličen način. Posledično ta primer prispeva $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ parov.

Ko seštejemo oba primera dobimo skupaj $192 + 576 = 768$ možnih parov.

Naloga 36. Naj bosta x in y neničelni realni števili, za kateri velja $x + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$ in $y + \frac{1}{x} = 3\sqrt[3]{4}$. Določite vrednost izraza $x^2y + \frac{1}{xy^2}$.

Rezultat. $3\sqrt[3]{2}$

Rešitev.

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Opazimo da

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = \left(xy + \frac{1}{xy}\right) \left(x + \frac{1}{y}\right) - x - \frac{1}{y}.$$

Nadalje,

$$xy + \frac{1}{xy} = \left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Torej,

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Naloga 37. Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik s kotoma $\angle ADB = 48^\circ$ in $\angle BDC = 56^\circ$. Točka X je izbrana znotraj trikotnika ABC tako, da je kot $\angle XCB = 24^\circ$, in da poltrak AX razpolavlja kot $\angle BAC$. Poišči velikost kota $\angle CBX$ v stopinjah.

Opomba: Tetivni štirikotnik je štirikotnik, katerega vsa oglišča ležijo na isti krožnici.

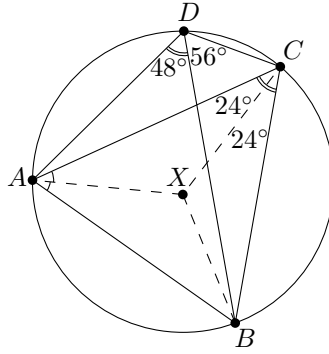
Rezultat. 38°

Rešitev.

Kota $\angle ADB$ in $\angle ACB$ sta enaka saj oklepata enak krožni lok. Torej

$$\angle ACX = \angle ACB - \angle XCB = \angle ADB - \angle XCB = 48^\circ - 24^\circ = 24^\circ = \angle XCB.$$

Sledi, da CX razpolavlja kot $\angle ACB$ in X je skupno presečišče vseh treh simetral kotov $\triangle ABC$ (to točko poznamo tudi pod imenom središče včrtane krožnice trikotnika).



Sedaj lahko izračunamo iskan kot:

$$\angle CBX = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180^\circ - \angle BAC - \angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - 56^\circ - 48^\circ}{2} = 38^\circ,$$

kjer uporabimo $\angle BAC = \angle BDC$ kar sledi (podobno kot prva enačba kotov) iz dejstva, da oba kota oklepata enak krožni lok.

Naloga 38. *Nabionacula simplex* ima zelo primitivne možgane, razdeljene na levo in desno hemisfero, od katerih vsaka sestoji iz dveh vrst celic: nevronov in glij. Celice nimajo povezav znotraj iste hemisfere, med vsakim parom celic iz različnih hemisfer pa je natanko ena dvosmerna povezava. V eni *Nabionacula simplex* je 168 povezav nevron-nevron, 48 povezav glija-glija in 191 povezav nevron-glija. Koliko nevronov je skupaj v tem primerku?

Rezultat. 29

Rešitev. Naj n_1 in g_1 označujeta število nevronov in glij v eni od hemisfer, n_2 in g_2 pa v drugi. Vemo, da je $n_1 n_2 = 168$, $g_1 g_2 = 48$ in $n_1 g_2 + n_2 g_1 = 191$. Zato velja

$$(n_1 + g_1)(n_2 + g_2) = 168 + 48 + 191 = 407 = 11 \cdot 37,$$

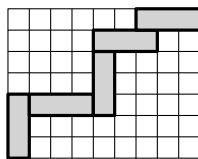
tako da, ker mora biti na vsaki hemisferi vsaj ena celica vsakega tipa, brez izgube splošnosti lahko trdimo, da je $n_1 + g_1 = 11$. Podobno

$$(n_1 - g_1)(n_2 - g_2) = 168 + 48 - 191 = 25,$$

kar skupaj z dejstvom, da je n_1 delitelj števila 168 in g_1 delitelj števila 48, zlahka pomeni, da je $n_1 = 8$, $g_1 = 3$, torej $n_2 = 168/8 = 21$, skupno število nevronov pa je $n_1 + n_2 = 29$.

Alternativna rešitev. Uporabimo oznake iz prejšnje rešitve. Število $n_1 g_2 + n_2 g_1$ je liho, torej je eden od dveh sumandov lih; brez izgube splošnosti naj bo to $n_1 g_2$. To pomeni, da sta tako n_1 kot g_2 lihi. Po drugi strani pa, ker je $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ in $48 = 2^4 \cdot 3$, mora biti n_2 deljivo z 2^3 in g_1 z 2^4 . Zato je $n_2 g_1$ večkratnik $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$ in ker je manjši od 191, mora biti enak 128, pri čemer je $n_2 = 2^3 = 8$ (in $g_1 = 2^4$). Sklepamo, da je $n_1 = 168/8 = 21$, in rezultat sledi.

Naloga 39. Anica ima pet identičnih ravnih trimino ploščic (v obliki črke I) in želi oblikovati neprekinjeno pot na pravokotni mreži velikosti 7×9 , ki povezuje spodnji levi kot z zgornjim desnim kotom. Vsaka trimino ploščica je sestavljena iz enega osrednjega kvadrata in dveh končnih kvadratkov. Pot mora biti oblikovana tako, da se vsak par zaporednih trimino ploščic dotika natanko po eni stranici mrežne celice, pri čemer morata roba, ki se stikata, oba pripadati končnim kvadratom obeh trimino ploščic. Ena taka pot je prikazana na spodnji sliki. Na koliko različnih načinov lahko Anica oblikuje takšno pot?



Rezultat. 75

Rešitev. Ker ima Anica samo pet triminov, se pot nikoli ne more premikati proti jugu ali zahodu: vsak takšen premik nazaj bi zapravil razdaljo na mreži, ki je ni mogoče nadoknaditi samo s petimi kosi. Zato se končna točka rastoče poti vedno premika proti severu in/ali vzhodu. Poti preštejemo tako, da izpolnimo tabelo 7×9 : v vsak kvadrat mreže vpišemo število trimino poti, katerih trenutni končni točki (prost kvadrat zadnjega trimina) ležita v tem kvadratu.

Po postavitvi prvega trimina iz spodnjega levega kota mora biti končna točka natanko dva kvadrata stran: bodisi dva na desno (vodoravni prvi trimino) ali dva navzgor (navpični prvi trimino). Zato v kvadrate $(0, 2)$ in $(2, 0)$ (koordinate so štete od spodnjega levega kota) vpišemo število 1.

Sedaj izpolnimo preostanek tabele, tako da se premikamo od spodaj levo proti zgoraj desno. Da bi določili vrednost v kvadratu (x, y) , upoštevamo načine, na katere se trimino lahko konča tam. Trimino, ki se konča na (x, y) , je lahko navpičen ali vodoraven, v obeh primerih pa se mora na končnem kvadratu priključiti na prejšnji trimino. To daje štiri možne predhodne končne točke: $(x, y - 3)$ in $(x - 1, y - 2)$ v navpičnem primeru ter $(x - 3, y)$ in $(x - 2, y - 1)$ v vodoravnem primeru. Vsak od teh ustreza veljavnemu načinu podaljšanja obstoječe poti za en trimino. Zato je vrednost, zapisana v (x, y) , vsota vrednosti, ki so že zapisane v kvadratih

$$(x - 3, y), (x - 2, y - 1), (x - 1, y - 2), (x, y - 3),$$

pri čemer vsak kvadrat zunaj mreže prispeva 0.

0	0	4	0	0	22	0	0	75
1	0	0	6	0	0	22	0	0
0	1	0	0	6	0	0	18	0
0	0	2	0	0	6	0	0	13
1	0	0	2	0	0	4	0	0
0	0	0	0	1	0	0	2	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1

Po zapolnitvi vseh kvadratov na ta način je vrednost 75 v kvadratu v zgornjem desnem kotu natanko število veljavnih poti triminov od spodnjega levega kota do zgornjega desnega kota.

Alternativna rešitev: Pet I-triminov postavimo od konca do konca, začenši v spodnjem levem kotu $(0, 0)$, na naslednji „skeletni“ način: zaporedni trimini se stikajo samo v kotu (končni kvadratni kot s končnim kvadratnim kotom). Vsak trimino premakne končno točko za $(+1, +3)$ (trimino „navzgor“) ali $(+3, +1)$ (trimino „desno“). Po 5 triminih je končna točka (x, y) z $x + y = 20$. Če je U število triminov navzgor in R število triminov desno, potem je $U + R = 5$ in $(x, y) = (U + 3R, 3U + R)$.

Da bi verigo, ki se dotika oglišč, spremenili v veljavno pot, kjer zaporedni trimini delijo rob, „popravimo“ vsako od 4 spojev med zaporednimi trimini. Naj bo i -ta spojnica povezava med trimini i in $i + 1$; na vsaki spojnici izberemo eno od dveh operacij: bodisi premaknemo celoten spoj triminov $i + 1, i + 2, \dots, 5$ za eno enoto v levo, bodisi premaknemo ta spoj za eno enoto navzdol. S tem zagotovimo, da si trimina i in $i + 1$ delita celoten rob mreže namesto le oglišča.

Naj bo ℓ skupno število spojev, pri katerih izberemo premik v levo, in naj bo d skupno število spojev, pri katerih izberemo premik navzdol. Ker je spoj navzdol 4, velja $\ell + d = 4$. Po izvedbi vseh 4 premikov se končna točka (x, y) skeletne verige premakne na $(x - \ell, y - d)$. Da bi dobili veljavno pot od $(0, 0)$ do zgornjega desnega kota $(9, 7)$, mora ta končni končni točki ustrezati $(x - \ell, y - d) = (9, 7)$.

Preverimo sedaj šest primerov (U, R) :

- $(5, 0)$: $(x, y) = (5, 15)$ ne more doseči $(9, 7)$ s 4 premiki v levo/navzdol.
- $(4, 1)$: $(x, y) = (7, 13)$ je prav tako nemogoče popraviti.
- $(3, 2)$: $(x, y) = (9, 11)$ zahteva $\ell = 0$, $d = 4$ (vsi premiki navzdol). Obstaja $\binom{5}{3} = 10$ skeletnih verig in samo 1 popravek, kar daje 10 veljavnih poti.
- $(2, 3)$: $(x, y) = (11, 9)$ zahteva $\ell = 2$, $d = 2$. Obstaja $\binom{5}{2} = 10$ skeletnih verig in $\binom{4}{2} = 6$ načinov izbire, katere sklepe premakniti v levo (ostali se premaknejo navzdol), kar daje $10 \cdot 6 = 60$ veljavnih poti.
- $(1, 4)$: $(x, y) = (13, 7)$ zahteva $\ell = 4$, $d = 0$ (vsi premiki levo). Obstaja $\binom{5}{1} = 5$ skeletnih verig in 1 fiksirana točka, kar daje 5 veljavnih poti.
- $(0, 5)$: $(x, y) = (15, 5)$ je nemogoče popraviti.

Zato je skupno število veljavnih poti $10 + 60 + 5 = 75$.

Naloga 40. Naj bodo a, b, c in d realna števila, za katera velja $a + b + c + d = 2$ in $\frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$. Poiščite vrednost izraza

$$\frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}.$$

Rezultat. 507

Rešitev. Naj bo $X = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a} = 2026$ in $Y = \frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}$.

Ker imamo v imenovalcu $a + 2b$, lahko poskusimo poenostaviti, če imamo $(a + 2b)(a - 2b) = a^2 - 4b^2$ za števec in tako naprej za preostale ulomke. Potem:

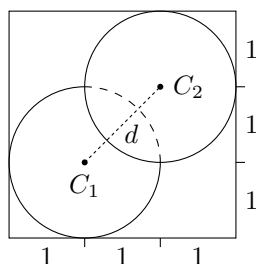
$$\begin{aligned} X - 4Y &= \frac{a^2 - 4b^2}{a + 2b} + \frac{b^2 - 4c^2}{b + 2c} + \frac{c^2 - 4d^2}{c + 2d} + \frac{d^2 - 4a^2}{d + 2a} = (a - 2b) + (b - 2c) + (c - 2d) + (d - 2a) = \\ &= -a - b - c - d = -(a + b + c + d) = -2. \end{aligned}$$

Iz tega dobimo $X - 4Y = -2$, torej $Y = \frac{1}{4}(X + 2) = \frac{2026+2}{4} = 507$.

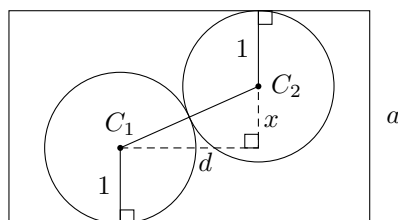
Naloga 41. Dana je škatla v obliki kvadra, ki ima za osnovno ploskev kvadrat z dolžino stranice 3, njena višina pa je enaka a . V škatli sta dve ping-pong žogici, vsaka s polmerom 1. Prva žogica je nameščena tako, da se dotika dveh sosednjih navpičnih ploskev škatle, dna škatle in druge žogice. Druga žogica je nameščena tako, da se dotika drugih dveh sosednjih navpičnih ploskev škatle, zgornje ploskve škatle in prve žogice. Določite višino a dane škatle.

Rezultat. $2 + \sqrt{2}$

Rešitev. Označimo s C_1 in C_2 središči obeh kroglic, d pa naj bo vodoravna razdalja med središčema, tj. dolžina projekcije odseka C_1C_2 na zgornjo (ali spodnjo) stran škatle. Če konfiguracijo gledamo od zgoraj, dobimo kvadrat s stranico dolžine 3, kjer je C_1 oddaljen 1 od dveh sosednjih stranic, C_2 pa je oddaljen 1 od drugih dveh sosednjih stranic.



Zato v tem pogledu od zgoraj projekciji C_1 in C_2 ležita v nasprotnih ogliščih kvadrata s stranico dolžine 1. Zato je $d = \sqrt{2}$. Nato upoštevajmo navpično ravnino, ki je pravokotna na osnovno ploskev in poteka skozi C_1 in C_2 . Presek te ravnine s škatlo je pravokotnik z iskano višino a , daljica C_1C_2 pa leži v tej ravnini. Naj x označuje navpično razdaljo med C_1 in C_2 .



Ker se obe kroglici dotikata in ima vsaka polmer 1, je razdalja med njunima središčema $C_1C_2 = 2$. V pravokotnem trikotniku z vodoravno stranico d in navpično stranico x velja $C_1C_2^2 = d^2 + x^2$, torej $x = \sqrt{2^2 - d^2} = \sqrt{2}$. Nazadnje, prva krogla se dotakne spodnje ploskve, druga krogla pa zgornje ploskve, tako da je višina škatle enaka vsoti polmera prve krogle, navpične razdalje med središčema in polmera druge krogle: $a = 1 + x + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

Naloga 42. Na koliko načinov je mogoče tabelo 3×3 zapolniti s števki $0, 1, \dots, 9$, tako da vsaka celica vsebuje natanko eno števko, nobena števka ni uporabljena več kot enkrat in so vsote (teh je šest), ki jih tvorijo tri vrstice in trije stolpci, bodisi vse sode bodisi vse lihe? Primer veljavne tabele, v kateri so vse vsote vrstic in stolpcev sode, je prikazan spodaj:

1	2	3
5	4	7
6	0	8

Rezultat. 259200

Rešitev. Ker je $0 + 1 + \dots + 9 = 45$ liho, izpustitev lihe številke da parno vsoto za celotno tabelo, zato morajo biti vse vsote vrstic in stolpcev parne. To je mogoče doseči z uporabo 4 lihih in 5 parnih števk, če ena vrstica in en stolpec (5 celic) vsebujeta natanko parne številke. Zato lahko preštejemo vse takšne tabele tako, da izberemo izpuščeno liho številko (5 načinov), nato izberemo vrstico in stolpec z izključno sodimi števkami ($3 \cdot 3 = 9$ načinov), nato razporedimo lihe številke v poljubnem vrstnem redu ($4! = 24$ načinov) in nazadnje razporedimo sode številke v poljubnem vrstnem redu ($5! = 120$ načinov).

Podobno, če izpustimo sodo številko, bo vsota vseh treh vrstic liha, zato morajo vse vrstice in stolpci dati liho vsoto. Edini način, da pet lihih števk razporedimo v tabelo 3×3 , tako da vsaka vrstica ali stolpec vsebuje eno ali tri od njih, je, da jih razporedimo v eno vrstico in en stolpec. Število tabel v tem primeru se izračuna analogno kot v prejšnjem primeru, le da se zamenjata vlogi sodih in lihih števk. Zato je skupno število enako $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 120 = 259200$.

Naloga 43. Vsota štirih med seboj različnih pozitivnih celih števil a, b, c in d je 20000. Poiščite najmanjšo možno vrednost $v(a, b, c, d)$, kjer v označuje najmanjši skupni večkratnik.

Rezultat. 9600

Rešitev. Naj bo $L = v(a, b, c, d)$ in naj bo $a > b > c > d$. Ta števila so delitelji L , tj. $L = aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1$ za neka pozitivna cela števila a_1, b_1, c_1, d_1 . Jasno je, da velja $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$. Zato velja $a_1 \geq 1, b_1 \geq 2, c_1 \geq 3, d_1 \geq 4$. To pomeni, da

$$a \leq L, \quad b \leq \frac{L}{2}, \quad c \leq \frac{L}{3}, \quad d \leq \frac{L}{4}.$$

Kot rezultat dobimo

$$20000 = a + b + c + d \leq L \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{25L}{12},$$

tj. $L \geq 12 \cdot 20000/25 = 9600$.

Da bi pokazali, da je meja $L = 9600$ dosežena, lahko postavimo $a = 9600, b = \frac{9600}{2}, c = \frac{9600}{3}$ in $d = \frac{9600}{4}$, ki so vsa cela števila. Vsota teh štirih števil je $9600 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 20000$. Zato je 9600 iskana minimalna vrednost L .

Naloga 44. Naj bo $a_1, a_2, a_3, \dots$ zaporedje definirano z $a_n = \frac{n^2}{1.001^n}$. Poiščite vrednost n , pri kateri zaporedje doseže svoj maksimum.

Rezultat. 2001

Rešitev. Opazimo, da je $a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)^2}{1.001n^2} = \frac{1000(n+1)^2}{1001n^2}$. Potem $a_{n+1} > a_n$ ali $a_{n+1}/a_n > 1$ daje $2000n + 1000 > n^2$ in zato $n(n - 2000) < 1000$. Enostavno je preveriti, da ta pogoj velja, ko je $n \leq 2000$, saj bi bila leva stran nepozitivna, in ne velja za $n \geq 2001$. Tako je zaporedje strogo naraščajoče do 2001 in analogno strogo padajoče od takrat naprej, to je $a_1 < a_2 < \dots < a_{2000} < a_{2001} > a_{2002} > \dots$. Zato je največja vrednost zaporedja dosežena pri a_{2001} .

Naloga 45. Pet prijateljev izbira sedeže za predstavo. Vsi želijo sedeti v vrsti z razporedom, prikazanim na spodnji sliki.

|□ □ □ □ □ □ _ □ □ □ □ □ □ _ □ □ □ □ □ □ _ □ □ □ □ □ □|

Torej imamo eno steno, štiri bloke po šest sedežev, ki so ločeni s tremi prehodi, in drugo steno. Prijatelji so sramežljivi, zato želijo izbrati pet sedežev tako, da jih bodo lahko zapustili, tudi če so vsi drugi sedeži zasedeni, ne da bi morali prositi katerega koli neznanca, naj vstane. Koliko takšnih množic s petimi sedeži obstaja?

Rezultat. 252

Rešitev. Pogoj "lahko zapustili, tudi če so vsi drugi sedeži zasedeni, ne da bi morali prositi katerega koli neznanca, naj vstane" pomeni, da morajo izbrani sedeži sestavljati povezane skupine, ki so sosednje prehodom.

Postavimo pet prijateljev v vrsto. Želimo jih ločiti v tri skupine (nekateri so lahko prazni), skladno s tremi prehodi. To bomo dosegli tako, da bomo vstavili $2 \cdot 3 - 1 = 5$ ločil:

- *liha* ločila predstavljajo prehode,
- *soda* ločila predstavljajo nepravne bloke praznih sedežev v tistih blokih, ki niso sosednji stenam.

Trdimo, da so te razporeditve v bijektivni zvezi z vsemi dovoljenimi izbirami sedežev. Vzemimo eno tako razporeditev, npr. zaporedje

_ □ F _ □ F F _ F F,

kjer F stoji za prijatelj, $_$ za prehod in $\square$ za blok praznih sedežev. Od leve proti desni to pomeni naslednje: noben sedež ni bil izbran iz prvega bloka, izbran je bil en sedež iz drugega bloka ter sosedni drugemu prehodu, izbrana sta bila dva skrajno desna sedeža iz tretjega bloka, in nazadnje sta bila izbrana dva skrajno leva sedeža iz četrtega bloka. Po drugi strani pa obstaja enoličen način zapisa vsake dovoljene izbire sedežev. Če se skupine okoli sosednjih prehodov

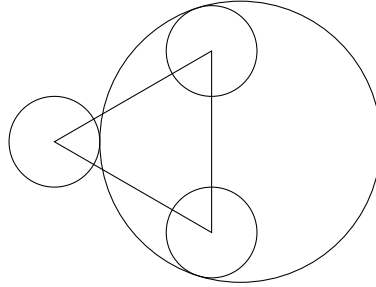
dotikajo, to je, prijatelji so zasedli cel blok, potem bi obstajalo več možnosti za postavitve pripadajočega ločila. Toda, ker imamo pet prijateljev in šest sedežev v vsakem bloku, je njegova lega vedno enolično določena.

Štejemo postavitve petih prijateljev (vrstni red ni pomemben, saj nas ne zanima, kateri prijatelj sedi kje v množici izbranih sedežev) in petih ločil (imajo dva različna pomena, toda le-ta sta povsem določljiva z njihovih vrstnih redov, torej nadaljno razlikovanje pri štetju ni potrebno). Torej, izbiramo 5 pozicij izmed 10, kar nam da

$$\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

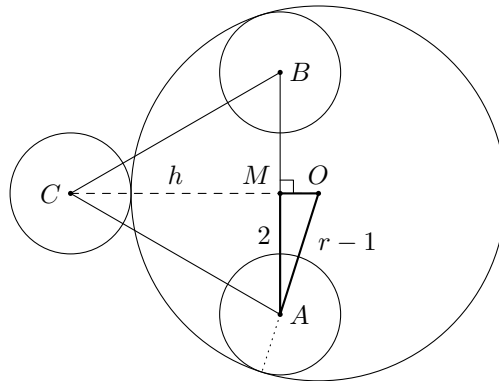
možnosti.

Naloga 46. Podan je enakostranični trikotnik s stranico dolžine 4. Vsako njegovo oglišče predstavlja središče krožnice s polmerom 1. Določite polmer večje krožnice, ki se od znotraj dotika teh dveh manjših krožnic, od zunaj pa se dotika še preostale manjše krožnice.



Rezultat. $\frac{3\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Rešitev. Označimo z $\triangle ABC$ enakostranični trikotnik ter z O središče večje krožnice, ki naj ima polmer r . Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da se večja krožnica od znotraj dotika krožnic s središčema v A in B ter od zunaj dotika krožnice s središčem v C . Višina h trikotnika $\triangle ABC$ je enaka $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$. Ker je $|OA| = |OB|$, točka O leži na simetrali daljice AB . Naj bo M središče te daljice. Potem je $|AM| = 2$ in $|CM| = h$.



Zaradi pogojev o dotikih krožnic imamo $|OA| = |OB| = r - 1$ in $|OC| = r + 1$. Ker O leži na premici CM , imamo še

$$|OM| = |OC| - |CM| = r + 1 - h,$$

pri čemer smo predpostavili, da točka O leži zunaj $\triangle ABC$. V nasprotnem primeru imamo $|OM| = |CM| - |OC|$. S tem vedno velja $|OM| = |r + 1 - h|$, kar pomeni $|OM|^2 = (r + 1 - h)^2$.

Po Pitagorovem izreku za pravokotni trikotnik $\triangle OMA$ imamo

$$|OA|^2 = |OM|^2 + |AM|^2 \quad \text{ali} \quad (r - 1)^2 = (r + 1 - h)^2 + 2^2.$$

Razširimo oklepaje in izpostavimo r . Dobimo

$$r = \frac{h^2 - 2h + 4}{2(h - 2)}.$$

Vstavimo $h = 2\sqrt{3}$ in dobimo $r = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$.

Naloga 47. V dveh sobah prebivajo mitološka bitja. V prvi sobi so samo škratje, pri čemer je vsak visok 1,2 m, medtem ko so v drugi sobi samo štirimetrski kiklopi. Sčasoma se bitja odločijo, da bodo obiskala drug drugega. Ko se 35 kiklopov in 24 škratov preseli iz svoje sobe v drugo sobo, povprečna višina bitij v obeh sobah postane enaka. Določite najmanjše možno število vseh bitij.

Rezultat. 117

Rešitev. Označimo z d število vseh škratov in s c število vseh kiklopov. Po zamenjavi imamo $d - 24$ škratov in 35 kiklopov v prvi sobi, medtem ko je 24 škratov in $c - 35$ kiklopov v drugi sobi. Postavimo $d_1 = d - 24$, $c_1 = 35$, $d_2 = 24$ in $c_2 = c - 35$ ter označimo z h_d in h_c višini škratov in kiklopov. Povprečna višina bitij v obeh sobah je enaka, torej

$$\frac{d_1 h_d + c_1 h_c}{d_1 + c_1} = \frac{d_2 h_d + c_2 h_c}{d_2 + c_2}.$$

Poenostavimo in dobimo

$$(h_c - h_d)(c_1 d_2 - d_1 c_2) = 0.$$

Ker $h_c \neq h_d$, prejšnja enačba zagotavlja $c_1 d_2 - d_1 c_2 = 0$ ali $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$. Intuitivno to izgleda pravilno: da bo povprečna višina bitij v obeh sobah enaka mora biti razmerje med škrti in kiklopi v vsaki sobi enako, s tem pa je podatek o dejanski višini bitij nepomemben. Uporabimo znani vrednosti za c_1 in d_2 ter dobimo

$$d_1 c_2 = c_1 d_2 = 35 \cdot 24 = 840.$$

Cilj je poiskati minimalno vrednost izraza $d + c$, kar je enako kot poiskati minimalno vrednost izraza $d_1 + c_2$ saj velja $d + c = d_1 + c_2 + 24 + 35$. Očitno je $(d_1 + c_2)^2 = (d_1 - c_2)^2 + 4d_1 c_2 = (d_1 - c_2)^2 + 4 \cdot 840$, torej bo vsota $d_1 + c_2$ minimizirana za tisti naravni števili d_1 in c_2 , ki sta si najbližji možni. Torej, iščemo razčlenitev števila 840 v tista dva faktorja, ki sta si najbližja. Ni težko videti, da $840 = 28 \cdot 30$ ustreza zahtevam. Torej, $d_1 + c_2 = 28 + 30$ ter s tem $d + c = 28 + 30 + 24 + 35 = 117$. Najmanjše možno število vseh bitij je tako 117.

Naloga 48. Šest piratov vstopi v krčmo, kjer se po burnem prerivanju naključno posedejo na sedeže za okroglo mizo. Vsak pirat ima svojo stopnjo divjosti, od 1 do 6 (vse stopnje so različne), ki določi izid vsakega dvoboja: višje rangiran oz. bolj divji pirat vedno zmaga. Da odločijo, kdo poveljuje posadki, sledijo naslednjemu obrednemu izzivu: v vsakem krogu še sodelujočih piratov naključno izbran pirat izzove najbližjega preostalega pirata (kjer preskoči morebitne prazne sedeže) v smeri urinega kazalca; manj divji pirat je izločen, medtem ko bolj divji ostane za mizo. Po petih krogih za mizo sedi le en pirat. Izračunajte verjetnost, da je bil zaključni dvoboj med najbolj divjima piratoma, torej tistima s stopnjama 6 in 5.

Rezultat. 7/15

Rešitev. Naključno posedimo šest piratov za mizo ter se osredotočimo na pirata s stopnjama 5 in 6, saj tistega s stopnjo 6 ni možno odstraniti. V vsakem trenutku beležimo preostale pirate v smeri urinega kazalca kot 5, $A_1, \dots, A_a, 6, B_1, \dots, B_b$. Naj bo $f(a, b)$ verjetnost, da je pri tej konfiguraciji zaključni dvoboj med piratoma 5 in 6. Jasno je, da je ta verjetnost odvisna samo od števil a in b , ne pa od dejanskih identitet ali stopenj piratov A_i in B_i . Seveda, saj ima vsak A_i in B_i stopnjo največ 4, torej vsak dvoboj, ki zadeva pirata 5 ali 6, izloči manj divjega pirata neglede na kateri A_i ali B_i je to bil, medtem ko dvoboji med pirati A_i (oziroma B_i) samo zmanjšajo velikost pripadajočega bloka za ena.

Če je $a = 0$ ali $b = 0$, potem sta pirata 5 in 6 sosednja, skupno pa je ostalo $n = a + b + 2$ piratov. V tem primeru v vsakem krogu natanko ena izbira izzivalca (5 ali 6, odvisno kdo sedi na desni strani) pomeni takojšen dvoboj med 5 in 6, ki seveda izloči 5. Vse ostale izbire izločijo koga drugega. S tem je verjetnost, da 5 ostane do zaključnega dvoboja, enaka

$$f(a, 0) = f(0, b) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{2}{n} = \frac{2}{a+b+2}.$$

Privzemimo sedaj $a, b \geq 1$ in pišimo $n = a + b + 2$ za število preostalih piratov. Obravnavajmo blok piratov z začetkom pri 5 in koncem pri zadnjem piratu pred 6, v smeri urinega kazalca. Ta blok ima natanko $a + 1$ elementov, to so 5, $A_1, \dots, A_a$. Če naključno izbran izzivalec prihaja iz tega bloka, potem se sledeči dvoboj zgodi med člani tega bloka (nasprotnik je naslednji, v smeri urinega kazalca, pirat, spet član bloka, razen v primeru A_a , ki izzove 6) in v vsakem primeru je izločenec eden izmed $A_1, \dots, A_a$. Torej, izbira izzivalca iz tega bloka zmanjša a za 1. S podobnim premislekom sklepamo, da ima blok piratov z začetkom pri 6 in koncem pri zadnjem piratu pred 5, v smeri urinega kazalca, $b + 1$ elementov, in izbira izzivalca iz tega bloka zmanjša b za 1. Ker je izbira izzivalca enakomerna med n preostalimi pirati, za $a, b \geq 1$ sledi

$$f(a, b) = \frac{a+1}{n} f(a-1, b) + \frac{b+1}{n} f(a, b-1).$$

Na začetku imamo $a + b = 4$. Uporabimo robne vrednosti $f(0, 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $f(0, 3) = \frac{2}{5}$, $f(0, 2) = \frac{1}{2}$, $f(0, 1) = \frac{2}{3}$ in simetrijo $f(a, b) = f(b, a)$, pa po zgornji rekurzivni zvezi dobimo $f(1, 1) = \frac{2}{3}$, $f(1, 2) = \frac{3}{5}$, $f(1, 3) = \frac{8}{15}$ in $f(2, 2) = \frac{3}{5}$.

Ker je prvotni sedežni red enakomerno porazdeljen, je vrzel a med 5 in 6 v smeri urinega kazalca enakomerno porazdeljena na $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Torej, iskana verjetnost je enaka

$$\frac{1}{5}(f(0, 4) + f(1, 3) + f(2, 2) + f(3, 1) + f(4, 0)) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{3}{5} + \frac{8}{15} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{15}.$$

Alternativna rešitev. Problem bomo rešili v bolj splošni obliki za n piratov (namesto samo za 6). Naj p_n označuje verjetnost, da sta zadnja preživela pirata n in $n - 1$. Želimo dokazati naslednjo rekurzivno zvezo

$$p_n = \left(1 - \frac{2}{n(n-1)} \right) p_{n-1}, \quad (\spadesuit)$$

ki velja za $n \geq 3$.

Obravnavajmo prvi korak v ritualu. Pirat $n - 1$ je takoj izločen z verjetnostjo $\frac{2}{n(n-1)}$, saj je verjetnost, da sedita pirata n in $n - 1$ drug poleg drugega enaka $\frac{2}{n(n-1)}$, ker, če se pirati posedejo začenši s piratom n , potem ima pirat $n - 1$ natanko $n - 1$ možnih mest, kam se bo posedel in natanko dve izmed teh možnosti sta poleg pirata n . Ko sta ta sosednja se lahko dvoboj med piratoma n in $n - 1$ zgodi z verjetnostjo $\frac{1}{n}$. Torej je skupna verjetnost enaka

$$\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

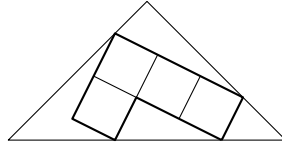
Torej je z verjetnostjo $1 - \frac{2}{n(n-1)}$ prvi izločen pirat eden izmed $1, \dots, n - 2$. V tem primeru je preostalih $n - 1$ piratov ponovno posedenih za mizo v naključnem vrstnem redu, pri čemer je vsak vrstni red enako verjeten: če je pirat k izločen, potem se lahko poljuben vrstni red preostalih piratov pojavi na natanko $2(n - k)$ načinov, saj je k moral sedeti poleg in se boriti proti enemu izmed $n - k$ močnejših piratov ℓ , tako da je izzval ℓ ali bil izzvan s strani ℓ . To število je odvisno samo od k in ni odvisno od vrstnega reda. Ko torej preživele pirate označimo z $1, 2, \dots, n - 1$ dobimo prvoten problem z $n - 1$ pirati. To dokazuje veljavnost zveze $(\spadesuit)$.

Za zaključek moramo poračunati p_6 . Ker je $p_2 = 1$, z zaporedno uporabo $(\spadesuit)$ dobimo

$$p_6 = \frac{14}{15} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

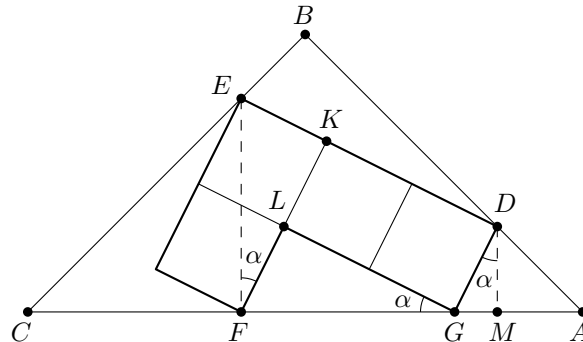
Torej je verjetnost, da je končni dvoboj med piratoma 6 in 5 enak $\frac{7}{15}$.

Naloga 49. Tetromina oblike L, ki je zlepljena po stranicah štirih skladnih kvadratkov, je včrtana v enakokrak pravokotni trikotnik, glej sliko. Določite razmerje med ploščinama tetromine in trikotnika.



Rezultat. 80/169

Rešitev. Oznake točk so prikazane na skici. Če postavimo dolžino stranice kvadrata na 1, moramo samo izračunati dolžino ene od stranic trikotnika $\triangle ABC$, recimo hipotenuze AC .



Uporabimo pomožno premico EF in dobimo pravokotni trikotnik $\triangle EFK$ z $\angle EKF = 90^\circ$, $|EK| = 1$, $|KF| = 2$ in $|EF| = \sqrt{5}$. Ker $|GL| = 2$, $|LF| = 1$ in $\angle FLG = 90^\circ$, sta trikotnika $\triangle EFK$ and $\triangle FGL$ skladna. Od tod dobimo $|GF| = |EF| = \sqrt{5}$. Označimo $\angle LGF$ z α . Potem $\angle KFE = \alpha$ in tako $\angle GFE = 90^\circ$ ker $\alpha + \angle GFL = 90^\circ$. Sklepamo, da je $\triangle FEC$ enakokrak pravokotni trikotnik z $|FC| = \sqrt{5}$. Uvedimo drugo pomožno premico kot pravokotnico na

AC ki gre skozi točko D , ter označimo z M njeno presečišče s premico AC . Ker velja $\angle LGF + \angle MGD = 90^\circ$, dobimo $\angle GDM = \alpha$. S tem je $\triangle MDG$ podoben $\triangle FGL$, kjer je koeficient podobnosti enak $\sqrt{5}$. Torej, $|MG| = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $|MD| = \frac{2}{\sqrt{5}}$ in $|DG| = 1$. Ker je $\triangle MAD$ enakokrak pravokotni trikotnik, sledi še $|AM| = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Končno imamo

$$|AC| = |AM| + |MG| + |GF| + |FC| = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = \frac{3+2 \cdot 5}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Torej, ploščina $\triangle ABC$ je

$$\frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{|AC|}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{\sqrt{10}} \right)^2 = \frac{169}{20}.$$

S tem je iskano razmerje enako $\frac{4}{\frac{169}{20}} = \frac{80}{169}$.

Naloga 50. Naj bo zaporedje $(a_n)_{n=1}^\infty$ definirano z $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ in za $n \geq 1$ kot $a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} + 3^{a_{n+1}} + 3^{a_n}$. Poiščite ostanek pri deljenju člena a_{22} s številom 49.

Rezultat. 11

Rešitev. Člen a_{22} je vsota potenc števila 3. Ker je $\gcd(3, 49) = 1$ in $\varphi(49) = 42$, po Eulerjevem izreku sledi

$$3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 42} \pmod{49}.$$

To pomeni, da je za izračun $a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \pmod{49}$ dovolj poiskati $a_{21}, a_{20}, a_{19} \pmod{42}$. Po kitajskem izreku o ostankih je dovolj poiskati te vrednosti po moduli 6 in 7.

Najprej opazimo, da je $3^k \equiv 3 \pmod{6}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Torej, $a_n \equiv 3 \pmod{6}$ za $n \geq 4$, saj je tedaj vsak člen a_n vsota treh potenc števila 3. Ker je $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, sledi $3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 6} \pmod{7}$. Toda $a_n \equiv 3 \pmod{6}$ za $n \geq 4$, torej $3^{a_n} \equiv 3^3 \equiv -1 \pmod{7}$ za $n \geq 4$. Vzemimo $n \geq 7$, s čimer imamo $n-1 \geq 4$, $n-2 \geq 4$ in $n-3 \geq 4$. Tedaj

$$a_n = 3^{a_{n-1}} + 3^{a_{n-2}} + 3^{a_{n-3}} \equiv -1 - 1 - 1 \equiv -3 \pmod{7}.$$

Naj bo $n \geq 7$. Po prejšnjem odstavku imamo $a_n \equiv 3 \pmod{6}$ in $a_n \equiv -3 \pmod{7}$. Kitajski izrek o ostankih zagotavlja $a_n \equiv -3 \pmod{42}$. Sledi $3^{a_n} \equiv 3^{-3} \pmod{49}$, kjer negativen eksponent označuje potenco modularnega inverza. Torej,

$$a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \equiv 3^{-3} + 3^{-3} + 3^{-3} \equiv 3^{-2} \equiv 9^{-1} \equiv 11 \pmod{49},$$

saj $9 \cdot 11 = 99 \equiv 1 \pmod{49}$. Ostanek pri deljenju člena a_{22} s številom 49 je tako 11.

Naloga 51. Maks začne vožnjo po neskončni cesti s praznim rezervoarjem za gorivo. Za vsako celo število $n \geq 0$ obstaja prekupčevalec, ki je oddaljen n^2 kilometrov od začetka Maksove poti. Maks lahko od vsakega prekupčevalca kupi poljubno število enot goriva (le cela števila). Toda prekupčevalci neradi prodajajo velike količine goriva, zato se cena enote goriva poveča za vsak dodaten nakup: pri vsakem prekupčevalcu prva enota stane 1 €, druga enota stane 2 €, tretja enota stane 3 € itd. Vsaka enota goriva zadošča za 1 kilometer vožnje. Zaloge prekupčevalcev in prostornina Maksovega rezervoarja za gorivo so neomejene. Maksovi prihranki znašajo 730 €. Določite najdaljšo možno razdaljo, ki jo lahko prepelje Maks.

Rezultat. 123

Rešitev. Da pridemo do prekupčevalca na n^2 kilometrih, lahko kupimo gorivo pri prejšnjih n prekupčevalcih. Minimalni teoretični stroški so doseženi s kupovanjem natanko n enot goriva pri vsakem prekupčevalcu, saj vsakršna neenakomerna distribucija poveča skupen strošek.

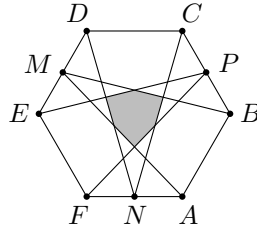
Preveriti moramo, da načrt "pri vsakem prekupčevalcu, ki ga srečam, kupim n enot goriva" dejansko deluje. To pomeni, da načrt Maksu dovoljuje doseči prekupčevalca na n^2 kilometrih, torej se ne sme zgoditi, da mu zmanjka goriva še predno doseže kakšnega prejšnjega prekupčevalca. Da načrt deluje, se lahko prepričamo z uporabo matematične indukcije. Primer $n = 0$ je jasen, saj za 0 kilometrov ne potrebujemo goriva. Sedaj predpostavimo, da že vemo, da je možno prevoziti n^2 kilometrov s kupovanjem n enot pri vsakem od n prekupčevalcev. Če bi namesto n enot kupovali po $n+1$ enot, bi zagotovo imeli dovolj goriva za n^2 kilometrov. Torej, kupimo lahko $n+1$ enot tudi pri prekupčevalcu na n^2 kilometrih. S tem smo kupili vsega $(n+1)(n+1)$ enot, torej imamo dovolj goriva za $(n+1)^2$ kilometrov.

Ta argument pokaže, da je strošek za dosego n^2 kilometrov vsaj

$$C_n = n(1 + 2 + \dots + n) = n \frac{n(n+1)}{2}.$$

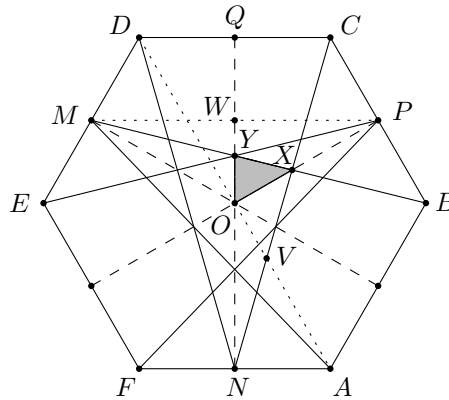
Ker je $C_{11} = 726 \leq 730 < 936 = C_{12}$, sledi, da z našimi prihranki lahko prevozimo 11^2 kilometrov, toda ne 12^2 kilometrov. Preostalih €4 uporabimo za nakup 2 enot goriva pri prekupčevalcu na 11^2 kilometrih, kar nam omogoča doseči 123 kilometrov. Ker si ne moremo privoščiti treh ali več enot goriva pri zadnjem prekupčevalcu, sledi, da Maks s prihranki €730 lahko prepelje maksimalno 123 kilometrov.

Naloga 52. Naj bo $ABCDEF$ pravilni šestkotnik s ploščino 420. Naj bodo M , N in P razpolovišča stranic DE , FA oziroma BC , v tem vrstnem redu. Narišemo daljice AM , BM , CN , DN , EP in FP , ki omejujejo osenčeno območje. Določite ploščino tega območja.



Rezultat. 36

Rešitev. Osenčeno območje lahko razdelimo na šest skladnih trikotnikov; izračunali bomo ploščino enega takega trikotnika. Naj bo O središče šestkotnika, X presečišče daljic BM in CN , ter Y presečišče daljic BM in PE . Poleg tega uvedemo še nekaj pomožnih točk: Q je razpolovišče CD , V presečišče AD in CN , ter W presečišče PM in QN . Pokazali bomo, da velja $OX : OP = 2 : 5$ in $OY : OQ = 2 : 7$.



Ker sta trikotnika NAV in CDV podobna in velja $NA = \frac{1}{2}CD$, dobimo $AV : VD = 1 : 2$, zato je $OV = \frac{1}{3}OA$. Trikotnik OVX je podoben trikotniku PCX , in ker je $PC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}OA$, dobimo $OV : PC = 2 : 3$, kar je enako tudi razmerju $OX : PX$. Zato velja $OX : OP = 2 : 5$.

Da pokažemo $OY : OQ = 2 : 7$, uporabimo podobnost trikotnikov OBY in WMY ter dejstvo, da je $WM = \frac{3}{4}OB$, od koder sledi $OY : YW = 4 : 3$. Ker velja še $OW = WQ$, zlahka dobimo $OY : OQ = 2 : 7$.

Ploščino trikotnika bomo označili z oglatimi oklepaji. Trikotnika OXY in OPQ imata skupni kot $\angle POQ$, zato

$$\frac{[OXY]}{[OPQ]} = \frac{OX}{OP} \cdot \frac{OY}{OQ} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}.$$

Poleg tega je trikotnik OPQ enakostraničen s stranico $\frac{\sqrt{3}}{2}$ stranice trikotnika ABO , zato je $[OPQ] = \frac{3}{4}[ABO]$. Od tod

$$\frac{[OXY]}{[ABO]} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}.$$

Ker je osenčeno območje sestavljeno iz šestih kopij OXY , šestkotnik pa iz šestih kopij ABO , velja enako razmerje tudi za njuni ploščini. Sklepamo, da je ploščina osenčenega dela $\frac{3}{35} \cdot 420 = 36$.

Naloga 53. Ana je mojstrica računanja, zato je vzela vse izraze oblike $\pm a \pm b \pm c \pm d$ (skupaj 16 izrazov za vse možne kombinacije predznakov) in jih med seboj zmnožila ter tako dobila polinom v spremenljivkah a , b , c , d . Nato je izpustila vse člene, v katerih je manjkala vsaj ena od spremenljivk. Kolikšna je bila vsota koeficientov preostalih členov?

Rezultat. -328

Rešitev. Naj bo P polinom iz besedila naloge. Če vsem štirim spremenljivkam priredimo vrednost 1, potem produkt vsebuje faktor $(1 + 1 - 1 - 1) = 0$, zato je vsota vseh koeficientov polinoma P enaka 0. Izračunajmo vsoto koeficientov izpuščenih monomov. To bomo storili z načelom vključitev in izključitev.

Za začetek pri računanju vsote koeficientov monomov, ki jim manjka vsaj ena spremenljivka, obravnavajmo primer, ko določeno spremenljivko postavimo na 0, nato pa seštejemo po vseh štirih možnostih; tako vsak monom, ki mu manjka neka spremenljivka, štejemo vsaj enkrat. Da bi sešteli koeficiente členov, ki ne vsebujejo (na primer) d , izračunamo vrednost P pri $a = b = c = 1$ in $d = 0$ ter dobimo

$$P(1, 1, 1, 0) = ((1 + 1 + 1)(1 + 1 - 1)(1 - 1 + 1)(1 - 1 - 1)(-1 + 1 + 1)(-1 + 1 - 1)(-1 - 1 + 1)(-1 - 1 - 1))^2 = 9^2 = 81.$$

Če seštejemo po vseh štirih možnostih izbire manjkajoče spremenljivke, dobimo $4 \cdot 81 = 324$, vendar pri tem vsak člen z natanko dvema spremenljivkama štejemo dvakrat, zato moramo odšteti $P(1, 1, 0, 0) = 0$ šestkrat, saj je parov spremenljivk šest. Nazadnje moramo prišteti nazaj člene z natanko eno spremenljivko, zato prištejemo $P(1, 0, 0, 0) = 1$ štirikrat. Skupaj tako dobimo vsoto $324 + 4 = 328$. Ker je skupna vsota vseh koeficientov polinoma P enaka 0, je vsota koeficientov komplementarne množice monomov (tistih, ki vsebujejo vse štiri spremenljivke) enaka -328 .

Naloga 54. Nika ima 9000 skladnih enakostraničnih trikotnikov. Koliko različnih štirikotnikov lahko sestavi iz vseh 9000 trikotnikov, tako da jih brez prekrivanja razporedi v en sam štirikotnik? Skladne štirikotnike štejemo kot enake.

Rezultat. 30

Rešitev. Vrh, ki nastane z zlaganjem enakostraničnih trikotnikov, ima lahko le kot velikosti 60° ali 120° . Ker je vsota notranjih kotov štirikotnika enaka 360° , morajo biti štirje koti enaki $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ in 120° . Sestavimo lahko dve vrsti štirikotnikov: paralelograme in enakokrake trapeze, odvisno od tega, ali sta enaka kota nasprotna ali sosednja.

Pri paralelogramih: če sta dolžini stranic a in b , je tak paralelogram sestavljen iz $2ab$ trikotnikov (lahko si ga predstavljamo kot ab manjših paralelogramov, vsak iz dveh trikotnikov). Zato iščemo pare a, b , za katere velja $ab = 4500$. Takih parov je 18 (ker ima število 4500 skupaj 36 deliteljev).

Pri trapezih opazimo, da jih lahko obravnavamo kot razliko dveh velikih enakostraničnih trikotnikov. Trikotnik s stranico dolžine n je sestavljen iz n^2 majhnih trikotnikov (če ga razdelimo na plasti, dobimo vsoto prvih n lihih števil). Zato želimo $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 9000$, kjer a predstavlja daljšo osnovnico trapeza, b pa krajšo. Spet iščemo pare deliteljev, vendar morata biti v tem primeru tako $a + b$ kot $a - b$ soda, da ima sistem enačb celoštevilsko rešitev. Število 9000 ima 24 sodih deliteljev, pri katerih je tudi kvocient sod (ustrezajo deliteljem števila $9000/4$), ti pa dajo 12 veljavnih parov $a + b$ in $a - b$, kar ustreza 12 veljavnim parom a in b .

Skupaj je torej možnih $18 + 12 = 30$ različnih štirikotnikov.

Naloga 55. Aleš je na okno obesil božično svetlobno verigo z 10 žarnicami, vendar žal niso svetile vse žarnice. Znano je, da med njimi ni štirih zaporednih žarnic, ki bi se izmenjevale med prižgano in ugasnjeno (torej prižgana, ugasnjena, prižgana, ugasnjena ali ugasnjena, prižgana, ugasnjena, prižgana). Koliko različnih razporeditev je možnih?

Rezultat. 548

Rešitev. Označimo prižgano žarnico z 1 in ugasnjeno z 0. Naloga je torej prešteti binarna zaporedja dolžine 10, ki ne vsebujejo podzaporedja 0101 ali 1010 kot strnjene bloka. Definirajmo preslikavo, ki zamenja vrednosti na vseh sodih mestih (vsak x_i nadomestimo z $1 - x_i$ za soda i , liha mesta pa pustimo nespremenjena). Če preslikavo uporabimo dvakrat, dobimo prvotno zaporedje, zato je to bijekcija. Poleg tega ta zamenjava spremeni izmenični blok 0101 ali 1010 v konstantni blok 0000 ali 1111 in obratno. Zato so iskana zaporedja v bijekciji z binarnimi zaporedji dolžine 10, ki ne vsebujejo štirih zaporednih enakih bitov, kar je lažje prešteti.

Naj bo B_n število binarnih zaporedij dolžine n , ki ne vsebujejo štirih zaporednih enakih bitov. Trdimo, da za $n > 3$ velja rekurzija $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$. Vzemimo veljavno zaporedje dolžine n in si oglejmo največji končni blok enakih bitov. Zaradi omejitve ima ta dolžino 1, 2 ali 3, in ti primeri so med seboj disjunktni. Če ima končni blok dolžino $k \in \{1, 2, 3\}$, potem z brisanjem zadnjih k bitov dobimo veljavno zaporedje dolžine $n - k$. Obratno pa lahko iz poljubnega veljavnega zaporedja dolžine $n - k$ dobimo natanko eno veljavno zaporedje dolžine n tako, da mu dodamo blok dolžine k , ki se začne z nasprotnim bitom od zadnjega bita danega zaporedja (najprej dodamo nasprotni bit, nato pa še $k - 1$ enakih bitov). Tako dobimo bijekcijo med zaporedji dolžine n in zaporedji dolžin $n - 1$, $n - 2$ ter $n - 3$, kar da zgornjo rekurzijo.

Za $n \leq 3$ omejitev nima vpliva, zato je $B_1 = 2$, $B_2 = 4$ in $B_3 = 8$ (vsa binarna zaporedja dolžine n so dovoljena). Z uporabo rekurzije $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$ postopoma dobimo $B_4 = 14$, $B_5 = 26$, $B_6 = 48$, $B_7 = 88$, $B_8 = 162$, $B_9 = 298$ in končno $B_{10} = 548$.

Naloga 56. Reši naslednjo enačbo za pozitivno celo število a :

$$\left(\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2} \right)^5 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \right)^2.$$

Rezultat. 2525

Rešitev. Ker velja

$$\frac{23 + \sqrt{23^2 - 4}}{2} = \frac{23 + 5\sqrt{21}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^2,$$

se problem reducira v

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \left(\frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^5.$$

Problem se nadalje reducira v

$$\begin{aligned} a + \sqrt{a^2 - 4} &= \frac{5^5 + \binom{5}{2} \cdot 5^3 \cdot 21 + \binom{5}{4} \cdot 5^1 \cdot 21^2}{16} + \frac{\binom{5}{1} \cdot 5^4 \cdot \sqrt{21} + \binom{5}{3} \cdot 5^2 \cdot \sqrt{21}^3 + \sqrt{21}^5}{16} \\ &= \frac{3125 + 10 \cdot 2625 + 25 \cdot 441}{16} + \frac{(5^5 + 21 \cdot 250 + 21^2) \cdot \sqrt{21}}{16} \\ &= 2525 + 551 \cdot \sqrt{21}. \end{aligned}$$

S primerjavo racionalnih in iracionalnih komponent kot možnega kandidata za rešitev dobimo $a = 2525$. Za preverjanje rešitve zadostuje, da vstavimo $a = 2525$ v $a^2 - 4$, kar da $2525^2 - 4 = 6375621 = 551^2 \cdot 21$, kot je bilo zahtevano. To je tudi edina možna rešitev: za $a \geq 2$ je izraz $a + \sqrt{a^2 - 4}$ strogo naraščajoč (oba člena rasteta z a), zato ima enačba lahko največ eno pozitivno celoštevilsko rešitev za a .

Alternativna rešitev Naj bo $\alpha = \frac{1}{2}(23 + \sqrt{23^2 - 4})$. Ker je α koren enačbe $t^2 - 23t + 1 = 0$, katerega drugi koren je α^{-1} , imamo $\alpha + \alpha^{-1} = 23$.

Zapišimo $\beta = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4})$. Potem je β koren enačbe $t^2 - at + 1 = 0$, zato velja $\beta + \beta^{-1} = a$. Ker iščemo pozitivne vrednosti a , mora biti tudi β pozitivna.

Dana enačba je $\alpha^5 = \beta^2$. Naj bo $x = \beta^{1/5}$ (torej $x > 0$). Potem $x^2 = \alpha$ in torej $x^2 + x^{-2} = 23$. Postavimo $y = x + x^{-1}$; $y > 0$ in $y^2 = x^2 + x^{-2} + 2 = 25$, zato je $y = 5$.

Cilj je najti $a = x^5 + x^{-5}$. Razširimo:

$$y^5 = (x + x^{-1})^5 = (x^5 + x^{-5}) + 5(x^3 + x^{-3}) + 10(x + x^{-1}),$$

torej

$$a = y^5 - 5(x^3 + x^{-3}) - 10y.$$

Ostane še izraziti $x^3 + x^{-3}$ preko y :

$$y^3 = (x + x^{-1})^3 = (x^3 + x^{-3}) + 3(x + x^{-1}),$$

od tod

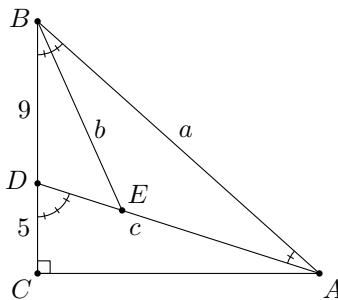
$$x^3 + x^{-3} = y^3 - 3y.$$

Vstavimo v prejšnjo enačbo: $a = y^5 - 5y^3 + 5y$. Ob upoštevanju $y = 5$, dobimo $a = 2525$.

Naloga 57. V pravokotnem trikotniku ABC s pravim kotom pri C leži na stranici BC točka D , tako da je dolžina daljice BD enaka 9 in dolžina daljice DC enaka 5. Naj velja še $\angle ADC = 3\angle BAD$. Določite dolžino stranice AB .

Rezultat. 21

Rešitev. Neposredno z obravnavo kotov dobimo $\angle ABD = 2\angle DAB$. Narišemo razpolovišče kota $\angle ABD$, ki seka daljico AD v točki E . Ker daljica BE razpolavlja kot $\angle ABD$, velja $\angle ABE = \angle EBD = \angle DAB$. Zato je $|AE| = |EB|$, in trikotnika DBE in DAB sta podobna. Iz podobnosti sledi $|DB| : |DA| = |DE| : |DB| = |BE| : |AB|$.



Naj bo $|AB| = a$, $|AE| = |EB| = b$ in $|AD| = c$. Potem je $|DE| = c - b$, in iz razmerij dobimo

$$\frac{9}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c-b}{9}.$$

Od tod sledi $c^2 = bc + 81$ in $bc = 9a$, kar da $c^2 = 9a + 81$.

Ker sta trikotnika ACD in ABC pravokotna pri C , imamo

$$|AC|^2 = |AB|^2 - |BC|^2 = a^2 - (9 + 5)^2 = a^2 - 196,$$

in tudi

$$|AC|^2 = |AD|^2 - |DC|^2 = c^2 - 25.$$

Izenačimo ti dve enačbi in uporabimo $c^2 = 9a + 81$ ter dobimo

$$a^2 - 196 = 9a + 56 \quad \text{ali} \quad a^2 - 9a - 252 = 0.$$

Edina pozitivna rešitev je $a = 21$.