Aufgabe 1. Wenn das arithmetische Mittel von vier verschiedenen positiven ganzen Zahlen gleich 10 ist, was ist dann der größtmögliche Wert einer dieser ganzen Zahlen?

Ergebnis: 34

Lösungsweg: Um die größtmögliche ganze Zahl zu erhalten, müssen die drei anderen ganzen Zahlen so klein wie möglich sein. Da die Zahlen unterschiedlich sein müssen, sind die kleinsten drei möglichen Werte 1, 2 und 3. Damit das arithmetische Mittel gleich 10 ist, d.h. die Summe der Zahlen gleich $4 \cdot 10 = 40$ ist, lautet die gesuchte Zahl $40 - (1 + 2 + 3) = 34$.

Aufgabe 2. Wenn bekannt ist, dass 4 eine Nullstelle der quadratischen Gleichung $x^2 + mx + 2020 = 0$ mit einer ganzen Zahl m ist, wie lautet dann die zweite Nullstelle?

Ergebnis: 505

Lösungsweg: Da 4 eine Nullstelle ist, ergibt sich $4^2 + 4m + 2020 = 0$ und hieraus $m = -509$, so dass die Gleichung nun $x^2 - 509x + 2020 = 0$ lautet. Diese hat die Lösungen 4 und 505.
Eine weitere Lösungsmöglichkeit ergibt sich durch folgenden Ansatz: Wenn s die andere Lösung der gegebenen Gleichung ist, dann gilt

$$x^2 + mx + 2020 = (x - 4)(x - s) = x^2 - 4x - sx + 4s.$$

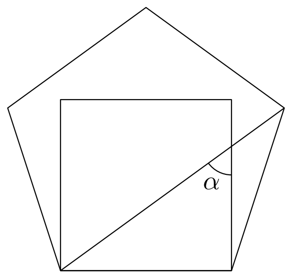
Durch Koeffizientenvergleich erhält man $4s = 2020$ und somit $s = 505$.

Aufgabe 3. Die Zahl 95 ergibt bei Division durch eine positive ganze Zahl N den Rest 4. Was ist der kleinstmögliche Wert für N?

Ergebnis: 7

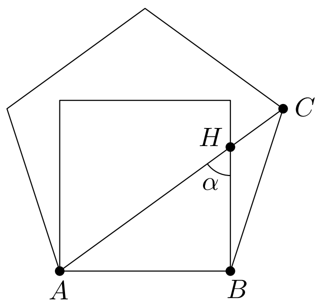
Lösungsweg: Da N größer als 1 ist und $95 - 4 = 91 = 7 \cdot 13$ teilt, ist der kleinstmögliche Wert 7.

Aufgabe 4. Auf die Art und Weise wie in der Abbildung zu sehen ist, liegt ein Quadrat in einem regelmäßigen Fünfeck. Bestimme den Winkel α in Grad.



Ergebnis: 54°

Lösungsweg: Benenne die Punkte wie in der folgenden Abbildung:



Bekanntlich beträgt die Größe der Innenwinkel des regulären Fünfecks 108°. Nach Vorgabe ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig mit Basis AC und $\angle CBA = 108°$, woraus nach dem Basiswinkelsatz

$$\angle BAH = \angle BAC = \tfrac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$$

folgt. Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABH$, welches bei B einen rechten Winkel besitzt, erhält man nun

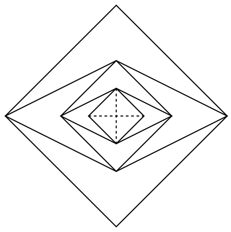
$$\alpha = \angle AHB = 180° - 90° - 36° = 54°.$$

Aufgabe 5. Eine Bushaltestelle wird von drei Buslinien A, B und C angefahren, die im Abstand von 12, 10 und 8 Minuten von der Haltestelle abfahren. Als Brian an der Haltestelle vorbei geht, bemerkt er, dass die drei Busse der drei Linien gleichzeitig von der Haltestelle wegfahren. Nach wie vielen Minuten von diesem Zeitpunkt an wiederholt sich das zum ersten Mal?

Ergebnis: 120

Lösungsweg: Die gesuchte Zahl muss ein Vielfaches aller drei Perioden sein. Da wir nach der niedrigsten Zahl suchen, ist die Antwort das kleinste gemeinsame Vielfache von 12, 10 und 8, also 120.

Aufgabe 6. Die Rautenblume wächst nach folgendem Muster: In der Mitte ist eine quadratische Blüte mit zwei Diagonalen der Länge 1. Dann verdoppelt sich die horizontale Diagonale und es entsteht eine neue Vierecksblüte. Danach verdoppelt sich die vertikale Diagonale, es entsteht wieder eine neue Vierecksblüte. Diese Art des Wachstums setzt sich fort, bis eine Blume mit fünf Vierecken entstanden ist. Bestimme den Umfang der äußersten, also fünften, Vierecksblüte.



Ergebnis: $8\sqrt{2}$

Lösungsweg: Die fünfte Blüte ist ein Quadrat mit Diagonalen der Länge 4. Also hat das Quadrat die Seitenlänge $2\sqrt{2}$ und der Umfang beträgt somit $8\sqrt{2}$.

Aufgabe 7. Ein Botaniker pflanzte zwei kleine Pflänzchen P_1 und P_2 der gleichen Sorte und maß ihre Wuchshöhen. Nach einer Woche, in der die beiden Pflanzen mit demselben Prozentsatz in die Höhe gewachsen waren, maß er wieder und stellte fest, dass P_1 genau so groß war wie P_2 eine Woche zuvor und dass P_2 um 44% größer war als P_1 eine Woche zuvor. Um wie viel Prozent wuchsen die Pflanzen in einer Woche in die Höhe?

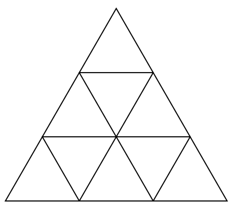
Ergebnis: 20%

Lösungsweg: Es seien P_1 und P_2 die ursprünglichen Wuchshöhen der Pflanzen bei der ersten Messung. Da beide während der Woche mit demselben Prozentsatz in die Höhe wuchsen, können ihre Wuchshöhen durch $k \cdot P_1$ und $k \cdot P_2$ mit einer reellen Zahl $k > 1$ ausgedrückt werden, so dass $(k-1) \cdot 100\%$ die gesuchte Prozentangabe ist. Aus den Messungen folgt

$$k \cdot P_1 = P_2,$$
$$k \cdot P_2 = 1.44 \cdot P_1.$$

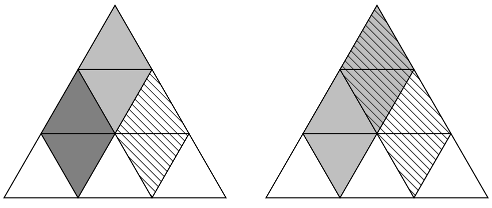
Setzt man nun P_2 in die zweite Gleichung ein und kürzt P_1, so erhält man $k^2 = 1.44$, also $k = 1.2$. Das bedeutet, dass die beiden Pflanzen in einer Woche um 20% wuchsen.

Aufgabe 8. Wie viele Parallelogramme sind auf dem Bild zu sehen?



Ergebnis: 15

Lösungsweg: Für jeden der drei Eckpunkte des großen Dreiecks gibt es drei Rauten, die in Richtung des Eckpunkts zeigen und zwei 1×2 Parallelogramme, die diesen Eckpunkt mit dem Dreieck teilen. Das Bild zeigt diese beiden Arten von Parallelogrammen für den oberen Eckpunkt.



Da keine anderen Arten von Parallelogrammen in der Abbildung vorhanden sind, gibt es insgesamt $3 \cdot (2+3) = 15$ Parallelogramme.

Aufgabe 9. Ein Reiseunternehmen bietet Busse für 27 und für 36 Reisende. Eine Reisegruppe besteht aus 505 Personen und möchte mit Bussen dieses Unternehmens reisen. Das Unternehmen hat die Busse so ausgewählt, dass die Anzahl N an leeren Sitzplätzen so klein wie möglich ist. Bestimme N.

Ergebnis: 8

Lösungsweg: Gesucht ist die kleinste Zahl $s \geq 505$, die in der Form $s = 27x + 36y$ geschrieben werden kann, wobei x und y die Anzahl der Busse für 27 bzw. für 36 Reisende darstellen. Da der größte gemeinsame Teiler von 27 und 36 gleich 9 ist, muss s ein Vielfaches von 9 sein. Die kleinste Zahl, die ein Vielfaches von 9 ist und mindestens 505 ist, ist 513. Wegen $513 = 27 \cdot 3 + 36 \cdot 12$ ist die kleinste Anzahl an leeren Sitzen $513 - 505 = 8$.

Aufgabe 10. Ein Tierfreund kaufte zwei identische Bilder eines Wolfes und vier identische Bilder eines Fuchses. Er möchte sie nebeneinander an sechs Nägeln an einer Wand in seinem Wohnzimmer aufhängen. Außerdem möchte er ihre Reihenfolge jeden Tag so ändern, dass die resultierende Folge von Bildern anders aussieht als die Folgen an allen vorhergehenden Tagen. Zusätzlich möchte er nicht, dass die beiden Bilder des Wolfes nebeneinander hängen. Was ist die höchste Anzahl von Tagen, für die er das tun kann?

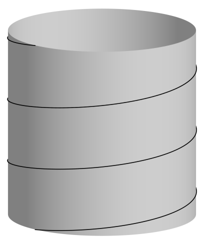
Ergebnis: 10

Lösungsweg: Mit anderen Worten, es ist die Anzahl von unterschiedlichen Folgen der Bilder gesucht, bei denen die beiden Wölfe nicht nebeneinander hängen. Der linke Wolf kann an die Positionen 1, 2, 3 und 4 von 6 gehängt werden. Für jede dieser Positionen kann der rechte Wolf an den folgenden Positionen aufgehängt werden:

$$\begin{aligned} 1 &: 3, 4, 5, 6 \\ 2 &: 4, 5, 6 \\ 3 &: 5, 6 \\ 4 &: 6 \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es also 10 Möglichkeiten, die Bilder wie gewünscht aufzuhängen.

Aufgabe 11. Ein Zylinder mit Höhe 18 cm und Umfang 8 cm ist von zuunterst bis zuoberst exakt drei Mal eng von einer Schnur umwickelt. Der Startpunkt der Schnur liegt dabei am unteren Rand des Zylinders, der Endpunkt am oberen Rand direkt über dem Startpunkt. Wie lang ist die Schnur in cm?



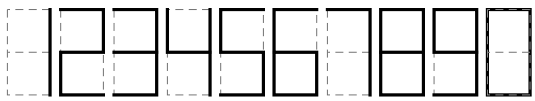
Ergebnis: 30

Lösungsweg: Die Abwicklung des Zylinders zeigt, dass die Schnur mit jeder Umwicklung 6 cm höher steigt, während sie in der Horizontalen einen Zylinderumfang, also 8 cm, zurücklegt. Nach dem Satz des Pythagoras ist demnach das für eine Umrundung benötigte Stück Schnur

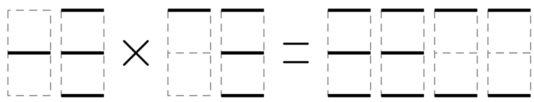
$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Zentimeter lang. Da die Schnur den Zylinder drei Mal umrundet, ist ihre Gesamtlänge 30 cm.

Aufgabe 12. Ein funktionstüchtiger Taschenrechner zeigt die Ziffern wie folgt an:



Adams Taschenrechner ist aus einem Fenster gefallen und zeigt jetzt nur noch die waagrechten Linien an. Um zu überprüfen, ob der Taschenrechner immer noch richtig rechnet, führt Adam die folgende Rechnung durch:



Wie lautet die Summe aller Ziffern, die in dieser Rechnung vorkommen?

Ergebnis: 33

Lösungsweg: Die letzten beiden Ziffern müssen Nullen sein. Außerdem ist die erste Ziffer des ersten Faktors 4 und die erste Ziffer des zweiten Faktors 7. Da das Produkt durch 100 und somit durch 25 teilbar ist, muss einer der Faktoren durch 25 oder müssen beide Faktoren durch 5 teilbar sein. Es gibt kein zweistelliges Vielfaches von 25, das mit 4 beginnt. Deshalb muss der zweite Faktor durch 5 teilbar sein und somit 75 ergeben. Da das Produkt außerdem durch 4 teilbar ist, muss der erste Faktor durch 4 teilbar sein und beträgt somit 48. Die Rechnung lautet nun $48 \times 75 = 3600$ und die Summe aller vorhandenen Ziffern beträgt somit 33.

Aufgabe 13. Sandi musste zwei Zahlen addieren, aber sie schrieb versehentlich eine zusätzliche Ziffer ans Ende einer der Zahlen. Als Ergebnis erhielt sie die Summe 44444 anstelle von 12345. Wie lautet die kleinere der beiden Zahlen, die Sandi ursprünglich addieren wollte?

Ergebnis: 3566

Lösungsweg: Seien x und y die beiden Zahlen und c eine Ziffer, die Sandi beispielsweise an die Zahl x angehängt hat. Dann gilt

$$x + y = 12345 \quad \text{und} \quad (10x + c) + y = 44444,$$

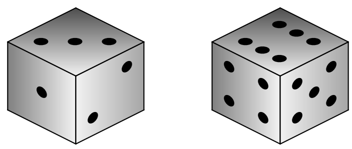
und somit

$$9x + c = 32099.$$

Da $32099 - c$ durch 9 teilbar sein muss, ergibt sich $c = 5$. Folglich ist $x = 3566$ und $y = 8779$. Die gesuchte Zahl ist demnach 3566.

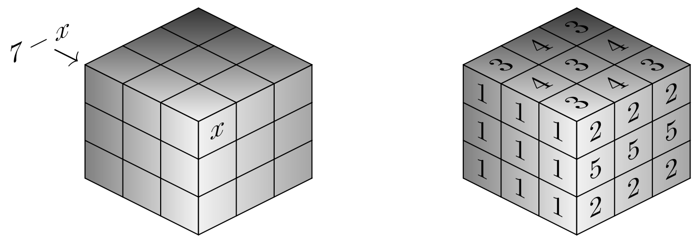
Aufgabe 14. Peter hat 27 normale Spielwürfel bekommen und soll sie zu einem Würfel der Größe $3 \times 3 \times 3$ zusammenkleben, so dass je zwei aneinander geklebte Seiten die gleiche Augenzahl haben. Wie groß kann die Summe der auf der Oberfläche dieses $3 \times 3 \times 3$-Würfels sichtbaren Augen maximal sein?

Hinweis: Hier sieht man zwei Ansichten eines normalen Spielwürfels. Die Augenzahlen sind auf den Seitenflächen so angeordnet, dass sie sich auf gegenüber liegenden Seiten zu 7 ergänzen.

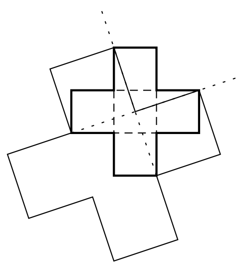


Ergebnis: 189

Lösungsweg: Die wesentliche Feststellung ist, dass die Augen auf sich entsprechenden, gegenüber liegenden Teilfeldern der Seiten des großen Würfels, welche die Seiten eines Spielwürfels sind, immer zu 7 ergänzen, wie man in der linken Abbildung sehen kann. Der große Würfel besitzt 27 Paare an Teilfeldern. Egal wie Peter also nach Vorschrift die Spielwürfel zusammenklebt, wird die Summe der sichtbaren Augen stets $27 \cdot 7 = 189$ sein. Eine mögliche Anordnung der Spielwürfel ist in der rechten Abbildung zu sehen.

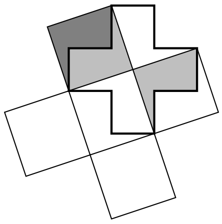


Aufgabe 15. Antonia zeichnet ein kleines X-Pentomino, das bekanntlich aus fünf kongruenten Quadraten zusammengesetzt ist. Dann zeichnet sie zwei senkrecht aufeinander stehende Diagonalen als gepunktete Geraden ein. Schließlich konstruiert sie ein größeres X-Pentomino, von dem einige Seiten auf den diagonalen Geraden des kleinen Pentominos liegen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte von Antonias großem zu ihrem kleinen Pentomino.



Ergebnis: 5 : 2.

Lösungsweg: Die Diagonalen teilen das kleine X-Pentomino in vier kongruente Teile. Zwei solcher Teile können so zusammengesetzt werden, dass sie genau ein Quadrat des großen Pentominos ergeben. Also kann das große Pentomino in zehn solche Teile zerlegt werden und das gesuchte Verhältnis ist $10 : 4 = 5 : 2$.



Aufgabe 16. Wie viele Palindrome zwischen 10^3 und 10^7 haben eine gerade Ziffernsumme?

Hinweis: Ein *Palindrom* ist eine ganze Zahl, die von links und rechts gelesen denselben Wert hat. Beispielsweise ist 12321 ein Palindrom.

Hinweis: Ziffernsumme bedeutet Quersumme.

Ergebnis: 5940

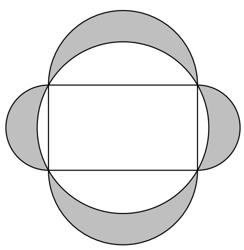
Lösungsweg: Alle Zahlen zwischen 10^3 und 10^4 haben eine gerade Anzahl von Ziffern, daher ist die Ziffernsumme jedes solchen Palindroms gerade. Darüber hinaus sind die Palindrome aus diesem Bereich genau die Zahlen der Form $\overline{abba}$, wobei a, b beliebige Ziffern sind mit a ungleich Null. Somit befinden sich in diesem Bereich genau 90 Palindrome. In ähnlicher Weise folgt, dass es genau 900 Palindrome zwischen 10^5 und 10^6 gibt, wobei auch hier die Ziffernsumme jedes Palindroms gerade ist.
Die Palindrome zwischen 10^4 und 10^5 haben die Form $\overline{abcba}$ mit Ziffern a, b und c, wobei a ungleich Null ist. Hier ist die Ziffernsumme genau dann gerade, wenn c gerade ist. Daher gibt es 9 Möglichkeiten für a, 10 für b und 5 für c, was $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ gesuchte Palindrome im betrachteten Bereich ergibt. Eine ähnliche Überlegung gilt für den Bereich von 10^6 bis 10^7. Sie liefert in diesem Bereich 4500 Palindrome mit gerader Ziffernsumme.
Insgesamt haben von allen Palindromen zwischen 10^3 und 10^7 genau $90 + 900 + 450 + 4500 = 5940$ eine gerade Ziffernsumme.

Aufgabe 17. Ein Kinderchor besteht aus sechzig Kindern: Zwanzig Kinder sind der Stimmlage Sopran zugeteilt, zwanzig der Stimmlage Mezzosopran und zwanzig der Stimmlage Alt. In jeder der drei Stimmlagen gibt es allerdings sechs Kinder, die eine so gut ausgebildete Stimme haben, dass sie alle drei Stimmlagen beherrschen. Die restlichen Kinder können jeweils nur in der eigenen Stimmlage eingesetzt werden. Bestimme die größte Anzahl S, für die Folgendes gilt: Wann immer S Kinder gleichzeitig krank werden und nicht singen können, so können die verbleibenden Kinder sich in den einzelnen Stimmlagen umordnen, dass sie einen Chor bilden, in dem in jeder der drei Stimmlagen mindestens zehn Kinder singen.

Ergebnis: 22

Lösungsweg: Fallen zum Beispiel alle Kinder aus, die Alt singen, und zusätzlich drei der Kinder, die alle Stimmlagen beherrschen, so bleiben nur neun Kinder übrig, die Alt singen könnten. Somit gilt $S < 23$.
Es wird schwieriger, einen Chor zu formen, wenn ein Kind krank ist, das alle Stimmlagen beherrscht, als wenn es nur in der eigenen Stimmlage eingesetzt werden kann. Fallen also 22 Kinder aus, so kann man annehmen, dass unter ihnen auch alle 18 Kinder sind, die alle Stimmlagen beherrschen. Damit fallen weitere 4 Kinder aus, die genau in einer Stimmlage singen können. Selbst wenn alle aus derselben Stimmlage sind, bleiben in dieser – und klarerweise auch in den anderen beiden – mindestens zehn Kinder übrig. Somit gilt $S \geq 22$ und zusammen mit der obigen Überlegung $S = 22$.

Aufgabe 18. Ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 4 wird mit seinem Umkreis gezeichnet. Außerdem werden – wie in der Abbildung dargestellt – jeweils 4 Halbkreise außen an die Rechtecksseiten aufgesetzt. Wie groß ist die Fläche des grau schattierten Bereichs, der aus jenen Punkten der Halbkreise besteht, die nicht innerhalb des Umkreises liegen?



Ergebnis: 12

Lösungsweg: Der Satz des Pythagoras beschreibt die Beziehung der Flächeninhalte der Quadrate über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Die gleiche Beziehung gilt für den Zusammenhang der Flächeninhalte von Halbkreisen über den zwei Seiten des Rechtecks und seiner Diagonale. Damit ergibt sich, dass die Summe der Flächeninhalte der Halbkreise über den Seiten des Rechtecks gleich groß ist wie der Flächeninhalt des ursprünglichen Kreises. Eine einfache Beobachtung ergibt dann, dass zwei benachbarte Grauzonen gemeinsam den gleichen Flächeninhalt haben wie das halbe Rechteck. Daher ist der Flächeninhalt der gesamten grauen Fläche gleich der des Rechtecks und damit $3 \cdot 4 = 12$.

Aufgabe 19. Bestimme die größte dreistellige Primzahl p_1 mit der Eigenschaft, dass die Ziffernsumme von p_1 eine zweistellige Primzahl p_2 ist, deren Ziffernsumme eine einstellige Primzahl p_3 ist.

Hinweis: Ziffernsumme bedeutet Quersumme.

Ergebnis: 977

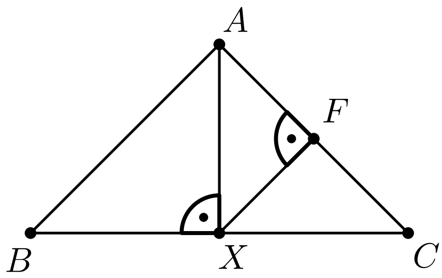
Lösungsweg: Die Ziffernsumme einer dreistelligen Zahl ist höchstens $9+9+9 = 27$. Es gibt fünf zweistellige Primzahlen, die nicht größer als 27 sind, nämlich 11, 13, 17, 19 und 23. Die Ziffernsummen dieser Primzahlen sind 2, 4, 8, 10 und 5. Also gibt es für p_2 nur die Möglichkeiten $p_2 = 11$ oder $p_2 = 23$. Die größte Primzahl mit Ziffernsumme 23 ist 977. Wegen $977 > 911$, welches die größte dreistellige Primzahl mit Ziffernsumme 11 ist, ist gesuchte Zahl 977.

Aufgabe 20. Im Dreieck $\triangle ABC$, das die Bedingung $\overline{AB} = \overline{AC}$ erfüllt, gibt es eine Streckensymmetrale, die eine der Höhen in einem einzigen Punkt trifft, der auf dem Rand des Dreiecks liegt. Bestimme alle möglichen Größen des Winkels $\angle ACB$ in Grad.

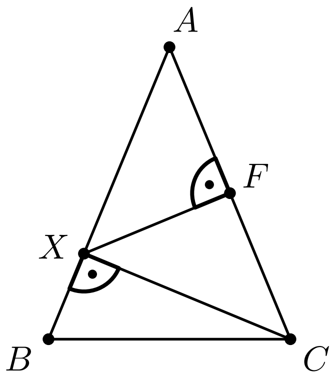
Hinweis: Streckensymmetrale bedeutet Mittelsenkrechte.

Ergebnis: $45°$, $67.5°$

Lösungsweg: Es sei X ein Punkt auf dem Rand des Dreiecks, der Schnittpunkt einer Streckensymmetrale mit einer Höhe ist. Der Mittelpunkt von AC sei mit F bezeichnet. Die Höhe, die durch X geht, muss diejenige sein, die auf die Seite gefällt wird, auf der X liegt. Wir untersuchen nun alle möglichen Orte von X.
Wenn X auf der Seite BC liegt, muss X der Schnittpunkt der Höhe durch A mit BC sein. Da diese Höhe gleichzeitig Streckensymmetrale von BC ist, erfüllen diese Höhe und diese Streckensymmetrale die gestellte Bedingung nicht. Aus der Symmetrie des Dreiecks folgt, dass sich in dieser Situation tatsächlich die Streckensymmetralen von AB und AC in einem einzigen Punkt schneiden, nämlich in X.



Da FX die Streckensymmetrale von AC ist, ist das Dreieck $\triangle AXC$ gleichschenklig. Aus $\angle CXA = 90°$ und dem Basiswinkelsatz folgt $\angle ACB = \angle ACX = 45°$.
Wenn X auf der Seite AB liegt, dann muss X der Schnittpunkt der Höhe durch C mit einer Streckensymmetralen sein. Ist dies die Streckensymmetrale von BC, so muss $X = A$ sein. In diesem Fall besitzt das Dreieck einen rechten Winkel bei A und die Antwort ist wie gerade eben $\angle ACB = 45°$.
Sei nun X der Schnittpunkt der Höhe von C mit der Streckensymmetrale von AC.



Wie im vorherigen Fall ist das Dreieck $\triangle AXC$ gleichschenklig und rechtwinklig mit einem rechten Winkel bei X. Nach dem Basiswinkelsatz folgt $\angle BAC = \angle XAC = 45°$. Es ergibt sich in diesem Fall

$$\angle ACB = \tfrac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 67.5°$$

und der Fall, dass X auf AC liegt, ist völlig symmetrisch.

Aufgabe 21. Bestimme die Summe aller positiven Teiler von 3599.

Hinweis: Die positiven Teiler umfassen auch 1 und 3599.

Ergebnis: 3720

Lösungsweg: Es ist

$$3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1 = (60+1)(60-1) = 59 \cdot 61.$$

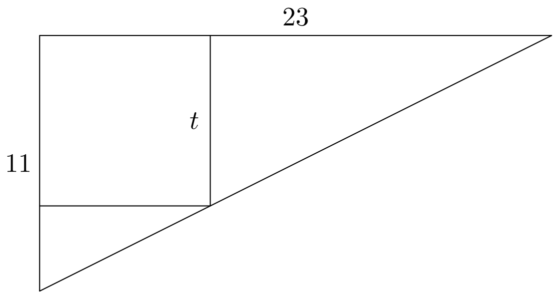
Da 59 und 61 Primzahlen sind, ist die gesuchte Summe $1 + 59 + 61 + 3599 = 3720$.

Aufgabe 22. Die drei Schwestern Meehni, Wimlah und Gunnedoo grillen Würstel am Lagerfeuer. Meehni kaufte 17 Würstel, Wimlah 11, Gunnedoo keine. Nachdem sie alle Würstel aufgegessen haben, beschließen sie, die Kosten gleichmäßig auf alle drei aufzuteilen. Wie viele Euro soll Meehni bekommen, wenn Gunnedoo ihren Schwestern insgesamt 28 Euro gibt, um ihre Schulden zu begleichen?

Ergebnis: 23

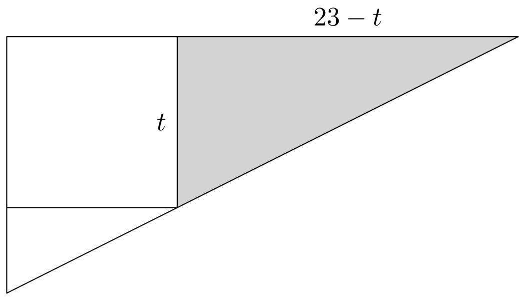
Lösungsweg: Gunnedoo zahlt genau ein Drittel der Gesamtkosten, also kosten alle Würstel zusammen $28 \cdot 3 = 84$ Euro. Meehni bezahlte für 17 der 28 Würstel, also $84 \cdot 17/28 = 51$ Euro. Da die Schwestern die Kosten gleichmäßig aufteilen, hätte sie nur 28 Euro bezahlen sollen. Also sollte sie $51 - 28 = 23$ Euro bekommen.

Aufgabe 23. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Längen 11 und 23. Von einem Quadrat mit Seitenlänge t liegen zwei Seiten auf den Katheten und eine Ecke liegt auf der Hypotenuse, so wie in der Abbildung dargestellt. Bestimme t.



Ergebnis: $\frac{253}{34}$

Lösungsweg: Das graue Dreieck in der Abbildung ist ebenfalls rechtwinklig und hat mit dem großen Dreieck einen Winkel gemeinsam, weshalb die beiden Dreiecke ähnlich sind.



Das Seitenverhältnis der Katheten ist also in beiden Dreiecken gleich und man erhält die Gleichung

$$\frac{23 - t}{t} = \frac{23}{11}$$

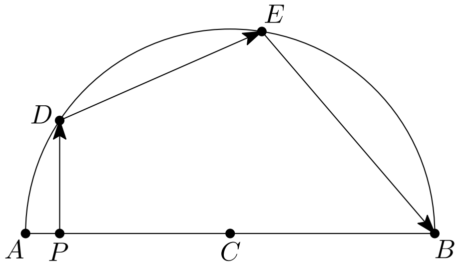
mit der Lösung $t = 253/34$.

Aufgabe 24. Welche ist die kleinste positive ganze Zahl n, für die das Produkt $11 \cdot 19 \cdot n$ gleich dem Produkt aus drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist?

Ergebnis: 840

Lösungsweg: Da 11 und 19 Primzahlen sind, muss eine der drei aufeinander folgenden Zahlen durch 11 teilbar sein und eine durch 19, wobei diese nicht unbedingt verschieden sein müssen. Da das Produkt positiv ist, müssen auch alle drei aufeinander folgenden Zahlen positiv sein. Also sucht man nach möglichst kleinen Vielfachen von 11 und 19, die sich um höchstens 2 unterscheiden. Die kleinsten solchen Vielfachen sind $3 \cdot 19 = 57$ und $5 \cdot 11 = 55$, so dass man nur noch die dritte Zahl 56 ergänzen muss, um das Produkt $55 \cdot 56 \cdot 57 = 11 \cdot 19 \cdot 840$ zu erhalten. Die gesuchte Zahl ist also 840.

Aufgabe 25. Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt C und einem Durchmesser AB. Ein Punkt P auf AB erfüllt folgende Bedingung:
Ein Laserstrahl startet in P wie in der Abbildung senkrecht zu AB in Richtung Halbkreis, wird an diesem in den Punkten D und E nach dem Gesetz der Reflexion (der Einfallswinkel ist genau so groß ist wie der Ausfallswinkel) reflektiert, was hier $\angle PDC = \angle CDE$ und $\angle DEC = \angle CEB$ bedeutet, und trifft dann auf den Punkt B. Bestimme den Winkel $\angle DCP$ in Grad.



Ergebnis: 36°

Lösungsweg: Bezeichne den Winkel $\angle PDC$ mit α. Weil D und E beide auf einem Kreis um den Punkt C liegen, ist das Dreieck $\triangle DCE$ gleichschenklig mit Basis DE. Aus dem Basiswinkelsatz und der gegebenen Gleichheit $\alpha = \angle CDE$ folgt $\angle DEC = \alpha$. Mit dem analogen Argument für das gleichschenklige Dreieck $\triangle BEC$ zusammen mit der Winkelgleichheit $\alpha = \angle CEB$ ergibt sich nun $90° + 5\alpha = 360°$ als Innenwinkelsumme im Viereck $PBED$. Also ist $\alpha = 54°$ und man erhält den gesuchten Winkel über die Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle PCD$ zu $\angle DCP = 90° - \alpha = 36°$.

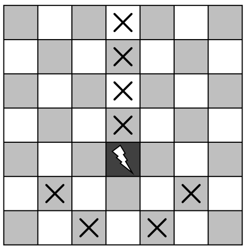
Alternativer Lösungsweg: Weil D und E beide auf einem Kreis um den Punkt C liegen, ist das Dreieck $\triangle DCE$ gleichschenklig mit Basis DE. Wegen der ersten gegebenen Winkelgleichheit $\angle PDC = \angle CDE$ ist das Dreieck $\triangle CDP$ kongruent zur Hälfte von Dreieck $\triangle CDE$. Bezeichnet man mit M den Mittelpunkt von CD, so gilt $\triangle CDP \cong \triangle CEM$. Benutzt man die zweite gegebene Gleichheit von Winkeln, so erhält man weiter $\angle BCE = \angle ECD = 2\angle DCP$. Da die drei Winkel $\angle BCE$, $\angle ECD$ und $\angle DCP$ zusammen einen gestreckten Winkel bilden, folgt $5\angle DCP = 180°$ und daraus $\angle DCP = 36°$.

Aufgabe 26. In einem Land gibt es 2020 Städte, die mit $1, 2, 3, \ldots, 2020$ bezeichnet werden. Der Präsident beschließt ein Eisenbahnnetz aufzubauen. Um Geld zu sparen, werden nur Direktverbindungen zwischen zwei Städten a und b mit $a < b$ gebaut, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Nummer b ist ein Vielfaches von a und es gibt kein c mit $a < c < b$, so dass c ein Vielfaches von a und b ein Vielfaches von c ist. Mit wie vielen anderen Städten hat die Stadt 42 eine Verbindung?

Ergebnis: 18

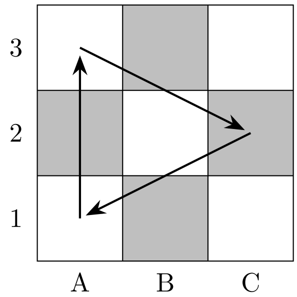
Lösungsweg: Wenn zwei Städte verbunden sind, muss die mit der größeren Nummer eine Primfaktorzerlegung haben, die genau eine Primzahl mehr enthält als die kleinere. Dieselben Primzahlen können die Städte nicht enthalten, sonst wären sie gleich. Zwei oder mehr Primzahlen Unterschied kann auch nicht sein, denn gäbe es zwei nicht notwendigerweise verschiedene Primzahlen p, q mit verbundenen a und $b = a \cdot p \cdot q$, so wäre die zweite Bedingung verletzt.
Die Zahl 42 hat die Primfaktorzerlegung $2 \cdot 3 \cdot 7$. Deswegen gibt es drei mit 42 verbundene Städte, die eine kleinere Nummer haben, und zwar mit den Primfaktorzerlegungen $2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$ und $3 \cdot 7$.
Mit 42 verbundene, größere Städte haben eine Nummer, die als $42 \cdot p$ für eine Primzahl p geschrieben werden kann. Die größtmögliche solche Primzahl mit $42 \cdot p < 2020$ ist 47. Also ist p aus $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. Das sind 15 weitere Städte. Zusammen mit den drei kleineren ergibt sich eine Gesamtsumme von 18.

Aufgabe 27. Marek hat eine Schachfigur erfunden, die er *Blitzer* nennt. Wie in der Abbildung gezeigt, kann der Blitzer vorwärts bewegt werden wie ein Turm und rückwärts wie ein Springer. Marek stellt den Blitzer nun auf das mittlere Feld eines anderen Spielbretts der Dimension 3×3 und bewegt ihn 2020 Mal gemäß den Zugregeln. Wie oft kann der Blitzer höchstens dasselbe Feld besuchen? Das Startfeld zählt nicht als Besuch.



Ergebnis: 673

Lösungsweg: Durch die Zugregeln ist klar, dass der Blitzer nicht von einem Feld auf ein anderes und dann direkt wieder zurück auf das Startfeld bewegt werden kann. Hingegen kann er in drei Zügen im Kreis bewegt werden:



Wenn der Blitzer also auf Feld A1, A3 oder C2 gesetzt wird, kann er zu „kreisen“ beginnen und jedes dieser Felder in jedem dritten Zug besuchen.
Wenn der Blitzer auf Feld B2 startet, ist der einzig mögliche Startzug eine Turmbewegung nach B3. Von dort kann er mit einer Springerbewegung nach A1 oder C1 gelangen. Also kann A1 in zwei Zügen von B2 aus erreicht werden. Weil das Feld B2 weder von der Position A1 noch von C1 aus in einem Zug erreichbar ist, kann das Kreisen auch nicht drei Züge vorher beginnen. Es müssen also vor dem Kreisen mindestens zwei Züge gemacht werden. Folglich bleiben 2018 Züge fürs Kreisen übrig. Wegen $2018 = 672 \times 3 + 2$ kann der Blitzer höchstens 672 Mal im Kreis bewegt werden und somit 673 Mal das Feld A1 besuchen.

Aufgabe 28. David rannte gegen eine Schnecke um die Wette; die Rennstrecke war ein Rundkurs mit Start und Ziel an derselben Stelle. Sie starteten zur gleichen Zeit, rannten in die gleiche Richtung und trafen sich im Ziel. Die Schnecke war jedoch schneller, so dass sie mehr Runden als David absolvierte, der nur drei Runden schaffte, und daher trafen sich die beiden 2020 Mal, einschließlich des Treffens zu Beginn und im Ziel. Am nächsten Tag liefen sie dasselbe Rennen, aber David änderte die Richtung, in die er lief. Ihre Geschwindigkeiten waren die gleichen wie am Vortag. Wie oft haben sie sich im zweiten Rennen getroffen?

Ergebnis: 2026

Lösungsweg: Angenommen, die Schnecke absolvierte während des Rennens genau n Runden. Das heißt, die Geschwindigkeit von David betrug 3 und die der Schnecke n (in Runden pro Rennen). Damit war die Änderungsrate der Distanz, das ist der orientierte Abstand von David zur Schnecke, gleich $n - 3$. Da sie sich immer trafen, wenn die Distanz (in Runden) eine natürliche Zahl war, trafen sie sich $n - 3$ Mal, mit Ausnahme am Anfang. Also ist $n = 2022$. Als sie in entgegengesetzte Richtungen liefen, betrug die Änderungsrate ihrer orientierten Distanz $n + 3 = 2025$, so dass sie sich 2025 Mal – ausgenommen am Start – trafen, d.h. insgesamt 2026 Mal.

Aufgabe 29. Jonathan spielt ein Spiel, in dem seine Spielfigur Gegenstände der drei Kategorien Stärke, Verteidigung und Angriff sammelt. Jeder Gegenstand davon kann einen Wert von 1 bis 10 besitzen. Es ist möglich, Gegenstände mit gleichem Wert aus zwei verschiedenen Kategorien in einen Gegenstand der dritten Kategorie von einem um eins höheren Wert einzutauschen. Beispielsweise kann man für *Verteidigung Wert 3* und *Stärke Wert 3* einen Gegenstand *Angriff Wert 4* erhalten.
Wie viele Gegenstände *Angriff Wert 1* muss Jonathan sammeln, um einen Gegenstand *Angriff Wert 10* erhalten zu können, wenn vorausgesetzt werden kann, dass er eine unbegrenzte Anzahl an Gegenständen *Verteidigung Wert 1* und *Stärke Wert 1* hat?

Ergebnis: 170

Lösungsweg: Es seien s_i, v_i, a_i die jeweiligen Anzahlen an Gegenständen mit Wert i der Kategorien Stärke, Verteidigung und Angriff, die benötigt werden, um einen Gegenstand *Angriff Wert 10* zu erhalten. Klarerweise ist $s_{10} = v_{10} = 0$

sowie $a_{10} = 1$. Nach der Tauschregel gilt

$$s_{i-1} = v_i + a_i,$$
$$v_{i-1} = a_i + s_i,$$
$$a_{i-1} = s_i + v_i$$

für alle $i \in \{2, \dots, 10\}$. Also kann man folgende Tabelle ausgehend von der ersten Zeile $(0, 0, 1)$ ausfüllen, indem jeder Eintrag ab der zweiten Zeile die Summe der beiden nicht in derselben Spalte enthaltenen Einträge aus der vorhergehenden Zeile ist:

i	s_i	v_i	a_i
10	0	0	1
9	1	1	0
8	1	1	2
7	3	3	2
6	5	5	6
5	11	11	10
4	21	21	22
3	43	43	42
2	85	85	86
1	171	171	170

Folglich ist die Antwort 170.

Eine alternative Vorgehensweise ist diese hier:
Da die Rollen der Gegenstände der Kategorien Stärke und Verteidigung vertauschbar sind, gilt $s_i = v_i$. Mit vollständiger Induktion kann man zeigen, dass die Anzahlen a_i und s_i sich um 1 unterscheiden. Das gilt für $i = 10$ und durch

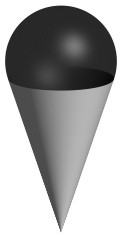
$$|a_{i-1} - s_{i-1}| = |(s_i + v_i) - (a_i + v_i)| = |s_i - a_i| = 1$$

wird die Induktionsbehauptung bewiesen. Schließlich liefert

$$s_{i-1} + v_{i-1} + a_{i-1} = (v_i + a_i) + (a_i + s_i) + (s_i + v_i) = 2(s_i + v_i + a_i)$$

den Wert $s_1 + v_1 + a_1 = 2^9 = 512$. Insgesamt ergibt sich aus den gemachten Beobachtungen $s_1 = v_1 = 171$ und damit $a_1 = 170$.

Aufgabe 30. Giuseppe kaufte ein Eis. Das Eis hatte die Form einer Kugel mit einem Radius von 4 cm in einer Eistüte in der Form eines Kegels. Giuseppe bemerkte, dass die Eiskugel auf folgende Weise in die Eistüte passte: Der Mittelpunkt der Kugel lag genau 2 cm über der Grundfläche der Eistüte und die Oberfläche der Eistüte endete genau dort, wo sie die Kugel tangential berührte. Wie groß war das Volumen der Eistüte?



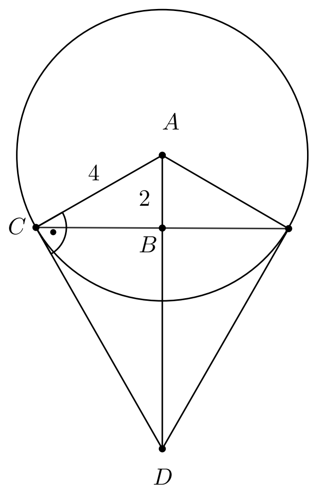
Ergebnis: 24π

Lösungsweg: Sei $\overline{AC} = 4$ der Radius der Kugel, $\overline{BC}$ der Radius der Grundfläche der Eistüte und $\overline{BD}$ die Höhe der Eistüte, siehe Abbildung unten. Der Satz des Pythagoras angewendet auf das Dreieck $\triangle ACB$ liefert

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = 16 - 4 = 12.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle ACB$ und $\triangle CDB$ folgt $\overline{BD} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{AB}$. Das Volumen beträgt daher

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{BC}^2 \cdot \overline{BD} = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{BC}^2 \cdot \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} = \frac{\pi \cdot 12^2}{3 \cdot 2} = 24\pi.$$



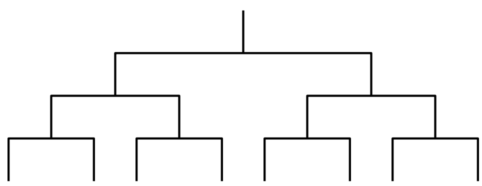
Aufgabe 31. Bob bildet zwei vierstellige Zahlen und verwendet dazu jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 und 9 genau ein Mal. Anschließend addiert er diese zwei vierstelligen Zahlen. Finde die höchstmögliche Ziffernsumme des Ergebnisses.

Hinweis: Ziffernsumme bedeutet Quersumme.

Ergebnis: 31

Lösungsweg: Rufe die folgende Grundeigenschaft der Addition in Erinnerung: Um Zahlen zu addieren, werden deren Ziffern Stelle für Stelle von rechts nach links zusammengezählt, wobei jeweils noch der Übertrag hinzugerechnet wird. Da hier nur zwei Zahlen addiert werden, sind alle Überträge höchstens 1.
Seien nun a und b die beiden vierstelligen Zahlen und schreibe die Ziffernsumme irgendeiner Zahl n als $S(n)$. Es gilt dann $S(a+b) = S(a) + S(b) - 9 \cdot c$, wobei c die Anzahl Überträge ungleich Null bezeichnet. Wegen $S(a) + S(b) = 1+2+3+4+6+7+8+9 = 40$ kann $S(a+b)$ nur die Werte 40, 31, 22, 13 und 4 annehmen.
Die Ziffernsumme 40 kann nicht erreicht werden, da 9 plus irgendeine Ziffer ungleich Null immer größer oder gleich 10 ist. Hingegen erhält man 31 beispielsweise mit $a = 9678$ und $b = 4321$, denn es ist $9678 + 4321 = 13999$ und $1+3+9+9+9 = 31$. Die höchstmögliche Ziffernsumme ist demnach 31.

Aufgabe 32. In einem Tennisturnier treten acht Spieler im K.O.-System gegeneinander an. Sie werden zufällig den acht freien unteren Enden im Graph aus dem Bild zugeteilt. Dann werden entsprechend dem Graphen drei Runden gespielt. Der Gewinner jedes Spiels kommt in die nächste Runde. In unserem Turnier sind zwei professionelle Spieler und sechs Amateure, von denen einer Bono heißt. Jeder professionelle Spieler siegt immer gegen einen Amateur. In Spielen zwischen zwei professionellen Spielern beziehungsweise zwischen zwei Amateuren sind beide gleich stark. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bono in die Finalrunde kommt?



Ergebnis: $\frac{1}{14}$

Lösungsweg: Betrachten wir die eine Hälfte, in der Bono spielt. Er kommt genau dann in die Finalrunde, wenn beide professionellen Spieler in der anderen Hälfte antreten und Bono die drei Amateure aus seiner Hälfte besiegt, er also zwei Runden gewinnt.
Starten wir mit der Situation, dass die Position von Bono im Graph fixiert ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden professionellen Spieler auf der anderen Hälfte zugeteilt werden ist $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$. Da die Amateure alle gleich stark sind, gewinnt Bono seine beiden Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$.

Aufgabe 33. Auf einer Tafel stehen die Zahlen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}.$$

Schrittweise wählen wir jeweils zwei Zahlen aus, sagen wir a und b, löschen diese beiden und schreiben dafür die Zahl

$$\frac{ab}{a+2ab+b}$$

an die Tafel. Diese Prozedur wiederholen wir so lange, bis nur noch eine Zahl an der Tafel steht. Finde alle Möglichkeiten für den Wert dieser Zahl.

Ergebnis: $\frac{1}{5248}$

Lösungsweg: Nehmen wir an, dass die Zahl n die beiden Zahlen a und b ersetzt. Dann gilt

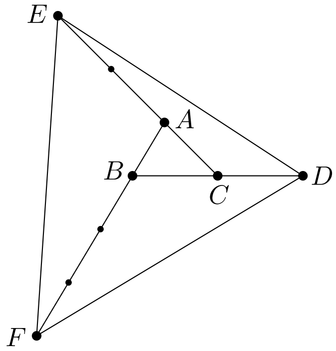
$$\frac{1}{n} = \frac{a+2ab+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2.$$

Daher erhöht sich die Summe der Kehrwerte aller Zahlen an der Tafel pro Schritt um zwei. Da es insgesamt 99 Schritte gibt, erfüllt die letzte Zahl ℓ also die Gleichung

$$\frac{1}{\ell} = 2 \cdot 99 + 1 + 2 + \cdots + 100 = 198 + \frac{101 \cdot 100}{2} = 5248.$$

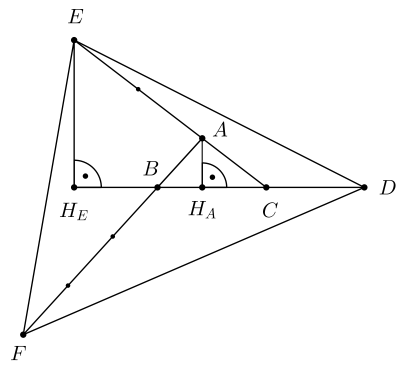
Daher ist die letzte Zahl $\frac{1}{5248}$.

Aufgabe 34. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Flächeninhalt 1. Wir erweitern die Seiten BC, CA, AB zu den Punkten D, E, und F wie in der Abbildung, sodass $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{BC}$, $\overline{CE} = 3 \cdot \overline{CA}$ und $\overline{AF} = 4 \cdot \overline{AB}$ gilt. Finde den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle DEF$.



Ergebnis: 18

Lösungsweg: Bezeichnen wir mit H_A und H_E die Orthogonalprojektionen von A und E auf die Gerade BC.



Die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle CAH_A$ und $\triangle CEH_E$ sind ähnlich und daher folgt aus $\overline{CE} = 3\overline{CA}$, dass $\overline{EH_E} = 3\overline{AH_A}$ gilt. Wegen $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC} = \overline{BC}$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle CDE$ gleich

$$\tfrac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EH_E} = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH_A} = 3.$$

Mit einer analogen Begründung erhalten wir, dass der Flächeninhalt des Dreiecks AEF gleich $2 \cdot 4 = 8$ und der des Dreiecks $\triangle BFD$ gleich $3 \cdot 2 = 6$ ist. Der gesamte Flächeninhalt ist also $1 + 3 + 8 + 6 = 18$.

Aufgabe 35. Die königlichen Steuereintreiber haben drei Säcke mit Hunderten von Goldmünzen gesammelt. Jede Münze im ersten Sack wiegt 10, im zweiten 11 und im dritten 12 Gramm. Leider sind die Etiketten auf den Säcken verloren gegangen. Der König hat eine Waage, die das Gewicht in Gramm bis zu einem Maximalgewicht von N Gramm anzeigt, wobei N eine natürliche Zahl ist. Wenn das Gewicht größer als N ist, zeigt die Waage einfach N an. Der König will mit einer einzigen Wägung feststellen, in welchem Sack welche Art von Münzen sind, indem er einige Münzen aus den Säcken entnimmt und wiegt. Wie groß ist der kleinste Wert von N, für den er das immer erreichen kann?

Ergebnis: 47

Lösungsweg: Zuerst bezeichnen wir die Anzahl der Münzen aus den Säcken, die vom König gewogen werden, mit a, b und c. Diese Anzahlen müssen paarweise verschieden sein, denn wenn zwei gleich sind, kann man die jeweiligen Säcke nicht unterscheiden. Wir werden solche Tripel als *zulässig* bezeichnen. Wir suchen nach den kleinstmöglichen Zahlen a, b und c, sodass $a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m$ paarweise verschiedene Werte für jede Permutation $(k,\ l,\ m)$ der Zahlen $10,\ 11$ und 12 ergibt.
Das kleinste zulässige Tripel ist $a = 0$, $b = 1$ und $c = 2$. Dies verletzt jedoch wegen $32 = 2 \cdot 10 + 12 = 2 \cdot 11 + 10$ die zweite Bedingung. Das zweit kleinste zulässige Tripel ist $a = 0$, $b = 1$ und $c = 3$, welches die zweite Bedingung erfüllt:

$$\begin{array}{ll} 3 \cdot 10 + 11 = 41 & 3 \cdot 10 + 12 = 42 \\ 3 \cdot 11 + 10 = 43 & 3 \cdot 11 + 12 = 45 \\ 3 \cdot 12 + 10 = 46 & 3 \cdot 12 + 11 = 47 \end{array}$$

Die Waage muss also bis zu 47 Gramm richtig messen.

Aufgabe 36. Emma hat beschlossen, eine Ananas-Diät zu machen. Jeden Tag um 13 Uhr überprüft sie, wie viele Ananas sie noch vorrätig hat. Wenn sie mindestens eine hat, isst sie eine. Wenn nicht, kauft sie stattdessen eine mehr als sie jemals an einem der Tage zuvor gekauft hatte. Sie kaufte ihre erste Ananas am Tag 1 um 13 Uhr. Wie viele Ananas hatte sie am Tag 2020 um 14 Uhr?

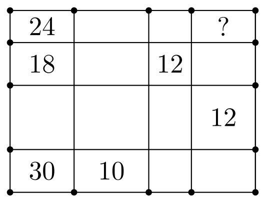
Ergebnis: 59

Lösungsweg: Wir bezeichnen die Anzahl von Emmas Ananas am Tag i um jeweils 14 Uhr mit $s(i)$. Da die ersten beiden Male an den Tagen 2 und 5 der Wert Null ist und Emma jedes Mal die Anzahl der gekauften Ananas um eins erhöht, bilden die Abstände zwischen zwei aufeinander folgenden Nullen in der Folge $s(i)$ die Folge $3, 4, 5, \ldots$. Die Nullen befinden sich somit an den Positionen

$$2 + 3 + 4 + \cdots + n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

für $n \geq 2$. Da wir wissen wollen, wann die letzte Null vor 2020 erscheint, muss die quadratische Gleichung $\frac{1}{2}x(x+1) - 1 = 2020$ gelöst werden. Ihre negative Lösung ist hier irrelevant, ihre positive Lösung ist $\frac{1}{2}(\sqrt{16169} - 1)$ und liegt zwischen 63 und 64. Somit ist die letzte Null die 62-ste und befindet sich an der Position $\frac{1}{2}(63 \cdot 64 - 1) = 2015$. Die Folge $s(i)$ geht ab hier wie folgt weiter: $63, 62, 61, 60, 59, \ldots$. Somit ist die gesuchte Zahl $s(2020)$ gleich 59.

Aufgabe 37. Die Schweinezüchterin Lisi hat für ihre Ferkel einen neuen Stall der Größe $252\,\mathrm{m}^2$ mit flexibel verschiebbaren Trennwänden, so dass sie insgesamt 16 voneinander getrennte rechtwinklige Boxen zur Verfügung hat. Die flexiblen Innenwände können dabei nur über die ganze Länge bzw. Breite des Gebäudes verschoben werden. Jetzt hat sie die Wände so verschoben, dass die in der Abbildung mit Zahlen gekennzeichneten Boxen die angegebenen Größen in m^2 haben. Als Mathematikliebhaberin achtet Lisi stets darauf, dass nur ganzzahlige positive Boxengrößen entstehen. Welche Fläche kann dann die Schweinebox in der rechten oberen Ecke, die ein Fragezeichen enthält, in m^2 haben?



Ergebnis: 8, 24

Lösungsweg: Zunächst kann man das Verhältnis der Breiten der ersten und der zweiten Spalte $(30 : 10)$ und das der Breiten der ersten und der dritten Spalte $(18 : 12)$ aus der Abbildung erkennen. Außerdem kann man die Verhältnisse der Höhen der ersten, zweiten und vierten Reihe $(24 : 18 : 30)$ ablesen. Durch Kürzen erhält man daraus die Verhältnisse $3 : 1 : 2$ für diese Spalten und $4 : 3 : 5$ für diese Reihen. Mit diesen Informationen kann man alle Boxen mit den Größen der Flächen füllen, wobei in der dritten Reihe und in der vierten Spalte die Werte mit Hilfe der Variablen x und y ausgedrückt werden, um die Flächenverhältnisse widerzuspiegeln.

24	8	16	$4y$
18	6	12	$3y$
$3x$	x	$2x$	12
30	10	20	$5y$

Mit Hilfe des grau markierten Rechtecks erkennt man, dass man das Höhenverhältnis zwischen der zweiten und dritten Reihe entweder durch $12 : 2x$ anhand der dritten Spalte oder durch $3y : 12$ mit Hilfe der vierten Spalte berechnen kann. Aufgrund der Gleichheit dieser Werte ergibt sich $12 : 2x = 3y : 12$, also $y = 24/x$.
Aus dem Vergleich der gesamten Fläche des Stalles mit der Summe der Flächen der einzelnen Boxen erhält man die Gleichung

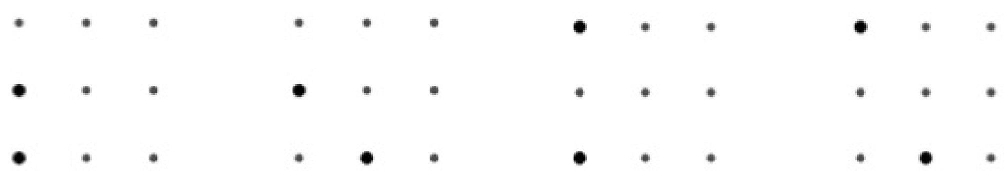
$$96 = 6x + 12y = 6x + 12 \cdot \frac{24}{x},$$

welche zu

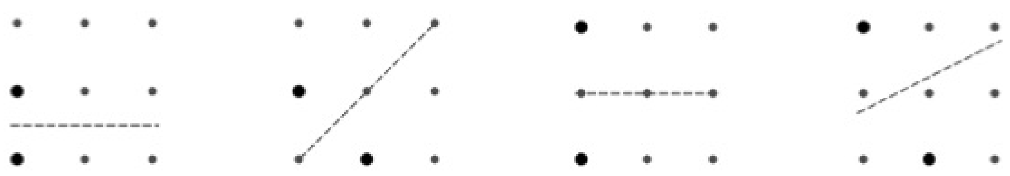
$$0 = x^2 - 16x + 48 = (x - 4)(x - 12)$$

umgeformt werden kann. Die eine Lösung $x = 4$ führt zu $y = 6$ und $? = 24$, die andere Lösung $x = 12$ zu $y = 2$ und $? = 8$.

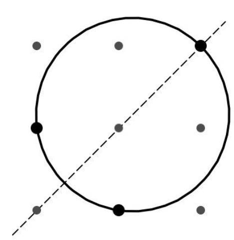
Aufgabe 38. Daniel und Phillip zeichnen jeweils einen Kreis auf ein Blatt Papier mit einem Gitter bestehend aus 1×1 Quadraten. Beide Kreise gehen durch jeweils genau drei Gitterpunkte. Der Kreis von Daniel hat einen Radius von $\frac{5}{4}$. Der Kreis von Phillip hat einen kleineren Radius. Wie groß ist der Radius von Phillips Kreis?
Ergebnis: $\frac{5}{6}\sqrt{2}$
Lösungsweg: Da der Radius von Phillips Kreis kleiner als $\frac{5}{4}$ ist, muss die Entfernung zwischen den Gitterpunkten darauf kleiner als $\frac{5}{2}$ sein. Für die relative Position von zunächst zwei der drei Gitterpunkte auf dem Kreis gibt es, abgesehen von Rotation, die folgenden vier im Bild dargestellten Fälle:



In jedem der Fälle ist durch die beiden Gitterpunkte auf dem Kreis eine Symmetrieachse für diesen festgelegt. Der dritte Gitterpunkt auf dem Kreis muss entweder auf dieser Achse liegen oder so, dass sein Spiegelbild an dieser Achse keinen vierten Gitterpunkt ergibt. Somit ist die erste Variante nicht möglich.



Wenn der dritte Gitterpunkt des Kreises auf der Symmetrieachse liegt, ist die zweite Variante möglich und Variante drei ergibt Daniels Kreis oder einen größeren Kreis. Da Variante vier nur eine Rotation von bisherigen Möglichkeiten darstellt, ist Phillips Kreis der folgende:



Um den Radius des Kreises zu finden, bietet sich an, das Koordinatensystem so zu legen, dass die Gitterpunkte des Kreises die Koordinaten $(1, 0)$, $(0, 1)$, und $(2, 2)$ haben. Setzt man diese Werte in die Kreisgleichung $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ ein und löst das dadurch entstandene Gleichungssystem, so ergibt sich $(x - \frac{7}{6})^2 + (y - \frac{7}{6})^2 = \frac{25}{18}$ und somit $\frac{5}{6}\sqrt{2}$.

Aufgabe 39. Sieben Zwerge tragen sieben verschiedenfarbige Hüte. Der Zauberer Colorius möchte einen Zauberspruch erfinden, der die Hutfarben wie folgt ändert:

- Die neue Farbe jedes Hutes hängt nur von dessen vorheriger Farbe ab, sie ist unabhängig vom Träger des Hutes und den Farben der anderen Hüte.
- Nach der Anwendung des Zauberspruchs sind immer noch alle sieben ursprünglichen Farben vorhanden.
- Wenn Colorius den Zauberspruch zwei oder drei Mal hintereinander einsetzt, trägt keiner der Zwerge einen Hut derselben Farbe wie am Anfang.

Wie viele solche Zaubersprüche kann sich Colorius ausdenken?

Ergebnis: 720

Lösungsweg: Da alle Farben erhalten bleiben, entspricht der Effekt des Zauberspruchs lediglich einer Permutation der sieben Hutfarben. Jede solche Permutation kann in disjunkte gerichtete Farbenkreise zerlegt werden. Aus der dritten Bedingung der Aufgabenstellung folgt, dass diese Kreise weder aus 2 noch 3 Farben bestehen können und aus einer Farbe sowieso nicht. Aus sieben Farben mehrere Kreise von mindestens vier Farben zu bilden, ist unmöglich. Deshalb muss die gesuchte Permutation aus einem einzigen Kreis bestehen. Solche Permutationen gibt es $6! = 720$, denn startend mit einer Hutfarbe gibt es sechs mögliche Farben, zu welcher der Zauberspruch sie ändern kann, danach fünf Möglichkeiten und so weiter, bis die letzte Farbe wieder zur ersten Farbe geändert wird.

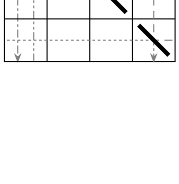
Aufgabe 40. Maria hat ein Zahlenschloss, aber kein normales. Jeder der Zahlenringe hat eine andere Anzahl an Zahlen. Der erste Ring hat Zahlen von 0 bis 4, der zweite Ring von 0 bis 6, der dritte Ring von 0 bis 10 und der vierte Ring von 0 bis 9. Maria weiß Folgendes: Wenn sie bei der Kombination $(0, 0, 0, 0)$ startet und die Ringe simultan dreht, also als nächstes die Kombination $(1, 1, 1, 1)$ bekommt, dann erhält sie schlussendlich eine Kombination, die auf $(5, 1)$ endet. Und wenn diese Endung zum zweiten Mal kommt, kann das Schloss geöffnet werden. Wie lautet die Kombination zum Öffnen?

Ergebnis: $(1, 6, 5, 1)$

Lösungsweg: Gesucht ist eine ganze Zahl x, die bei der Division durch 11 bzw. 10 die Reste 5 bzw. 1 ergibt. Da 10 und 11 teilerfremd sind, gibt es nach dem chinesischen Restsatz genau ein solches x unter den Zahlen $0, 1, \ldots, 109$. Nennen wir diese Zahl x_0. Alle anderen Lösungen ergeben sich durch Addition von Vielfachen von $10 \cdot 11 = 110$ zu x_0. Um x_0 zu finden, kann man beispielsweise alle Zahlen der Form $11k + 5$ für ganze Zahlen k auflisten und eine wählen, die auf 1 endet. Man erhält hierdurch die Zahl 71 als die Anzahl an Drehungen, die nötig sind, um das erste Mal die Endung $(5, 1)$ zu bekommen. Nach der Bemerkung von oben erscheint diese Endung nach weiteren 110 Rotationen zum zweiten Mal, aber nicht eher. Insgesamt sind das also $110 + 71 = 181$ Drehungen von Beginn weg. Da die Zahl 181 die Reste 1 bzw. 6 bei der Division durch 5 bzw. 7 lässt, ist die korrekte Kombination für das Öffnen des Schlosses $(1, 6, 5, 1)$.

Aufgabe 41.
In vier der quadratischen Zellen einer 4×4 Tabelle werden doppelseitige Spiegel diagonal platziert. Von jeder der 16 Kanten des Tabellenrandes wird ein Laserstrahl senkrecht zur Kante losgeschickt. Der Laserstrahl ändert seine Richtung um $90°$ jedes Mal, wenn er auf einen Spiegel trifft, und endet, wenn er auf eine Randkante trifft. Nachdem die Spiegel platziert wurden, war die Situation folgende: Genau vier Laser hatten einen Begrenzungspunkt an der unteren Kante der Tabelle und den anderen an der rechten Kante. Weitere vier Laser hatten einen Begrenzungspunkt an der unteren Kante und den anderen an der linken Kante. Auch gab es genau vier Laser, die einen Begrenzungspunkt an der linken Kante und den anderen an der oberen Kante hatten, außerdem gab es vier Laser, die einen Begrenzungspunkt an der oberen Kante und den anderen an der rechten Kante hatten. Wie viele verschiedene Arten gibt es, die Spiegel so zu platzieren, dass dies beobachtet werden kann?
(Das Bild unten zeigt eine solche Art, die Spiegel zu platzieren, und gewisse Laserstrahlen.)

Hinweis: Startpunkt und Endpunkt des Laserstrahls sind unter dem Begriff *Begrenzungspunkt* des Strahls zusammengefasst.



Ergebnis: 144

Lösungsweg: Weil jeder Laserstrahl seine Richtung ändern muss und es vier Spiegel gibt, muss jede Spalte und Zeile genau einen Spiegel enthalten. Dies kann durch $4! = 24$ verschiedene Arten erreicht werden. In der ersten Reihe gibt es 4 Möglichkeiten, eine Spalte zu wählen, in der zweiten Reihe sind es dann noch 3 Möglichkeiten, und so weiter. Aus der Anzahl der Strahlen, die in eine bestimmte Richtung gehen, folgt, dass es zwei Spiegel jeder Orientierung geben muss. Das heißt, nachdem die Plätze für die Spiegel ausgewählt wurden, gibt es noch $\binom{4}{2} = 6$ Arten, die Orientierung zu wählen. Es ist nicht schwer zu sehen, dass jede solche Konfiguration die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Daher gibt es $24 \cdot 6 = 144$ Arten, die Spiegel zu platzieren.

Aufgabe 42. Sei $x_1 = 2020$ der Anfangswert einer Folge ganzer Zahlen. Für $n \geq 2$ sei das Folgenglied x_n definiert als x_{n-1} multipliziert mit der kleinsten Primzahl p, die kein Teiler von x_{n-1} ist, und dividiert durch alle Primzahlen kleiner als p. Finde die Anzahl der verschiedenen Primteiler von x_{2020}.

Ergebnis: 9

Lösungsweg: Es ist $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ und $x_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 101$. Man sieht leicht ein: Wenn eine Zahl der Sequenz nicht durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist, erfüllt die folgende Zahl diese Eigenschaft ebenfalls. Deswegen kann man für $n \geq 2$ jede Zahl x_n repräsentieren durch eine Binärzahl b_n, deren k-te Stelle von rechts genau dann eine 1 enthält, wenn x_n durch die k-te Primzahl teilbar ist. Es ist

$$b_2 = 10000000000000000000000111_2$$

und die Binärdarstellung b_n erhöht sich mit jeder Zahl der Sequenz um 1, also

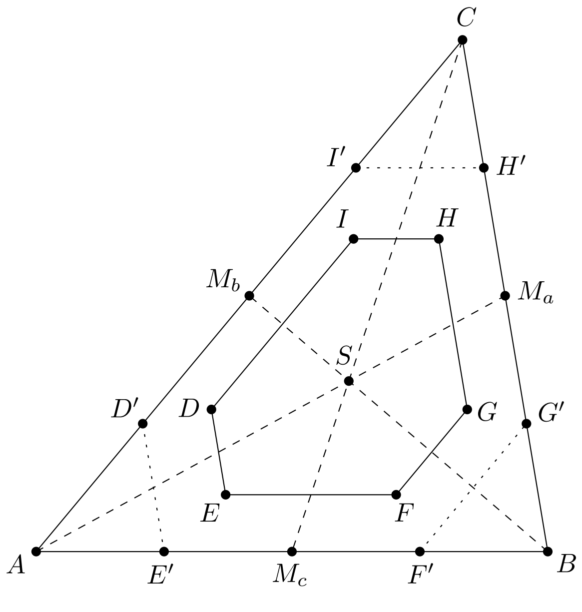
$$b_{2020} = b_2 + \underbrace{11111100010_2}_{=2018} = 10000000000000000111111101001_2.$$

Gemäß der Definition von b_n ist die Anzahl der verschiedenen Primteiler von x_{2020} gleich der Anzahl der Einsen in b_{2020} und die ist 9.

Aufgabe 43. Die Schwerlinien teilen ein Dreieck $\triangle ABC$ in sechs Teildreiecke, deren Schwerpunkte die Ecken eines Sechsecks $DEFGHI$ bilden. Man bestimme das Verhältnis des Flächeninhalts von $DEFGHI$ zum Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Ergebnis: $\frac{13}{36}$

Lösungsweg: Die Abbildung zeigt die gegebene Situation zusammen mit allen relevanten Punkten: dem Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle ABC$, den Mittelpunkten M_a, M_b, M_c der Seiten von $\triangle ABC$, den Schwerpunkten D, E, F, G, H, I der Teildreiecke und den Mittelpunkten D', E', …, I' der Strecken M_bA, AM_c, …, CM_b.



Wegen $\overline{AE'} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ und $\overline{AD'} = \frac{1}{4}\overline{AC}$ ist das Dreieck $\triangle AE'D'$ eine zentrische Streckung des Dreiecks $\triangle ABC$ mit Zentrum A und Streckungsfaktor $\frac{1}{4}$. Also ist die Fläche $A_{\triangle AE'D'}$ genau $\frac{1}{16}A_{\triangle ABC}$. Ebenso erhält man $A_{\triangle BG'F'} = A_{\triangle CI'H'} = \frac{1}{16}A_{\triangle ABC}$. Deshalb ergibt sich die Fläche des Sechsecks $D'E'F'G'H'I'$ zu $\frac{13}{16}A_{\triangle ABC}$. Außerdem bildet die zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckungsfaktor $\frac{3}{2}$ das Sechseck $DEFGHI$ auf das Sechseck $D'E'F'G'H'I'$ ab und man erhält die Fläche von $DEFGHI$ als

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{13}{16} A_{\triangle ABC} = \frac{13}{36} A_{\triangle ABC}.$$

Das gesuchte Verhältnis ist also $13 : 36$.

Aufgabe 44. Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_{m+1} = m(-1)^{m+1} - 2a_m$ für alle positiven ganzen Zahlen m und $a_1 = a_{2020}$. Finde den Wert von $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}$.

Ergebnis: $\frac{1010}{3}$

Lösungsweg: Wenn wir die Gleichungen für $m = 1, \ldots, 2019$ addieren, erhalten wir

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020} = (1 - 2 + 3 - \cdots + 2019) - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}).$$

Setzen wir $a_1 = a_{2020}$ in die Gleichung ein, können wir diese zu

$$\begin{aligned} 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}) &= 1 - 2 + 3 - \cdots + 2019 \\ &= (1 - 2) + (3 - 4) + \cdots + (2017 - 2018) + 2019 \\ &= (-1) \cdot 1009 + 2019 = 1010 \end{aligned}$$

umformen. Daraus folgt

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = 1010/3.$$

Hinweis: Solch eine Folge reeller Zahlen existiert tatsächlich: Wenn a_1 fixiert ist, ist der Rest der Folge durch die Gleichung in der Aufgabenstellung bestimmt. Man kann daher a_{2020} als lineare Funktion von a_1 darstellen und die Bedingung $a_1 = a_{2020}$ führt zu einer lineare Gleichung in a_1, die man lösen muss. Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Gleichung tatsächlich eine Lösung hat.

Aufgabe 45. Sandra hält fünf identische Schnüre so in ihrer Hand, dass jeweils das eine Ende auf der einen Seite ihrer Hand und das andere auf der anderen Seite hinunter hängt. Dann bittet sie Willy, auf beiden Seiten zufällig Paare von Schnurenden zusammenzuknoten, bis nur noch je ein Ende übrig ist. Wie wahrscheinlich ist es, dass dabei eine einzige lange Schnur entsteht?

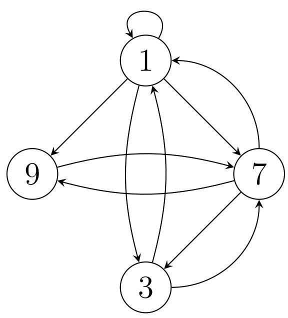
Ergebnis: 8/15

Lösungsweg: Man betrachtet die fünf Schnüre auf einer Seite der Hand und bezeichnet sie so mit A, B, C, D und E, dass A ein loses Ende ist, B mit C verbunden und D mit E verbunden ist. In dieser Situation kann genau dann eine einzige Schnur entstehen, wenn auf der zweiten Seite der Hand A mit B, C, D oder E verbunden wird, wofür es 4 Möglichkeiten gibt, und anschließend das verbleibende lose Ende dieser Teilschnur an eines der Enden des anderen Schnurpaares geknotet wird, was auf 2 Arten möglich ist. Wenn A beispielsweise an B geknotet wird, kann C mit D oder E verbunden werden. Demnach gibt es $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten, eine einzige lange Schnur zu erhalten.
Die Gesamtanzahl der Möglichkeiten, die Schnurenden auf der zweiten Seite miteinander zu verknoten, ist 15: Für die Wahl des frei bleibenden Endes gibt es 5 Möglichkeiten. Der Rest ist durch das Zusammenknoten eines gewählten Schnurendes mit einem der drei übrigen Enden festgelegt, was auf 3 Arten möglich ist. Die Wahrscheinlichkeit, eine einzige lange Schnur zu erhalten, ist demnach 8/15.

Aufgabe 46. Eine Zahl wird *2-prim* genannt, wenn jedes Paar unmittelbar nebeneinander stehender Ziffern eine zweistellige Primzahl bildet und keine zwei der so entstandenen Primzahlen gleich sind. Beispielsweise hat 237 die Eigenschaft 2-prim zu sein, die Zahlen 136 und 1313 dagegen sind dies nicht. Bestimme die größte Zahl, die 2-prim ist.

Ergebnis: 619737131179

Lösungsweg: Zunächst betrachtet man einen orientierten Graph mit den Knoten 1, 3, 7 und 9, bei dem zwei Ziffern genau dann durch eine gerichtete Kante (Pfeil) verbunden sind, wenn die entsprechende zweistellige Zahl eine Primzahl ist. Man beachte, dass sich am Knoten 1 aufgrund der Zahl 11 auch eine Schleife befindet.



Angenommen, es gibt einen Weg durch den Graph entlang der Pfeile, der jede Kante genau einmal durchläuft. Dann kann man die größte 2-prime Zahl dadurch erhalten, dass man entweder 6 oder 8 an den Anfang der Ziffernfolge stellt, die man durch einen solchen Weg erhalten hat. Aus der Definition einer 2-primen Zahl folgt nämlich, dass alle Ziffern außer der ersten aus der Menge $\{1, 3, 7, 9\}$ stammen müssen und kein Pfeil zweimal durchlaufen werden darf. Deshalb

kann keine Zahl mit der Eigenschaft, 2-prim zu sein, mehr Ziffern haben als die Anzahl der Pfeile im Graph plus zwei (eine für die führende Ziffer und eine dadurch, dass man Ziffern zählt und nicht Zahlen), also 12. Außerdem kann die erste Ziffer weder 9 noch 7 sein, denn dies würde das Durchlaufen eines Pfeiles wiederholen, und da 61, 83, 87 und 89 Primzahlen sind, die alle möglichen Folgeziffern abdecken, können auch keine kleineren Primzahlen am Anfang vorkommen.
Nun muss man noch einen Weg durch den Graph mit den oben genannten Eigenschaften finden, der die größtmögliche Zahl ergibt. Man erkennt, dass beim Knoten 9 ein Pfeil mehr endet als dort Pfeile beginnen und beim Knoten 1 ein Pfeil mehr beginnt als Pfeile dort enden. An den anderen beiden Knoten beginnen und enden jeweils gleich viele Pfeile. Also muss der Weg im Knoten 1 beginnen und im Knoten 9 enden. Von 1 aus geht man zur größtmöglichen Zahl 9 und von dort aus dem gleichen Grund zur 7. Da die Zahl 9 nicht mehr möglich ist, setzt man mit 3 fort, kehrt wieder zurück zur 7 usw. Bei dieser an einen Greedy-Algorithmus angelehnten Vorgehensweise erhält man 19737131179 und durch Voranstellen der größtmöglichen geraden Ziffer schließlich 619737131179, die größte 2-prime Zahl.

Aufgabe 47. Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Ferner liegen die Punkte D und E so auf den Seiten AB und AC, dass O der Mittelpunkt von DE ist. Bestimme die Länge von CE, wenn $\overline{AD} = 8$, $\overline{BD} = 3$ und $\overline{AO} = 7$ sind.
Ergebnis: $\frac{4\sqrt{21}}{7}$
Lösungsweg: Die Bilder von Punkten, die durch Punktspiegelung am Umkreismittelpunkt O entstehen, werden mit einem Strich gekennzeichnet. Die Punkte A' und B' liegen also ebenfalls auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ und es gilt ferner $D' = E$ und $E' = D$. Weil AA' ein Durchmesser des Umkreises ist, ist Dreieck $\triangle AA'B'$ rechtwinklig und mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$\overline{AB'}^2 = \overline{AA'}^2 - \overline{A'B'}^2 = 14^2 - \overline{AB}^2 = 14^2 - 11^2 = 75.$$

Wegen $\angle AB'E = 90°$ erhält man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras im Dreieck $\triangle AEB'$

$$\overline{AE} = \sqrt{\overline{AB'}^2 + \overline{B'D'}^2} = \sqrt{75 + \overline{BD}^2} = \sqrt{75+9} = 2\sqrt{21}.$$

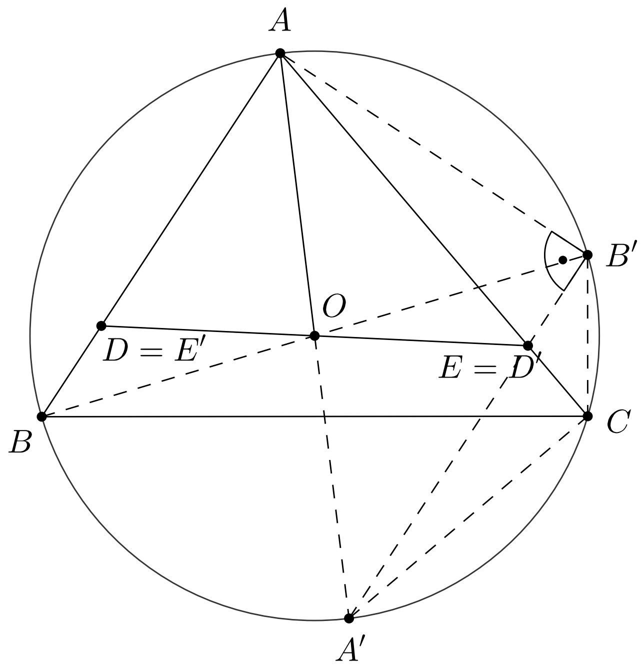
Da E, also der Spiegelpunkt von D, auf der Strecke $A'B'$ liegen muss und $A'CB'A$ ein Sehnenviereck ist, sind die Dreiecke $\triangle AEB'$ und $\triangle A'CE$ ähnlich, und es ergibt sich das Seitenverhältnis

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{A'E}} = \frac{\overline{B'E}}{\overline{AE}}.$$

Damit kann man die gewünschte Streckenlänge durch

$$\overline{CE} = \overline{A'E} \cdot \frac{\overline{B'E}}{\overline{AE}} = \overline{AD} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AE}} = 8 \cdot \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{21}}{21} = \frac{4\sqrt{21}}{7}$$

berechnen.



Zweite Lösung:

Die Potenz des Punktes D bezüglich des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem Radius $r = \overline{AO} = 7$ ergibt sich zu

$$-3 \cdot 8 = -\overline{DB} \cdot \overline{DA} = \overline{OD}^2 - r^2,$$

woraus man

$$\overline{OE} = \overline{OD} = \sqrt{49 - 24} = 5$$

erhält, wobei das Minuszeichen daher kommt, dass D innerhalb des Kreises liegt. Aus dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle ADO$ folgt

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\angle AOD)$$

und somit

$$\cos(\angle AOD) = \frac{8^2 - 7^2 - 5^2}{-2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7}.$$

Wegen $\cos(\angle EOA) = \cos(180° - \angle AOD) = -\cos(\angle AOD) = -\frac{1}{7}$ folgt aus dem gleichen Satz für das Dreieck $\triangle AOE$

$$\overline{AE}^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(\angle EOA) = 84$$

und deshalb $\overline{AE} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. Analog zu oben erhält man aus der Potenz des Punktes E bezüglich des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ die Gleichung

$$-2\sqrt{21} \cdot \overline{EC} = 5^2 - 7^2$$

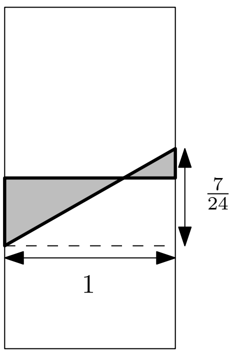
und hieraus die gesuchte Streckenlänge

$$\overline{EC} = \frac{24}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

Aufgabe 48. Ein Rechteck der Größe 7×24 ist in 1×1 Quadrate unterteilt. Eine Diagonale des Rechtecks schneidet Dreiecke aus einigen Quadraten. Finde die Summe der Umfänge aller dieser Dreiecke.

Ergebnis: $\frac{56}{3} = 18 + \frac{2}{3}$

Lösungsweg: Sei 24 die Breite und 7 die Höhe des Rechtecks. Die Diagonale von links unten nach rechts oben hat eine Steigung von $\frac{7}{24}$. Wenn die Diagonale durch ein Quadrat geht, schneidet sie genau dann ein Dreieck ab, wenn sie eine horizontale Linie kreuzt, die zwei Quadrate trennt. Da die Steigung konstant ist, kann man die Liniensegmente der beiden Dreiecke, die von den beiden Quadraten abgeschnitten werden, in ein großes rechtwinkliges Dreieck mit der Breite 1 umordnen. Dann haben die Katheten die Längen 1 und $\frac{7}{24}$ und die Hypotenuse die Länge $\sqrt{1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{25}{24}$.



Die Summe der Umfänge dieser beiden Dreiecke ist also $\frac{56}{24}$. Die Diagonale kreuzt genau sechs Mal eine horizontale Linie. Zusätzlich werden zwei rechtwinklige Dreiecke vom ersten und letzten Quadrat, das die Diagonale durchläuft, abgeschnitten, die genau die oben genannten Abmessungen haben. Die Gesamtsumme der Umfänge ist also $8 \cdot \frac{56}{24} = \frac{56}{3}$.

Aufgabe 49. Eine positive ganze Zahl n wird *erhebend* genannt, falls es möglich ist, mit einem Aufzug von jedem Stockwerk eines 8787-stöckigen Gebäudes zu jedem anderen Stockwerk zu gelangen, wenn dieser nur entweder 2020 Stockwerke nach unten oder n Stockwerke nach oben fahren kann. Finde die größte erhebende Zahl.

Hinweis: Ein k-stöckiges Gebäude besitzt ein Erdgeschoß und weitere k Stockwerke darüber.

Ergebnis: 6763

Lösungsweg: Um sich überhaupt von Stockwerk 2019 bewegen zu können, muss $2019 + n \leq 8787$ gelten, also $n \leq 6768$. Außerdem muss die Bedingung $d := \mathrm{ggT}(2020, n) = 1$ gelten, da sich der Aufzug zwischen Stockwerken a und b nur bewegen kann, falls $d \mid a - b$ erfüllt ist. Dadurch können einige Kandidaten ausgeschlossen werden: 6768 ist durch 2 teilbar, 6767 ist durch 101 teilbar, 6766 ist durch 2 teilbar, 6765 ist durch 5 teilbar und 6764 ist durch 2 teilbar. Jedoch gilt $\mathrm{ggT}(6763, 2020) = 1$.
Nun wird gezeigt, dass 6763 tatsächlich eine erhebende Zahl ist. Mit dem euklidischen Algorithmus (oder Bezouts Identität) findet man ganze Zahlen x, y, für die $6763x - 2020y = 1$ gilt. Die beiden Zahlen x und y können sogar als positiv angenommen werden, da die Gleichung sich nach Ersetzen von x durch $x + 2020$ und y durch $y + 6763$ nicht ändert.
Angenommen, der Aufzug startet im Stockwerk $0 \leq f \leq 8786$. Es soll gezeigt werden, dass es eine geeignete Abfolge von x Bewegungen aufwärts und y Bewegungen abwärts gibt, sodass der Aufzug im Stock $f + 1$ endet. Wegen $2020 + 6763 \leq 8787$ kann der Aufzug sich immer in mindestens eine Richtung bewegen. Falls der Aufzug alle Bewegungen abwärts bzw. aufwärts gemacht hat, muss er sich unterhalb bzw. oberhalb des Stockes $f + 1$ befinden. Wenn er nun die restlichen Bewegungen aufwärts bzw. abwärts macht, endet er im Stock $f + 1$. Auf ähnliche Weise kann gezeigt werden, dass sich der Aufzug von jedem Stockwerk $1 \leq f \leq 8787$ ins darunter liegende Stockwerk bewegen kann. Daher ist 6763 tatsächlich erhebend und somit die größte erhebende Zahl.

Aufgabe 50. Das Kryptogramm

$$\begin{array}{cccccc} & & & R & E & D \\ + & & B & L & U & E \\ + & G & R & E & E & N \\ \hline = & B & R & O & W & N \end{array}$$

hat folgende Eigenschaften: Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern und keine der vier Zahlen beginnt mit der Ziffer Null. Außerdem ist bekannt, dass $BLUE$ eine Quadratzahl ist. Bestimme die fünfstellige Zahl $BROWN$.

Ergebnis: 85230

Lösungsweg: Zur eindeutigen Bezeichnung nummeriert man die Spalten von links nach rechts von 1 bis 5. Aus der fünften Spalte sieht man $D + E = 10$ und es muss einen Übertrag von 1 in die vierte Spalte geben, der mit $c_5 = 1$ bezeichnet wird. Aus den ersten beiden Spalten kann man $G + 1 = B$ erkennen, da aufgrund von $B + R + c_3 = R$ und $1 \leq c_3 \leq 2$ der Übertrag c_2 gleich 1 sein muss. Hieraus erhält man zusätzlich $B = 9$ oder $B = 8$. Deshalb muss $BLUE$ als vierstellige Zahl das Quadrat einer Zahl n mit $90 \leq n \leq 99$ sein. Schließt man Quadratzahlen mit mehrfach auftretenden Ziffern aus, so bleiben 8649, 9025, 9216, 9604 und 9801 als mögliche Werte für $BLUE$ übrig. Wegen $D + E = 10$ kann man 9025 ausschließen, da dies zu $D = E = 5$ führen würde. Ferner sind 9801 wegen $B = D = 9$ und 9604 wegen $L = D = 6$ nicht möglich. Mit Hilfe der vierten Spalte kann man auch 9216 eliminieren, denn dies würde zu $D = 4$ und $E + U + E + 1 = 6 + 1 + 6 + 1 = 14$ führen und somit $W = 4$ ergeben, was $D = 4$ widerspricht. Also ist der einzig mögliche Wert für $BLUE$ die Quadratzahl 8649.
Aus $B = 8$, $L = 6$, $U = 4$ und $E = 9$ erhält man nun leicht $D = 1$ und $W = 3$ und $G = 7$ und die Überträge $c_3 = c_4 = 2$. Für die dritte Spalte $R + L + E + c_4 = c_3 \cdot 10 + O$, die zu $R + 17 = 20 + O$ vereinfacht werden kann, ist nur noch $R = 5$ und $O = 2$ möglich. Hieraus folgt schließlich $N = 0$ und das Kryptogramm hat eine eindeutige Lösung:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 9 & 1 \\ + & & 8 & 6 & 4 & 9 \\ + & 7 & 5 & 9 & 9 & 0 \\ \hline = & 8 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Aufgabe 51. Finde die kleinste positive ganze Zahl $k > 1$, so dass es keine positive k-stellige ganze Zahl n gibt, die nur ungerade Ziffern hat und für die $S(S(n)) = 2$ gilt. Hierbei bezeichnet $S(x)$ die Ziffernsumme der Zahl x.

Hinweis: Ziffernsumme bedeutet Quersumme.

Ergebnis: 103

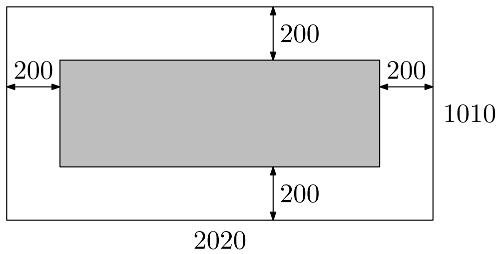
Lösungsweg: Zuerst sieht man, dass $S(m) = 2$ für eine ungerade ganze Zahl m genau dann gilt, wenn $m = 10^l + 1$ mit einer positiven ganzen Zahl l ist. Ist $k = 103$, dann ist $S(n)$ für alle k-stelligen Zahlen n mit ausschließlich ungeraden Ziffern notwendigerweise ungerade. Damit $S(S(n)) = 2$ gelten kann, muss $S(n)$ obige Form haben. Nun ist aber

$$101 < 103 \cdot 1 \leq S(n) \leq 103 \cdot 9 = 927 < 1001$$

für jede Zahl n mit 103 ungeraden Ziffern. Damit erfüllt $k = 103$ die Bedingung der Aufgabenstellung.
Nun wird gezeigt, dass für jedes ungerade $k < 103$ eine k-stellige positive ganze Zahl n bestehend aus ungeraden Ziffern existiert, für die $S(S(n)) = 2$ gilt. Man sieht leicht, dass $S(n)$ jede ungerade Zahl größer gleich k und kleiner gleich $9k$ erreichen kann. Für $1 < k \leq 11$ ist $9k \geq 18 > 11$, also kann $S(n) = 11$ gewählt werden und damit gibt es ein n mit $S(S(n)) = 2$. Für $101 \geq k > 11$ ist $9k \geq 9 \cdot 13 = 117 > 101$, also kann $S(n)$ gleich 101 sein und $S(S(n)) = 2$.

Für ein gerades $k < 103$ ist die Argumentation ähnlich, nur ist $S(n)$ jetzt gerade. Für $k = 2$ wählt man $n = 11$. Für $2 < k \leq 20$ ist $9k > 20$ und man findet ein n mit $S(n) = 20$. Für $103 > k > 20$ ist $9k > 180 > 110$ und $S(n) = 110$ liefert ein gesuchtes n.
Damit ist 103 die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft.

Aufgabe 52. Martin kaufte ein Schachbrett in Form eines Rechtecks, das aus 1010×2020 Quadraten bestand. Aus diesem Schachbrett wurde ein kleineres Rechteck entfernt, wie in der Abbildung unten als graues Rechteck zu sehen ist. Martin platzierte auf jedem Quadrat des Schachbretts einen Käfer und dieser blieb auch dort sitzen. Allerdings hatten einige der Käfer einen Husten. Der Husten war sehr ansteckend: Jeder Käfer, der auf einem Feld saß, das an mindestens zwei Felder mit hustenden Käfern angrenzte, bekam ebenfalls Husten. Hierbei sind zwei Quadrate angrenzend, wenn sie sich eine Seite teilen. Was ist die kleinstmögliche Anzahl von Käfern, die alle anderen infizieren konnten?

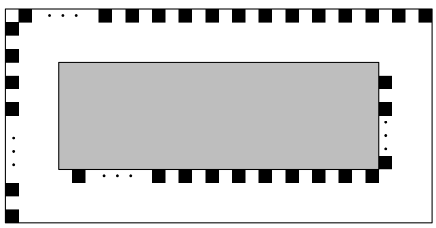


Ergebnis: 2630

Lösungsweg: Zunächst wird die Anfangssituation betrachtet, in der k hustende Käfer auf das Brett gesetzt werden. Jedes Quadrat, auf dem ein hustender Käfer sitzt, wird als *kontaminierte* Fläche bezeichnet. Die Summe der Umfänge aller kontaminierten Flächen ist folglich höchstens $4k$. Sie ist genau dann gleich $4k$, wenn sich keine zwei kontaminierten Quadrate eine Seite teilen.
Ein zu Beginn nicht mit einem hustenden Käfer besetztes Quadrat kann auf zweierlei Arten kontaminiert werden: An zwei gegenüber liegende Seiten oder aber an zwei benachbarte Seiten grenzt jeweils ein kontaminiertes Quadrat. In beiden Fällen ändert sich die Summe der Umfänge aller kontaminierten Flächen nicht. Das bedeutet, dass die Summe S der Umfänge aller kontaminierten Flächen bei Ausbreitung der Kontaminierung eine Invariante ist.
Sollen also als Endzustand alle Quadrate des gegebenen Brettes kontaminiert sein, so muss $S = P$ gelten, wobei P der Umfang des Schachbrettes mit Loch ist. Es ist

$$P = 2(2020 + 1010 + (2020 - 400) + (1010 - 400)) = 10520$$

und aus $4k \geq S = P$ folgt $k \geq P/4 = 2630$.
Das folgende Bild zeigt für die Startsituation eine Anordnung mit $P/4 = 2630$ hustenden Käfern, die in der Tat im Laufe der Zeit alle anderen Käfer anstecken werden.



Aufgabe 53. Eine positive ganze Zahl hat 25! unterschiedliche positive Teiler. Finde heraus, wie viele höchstens davon die fünfte Potenz einer Primzahl sein können.

Hinweis: Das Symbol $n!$ bezeichnet das Produkt aller positiven ganzen Zahlen kleiner oder gleich n.

Ergebnis: 27

Lösungsweg: Eine positive ganze Zahl $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ mit paarweise verschiedenen Primfaktoren p_i hat genau $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ positive Teiler. Die maximale Anzahl der fünften Potenzen einer Primzahl, die n teilt, ist gleich der maximalen Anzahl der Faktoren größer oder gleich 6 in einer Faktorisierung von 25!. Um das Maximum zu erhalten, ordnet man die Faktoren in der Primfaktorzerlegung

$$25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$$

etwas um: Die Primzahlen größer als 5 bleiben stehen, die Faktoren 5 und 3 werden jeweils mit einem Faktor 2 kombiniert und schließlich wird 2^6 als 8^2 geschrieben. Daraus ergibt sich die maximale Anzahl von 27.

Aufgabe 54. Drei positive reelle Zahlen x, y und z erfüllen folgende Bedingungen:

$$x^2 + xy + y^2 = 1,$$
$$y^2 + yz + z^2 = 2,$$
$$z^2 + zx + x^2 = 3.$$

Bestimme den Wert von $xy + yz + zx$.

Ergebnis: $2\sqrt{2/3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Lösungsweg: Durch Addieren der ersten und dritten Gleichung und zweimaligem Subtrahieren der zweiten Gleichung erhält man

$$(2x - y - z)(x + y + z) = 0$$

und da x, y und z positiv sind, gilt $2x = y + z$. Setze $y = x - \delta$, $z = x + \delta$ und substituiere diese Ausdrücke in den Gleichungen der Angabe. Damit erhält man

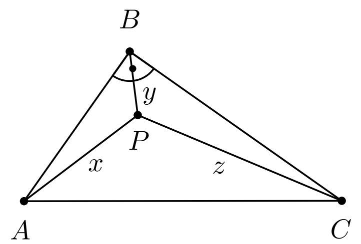
$$3x^2 - 3x\delta + \delta^2 = 1,$$
$$3x^2 + \delta^2 = 2,$$
$$3x^2 + 3x\delta + \delta^2 = 3.$$

Aus der ersten und dritten neuen Gleichung ergibt sich sofort $x\delta = 1/3$. Wenn man diesen Ausdruck in die zweite neue Gleichung einsetzt, erhält man eine quadratische Gleichung mit den Lösungen

$$\delta^2 = 1 \pm \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Nun muss noch $xy + yz + zx = 3x^2 - \delta^2 = 2 - 2\delta^2$ berechnet werden. Da das Ergebnis positiv sein muss, ist die einzige Möglichkeit $2\sqrt{2/3}$.

Alternativer Lösungsweg: Wähle einen Punkt P in der Ebene und zeichne Strecken PA, PB und PC mit den jeweiligen Längen x, y und z, so dass $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$ gilt. Mit $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$ und dem Kosinussatz liefern die gegebenen Gleichungen $\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = \sqrt{2}$ und $\overline{AC} = \sqrt{3}$. Deshalb ist $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Dieser Flächeninhalt kann auch unter Verwendung dreier Dreiecke mit dem gemeinsamen Eckpunkt P als

$$S = \frac{1}{2}\sin(120°)(xy + yz + zx)$$

berechnet werden. Wegen $\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ folgt nun $xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Aufgabe 55. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit Inkreismittelpunkt I, Umkreismittelpunkt O und den Eigenschaften $\overline{AB} = 495$, $\overline{AC} = 977$ und $\angle AIO = 90°$. Bestimme die Länge der Seite BC.

Ergebnis: 736

Lösungsweg: Die Bilder von Punkten, die durch eine zentrische Streckung mit Streckungsfaktor 2 und Zentrum A entstehen, werden durch Hinzufügen eines Striches gekennzeichnet. Dann ist offensichtlich AO' ein Durchmesser des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ und wegen $\angle AIO = 90° = \angle AI'O'$ liegt auch I' auf dem Umkreis (Thaleskreis). Da AI' die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BAC$ ist, folgt aus dem Südpolsatz, dass I' der Mittelpunkt desjenigen Bogens $\overset{\frown}{BC}$ ist, der A nicht enthält. Der Punkt I' wird deshalb im Folgenden mit M bezeichnet. Aus dem Satz vom Dreizack folgt, dass B, I und C auf einem Kreis um M liegen, weshalb $\overline{MI} = \overline{MC}$ gilt. Mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes erhält man $\angle BCM = \angle BAM = \angle MAC$. Bezeichnet man den Schnittpunkt von AM und BC mit D, so erhält man die ähnlichen Dreiecke $\triangle DMC$ und $\triangle AMC$ und hieraus

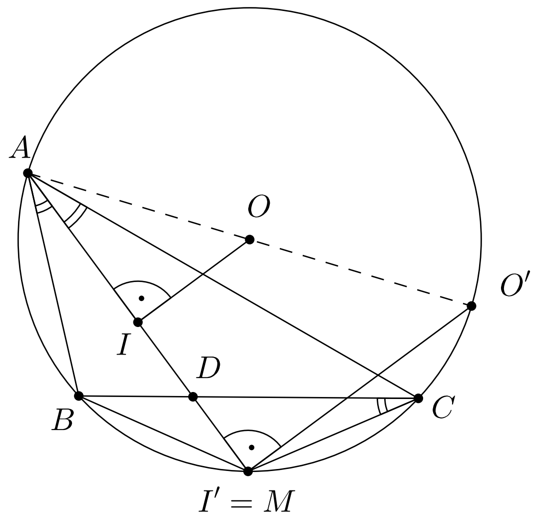
$$\frac{\overline{MD}}{\overline{MI}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MI}}{\overline{MA}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist $\overline{DI} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AI}$, weshalb der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle BCI$ genau ein Drittel des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle ABC$ beträgt. Drückt man den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ durch den Inkreisradius r und den halben Umfang aus, so erhält man hieraus die Gleichung

$$\frac{1}{2} r \cdot \overline{BC} = \frac{1}{6} r \cdot (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA})$$

und durch einfache Umformungen folgt

$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2} = \frac{495 + 977}{2} = 736.$$



Aufgabe 56. Bestimme alle Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen, die die Gleichung $3abc = 2a + 5b + 7c$ erfüllen.
Ergebnis: $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$, $(12, 1, 1)$
Lösungsweg: Teilt man die Gleichung durch die positive Zahl abc, so erhält man

$$3 = \frac{2}{bc} + \frac{5}{ca} + \frac{7}{ab}.$$

Wenn alle drei Unbekannten größer als 1 sind und mindestens eine davon größer als 2 ist, dann ist die rechte Seite höchstens

$$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{2 \cdot 2} = \frac{35}{12} < 3.$$

Also gibt es unter diesen Annahmen keine Lösung. Man sieht leicht, dass auch $a = b = c = 2$ zu keiner Lösung führt, weshalb mindestens eine der Zahlen a, b, c gleich 1 sein muss.
Wenn $a = 1$ ist, dann vereinfacht sich die gegebene Gleichung zu

$$3bc = 2 + 5b + 7c,$$

was sich nach Multiplikation mit 3 zu der Gleichung

$$(3b - 7)(3c - 5) = 41$$

faktorisieren lässt. Da beide Faktoren positive Teiler der Primzahl 41, die beim Teilen durch 3 den Rest 2 lässt, sein müssen, gibt es nur die eine Lösung $b = 16$ und $c = 2$.
Falls $b = 1$ ist, so erhält man

$$3ac = 2a + 5 + 7c$$

und eine analoge Umformung ergibt

$$(3a - 7)(3c - 2) = 29,$$

was wie vorher zu einer einzigen möglichen Lösung $a = 12$ und $c = 1$ führt.
Für $c = 1$ ergibt sich die Gleichung

$$(3a - 5)(3b - 2) = 31$$

mit den Lösungen $a = 12$, $b = 1$ und $a = 2$, $b = 11$, wobei erstere bereits im vorherigen Fall gefunden wurde.
Insgesamt gibt es also drei Lösungstripel, nämlich $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$ und $(12, 1, 1)$.

Aufgabe 57. Auf einer Party ist jeder Gast mit genau vierzehn anderen Gästen befreundet (ihn oder sie selbst nicht mit eingeschlossen). Jeweils zwei Freunde haben genau sechs andere anwesende Freunde gemeinsam, hingegen hat jedes Paar von Nicht-Freunden nur zwei Freunde gemeinsam. Wie viele Gäste sind auf der Party?

Ergebnis: 64

Lösungsweg: Wähle einen Gast x zusammen mit all seinen Freunden aus und nenne diese Gruppe von 15 Personen H. Sei y ein Mitglied von H, das sich von x unterscheidet. Dann hat y genau 7 Freunde außerhalb von H, denn von den 14 Freunden von y ist einer x und weitere sechs Mitglieder von H sind gemeinsame Freunde von x und y. Also gibt es insgesamt $c = 14 \cdot 7 = 98$ Paare (y, z), wobei y ein Mitglied von H ist, das sich von x unterscheidet, und z ein Freund von y ist, welcher sich nicht in H befindet. Die Zahl c kann jedoch auch wie folgt berechnet werden: Jeder Gast z außerhalb von H hat genau zwei Freunde in H, da x der Definition von H nach kein Freund von z ist, und beide gemeinsamen Freunde von x und z befinden sich in H. Mit anderen Worten, c ist doppelt so groß wie die Anzahl der Gäste außerhalb von H. Somit sind $98/2 = 49$ Gäste nicht in H. Da H selber aus 15 Gästen besteht, nehmen an der Party $15 + 49 = 64$ Personen teil.
Solch eine Konfiguration der Beziehungen zwischen 64 Gästen ist tatsächlich möglich: Schreibe die Gäste in die Zellen einer 8×8-Tabelle und lasse jeweils zwei Gäste genau dann Freunde sein, wenn sie sich in derselben Zeile oder Spalte befinden. Es ist leicht zu erkennen, dass die Bedingungen der Aufgabenstellung dann erfüllt sind.

Aufgabe 58. Ein Punkt P liegt im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ und es seien die Bedingungen

$$\overline{AP} = \sqrt{3}, \quad \overline{BP} = 5, \quad \overline{CP} = 2, \quad \overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1 \quad \text{und} \quad \angle BAC = 60^\circ$$

erfüllt. Wie lautet dann der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$?

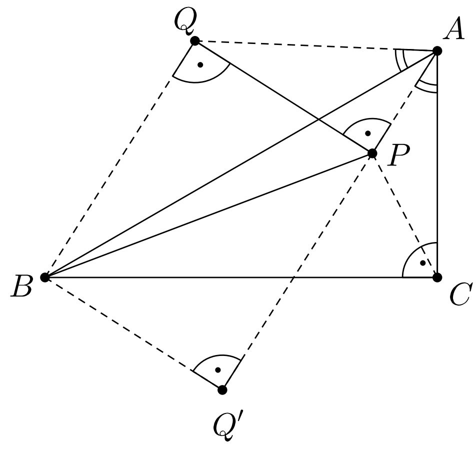
Ergebnis: $\dfrac{6 + 7\sqrt{3}}{2}$

Lösungsweg: Aus dem 60°-Winkel und dem Verhältnis seiner anliegenden Seiten ist ersichtlich, dass das Dreieck $\triangle ABC$ ein halbes gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $\overline{AB}$ ist. Insbesondere ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel.
Sei nun Q derjenige Punk, der bezüglich der Strecke AB gegenüber von C liegt, sodass $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$ gilt. Die beiden Dreiecke sind ähnlich mit einem Faktor $\overline{AB} : \overline{AC} = 2$. Daraus ergibt sich $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{AP} = 2\sqrt{3}$ und $\overline{BQ} = 2 \cdot \overline{CP} = 4$. Zusammen mit der Gleichheit $\angle QAB = \angle PAC$ folgt $\triangle AQP \sim \triangle ABC$. Somit gilt auch $\angle APQ = 90^\circ$ und mit dem Satz von Pythagoras

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3.$$

Wegen $\overline{BP}^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{PQ}^2$ ergibt sich $\angle BQP = 90^\circ$ aus der Umkehrung des Satzes von Pythagoras. Sei nun Q' das Bild von Q unter Spiegelung am Mittelpunkt der Strecke BP. Das Dreieck $\triangle AQ'B$ ist dann rechtwinklig und mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich $\overline{AB}^2 = \overline{PQ}^2 + (\overline{AP} + \overline{BQ})^2 = 28 + 8\sqrt{3}$. Der gesuchte Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist somit

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \overline{AB}^2 = \frac{6 + 7\sqrt{3}}{2}.$$



Aufgabe 59. Sei $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit nicht-negativen ganzzahligen Koeffizienten, sodass

$$P\left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right) = 2020.$$

Finde den kleinstmöglichen Wert für $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

Ergebnis: 22

Lösungsweg: Sei $u = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$. Wir wollen $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1)$ minimieren. Wir gehen in fünf Schritten vor.
Schritt 1: Wir stellen fest, dass u eine Nullstelle des Polynoms $G(x) = x^2 + x - 5$ ist und dividieren $P(x)$ durch $G(x)$. Das heißt, wir schreiben

$$P(x) = Q(x)G(x) + Ax + B$$

mit ganzen Zahlen A, B und einem Polynom Q mit ganzzahligen Koeffizienten (da 1 der führende Koeffizient von $G(x)$ ist).
Schritt 2: Da $P(u) - 2020 = 0$ und da A, B ganzzahlig sind und u irrational ist, schließen wir, dass $A = 0$ und $B - 2020 = 0$, also

$$P(x) = Q(x)G(x) + 2020. \tag{$\star$}$$

Schritt 3: Wenn einer der Koeffizienten von $P(x)$, sagen wir a_k, größer oder gleich 5 ist, dann erfüllt das Polynom $\tilde{P}(x) = P(x) + G(x)x^k = P(x) + (x^2 + x - 5)x^k$ ebenfalls alle Bedingungen und $\tilde{P}(1) = P(1) - 3$. Wenn wir diese Prozedur so oft anwenden, bis alle Koeffizienten $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ sind, erhalten wir ein Polynom $R(x)$ mit $R(u) = 0$.
Schritt 4: Wir stellen fest, dass das Polynom R mit diesen Eigenschaften eindeutig ist. Tatsächlich erfüllt jedes solche Polynom die Gleichung ($\star$) mit entsprechendem $Q(x)$. Um $0 \leq a_0 \leq 4$ zu erhalten, wobei a_0 der konstante Koeffizient von $R(x)$ ist, muss der konstante Koeffizient von $Q(x)$ gleich $q_0 = 404$ sein. Da wir alle Koeffizienten von G kennen und der Absolutwert des konstanten Koeffizienten 5 ist, können wir den linearen Koeffizienten q_1 aus der Gleichung ($\star$) berechnen. Die Eindeutigkeit von $Q(x)$ ergibt die Eindeutigkeit von $R(x)$.
Schritt 5: Nun wenden wir die Prozedur von Schritt 3 an und starten mit dem Polynom $P_0(x) = 2020$. Im nächsten Schritt berechnen wir $P_1(x) = P_0(x) + 404 \cdot G(x) \cdot x^0$. Danach erhalten wir mit der gleichen Prozedur die folgenden Polynome:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 404x^2 + 404x \\
P_2(x) &= 80x^3 + 484x^2 + 4x \\
P_3(x) &= 96x^4 + 176x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_4(x) &= 35x^5 + 131x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_5(x) &= 26x^6 + 61x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_6(x) &= 12x^7 + 38x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_7(x) &= 7x^8 + 19x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_8(x) &= 3x^9 + 10x^8 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_9(x) &= 2x^{10} + 5x^9 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_{10}(x) &= x^{11} + 3x^{10} + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x.
\end{aligned}$$

Das gesuchte Minimum ist also $P_{10}(1) = 1 + 3 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 = 22$.