Ülesanne 1. Kui nelja erineva positiivse täisarvu aritmeetiline keskmine on 10, siis mis on neist suurima arvu suurim võimalik väärtus?

Vastus. 34

Lahendus. Et üks arv oleks suurim, peavad teised olema võimalikult väikesed. Kuna arvud on erinevad, saavad kolm vähimat arvu olla 1, 2 ja 3. Et arvude keskmine oleks 10, peab arvude summa olema $4 \cdot 10 = 40$, järelikult peab viimane arv olema $40 - (1 + 2 + 3) = 34$.

Ülesanne 2. Kui $x = 4$ on ruutvõrrandi $x^2 + mx + 2020 = 0$ lahend, kus m on täisarv, siis mis on selle ruutvõrrandi teine lahend?

Vastus. 505

Lahendus. Kuna 4 on lahend, siis $4^2 + 4m + 2020 = 0$ ehk $m = -509$. Meie võrrand on nüüd $x^2 - 509x + 2020 = 0$, mille lahenditeks on 4 ja 505.

Alternatiivselt, kui s on võrrandi teine lahend, siis

$$x^2 + mx + 2020 = (x - 4)(x - s) = x^2 - 4x - sx + 4s$$

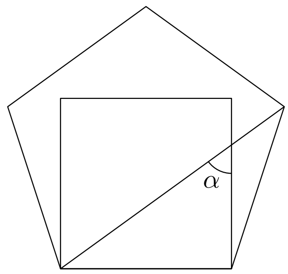
ning vabaliikmete võrdlus annab $4s = 2020$, kust $s = 505$.

Ülesanne 3. Arvu 95 jagamisel positiivse täisarvuga N tekib jääk 4. Mis on N vähim võimalik väärtus?

Vastus. 7

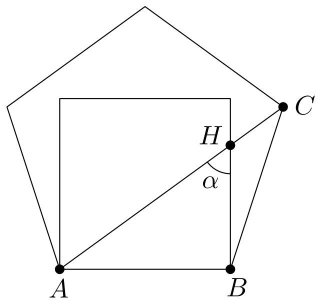
Lahendus. Kuna N on suurem kui 1 ning jagab arvu $95 - 4 = 91 = 7 \cdot 13$, siis vähim võimalik N väärtus on 7.

Ülesanne 4. Ruut ning korrapärane viisnurk asetsevad nagu alljärgneval pildil. Leia nurga α suurus kraadides.



Vastus. 54°

Lahendus. Tähistame punktid nagu joonisel.



Korrapärase viisnurga sisenurga suurus on 108°. Kolmnurk ABC on võrdhaarne ning $\angle ABC = 108°$, seega

$$\angle BAH = \angle BAC = \tfrac{1}{2}(180° - 108°) = 36°.$$

Kuna ABH on täisnurkne kolmnurk täisnurgaga tipu B juures, siis

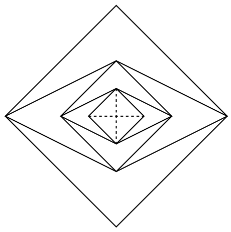
$$\alpha = \angle AHB = 180° - 90° - 36° = 54°.$$

Ülesanne 5. Bussipeatuses peatuvad kolm eri bussiliini A, B ja C ning bussid saabuvad peatusesse vastavalt iga 12, 10 ja 8 minuti tagant. Lotte kõndis peatusest mööda ning märkas, et kõik kolm bussiliini lahkusid peatusest samaaegselt. Mitme minuti pärast juhtub see esimest korda uuesti?

Vastus. 120

Lahendus. Otsitud minutite arv peab olema iga kolme arvu kordne, ning kuna me otsime vähimat sellist arvu, on see arvude 12, 10 ja 8 vähim ühiskordne, milleks on arv 120.

Ülesanne 6. Romblill kasvab järgmiste reeglite järgi: lille keskel on ruudukujuline õis, mille diagonaalide pikkus on 1. Esimesel sammul kahekordistame me horisontaalse diagonaali pikkuse ning saame uue õie. Teisel sammul kahekordistame me vertikaalse diagonaali pikkuse ning saame taas uue õie. Me jätkame samamoodi, kuni meie lillel on viis õit. Leia välimise (ehk viienda) õie ümbermõõt.



Vastus. $8\sqrt{2}$

Lahendus. Viies õis on ruut, mille diagonaalid on pikkusega 4, seega ruudu küljepikkus on $2\sqrt{2}$ ning ümbermõõt on $8\sqrt{2}$.

Ülesanne 7. Botaanik istutas kaks taime P_1 ja P_2 ning märkis ära nende kõrgused. Nädal aega hiljem, kui taimed olid kasvanud sama protsendi võrra, mõõtis ta neid uuesti ning märkas, et P_1 oli sama suur kui P_2 oli eelmine nädal olnud ning P_2 oli 44% suurem kui P_1 oli eelmine nädal olnud. Mitme protsendi võrra kasvasid taimed selle nädala jooksul?

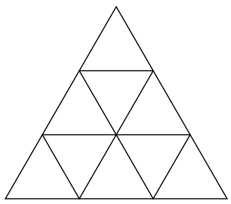
Vastus. 20%

Lahendus. Olgu P_1 ja P_2 taimede algsed kõrgused. Kuna mõlemad taimed kasvasid sama protsendi võrra, siis nende uued kõrgused on vastavalt kP_1 ja kP_2 mingi reaalarvu $k > 1$ jaoks ning $(k-1) \cdot 100\%$ on otsitav suurus. Mõõtmistulemustest järeldub

$$\begin{aligned} kP_1 &= P_2, \\ \frac{kP_2}{P_1} &= 1.44. \end{aligned}$$

Asendades esimese võrrandi teise ning taandades P_1 saame me $k^2 = 1.44$, kust $k = 1.2$. Järelikult kasvasid taimed 20 protsenti.

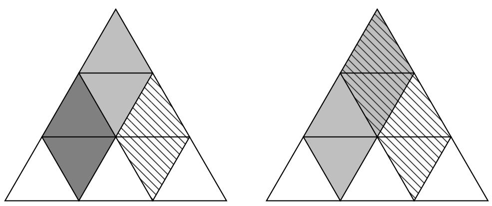
Ülesanne 8. Mitu rööpkülikut on järgneval pildil?



Vastus. 15

Lahendus.

Iga suure kolmnurga tipu jaoks on kolm rombi suunatud selle tipu suunas ning kaks 1×2 rööpkülikut, mille üks tipp kattub selle kolmnurga tipuga. Järgnev pilt näitab neid rööpkülikuid ülemise tipu jaoks.



Teisi rööpkülikuid pildil ei esine, järelikult on kokku $3 \cdot (2+3) = 15$ rööpkülikut.

Ülesanne 9. Bussifirma pakub reisibusse 27 või 36 istekohaga. Turistigrupp, kus on 505 liiget, tahab selle firma bussidega reisida. Firma valib bussid niimoodi, et tühjade istekohtade arv N kõikide busside peale kokku on võimalikult väike. Leia N.

Vastus. 8

Lahendus. Me otsime vähimat arvu $s \geq 505$ kujul $s = 27x + 36y$, kus x ja y on vastavalt esimese ja teise tüübi busside arv. Kuna arvude 27 ja 36 suurim ühistegur on 9, peab s olema arvu 9 kordne. Vähim arvu 9 kordne, mis on suurem või võrdne arvuga 505 on 513 ja kuna $513 = 27 \cdot 3 + 36 \cdot 12$, on otsitav vastus $513 - 505 = 8$.

Ülesanne 10. Bruno ostis kaks ühesugust hundipilti ning neli ühesugust rebasepilti. Ta soovib need pildid riputada üksteise kõrvale oma elutoa seinale kuue naela otsa. Lisaks tahab Bruno iga päev pilte ümber paigutada nii, et saadud järjestust ei ole ühelgi varasemal päeval esinenud. Viimaks ei taha Bruno, et kaks hundipilti kunagi üksteise kõrval ripuksid. Maksimaalselt mitu päeva saab Bruno soov täituda?

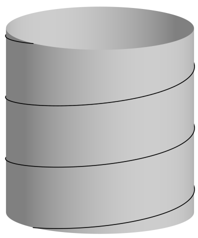
Vastus. 10

Lahendus. Me otsime erinevate piltide järjestuste arvu, kus hundipildid ei asu üksteise kõrval. Vasakpoolse hundipildi saab riputada esimese, teise, kolmanda ning neljanda naela otsa, ning parempoolse pildi saab vastavalt riputada järgnevate naelte otsa:

$$\begin{aligned} 1 &: 3, 4, 5, 6 \\ 2 &: 4, 5, 6 \\ 3 &: 5, 6 \\ 4 &: 6, \end{aligned}$$

seega on kokku 10 erinevat sobivat järjestust.

Ülesanne 11. Silindri kõrgus on 18 cm ning ümbermõõt 8 cm. Silindri ümber on kolm korda keeratud niidijupp, mis algab silindri põhjast ning lõpeb silindri ülemisel äärel täpselt alguspunkti kohal. Mis on niidi pikkus sentimeetrites?



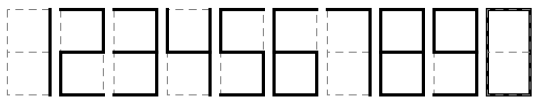
Vastus. 30

Lahendus. Kui me voldime silindri lahti, siis me näeme, et niit tõuseb iga tiir 6 cm võrra ning liigub samal ajal horisontaalselt 8 cm. Pythagorase teoreemi kohaselt on ühe tiiru pikkus

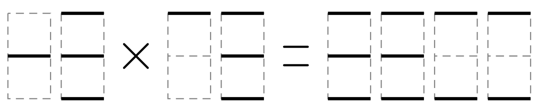
$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10\,\text{cm}.$$

Kuna niit teeb ümber silindri kolm tiiru, siis niidi kogupikkus on 30 cm.

Ülesanne 12. Korrektselt funktsioneeriv kalkulaator näitab numbreid järgnevalt:



Alberti kalkulaator kukkus maha ning näitab nüüd ainult numbrite horisontaalseid osasid. Veendumaks, et kalkulaator arvutab jätkuvalt õigesti, tegi Albert järgmise tehte:



Mis on kõigi selles avaldises esinevate numbrite summa?

Vastus. 33

Lahendus. Viimased kaks numbrit peavad olema nullid. Esimese teguri esimene number peab olema 4 ning teise teguri esimene number peab olema 7. Kuna korrutis jagub sajaga ning järelikult 25ga, peab üks teguritest jaguma arvuga 25 või peavad mõlemad tegurid jaguma arvuga 5. Kuna ükski kahekohaline arv, mille esimene number on 4, ei jagu 25ga, siis peab teine tegur jaguma viiega ning kuna see ei lõpe nulliga, siis peab see tegur olema 75. Kuna korrutis jagub neljaga, peab esimene tegur jaguma neljaga, seega peab see olema 48. Järelikult tegi Albert tehte $48 \times 75 = 3600$, mille numbrite summa on 33.

Ülesanne 13. Adalbert pidi kaks arvu kokku liitma, kuid ta kirjutas kogemata ühe arvu lõppu lisanumbri. Selle tulemusena sai ta summaks arvu 12345 asemel arvu 44444. Mis oli väiksem arv, mida Adalbert algselt liita tahtis?

Vastus. 3566

Lahendus. Olgu Adalberti kaks arvu x ja y ning olgu c number, mille Adalbert arvu x lõppu kirjutas. Siis

$$x + y = 12345 \quad \text{ning} \quad (10x + c) + y = 44444,$$

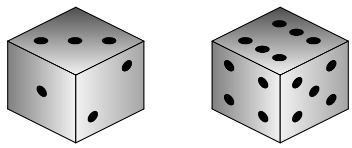
järelikult

$$9x + c = 32099.$$

Seega peab c olema 5, kuna $32099 - c$ peab jaguma üheksaga. Järelikult $x = 3566$ ja $y = 8779$.

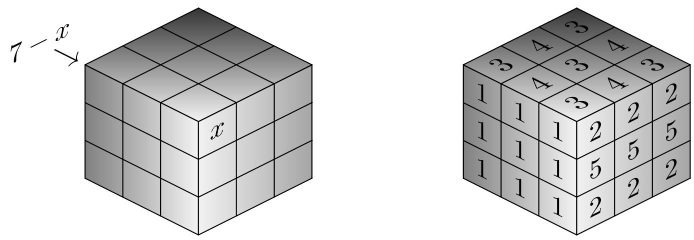
Ülesanne 14. Susumul on 27 harilikku täringut. Ta liimib täringud kokku ning saab suurema $3 \times 3 \times 3$ kuubiku. Susumu liimib täringud kokku nii, et igal kahel küljel, mis kokku liimitakse, on sama arv silmi. Mis on maksimaalne silmade arv, mis suure $3 \times 3 \times 3$ kuubi kuuel välisküljel saab nähtav olla?

Märkus: Järgneval kahel pildil on näha hariliku täringu silmade asetust - hariliku täringu vastastahkude summa on alati 7.

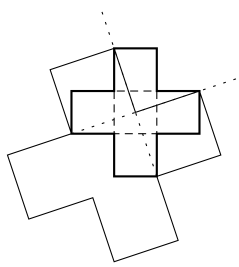


Vastus. 189

Lahendus. Paneme tähele, et suure kuubi vastastahkude summa on alati 7, nagu näha vasakpoolsel pildil. Suurel kuubil on 27 paari vastastahke, seega olenemata Susumu liimimisest on silmade koguarv $27 \cdot 7 = 189$. Üks võimalik liimimine on näidatud parempoolsel pildil.

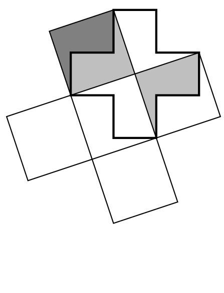


Ülesanne 15. Klaus joonistas väikese X-kujulise viiest samasugusest ruudust koosneva kujundi. Seejärel lisas ta joonisele katkendjoonega selle kujundi kaks ristuvat diagonaali, ning konstrueeris suurema X-kujulise kujundi, mille mõned küljed asuvad osaliselt algse kujundi diagonaalidel, nagu näha alljärgneval pildil. Leia suure ja väikese kujundi pindalade suhe.



Vastus. 5 : 2.

Lahendus. Diagonaalid jagavad väikese X-kujulise kujundi neljaks võrdseks osaks. Kaks sellist osa saab kokku liimida, et saada üks ruut suuremas kujundis, nagu näha alljärgneval pildil. Seega suur kujund koosneb kümnest sellisest osast ning soovitud pindalade suhe on $10 : 4 = 5 : 2$.



Ülesanne 16. Mitmel palindroomil vahemikus 10^3 kuni 10^7 on numbrite summa paarisarv?

Märkus: *Palindroom* on arv, mis jääb samaks, kui ta numbrite järjekord tagurpidi pöörata, näiteks 12321.

Vastus. 5940

Lahendus. Kõik palindroomid vahemikus 10^3 kuni 10^4 koosnevad paarisarvust (neljast) numbrist, seega iga sellise palindroomi numbrite summa on paarisarv. Kõik palindroomid selles vahemikus esituvad kujul $\overline{abba}$, kus a ja b on ükskõik millised numbrid ning a ei ole null. Järelikult on selles vahemikus 90 palindroomi. Samamoodi leiame me, et vahemikus 10^5 kuni 10^6 on 900 palindroomi ning nende kõigi numbrite summa on paaris.

Palindroomid vahemikus 10^4 kuni 10^5 esituvad kujul $\overline{abcba}$, kus a, b ja c on numbrid ning a on nullist erinev. On lihtne näha, et sellise arvu numbrite summa on paaris parajasti siis, kui c on paaris. Seega leidub arvu a valikuks 9 varianti, arvu b valikuks 10 varianti ning arvu c valikuks 5 varianti ehk kokku on antud vahemikus $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ palindroomi. Samamoodi leiame me, et vahemikus 10^6 kuni 10^7 leidub 4500 palindroomi, mille numbrite summa on paarisarv.

Kokkuvõttes saame me, et vahemikus 10^3 kuni 10^7 leidub $90 + 900 + 450 + 4500 = 5940$ palindroomi, mille numbrite summa on paaris.

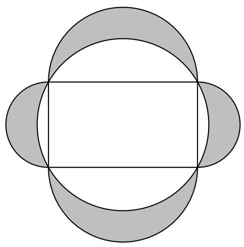
Ülesanne 17. Naiskooris on kuuskümmend lauljat: 20 sopranit, 20 metsosopranit ning 20 alti. Igas kolmest häälest on kuus lauljat väga osavad ning suudavad vajadusel laulda ükskõik mis hääles, teised lauljad suudavad laulda vaid enda hääles. Mis on suurim täisarv S, mille korral saavad S laulja haigeks jäämise korral ülejäänud lauljad ennast ümber jagada nii, et igas hääles oleks vähemalt kümme lauljat?

Vastus. 22

Lahendus. Kui näiteks kõik aldid ning veel kolm osavat lauljat haigeks jäävad, siis jääb üle vaid 9 osavat lauljat, seega ei ole võimalik kümmet aldihäält kokku saada. Järelikult $S < 23$.

Kui mingid lauljad haigeks jäävad, siis paneme tähele, et olukorda saab muuta ainult hullemaks see, kui tavaliste lauljate asemel jäävad haigeks osavad lauljad. Järelikult, kui 22 lauljat jäävad haigeks, võime me eeldada, et 18 neist on osavad lauljad, mistõttu jäid haigeks vaid 4 tavalist lauljat ning me näeme, et igast häälest on vähemalt 10 lauljat järel. Järelikult $S \geq 22$ ning kokkuvõttes $S = 22$.

Ülesanne 18. Ristküliku, mille küljepikkused on 3 ja 4, ümber tõmmatakse ringjoon ning selle ristküliku igale küljele joonestatakse poolring nagu näha alljärgneval joonisel. Joonisel on halliks värvitud ala, mis koosneb poolringide nendest osadest, mis suure ringi sisse ei jää. Mis on selle halli ala pindala?



Vastus. 12

Lahendus. Kasutades Pythagorase teoreemi leiame me, et ristküliku diagonaali pikkus on

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

See diagonaal on ümberringjoone diameeter, seega ringi pindala on $\pi(5/2)^2$. Poolringjoonte raadiused on vastavalt $4/2$ ja $3/2$, seega poolringide kogupindala on

$$2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 = \pi \left(\tfrac{5}{2}\right)^2.$$

Ristküliku ning poolringide poolt moodustatud ala pindala on

$$12 + \pi \left(\tfrac{5}{2}\right)^2.$$

Halli ala pindala saame, kui lahutame sellest suure ringjoone pindala, seega halli ala pindala on 12.

Alternatiivselt võime me ülesandele läheneda järgmiselt: Pythagorase teoreem annab meile suhte täisnurkse kolmnurga küljepikkuste ruutude kohta. Sama suhe kehtib ka poolringide kohta, ning me võime suurele ringjoonele tõmmata diameetri, et jagada see kaheks poolringiks. On lihtne järeldada, et iga kahe kõrvutiasuva halli ala pindala on pool suure ringi pindalast, seega halli ala kogupindala on ruudu pindala, milleks on $3 \cdot 4 = 12$.

Ülesanne 19. Leia suurim selline kolmekohaline algarv p_1, mille numbrite summa on kahekohaline algarv p_2 ning arvu p_2 numbrite summa on ühekohaline algarv p_3.

Vastus. 977

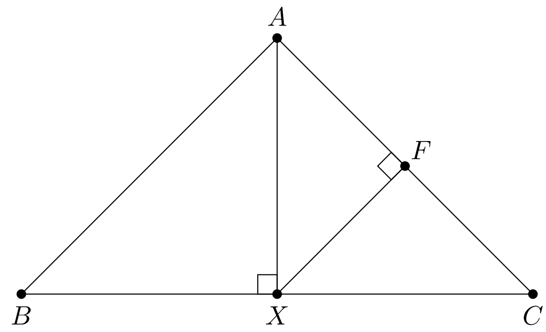
Lahendus. Kolmekohalise arvu numbrite summa on maksimaalselt $9+9+9=27$. Leidub viis kahekohalist algarvu, mis on maksimaalselt 27 - need on 11, 13, 17, 19 ja 23. Nende algarvude numbrite summad on vastavalt 2, 4, 8, 10 ja 5, järelikult jäävad ainsate võimalustena alles $p_2 = 11$ või $p_2 = 23$. Suurim kolmekohaline algarv, mille numbrite summa on 23, on 977. Suurim kolmekohaline algarv, mille numbrite summa on 11, on 911. Kuna $977 > 911$, siis otsitud vastus on 977.

Ülesanne 20. Kolmnurgas ABC, kus $AB = AC$, lõikuvad üks keskristsirge ja üks kolmnurga kõrgus ühesainsas punktis, mis asub ühel kolmnurga ABC külgedest. Leidke nurga ACB kõik võimalikud suurused kraadides.

Vastus. $45°$, $67.5°$

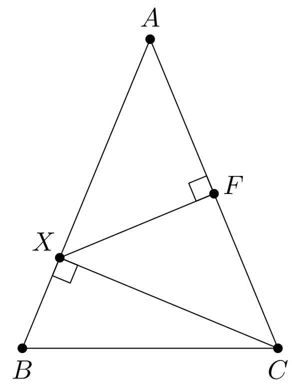
Lahendus. Olgu X keskristsirge ja kõrguse lõikepunkt ning F külje AC keskpunkt. Me vaatleme nüüd kõikvõimalikke X asukohti.

Kui X asub küljel BC, siis peab see olema tipust A tõmmatud kõrguse ja ühe keskristsirge lõikepunkt. Kolmnurga ABC sümmeetria tõttu on see kõrgus ühtlasti BC keskristsirge, seega lõikumine ühesainsas punktis saab toimuda ainult haarale tõmmatud keskristsirgega. Sümmeetria tõttu läbivad nii AB kui AC keskristsirged punkti X.



Kuna FX on AC keskristsirge, siis on kolmnurk AXC võrdhaarne. Samuti $\angle AXC = 90°$ ja seega $\angle ACB = \angle ACX = 45°$.

Kui X asub küljel AB, siis see peab olema tipust C tõmmatud kõrguse ja AC keskristsirge lõikepunkt.



Nagu ka eelmises juhus, on kolmnurk AXC võrdhaarne ja täisnurkne täisnurgaga tipu X juures, järelikult $\angle BAC = \angle XAC = 45°$. Seega

$$\angle ACB = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 67.5°.$$

Juht, kus X asub küljel AC, on analoogne.

Ülesanne 21. Leia arvu 3599 kõikide positiivsete jagajate summa.

Märkus: Arvud 1 ja 3599 kuuluvad jagajate hulka.

Vastus. 3720

Lahendus. Arvutame

$$3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1 = (60+1)(60-1) = 59 \cdot 61.$$

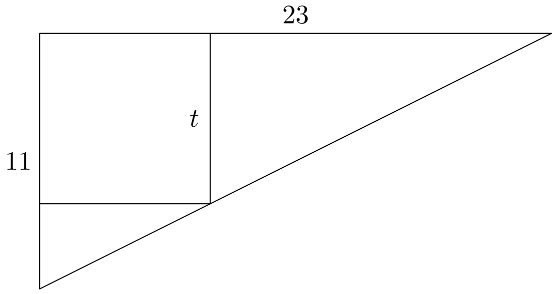
Kuna 59 ja 61 on mõlemad algarvud, siis vastus on $1 + 59 + 61 + 3599 = 3720$.

Ülesanne 22. Kuujänesed Tik, Sik ja Mik tegid lõkke ja küpsetasid vorste. Tik ostis 17 vorsti, Sik ostis 11 vorsti, ja Mik ei ostnud ühtegi vorsti. Kui nad olid kõik vorstid ära söönud, otsustasid nad kulud võrdselt ära jagada. Mitu eurot peaks Tik saama, kui Mik maksis jänestele võlgade katteks kokku 28 eurot?

Vastus. 23

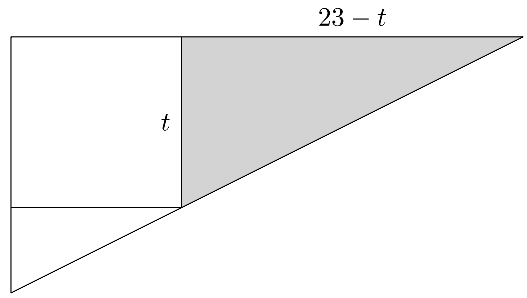
Lahendus. Mik maksis täpselt kolmandiku vorstide hinnast, järelikult maksid kõik vorstid kokku $28 \cdot 3 = 84$ eurot. Tik maksis 28st vorstist 17 eest ehk ta maksis $84 \cdot 17/28 = 51$ eurot. Kuna jänesed jagasid kulutused võrdselt, oleks ta pidanud maksma 28 eurot. Järelikult peaks Tik saama $51 - 28 = 23$ eurot.

Ülesanne 23. Täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused on 11 ja 23. Ruut küljepikkusega t on selline, et kaks ta külge asuvad kolmnurga kaatetitel ning üks tipp hüpotenuusil, nagu kujutatud juuresoleval pildil. Leia t väärtus.



Vastus. $\frac{253}{34}$

Lahendus. Pildil kujutatud hall kolmnurk on täisnurkne ning üks ta nurkadest kattub suure kolmnurgaga, järelikult need kaks kolmnurka on sarnased.



Kuna mõlemas kolmnurgas peab kaatetite suhe olema sama, saame me võrrandi

$$\frac{23-t}{t} = \frac{23}{11}$$

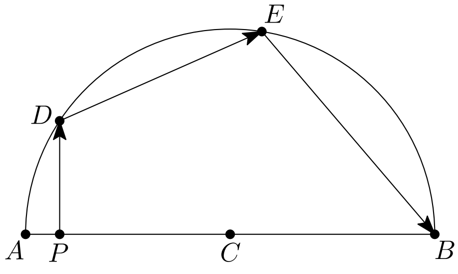
ning siit me leiame $t = 253/34$.

Ülesanne 24. Leia vähim positiivne täisarv n, mille korral $11 \cdot 19 \cdot n$ on võrdne kolme järjestikuse täisarvu korrutisega.

Vastus. 840

Lahendus. Kuna 11 ja 19 on algarvud, peab üks nendest kolmest järjestikusest arvust jaguma 11ga ning üks (mitte tingimata erinev arv) jaguma 19ga. Veelgi enam, kuna korrutis on positiivne, peavad kõik kolm arvu samuti positiivsed olema. Järelikult otsime me arvude 11 ja 19 väikeseid kordseid, mille vahe on maksimaalselt 2. Vähim selline paar on $3 \cdot 19 = 57$ ja $5 \cdot 11 = 55$, seega peame me lisama korrutisele arvu 56, et saada $55 \cdot 56 \cdot 57 = 11 \cdot 19 \cdot 840$. Järelikult on otsitud arv 840.

Ülesanne 25. Antud on poolring keskpunktiga C ja diameetriga AB. Punkt P küljel AB rahuldab järgnevaid tingimusi: laserkiir väljub punktist P külje AB suhtes ristisuunas, põrkub poolringilt punktides D ja E vastavalt peegeldumisseadusele ehk $\angle PDC = \angle EDC$ ja $\angle DEC = \angle BEC$, ning viimaks jõuab punkti B. Leia $\angle DCP$ kraadides.



Vastus. 36°

Lahendus. Olgu nurga $\angle DCP$ suurus x. Kuna D ja E asuvad mõlemad ringjoonel keskpunktiga C, siis on kolmnurk $\triangle DCE$ võrdhaarne alusega DE. Esimesest võrdusest $\angle PDC = \angle EDC$ järeldub, et $\triangle CDP$ on kongruentne poolega kolmnurgast $\triangle CDE$ (täpsemalt kolmnurgaga $\triangle CDM$, kus M on DE keskpunkt). Teisest võrdusest järeldub, et $\angle BCE = \angle ECD = 2\angle DCP (= 2x)$ ning kuna need kolm nurka annavad kokku sirgnurga, siis $x + 2x + 2x = 180° \Rightarrow x = \angle DCP = 36°$.

Ülesanne 26. Riigis on 2020 linna, mis on nummerdatud arvudega $1, 2, 3, \ldots, 2020$. Riigi president tahtis ehitada linnade vahele raudteevõrgu. Et raha kokku hoida, ehitas ta raudteeliinid vaid linnade a ja b vahele, $a < b$, mis rahuldasid järgnevat tingimust: arv b on arvu a kordne ning ei leidu sellist arvu c, et $a < c < b$, c on arvu a kordne ning b on arvu c kordne. Mitme teise linnaga on linnal 42 raudteeühendus?

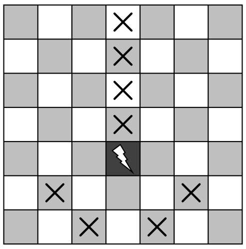
Vastus. 18

Lahendus. Vaatleme kahte omavahel ühendatud linna. Väidame, et ühel neist peab olema oma kanoonilises kujus täpselt üks algarv rohkem. Tõepoolest, neil ei saa olla samad algarvud samadel astmetel, kuna siis oleks tegu sama linnaga. Teisest küljest, kui ühel neist oleks kaks algarvu rohkem, siis olgu p ja q (mitte tingimata erinevad) algarvud ning olgu linnad a ja $b = a \cdot p \cdot q$ ühendatud. Siis $a \cdot p$ jagab arvu b, mis on vastuolus teise tingimusega.

Linnal 42 on kanooniline kuju $2 \cdot 3 \cdot 7$. Järelikult on linnu väiksema numbriga kui 42, mis on selle linnaga ühendatud, kolm tükki: nad esituvad kujudel $2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$ ja $3 \cdot 7$.

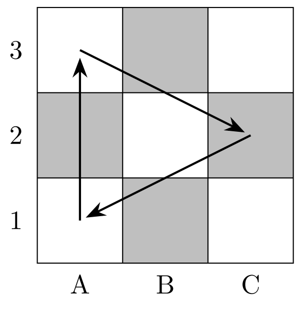
Linnad, mis on suurema arvuga kui 42, saame kirjutada kujul $42 \cdot p$, kus p on mingi algarv. Suurim tingimust $42 \cdot p < 2020$ rahuldav algarv on 47, järelikult $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. Siit saame me veel 15 linnaga 42 ühendatud linna, seega kokku on 18 otsitud linna.

Ülesanne 27. Anna leiutas uue maleviguri, mida ta kutsub *välguks.* Välk saab liikuda suunaga ettepoole nagu malevanker ning suunaga tahapoole nagu maleratsu, nagu näidatud alljärgneval pildil. Anna asetas välgu 3×3 mõõtmetega malelaua keskmisele ruudule ning liigutas seda 2020 korda. Maksimaalselt mitu korda sai välk ühte ja sama ruutu külastada? Välgu esialgne asukoht ei loe selle ruudu külastamisena.



Vastus. 673

Lahendus. On kerge näha, et kui välk liigub mõnelt ruudult mõnele teisele ruudule, siis ei saa ta järgmise käiguga esialgsele ruudule tagasi liikuda. Kuid välk saab esialgsele ruudule tagasi liikuda kahe käiguga ja seda isegi 3×3 malelaual, nagu me näeme järgnevalt pildilt:



Järelikult, kui välk jõuab ühele ruutudest A1, A3, või C2, saab ta hakata neid ruute kordama ning saab neid külastada igal kolmandal käigul.

Kui välk alustab ruudult B2, siis ta ainuke esimene käik on vankrikäik ruudule B3 ning seejärel ratsukäik ruudule A1 või C1. Seega ruudule A1 saab jõuda ruudult B2 kahe käiguga, kuid välk ei saa liikuda ruudule B2 ruutudelt A1 või C1 üheainsa käiguga, mistõttu kulub meil vähemalt kaks käiku, et oma tsükliga alustada. Seega jääb üle 2018 käiku ning kuna $2018 = 672 \cdot 3 + 2$, saab välk teha 672 tiiru. Järelikult külastab välk ruutu A1 673 korda.

Ülesanne 28. Mati ja tigu jooksid staadionil võidu. Nad alustasid võidujooksu samal ajal, jooksid samas suunas, ning said finišis kokku. Kuna tigu oli kiirem, läbis ta Matist rohkem ringe ning Mati läbis vaid kolm ringi. Mati ja tigu kohtusid 2020 korral (alguses ning finišis kohtutud korrad kaasa arvatud). Järgmisel päeval jooksid nad sama võidujooksu uuesti, kuid seekord vahetas Mati oma jooksusuunda, sealjuures kiirust muutmata. Mitu korda kohtusid Mati ja tigu teises võidujooksus?

Vastus. 2026

Lahendus. Oletame, et tigu läbis jooksu ajal n ringi. Teisisõnu, ühikutes ringi võidujooksu kohta oli Mati kiirus 3 ja teo kiirus n. Seega Mati taustsüsteemis oli teo kiirus $n-3$. Kuna nad kohtusid täpselt siis, kui nende vahe oli positiivne täisarv, kohtusid nad $n-3$ korda (stardis kohtumist arvestamata). Järelikult $n = 2022$. Kui nad jooksid eri suundades, siis oli nende kiiruste vahe Mati taustsüsteemis $n+3 = 2025$, seega kohtusid nad 2025 korda stardis kohtumist arvestamata ehk kokkuvõttes kohtusid nad 2026 korral.

Ülesanne 29. Giovanni mängib mängu, kus ta tegelane kogub kolme tüüpi mängunuppe: abinupud, ründenupud, ning kaitsenupud. Iga nupp saab olla mingil tasemel ühest kümneni. Mängus on võimalik kombineerida kaks erinevat tüüpi sama taseme nuppu, et saada kolmanda tüübi ühe taseme võrra kõrgem nupp. Näiteks võib kombineerida kolmanda taseme abinupu ning kolmanda taseme kaitsenupu, et saada neljanda taseme ründenupp. Mitu esimese taseme ründenuppu on Giovannil vaja koguda, et saada kümnenda taseme ründenupp, kui tal on piiramatu arv esimese taseme kaitse- ning abinuppe?

Vastus. 170

Lahendus. Olgu a_i, r_i, k_i vastavalt abi-, kaitse- ja ründenuppude arv tasemel i, mida läheb vaja, et saada üks kümnenda taseme ründenupp. Me teame, et $a_{10} = k_{10} = 0$, $r_{10} = 1$ ning reeglitest saame me,

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= k_i + r_i, \\ k_{i-1} &= r_i + a_i, \\ r_{i-1} &= a_i + k_i \end{aligned}$$

iga $i \in \{2, \ldots, 10\}$ jaoks. Nende reeglite alusel saame me täita 10×3 tabeli, mille esimene rida on $(0, 0, 1)$ ning igas järgnevas reas on iga arv kahe eelmises reas ja mitte samas tulbas asuva arvu summa:

0	0	1
1	1	0
1	1	2
3	3	2
5	5	6
11	11	10
21	21	22
43	43	42
85	85	86
171	171	170

Järelikult on vastus 170.

Alternatiivselt võime me tähele panna, et kuna abi- ja kaitsenupud on mängu seisukohast sümmeetrilised, siis $a_i = k_i$. Samuti on lihtne näidata induktsiooni abil, et $|r_i - a_i| = 1$; see kehtib $i = 10$ jaoks ning

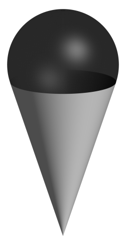
$$|r_{i-1} - a_{i-1}| = |(a_i + k_i) - (r_i + k_i)| = |a_i - r_i| = 1.$$

Viimaks leiame me

$$a_{i-1} + k_{i-1} + r_{i-1} = (k_i + r_i) + (r_i + a_i) + (a_i + k_i) = 2(a_i + k_i + r_i),$$

seega $a_1 + k_1 + r_1 = 2^9 = 512$. Kokkuvõtte seega $a_1 = k_1 = 171$ ja $r_1 = 170$.

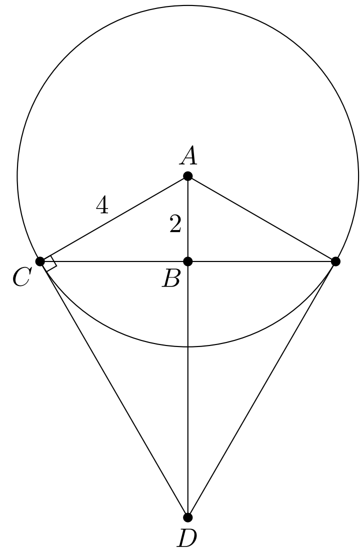
Ülesanne 30. Doktor Ave ostis endale jäätise. Jäätisepall on kera raadiusega 4 cm, mis asub koonusekujulises vahvlituutus. Ave märkas, et jäätisepall mahtus vahvlikoonusesse järgneval viisil: Jäätisepalli keskpunkt oli täpselt 2 cm koonuse põhjast kõrgemal ning koonuse pind lõppes täpselt seal, kus see kohtus keraga igas punktis puutujana. Mis oli koonuse ruumala?



Vastus. 24π

Lahendus. Olgu $AC = 4$ kera raadius, BC koonuse põhja raadius ning BD koonuse kõrgus, nagu märgitud alljärgneval joonisel. Pythagorase teoreemist kolmnurgas ABC leiame me $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 16 - 4 = 12$. Kolmnurkade ABC ja CBD sarnasusest järeldame me, et $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Järelikult on otsitud ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi BC^2 \cdot BD = \frac{1}{3}\pi BC^2 \frac{BC^2}{AB} = \frac{\pi \cdot 12^2}{3 \cdot 2} = 24\pi.$$



Ülesanne 31. Helmut moodustab kaks neljakohalist arvu, kasutades selleks igat numbritest 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, ja 9 täpselt ühe korra. Seejärel liidab Helmut kaks saadud arvu kokku. Leia saadud arvu suurim võimalik numbrite summa.

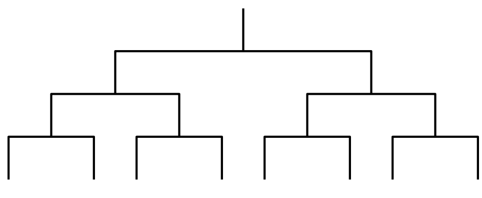
Vastus. 31

Lahendus. Tuletame esmalt meelde, kuidas kahte arvu liidetakse: me liidame numbreid koht koha haaval, ainsa erandiga, et ülekanded tuleb liita järgmisele summale. Teisisõnu liidame me neli numbripaari koos ülekannetega. Kuna me liidame iga kord vaid kahte numbrit, siis ülekanne on alati kas 1 või 0.

Olgu nüüd meie kaks arvu a ja b ja tähistame arvu n numbrite summat kui $S(n)$. Siis kehtib, et $S(a+b) = S(a)+S(b)-9\cdot c$, kus c on nullist erinevate ülekannete arv. Me leiame nüüd $S(a)+S(b) = 1+2+3+4+6+7+8+9 = 40$, seega võimalikud $S(a+b)$ väärtused on 40, 31, 22, 13 ja 4.

Märkame, et on võimatu saada tulemuseks 40, kuna liites 9 ükskõik millisele nullist erinevale numbrile, saame me tulemuseks vähemalt 10. Kuid 31 on saavutatav: võtame näiteks $9678 + 4321 = 13999$; $1 + 3 + 9 + 9 + 9 = 31$. Seega on vastuseks 31.

Ülesanne 32. Tenniseturniiril jaotatakse kaheksa mängijat suvaliselt pildil oleva tabeli kaheksa alumise kiire otstesse. Seejärel mängitakse kolm raundi vastavalt tabelile - alati liigub edasi mängu võitja. Meie turniiril osaleb kaks professionaalset mängijat ning kuus harrastajat, kellest üks on Leo. Professionaalne mängija võidab alati harrastajat ning iga kaks professionaali või harrastajat on samal tasemel. Mis on tõenäosus, et Leo jõuab finaali?



Vastus. $\frac{1}{14}$

Lahendus. Vaatame seda tabeli poolt, kust Leo turniiri alustab. Leo jõuab finaali parasjagu siis, kui mõlemad professionaalsed mängijad on tabeli teises pooles ning Leo võidab oma esimesed kaks mängu.

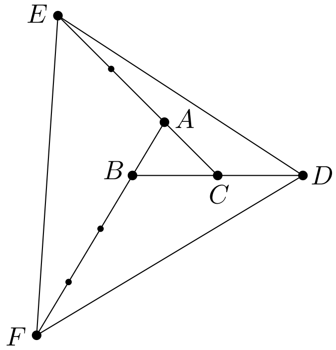
Olles Leo kuskile tabelisse paigutanud, on tõenäosus, et mõlemad professionaalid on tabeli teises pooles $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$. Kuna kõik harrastajad on samal tasemel, võidab Leo oma esimesed kaks mängu tõenäosusega $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Seega otsitav tõenäosus on $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$.

Ülesanne 33. Tahvlile on kirjutatud arvud
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}.$$
Igal sammul me valime kaks tahvlil kirjas olevat arvu a ja b, kustutame need ning kirjutame nende asemele arvu
$$\frac{ab}{a+2ab+b}.$$
Me kordame seda protsessi seni, kuni tahvlile on jäänud vaid üks arv. Leia selle arvu kõikvõimalikud väärtused.

Vastus. $\frac{1}{5248}$

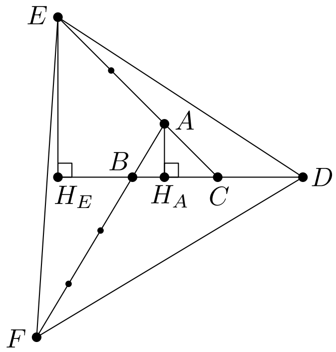
Lahendus. Paneme tähele, et kui arvud a ja b asendatakse arvuga n, siis
$$\frac{1}{n} = \frac{a+2ab+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2.$$
Järelikult tahvlile kirjutatud arvude pöördväärtuste summa muutub igal sammul kahe võrra suuremaks. Kuna me teeme kokku 99 sammu, siis rahuldab viimane tahvlile jäänud arv l võrrandit
$$\frac{1}{l} = 2 \cdot 99 + 1 + 2 + \cdots + 100 = 198 + \frac{101 \cdot 100}{2} = 5248.$$
Seega viimase arvu väärtus saab olla vaid $\frac{1}{5248}$.

Ülesanne 34. Antud on kolmnurk ABC pindalaga 1. Me pikendame selle kolmnurga vastavaid külgi BC, CA, AB punktideni D, E, ja F nagu pildil, kusjuures $BD = 2BC$, $CE = 3CA$ ja $AF = 4AB$. Leia kolmnurga DEF pindala.



Vastus. 18

Lahendus. Olgu H_A ja H_E vastavalt punktidest A ja E sirgele BC tõmmatud kõrguste aluspunktid.



Täisnurksed kolmnurgad CAH_A ja CEH_E on sarnased, seega tingimusest $CE = 3CA$ järeldub $EH_E = 3AH_A$. Kuna $CD = BD - BC = BC$, siis kolmnurga CDE pindala on
$$\tfrac{1}{2} \cdot CD \cdot EH_E = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AH_A = 3.$$
Samamoodi saame, et kolmnurkade AEF ja BFD pindalad on vastavalt $2 \cdot 4 = 8$ ja $3 \cdot 2 = 6$, seega otsitud pindala on $1 + 3 + 8 + 6 = 18$.

Ülesanne 35. Kuningriigi maksukogujad on kokku kogunud kolm kotti kuldmünte. Iga münt vastavalt esimeses, teises ja kolmandas kotis kaalub vastavalt 10, 11 ja 12 grammi. Kahjuks ajasid maksukogujad kotid sassi. Kuningal on kaal, mis näitab eseme raskust kuni mingi maksimaalse kaaluni $N \in \mathbb{N}$ - kui ese on raskem kui N, siis näitab kaal lihtsalt arvu N. Kuningas tahab kindlaks määrata, millises kotis on millised mündid, võttes igast kotist mingi arvu münte ning tehes nendega täpselt ühe kaalumise. Mis on vähim N väärtus, mille korral saab kuningas alati kotid kindlaks määrata?

Vastus. 47

Lahendus. Võtku kuningas kottidest vastavalt a, b ja c münti. Esmalt märkame, et kõik kolm arvu peavad olema erinevad, kuna kui mingid kaks oleks samad, siis oleks vastavad kaks kotti eristamatud. Kutsume selliseid arvukolmikuid *sobivateks.* Me otsime väikseimat arvude a, b ja c valikut, mille korral avaldise $a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m$ väärtus on erinev iga kahe permutatsiooni (k, l, m) korral arvudest 10, 11 ja 12.

Vähim sobiv arvukolmik on $a = 0$, $b = 1$ ja $c = 2$, aga see ei rahulda teist tingimust, kuna $32 = 2 \cdot 10 + 12 = 2 \cdot 11 + 10$. Teine vähim sobiv arvukolmik on $a = 0$, $b = 1$ ja $c = 3$, mis sobib, sest

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10 + 11 &= 41, & 3 \cdot 10 + 12 &= 42, \\ 3 \cdot 11 + 10 &= 43, & 3 \cdot 11 + 12 &= 45, \\ 3 \cdot 12 + 10 &= 46, & 3 \cdot 12 + 11 &= 47. \end{aligned}$$

Seega vähim N võimalik väärtus on 47.

Ülesanne 36. Helmi otsustab minna ananassidieedile. Iga päev kell 13.00 vaatab ta, mitu ananassi tal alles on. Kui tal on alles vähemalt üks ananass, siis sööb ta ühe ananassi ära. Kui tal ananasse alles ei ole, siis ostab ta nii mitu ananassi, et tal oleks üks ananass rohkem kui päeval, mil tal oli viimati kõige rohkem ananasse. Helmi ostis oma esimese ananassi esimesel päeval kell 13.00. Mitu ananassi on Helmil 2020. päeval kell 14.00?

Vastus. 59

Lahendus. Tähistagu $s(i)$ Helmi ananasside arvu päeval i kell 14.00. Kuna $s(i) = 0$ esmakordselt väärtuste $i = 2$ ja $i = 5$ juures ja Helmi ostab iga kord ühe ananassi rohkem kui eales varem, siis on arvujadas $s(i)$ nullide vahed vastavalt $3, 4, 5, \ldots$. Seega asuvad nullid selles arvujadas positsioonidel

$$2 + 3 + 4 + \cdots + n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

Kuna me tahame leida viimast nulli enne arvu 2020, peame me lahendama ruutvõrrandi $\frac{1}{2}x(x+1) - 1 = 2020$. Selle ruutvõrrandi ainus positiivne lahend on $\frac{\sqrt{16169}}{2} - \frac{1}{2}$, mis asub arvude 63 ja 64 vahel. Järelikult viimane null on jadas 62. ning asub positsioonil $\frac{63 \cdot 64}{2} - 1 = 2015$. Järelikult jätkub jada $s(i)$ peale seda nulli kui $63, 62, 61, 60, 59, \ldots$, seega $s(2020) = 59$.

Ülesanne 37. Seafarmeril on sealaut kogupindalaga $252\,\mathrm{m}^2$. Laudal on liikuvad seinad, mis jaotavad lauda kuueteistkümneks osaks. Kõiki seinu saab välisseintega paralleelselt liigutada. Farmer liigutas seinu selliselt, et tekkinud ruumide pindalad ruutmeetrites on sellised, nagu allolevale joonisele märgitud. Samuti veendus ta, et iga osa pindala on täisarv. Mis on ülemise parempoolse (joonisel küsimärgiga tähistatud) osa võimalikud pindalad ruutmeetrites?

24			?
18		12	
			12
30	10		

Vastus. 8, 24

Lahendus. Märkame esmalt laiuste suhet esimese ja teise tulba vahel (30 : 10) ning esimese ja kolmanda tulba vahel (18 : 12). Samuti teame me esimese, teise ning neljanda rea kõrguste suhet (24 : 18 : 30). Lihtsustades neid suhteid, leiame me vastavad tulpade ja ridade suhted kui 3 : 1 : 2 ja 4 : 3 : 5. Seega saame me tabeli täita nagu alljärgneval joonisel, kus kolmandas reas ning neljandas tulbas esinevad täisarvulised parameetrid x ja y.

24	8	16	$4y$
18	6	12	$3y$
$3x$	x	$2x$	12
30	10	20	$5y$

Teise ja kolmanda rea kõrguste suhted saame me leida me kolmandast tulbast kui $12 : 2x$ või neljandast tulbast kui $3y : 12$, nagu näha joonisel halliks värvitud alast. Kuna need kaks avaldist oma sama väärtusega, siis $12 : 2x = 3y : 12$ ehk $y = 24/x$.

Lõpuks liidame me kõikide alade pindalad kokku ning saame võrrandi

$$96 = 6x + 12y = 6x + 12\frac{24}{x},$$

kust

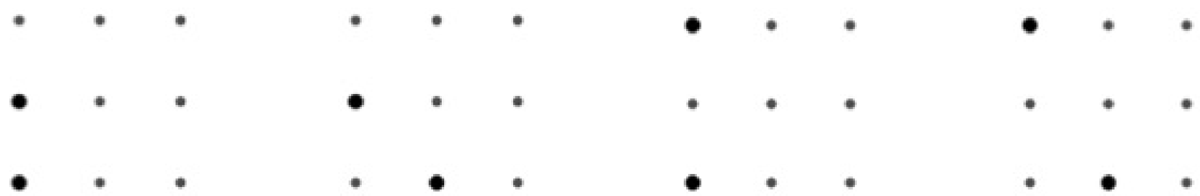
$$0 = x^2 - 16x + 48 = (x - 4)(x - 12).$$

Seega $x = 4$ või $x = 12$, kust vastavalt $y = 6$, $? = 24$ või $y = 2$, $? = 8$.

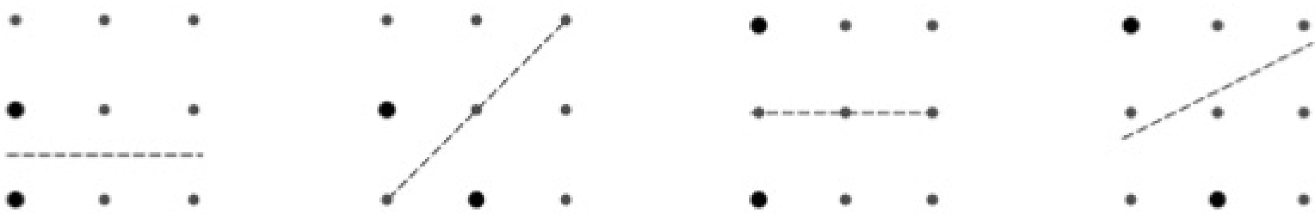
Ülesanne 38. Daniel ja Joonatan joonistasid mõlemad ringjoone ruudulisele paberilehele, kus iga ühikruut on mõõtmetega 1×1. Mõlemad ringjooned läbivad täpselt kolme ühikruudu tippu. Danieli ringjoone raadius on $\frac{5}{4}$ ja Joonatani ringjoone raadius on sellest väiksem. Mis on Joonatani ringjoone raadius?

Vastus. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

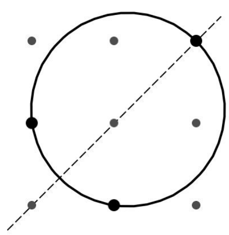
Lahendus. Olgu A, B, C Joonatani ringjoonel asuvad tipud. Kuna raadius on väiksem kui $\frac{5}{4}$, siis kaugus punktide A ja B vahel on maksimaalselt $\frac{5}{2}$, seega on A ja B omavaheline asukoht üks järgnevast neljast variandist:



Igal juhul saame me tõmmata lõigu AB keskristsirge, mis on ringjoone jaoks sümmeetriatelg. Järelikult C asub kas sellel sirgel või asub selliselt, et ta peegeldus üle keskristsirge ei ole tipp. Seega esimene variant ei ole võimalik.



Teine variant on võimalik, seni kuni C asub sümmeetriateljel. Lisaks peavad paarid A, C ja B, C olema mingid variantidest 2 kuni 4. Seega on Joonatani ringjoon selline:



Viimaks leiame me ringjoone raadiuse algebraliselt. Olgu punktide A, B, C koordinaadid vastavalt $(1, 0)$, $(0, 1)$, ja $(2, 2)$. Asendades need (x, y) väärtused ringjoone võrrandisse $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, saame me leida h, k, ja r väärtused ning leiame võrrandi $(x - \frac{7}{6})^2 + (y - \frac{7}{6})^2 = \frac{25}{18}$.

Ülesanne 39. Seitse pöialpoissi kannavad seitset eri värvi mütsi. Kuri võlur Tom tahab leiutada loitsu, mis muudab mütside värvi nii, et

- iga mütsi uus värv sõltub ainult mütsi eelmisest värvist ja mitte sellest, kes mütsi kannab või missugused teised mütsid parajasti on,
- peale loitsu lausumist esinevad mütside seas jätkuvalt kõik 7 värvi, ja
- kui Tom kasutab sama loitsu kaks või kolm korda, siis kummalgi juhul ei ole ühelgi pöialpoisil peale loitsimist sama värvi müts, mis alguses.

Mitu eri loitsu saab Tom leiutada?

Vastus. 720

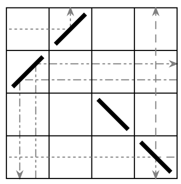
Lahendus. Kuna kõik värvid jäävad peale loitsimist alles, peab loits olema lihtsalt seitsme värvi permutatsioon. Iga sellise permutatsiooni saab jagada paarikaupa eri värvidega suunatud tsükliteks, kus permutatsioon lihtsalt liigub igas tsüklis ühe sammu võrra edasi. Kolmandast tingimusest järeldub, et ükski tsükkel ei või koosneda kahest ega kolmest värvist. Kuna meil on kokku seitse värvi, siis järelikult peavad kõik värvid olema ühes tsüklis. Viimaks leiame me, et selliseid permutatsioone on $6! = 720$ tükki: fikseerime ühe värvidest, siis meil on kuus varianti, mis värviks loits selle muudab, viis varianti järgmiseks värviks, jne., kuni viimane loitsimine muudab värvi algseks värviks tagasi.

Ülesanne 40. Maril on numbrilukk, mille igal kettal on erinev arv numbreid: esimesel kettal on arvud 0 kuni 4, teisel kettal on arvud 0 kuni 6, kolmandal kettal on arvud 0 kuni 10, ja neljandal kettal on arvud 0 kuni 9. Mari teab, et kui ta pöörab kettaid nii, et lukk näitaks $0, 0, 0, 0$, ja hakkab seejärel kõiki kettaid samaaegselt pöörama (ehk järgmine kombinatsioon oleks $1, 1, 1, 1$), siis jõuab ta lõpuks kombinatsioonini, milles viimased kaks numbrit on $5, 1$. Lisaks teab Mari, et kui ta jõuab nende kahe numbrini teistkordselt, siis lukk avaneb. Aita Maril leida lukku avav kombinatsioon.

Vastus. $1, 6, 5, 1$

Lahendus. Me otsime sellist täisarvu x, mis annab jäägiks 5 ja 1 vastavalt arvudega 11 ja 10 jagamisel. Kuna 10 ja 11 on ühistegurita, siis Hiina jäägiteoreemi kohaselt on arvude $0, 1, \ldots, 109$ hulgas täpselt üks lahend (olgu see x_0) ja kõik muud lahendid saame, kui liidame arvule x_0 mingi arvu $10 \cdot 11 = 110$ kordse. Testides arve kujul $11k + 5$ (siin k on täisarv), tahame me valida arvu, mis lõpeb numbriga 1, milleks osutub arv 71. Seega peale 71 korda luku keeramist on viimaseks kaheks numbriks $5, 1$. Teistkordselt esinevad need kaks numbrit viimase kahe numbrina, kui keerata lukku veel 110 korda ehk kokku teeme me $110 + 71 = 181$ keeramist algusest. Kuna 181 annab jäägiks 1 ja 6, kui teda jagada vastavalt arvudega 5 ja 7, siis lukku avav kombinatsioon on $1, 6, 5, 1$.

Ülesanne 41. Täpselt nelja ühikruutu 4×4 ruudus on diagonaalselt asetatud kahepoolsed peeglid. Kõigist kuueteistkümnest suure ruudu piirjoonel asuvast ühikruudu külje keskpunktist väljub valguskiir küljega risti. Kiir liigub otse ning vahetab suunda $90°$ võrra iga kord, kui ta tabab mõnda peeglit. Avastati, et täpselt neljal kiirel oli üks otspunkt ruudu alumisel küljel ning teine otspunkt paremal küljel. Neljal järgmisel kiirel olid otspunktid paremal ja ülemisel küljel, veel neljal järgmisel olid otspunktid ülemisel ja vasakul küljel ning viimaks viimasel neljal kiirel olid otspunktid vasakul ja alumisel küljel. Mitme eri peeglite konfiguratsiooni korral saab selline sündmus aset leida? (Alljärgneval pildil on üks võimalik peeglite asetus)



Vastus. 144

Lahendus. Kuna meil on täpselt neli peeglit ja iga kiir peab kuskil põrkuma, siis peab igas reas ja veerus olema täpselt üks peegel. Ruutude valimiseks on meil $4! = 24$ võimalust - esimeses reas on meil neli valikut veeru jaoks, teises reas kolm valikut ja nii edasi. Kiirte asukohtade tingimusest järeldub, et mõlemas diagonaalsuunas peab olema kaks peeglit. Seega, olles välja valinud ruudud, kuhu peeglid asetatakse, on meil $\binom{4}{2} = 6$ valikut peeglite suuna jaoks. Pole raske näha, et iga selline konfiguratsioon rahuldab soovitud tingimusi, seega on meil kokku $24 \cdot 6 = 144$ sobivat konfiguratsiooni.

Ülesanne 42. Olgu $x_1 = 2020$ ja me leiame arvu x_n järgnevalt: korrutame arvu x_{n-1} algarvuga p, kus p on vähim algarv, mis ei jaga arvu x_{n-1}, ning seejärel jagame saadud tulemuse iga algarvuga, mis on väiksem kui p. Leia arvu x_{2020} erinevate algarvuliste jagajate arv.

Vastus. 9

Lahendus. Näeme, et $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ ja $x_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 101$. On lihtne näha, et kui jada mingi liige ei jagu ühegi algarvu ruuduga, siis rahuldavad seda tingimust ka kõik järgnevad jada liikmed. Seega võime me alates liikmest x_2 esitada iga liikme x_n binaararvuna b_n, kus k. number (paremalt lugedes) on 1 parajasti siis, kui x_n jagub k-nda algarvuga. Nüüd märkame, et jada definitsioonist järeldub, et $b_{n+1} = b_n + 1$ iga $n \geq 2$ korral. Seega

$$b_2 = 10000000000000000000000111_2$$

ja

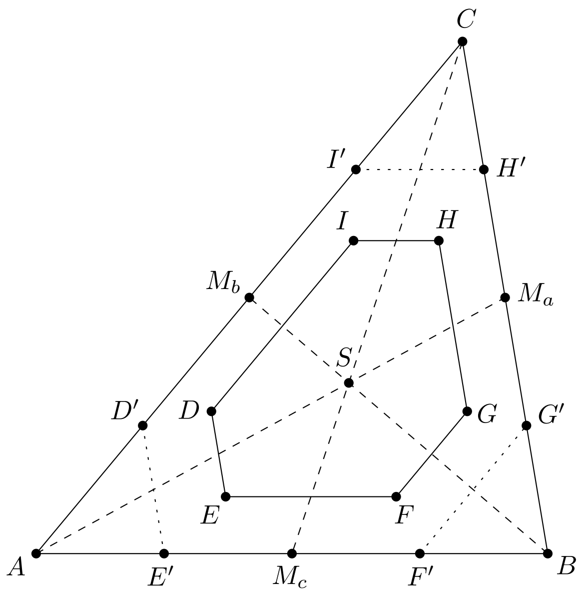
$$b_{2020} = b_2 + \underbrace{11111100010_2}_{=2018} = 10000000000000011111101001_2.$$

Arvu b_n definitsiooni kohaselt on arvu x_{2020} erinevate algarvuliste jagajate arv lihtsalt ühtede arv arvus b_{2020} ning neid on 9 tükki.

Ülesanne 43. Kolmnurga ABC mediaanid jagavad selle kolmnurga kuueks väiksemaks kolmnurgaks. Nende kuue kolmnurga mediaanide lõikepunktid on kuusnurga $DEFGHI$ tippudeks. Leia kuusnurga $DEFGHI$ ja kolmnurga ABC pindalade suhe.

Vastus. $\frac{13}{36}$

Lahendus. Järgneval joonisel on märgitud kõik olulised punktid: kolmnurga $\triangle ABC$ mediaanide lõikepunkt S, kolmnurga $\triangle ABC$ külgede keskpunktid M_a, M_b, M_c, väikeste kolmnurkade mediaanide lõikepunktid D, E, F, G, H, I, lõikude $M_bA, AM_c, \ldots, CM_b$ vastavad keskpunktid $D', E', \ldots, I'$.



Kuna $AE' = \frac{1}{4}AB$ ja $AD' = \frac{1}{4}AC$, siis kolmnurk $\triangle AE'D'$ on sarnane kolmnurgaga $\triangle ABC$, kui teha homoteetiat punkti A suhtes suhtega $\frac{1}{4}$. Seega on $[AE'D']$ pindala $\frac{1}{16}[ABC]$. Sarnaselt leiame me $[BG'F'] = [CI'H'] = \frac{1}{16}[ABC]$. Seega kuusnurga $D'E'F'G'H'I'$ pindala on $\frac{13}{16}[ABC]$. Lisaks märkame, et kui teha homoteetiat keskpunktiga S ja sarnasusteguriga $\frac{3}{2}$, siis liigub kuusnurk $DEFGHI$ kuusnurgaks $D'E'F'G'H'I'$ ja seega on kuusnurga $DEFGHI$ pindala leitav kui

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{13}{16}[ABC] = \frac{13}{36}[ABC].$$

Järelikult on otsitud suhe $\frac{13}{36}$.

Ülesanne 44. Olgu $a_1, a_2, a_3, \ldots$ selline reaalarvude jada, et $a_{m+1} = m(-1)^{m+1} - 2a_m$ iga positiivse täisarvu m korral ning $a_1 = a_{2020}$. Leia $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}$.

Vastus. $\frac{1010}{3}$

Lahendus. Liites kokku võrrandid $m = 1, \ldots, 2019$ jaoks, saame me

$$(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020}) = (1 - 2 + 3 - \cdots + 2019) - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}).$$

Kasutades fakti, et $a_1 = a_{2020}$, saame me selle järgnevalt ümber kirjutada:

$$3(a_1+a_2+\cdots+a_{2019}) = 1-2+3-\cdots+2019 = (1-2)+(3-4)+\cdots+(2017-2018)+2019 = (-1)\cdot 1009+2019 = 1010.$$

Seega

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = 1010/3.$$

Paneme tähele, et selline reaalarvude jada päriselt leidub: kui a_1 väärtus on antud, siis ülejäänud jada on ülesande tekstis antud tingimuse põhjal üheselt määratud. Seega võime me a_{2020} avaldada lineaarvõrrandina a_1 suhtes ning pole raske näha, et sellele võrrandile leidub lahend.

Ülesanne 45. Lisettel on käes viis ühesugust nöörijuppi nii, et iga nöörijupi üks ots on tal kummaski käes. Ta palub Juhanil valida käe, võtta selles käes asuvad mingid kaks nööriotsa, siduda need kokku, ning korrata protsessi, kuni tal on kummaski käes alles vaid üks nööriots (omavahel saab kokku siduda vaid kaks nöörijuppi). Mis on tõenäosus, et peale seda protsessi moodustavad kõik nöörijupid ühe pika nööri?

Vastus. $8/15$

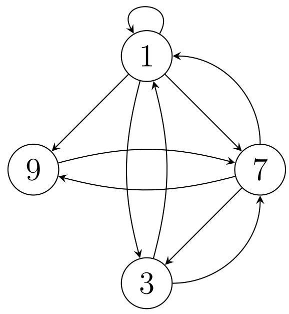
Lahendus. Olgu nöörijupid tähistatud kui A, B, C, D, ja E, ja olgu nad seotud ühes käes nii, et A-l on vaba ots, B on seotud C külge ja D on seotud E külge. Paneme tähele, et sellisel juhul lõpetame me ühe pika nööriga parajasti siis, kui teisel küljel seome me A kas B, C, D, või E külge (4 varianti) ning seejärel seome paari viimase vaba otsa teise paari külge (2 valikut). Näiteks, kui A siduda B külge, siis me peame C siduma D või E külge. Järelikult on meil kokku $4 \cdot 2 = 8$ varianti.

Kõikvõimalikke viise siduda nööre teisel käel kokku on 15: Esmalt valime me vabaks jääva nööriotsa (5 valikut) ja ülejäänu on üheselt määratud, kui teise nööriotsa paariline ära määrata (3 valikut). Seega on otsitud tõenäosus 8/15.

Ülesanne 46. Kutsume arvu *2-algarvuliseks*, kui iga kaks selle järjestikust numbrit moodustavad erineva kahekohalise algarvu. Näiteks on 237 2-algarvuline, aga arvud 136 ja 1313 ei ole. Leia suurim 2-algarvuline arv.

Vastus. 619737131179

Lahendus. Vaatame 4 tipuga suunatud graafi, mille tippudeks on 1, 3, 7 ja 9 ning kaks numbrit on ühendatud noolega parajasti siis, kui vastav kahekohaline arv on algarv. Paneme tähele, et tipu 1 juures on nool iseendasse.



Eeldame hetkeks, et leidub viis graafi mööda nooli läbida nii, et me kasutame iga noolt täpselt ühe korra. Siis saame suurima võimaliku 2-algarvulise arvu leida, kui lisame mõne sellise teeläbimise ette arvu 6 või 8. Tõepoolest, 2-algarvulise arvu definitsiooni kohaselt peavad kõik ta numbrid peale esimese olema valitud hulgast $\{1, 3, 7, 9\}$ ja ühtegi noolt ei saa mitu korda kasutada. Järelikult ei saa ühelgi 2-algarvulisel arvul olla rohkem numbreid kui servi meie graafis pluss kaks (üks esimese numbri eest ning teine, sest me loendame numbrite arvu) ehk 12. Lisaks ei saa esimene number arvus olla 9 või 7 (muidu üks nooltest korduks) ja kuna 61, 83, 87 ja 89 on algarvud, siis pole meil väiksemaid numbreid vaja.

Nüüd leiame me viisi läbida ülal kirjeldatud graafi nii, et tulemuseks oleks võimalikult suur arv. Märkame, et tippu numbriga 9 siseneb üks nool rohkem kui sealt väljub ning tipust numbriga 1 lahkub üks nool rohkem kui sealt väljub. Ülejäänud kaks tippu on "tasakaalus" - neist väljub ja neisse siseneb sama palju nooli. Järelikult algab meie teekond tipust 1 ja lõpeb tipus 9. Tipust 1 liigume me tippu 9, kuna see on suurim võimalik naaber, seejärel liigume me tippu 7 samal põhjusel, ning seejärel ei saa me liikuda tippu 9 (muidu jääks me sinna kinni), seega liigume me tippu 3, seejärel tagasi tippu 7, jne. Sellise ahne valimise tagajärjel leiame me teekonnaks 19737131179 ja kuna 81 ei ole algarv, siis järelikult on suurimaks 2-algarvuliseks arvuks arv 619737131179.

Ülesanne 47. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt. Asugu punktid D ja E vastavalt lõikudel AB ja AC nii, et O on lõigu DE keskpunkt. Kui $AD = 8$, $BD = 3$, ja $AO = 7$, siis leia lõigu CE pikkus.

Vastus. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

Lahendus. Vaatleme peegeldust punkti O suhtes ja tähistame iga punkti peegeldust primi($'$) lisamisega. Paneme tähele, et punktid A' ja B' asuvad kolmnurga $\triangle ABC$ ümberringjoonel ja $D' = E$ (ehk $E' = D$). Pythagorase teoreemist täisnurkses kolmnurgas $AA'B'$ (kuna AA' on ümberringjoone diameeter) leiame me

$$(AB')^2 = (AA')^2 - (A'B')^2 = 14^2 - AB^2 = 14^2 - 11^2 = 75.$$

Kuna $\angle AB'E = \angle A'BD = 90°$, siis Pythagorase teoreem kolmnurgas $\triangle AB'E$ annab

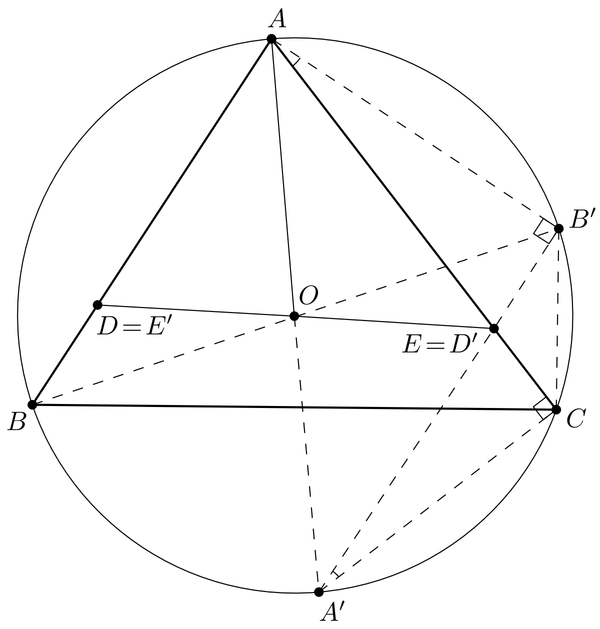
$$AE = \sqrt{(AB')^2 + BD^2} = \sqrt{75 + 9} = 2\sqrt{21}.$$

Kuna E (punkti D peegeldus) asub sirgel $A'B'$ (lõigu AB peegeldus) ja kuna nelinurk $AB'CA'$ on kõõlnelinurk, leiame me, et $\triangle AB'E \sim \triangle A'CE$. Seega

$$\frac{CE}{A'E} = \frac{B'E}{AE}$$

ja kokkuvõttes

$$CE = AD \cdot \frac{BD}{AE} = 8 \cdot \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$



Alternatiivne lahendus: Punkti D potents kolmnurga $\triangle ABC$ ümberringjoone suhtes raadiusega $r = AO$ on

$$-3 \cdot 8 = -DB \cdot DA = OD^2 - r^2 \Rightarrow OE = OD = \sqrt{49 - 24} = 5$$

(meil on siin miinusmärk, kuna D asub ringjoone sees). Koosinusteoreem kolmnurgas $\triangle ADO$ annab

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7\cos(\angle AOD).$$

Kuna $\cos(\angle AOE) = \cos(180^\circ - \angle AOD) = -\cos(\angle AOD) = -\frac{1}{7}$, siis sama teoreem kolmnurgas $\triangle AOE$ annab

$$AE^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7\cos(\angle AOE) = 84 \Rightarrow AE = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

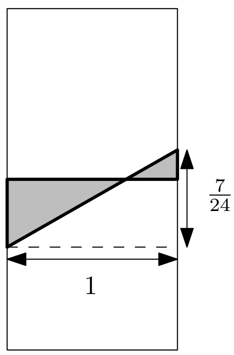
Analoogselt ülal kirjeldatuga on punkti E potents kolmnurga $\triangle ABC$ ümberringjoone suhtes

$$-2\sqrt{21} \cdot EC = 5^2 - 7^2 \Rightarrow EC = \frac{24}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

Ülesanne 48. Ristkülik mõõtmetega 7×24 on jagatud 1×1 ühikruutudeks. Üks ristküliku diagonaalidest lõikab mõningatest ühikruutudest välja kolmnurkseid tükke. Leia kõikide välja lõigatud kolmnurkade ümbermõõtude summa.

Vastus. $\frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$

Lahendus. Olgu 24 ristküliku laius ja 7 ristküliku kõrgus. Alumisest vasakust ülemisse paremasse nurka tõmmatud diagonaali tõus on $\frac{7}{24}$. Kui see diagonaal läbib mõnda ruutu, lõikab ta välja kolmnurga parajasti siis, kui ta läbib kahte ruutu eraldavat horisontaalset külge. Kuna tõus on konstantne, võime me kahest ruudust välja lõigatud kaks kolmnurka ümber paigutada, et moodustada üks suur täisnurkne kolmnurk laiusega 1. Seega on selle kolmnurga kaatetite pikkused 1 ja $\frac{7}{24}$ ning hüpotenuusi pikkus on $\sqrt{1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{25}{24}$.



Seega nende kahe kolmnurga ümbermõõtude summa on $\frac{56}{24}$. Meie diagonaal lõikub horisonaalse küljega täpselt kuus korda, lisaks lõikame me välja kaks suurt kolmnurka ülalkirjeldatud mõõtmega esimesest ja viimasest läbitud ruudust. Seega on otsitud ümbermõõtude summa $8 \cdot \frac{56}{24} = \frac{56}{3}$.

Ülesanne 49. Olgu positiivne täisarv n *lennukas*, kui 8788-korruselise hoone igalt korruselt on võimalik jõuda igale muule korrusele, kui me tohime liikuda korraga vaid 2020 korrust alla või n korrust üles. Leia suurim lennukas arv.

Vastus. 6763

Lahendus. Et me saaks üldse kuskile liikuda korruselt 2020, peab kehtima $2020 + n \leq 8788 \Rightarrow n \leq 6768$. Lisaks peab kehtima $d := \text{SÜT}(2020, n) = 1$, kuna me saame korruste a ja b vahel liikuda vaid siis, kui $d \mid a - b$. Kuna $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, siis saame me mõned suurima n kandidaadid elimineerida: 6768 jagub arvuga 2, 6767 jagub arvuga 101, 6766 jagub arvuga 2, 6765 jagub arvuga 5, 6764 jagub arvuga 2 ja viimaks $\text{SÜT}(6763, 2020) = 1$.

Seega peame näitama, et 6763 on lennukas. Eukleidese algoritmist saame me leida sellised täisarvud x, y, et $6763x - 2020y = 1$ ja me võime eeldada, et x, y on mittenegatiivsed, kuna me võime liita 2020 arvule x ja lahutada 6763 arvust y ning ülaltoodud võrdus jääb kehtima. Alustades korruselt $1 \leq f \leq 8787$, väidame, et on võimalik liikuda mingis järjekorras x korda üles ja y korda alla nii, et me püsime hoones sees ja lõpetame korrusel $f + 1$. Tõepoolest, kuna $2020 + 6763 \leq 8788$, siis saame me alati liikuda vähemalt ühes suunas. Veelgi enam, kui me oleme allasuunas (ülessuunas) kõik oma sammud ära teinud, siis me peame olema korrusest $f + 1$ allpool (ülalpool) ja peale ülejäänud sammude tegemist jõuamegi me korrusele $f + 1$. Sarnaselt saame me näidata, et igalt korruselt $2 \leq f \leq 8788$ saame me liikuda ühe korruse võrra alla. Järelikult on 6763 suurim lennukas arv.

Ülesanne 50. Krüptogrammis

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & R & E & D \\
+ & & B & L & U & E \\
+ & G & R & E & E & N \\
\hline
= & B & R & O & W & N
\end{array}
$$

tähistavad eri tähed eri numbreid. Ükski neljast arvust ei tohi alata numbriga null. Lisaks teame me, et $BLUE$ on täisruut. Leia viiekohaline arv $BROWN$.

Vastus. 85230

Lahendus. Nummerdame tulbad vasakult paremale ühest viieni ja tähistame igas tulbas toimuvaid kümnete ülekannete arvu kui $c_1, \ldots, c_5$. Paneme tähele, et $c_1 = 0$ ja $0 \leq c_i \leq 2$ kui $i = 2, \ldots, 5$. Tõepoolest, liites kolm numbrit ja ülekande maksimaalse väärtusega 2, ei saa me saada suuremat arvu kui 29, mistõttu viimane väide kehtib induktiivselt. Lisaks märkame, et $c_2 \leq 1$, kuna teises tulbas liidetakse kokku kaks erinevat numbrit ja $c_3 \leq 2$, kuna $c_2 \neq 0$ esimese tulba tõttu, mistõttu $c_2 = 1$ ja $G + 1 = B$. Viiendast tulbast järeldub $D + E = 10$, kuna D ja E ei saa mõlemad olla nullid, ja $c_5 = 1$. Kuna $B + R + c_3 = c_2 \cdot 10 + R$, siis kas $B = 9$ või $B = 8$. Seega $BLUE$ on täisarvu n ruut, kus $90 \leq n \leq 99$ ja koosneb neljast eri numbrist. Elimineerides kahe sama kõrvutioleva numbriga täisruudud selles vahemikus, jäävad üle variandid 8649, 9025, 9216, 9604, ja 9801. Kuna $D + E = 10$, siis 9025 ei sobi, kuna siit järelduks $D = E\ (= 5)$. Samuti ei sobi 9801, kuna $B = D\ (= 9)$, ja ei sobi 9604, kuna $L = D\ (= 6)$. Kasutades neljandat veergu, saame me lahti variandist 9216, kuna siit järelduks $D = 4$ ja $E + U + E + 1 = 6 + 1 + 6 + 1 = 14$, kust $W = 4$, mis annab vastuolu koos tingimusega $D = 4$. Seega ainus $BLUE$ võimalik väärtus on 8649.

Me teame, et $B = 8$, $L = 6$, $U = 4$, $E = 9$ ning nüüd pole raske leida $D = 1$, $W = 3$, ja $G = 7$ ning ülekanded $c_3 = c_4 = 2$. Kolmas tulp annab nüüd $R + L + E + c_4 = c_3 \cdot 10 + O$, mis lihtsustub kujule $R + 17 = 20 + O$ ja see on vaid võimalik väärtuste $R = 5$ ja $O = 2$ korral. Siit järeldub $N = 0$ ja krüptogrammil on unikaalne lahend

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & 5 & 9 & 1 \\
+ & & 8 & 6 & 4 & 9 \\
+ & 7 & 5 & 9 & 9 & 0 \\
\hline
= & 8 & 5 & 2 & 3 & 0
\end{array}
$$

Ülesanne 51. Leia vähim positiivne täisarv $k > 1$ nii, et ei leidu positiivset k-kohalist täisarvu n, mille iga number on paaritu ja $S(S(n)) = 2$, kus $S(x)$ tähistab arvu x numbrite summat.

Vastus. 103

Lahendus. Esmalt märkame, et $S(m) = 2$ paaritu täisarvu m korral vaid siis, kui $m = 10^l + 1$ mingi positiivse täisarvu l jaoks. Kui $k = 103$, siis $S(n)$ on paaritu iga k-kohalise arvu n jaoks, millel on kõik numbrid paaritud, järelikult, et $S(S(n)) = 2$ kehtiks, peab $S(n)$ olema üleval kirjeldatud kujul. Teisalt,

$$101 < 103 \cdot 1 \leq S(n) \leq 103 \cdot 9 = 927 < 1001$$

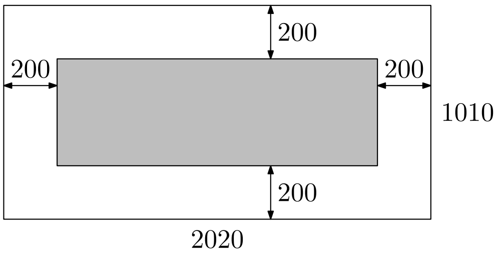
iga 103-kohalise täisarvu n jaoks. Seega $k = 103$ rahuldab ülesande tingimusi.

Nüüd näitame, et iga $k < 103$ korral leidub selline n, nagu kirjeldatud ülesande tekstis. Kui k on paaritu, on lihtne näha, et see $S(n)$ saab võtta iga paaritu väärtuse, mis on enam kui k ja väiksem või võrdne arvuga $9k$. Kui $1 < k \leq 11$, siis $9k \geq 18 > 11$, seega $S(n)$ saab võrduda arvuga 11 ja järelikult leidub selline n, et $S(S(n)) = 2$. Kui $101 \geq k > 11$, siis $9k \geq 9 \cdot 13 = 117 > 101$, seega $S(n)$ saab võrduda arvuga 101 ja jälle $S(S(n)) = 2$. Seega $k > 101$.

Kui $k < 103$ on paaris, siis saame me arutleda peaaegu täpselt samamoodi, ainsa erinevusega, et $S(n)$ on paarisarv. Kui $k = 2$, siis kasutame $n = 11$. Kui $2 < k \leq 20$, siis $9k > 20$, seega me saame leida arvu n, mille korral $S(n)$ võrdub arvuga 20. Kui $103 > k > 20$, siis $9k > 180 > 110$, seega $S(n)$ saab võrduda arvuga 110.

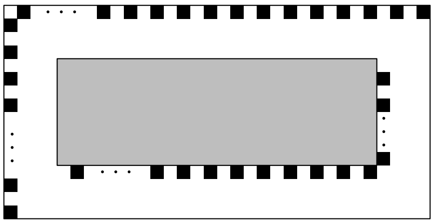
Seega on 103 vähim tingimusi rahuldav arv.

Ülesanne 52. Martin ostis malelaua, mis moodustati 1010×2020 ristkülikust, millest on välja lõigatud väiksem ristkülik, nagu näha alljärgneval joonisel. Ta asetas igale malelaua ruudule sipelga. Kahjuks olid mõned sipelgad haigeks jäänud. Veelgi enam, haigus oli väga nakkav: iga sipelgas, kelle naabritest vähemalt kaks olid haiged, jäi samuti haigeks. (Me ütleme, et kaks ruutu on naabrid, kui neil on ühine külg.) Leia vähim võimalik sipelgate arv, kes võisid kõiki ülejäänud sipelgaid nakatada. Sipelgad ei liikunud kordagi.



Vastus. 2630

Lahendus. Paneme tähele, et kui sipelgas jääb ülal kirjeldatud protseduuri tagajärjel haigeks, siis haigestunud ala ümbermõõt ei suurene. Seega pidi meil alguses olema vähemalt $P/4$ haiget sipelgat, kus P on O–kujulise ala ümbermõõt. Me saame soovitud ümbermõõdu leida kui $P = 2(2020 + 1010 + (2020 - 400) + (1010 - 400)) = 10520$ ja pildil on üks võimalik $P/4 = 2630$ sipelga asetus, mille korral jääksid kõik sipelgad haigeks.



Ülesanne 53. Positiivsel täisarvul on 25! erinevat positiivset jagajat. Leia, mitu neist saavad maksimaalselt olla mingi algarvu viies aste.

Märkus: Sümbol $n!$ tähendame kõikide positiivsete täisarvude korrutist, mis on väiksemad või võrdsed arvuga n.

Vastus. 27

Lahendus. Arvul kujul $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, kus p_i on erinevad algarvud, on $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$ positiivset jagajat. Seega maksimaalne arv algarvu viiendaid astmeid, mis meie arvu jagavad, on võrdne maksimaalse arvu teguritega ≥ 6 mõnes arvu 25! tegurduses. Et seda numbrit maksimeerida, vaatame me kanoonilist kuju

$$25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23,$$

jätame viiest suuremad algarvud rahule ja kombineerime viisi ja kolmesid kahega ning viimaks kirjutame 2^6 kujul 8^2, et saada maksimaalne võimalik arv 27.

Ülesanne 54. Positiivsed reaalarvud x, y, z rahuldavad võrrandeid

$$x^2 + xy + y^2 = 1,$$
$$y^2 + yz + z^2 = 2,$$
$$z^2 + zx + x^2 = 3.$$

Leia $xy + yz + zx$ väärtus.

Vastus. $2\sqrt{2/3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Lahendus. Liites esimese ja kolmanda võrrandi ning lahutades kaks korda teise, saame me

$$(2x - y - z)(x + y + z) = 0$$

ja kuna x, y, z on positiivsed, siis $2x = y+z$. Kirjutame $y = x-\delta$, $z = x+\delta$ ning asendame selle algsetesse võrranditesse tagasi, et saada

$$3x^2 - 3x\delta + \delta^2 = 1,$$
$$3x^2 + \delta^2 = 2,$$
$$3x^2 + 3x\delta + \delta^2 = 3.$$

Seega $x\delta = 1/3$ ja teise uute võrrandisse asendades saame me ruutvõrrandi lahenditega

$$\delta^2 = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Meil palutakse leida $3x^2 - \delta^2 = 2 - 2\delta^2$ ja kuna tulemus peab olema positiivne, siis on ainsaks võimaluseks $2\sqrt{2/3}$.

Alternatiivne lahendus: Valime tasandil punkti P ja tõmbame lõigud PA, PB ja PC vastavalt pikkustega x, y ja z nii, et $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$. Kuna $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$, siis antud võrranditest ja koosinusteoreemist järeldub $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ ja seega ABC on täisnurkne kolmnurk pindalaga $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Selle pindala saame me ka leida läbi kolme kolmnurga, millel kõigil on üheks tipuks P: $S = \frac{1}{2}\sin(120°)(xy + yz + zx)$. Kuna $\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, siis $xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ülesanne 55. Olgu I ja O vastavalt kolmnurga ABC siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktid, kusjuures $AB = 495$, $AC = 977$ ja $\angle AIO = 90°$. Leia lõigu BC pikkus.

Vastus. 736

Lahendus. Vaatleme homoteetiat keskpunktiga A ja suhtega 2 ning tähistame vastavaid tekkinud punkte primiga. Siis AO' on kolmnurga $\triangle ABC$ ümberringjoone diameeter ja kuna $\angle AIO = 90°$, siis asub ka I' ümberringjoonel ja järelikult on see kaare BC, mis punkti A ei sisalda, keskpunkt. On üldtuntud, et see punkt (mida me nüüdsest peale tähistame kui $\check{S}$) rahuldab $\check{S}I = \check{S}C$ ja lihtne nurgaarvutus annab $\angle BC\check{S} = \angle BA\check{S} = \angle CA\check{S}$. Olgu D sirgete $A\check{S}$ ja BC lõikepunkt. Siis $\triangle D\check{S}C \sim \triangle C\check{S}A$ ja seega

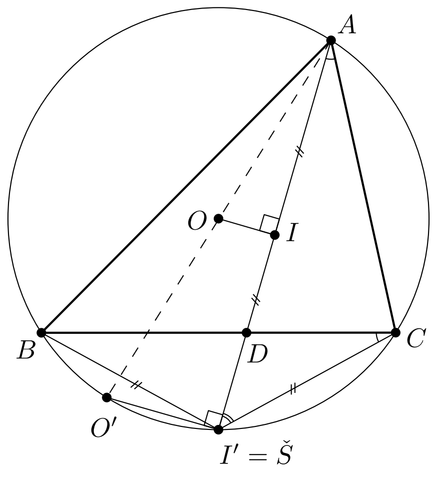
$$\frac{\check{S}D}{\check{S}I} = \frac{D\check{S}}{\check{S}C} = \frac{C\check{S}}{\check{S}A} = \frac{\check{S}I}{\check{S}A} = \frac{1}{2}$$

on homoteetia suhte pöördväärtus. Seega $[BCI] = \frac{1}{3}[ABC]$, kus $[XYZ]$ tähistab kolmnurga XYZ pindala. Kasutades $\triangle ABC$ siseringjoone raadiust r, saame me selle ümber kirjutada kui

$$\frac{1}{2}r \cdot BC = \frac{1}{6}r(AB + BC + CA)$$

ja seega

$$BC = \frac{AB + AC}{2} = \frac{495 + 977}{2} = 736.$$



Ülesanne 56. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (a, b, c), mis rahuldavad võrrandit $3abc = 2a + 5b + 7c$.

Vastus. $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$, $(12, 1, 1)$

Lahendus. Jagades võrrandi läbi positiivse arvuga abc, saame

$$3 = \frac{2}{bc} + \frac{5}{ca} + \frac{7}{ab}.$$

Kui kõik kolm liiget on suuremad kui üks ning vähemalt üks neist on suurem kui kaks, siis on parem pool maksimaalselt

$$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{2 \cdot 2} = \frac{35}{12} < 3,$$

seega sellisel juhul lahendid puuduvad. Lisaks on lihtne veenduda, et $a = b = c = 2$ ei sobi lahendiks. Seega vähemalt üks arvudest a, b, c on võrdne ühega.

Kui $a = 1$, siis saame me võrrandi

$$3bc = 2 + 5b + 7c,$$

mis peale kolmega korrutamist ja liikmete teisele poole viimist tegurdub kui

$$(3b - 7)(3c - 5) = 41.$$

Kuna mõlemad tegurid peavad olema algarvu 41 positiivsed jagada, mis annab arvuga 3 jagades jäägi 2, on ainsaks võimaluseks $b = 16$ ja $c = 2$.

Kui $b = 1$, siis saame me

$$3ac = 2a + 5 + 7c$$

ning sarnaselt eelmise juhuga leiame me

$$(3a - 7)(3c - 2) = 29,$$

kust $a = 12$ ja $c = 1$ kasutades eelmise juhuga analoogset jaguvusargumenti.

Viimaks, $c = 1$ annab võrrandi

$$(3a - 5)(3b - 2) = 31,$$

mille lahenditeks on $a = 12$, $b = 1$ ja $a = 2$, $b = 11$. Esimese lahendi oleme me eelmises juhus juba leidnud.

Seega on meil täpselt kolm lahendit: $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$ ja $(12, 1, 1)$.

Ülesanne 57. Peol on iga külaline täpselt neljateist teise külalisega sõber (iseendaga sõber ei saa olla). Igal kahel sõbral on täpselt kuus ühist sõpra peokülaliste hulgas ja igal kahel inimesel, kes pole sõbrad, on täpselt kaks ühist sõpra peokülaliste hulgas. Mitu külalist on peol kokku?

Vastus. 64

Lahendus. Valime külalise x koos kõigi ta sõpradega ning kutsume seda 15 inimesest koosnevat hulka kui H. Olgu y hulga H x-st erinev liige, me väidame et y-l on täpselt 7 sõpra väljaspool hulka H: y 14 sõbrast on üks x ja veel kuus on x ja y ühised sõbrad, kes kuuluvad hulka H. Seega on meil veel $c = 14 \cdot 7 = 98$ paari (y, z), kus y on hulga H x-st erinev liige ja z on y-i sõber väljaspool hulka H. Teisalt saame arvu c leida järgnevalt: igal külalisel z väljaspool hulka H on täpselt kaks sõpra hulgas H, kuna x ei ole z sõber hulga H definitsiooni kohaselt ja mõlemad x ja z ühised sõbrad on hulgas H. Teisisõnu, c on väljaspool hulka H olevate külaliste kahekordne arv, seega on $98/2 = 49$ külalist, kes pole hulgas H. Kuna hulgas H on 15 inimest, siis kokku on peol $15 + 49 = 64$ inimest.

Märgime lisaks, et selline suhete konfiguratsioon 64 külalise vahel on võimalik: paneme külalised 8×8 tabeli ruutudesse ja olgu kaks külalist sõbrad parajasti siis, kui nad asuvad samas reas või veerus. On lihtne näha, et sellisel juhul on ülesande tingimused täidetud.

Ülesanne 58. Punkt P asub kolmnurga ABC sisepiirkonnas. Kui

$$AP = \sqrt{3}, \quad BP = 5, \quad CP = 2, \quad AB : AC = 2 : 1, \quad \text{ja} \quad \angle BAC = 60^\circ,$$

siis mis on kolmnurga ABC pindala?

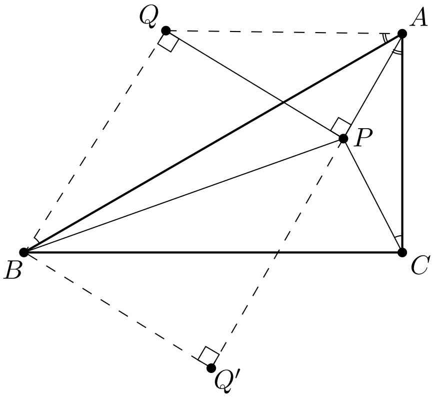
Vastus. $\frac{6+7\sqrt{3}}{2}$

Lahendus. Valime punkti Q, mis asub teisel pool punkti C sirge AB suhtes nii, et $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$. Sarnasustegur on $AB : AC = 2$ ja seega $AQ = 2AP = 2\sqrt{3}$ ja $BQ = 2CP = 4$. Nendest võrdustest koos tingimusega $\angle QAB = \angle PAC$ järeldub $\triangle APQ \sim \triangle ACB$ ja seega $\angle APQ = 90^\circ$ ning

$$PQ = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$$

Pythagorase teoreemist. Kuna $BP^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = BQ^2 + PQ^2$, siis Pythagorase teoreemi pöördväitest saame me $\angle BQP = 90°$. Vaadates punkti Q peegeldust Q' lõigu BP keskpunkti suhtes, saame me Pythagorase teoreemi kasutada täisnurkses kolmnurgas $AQ'B$, kust me leiame $AB^2 = PQ^2 + (AP + BQ)^2 = 28 + 8\sqrt{3}$ ja seega kolmnurga $\triangle ABC$ pindala on

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{8} AB^2 = \frac{6 + 7\sqrt{3}}{2}.$$



Ülesanne 59. Olgu $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ selline mittenegatiivsete kordajatega polünoom, et

$$P\left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right) = 2020.$$

Leia $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ minimaalne võimalik väärtus.

Vastus. 22

Lahendus. Olgu $u = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$ ja märkame, et me üritame minimeerida avaldist $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1)$. Me jaotame lahenduse viieks sammuks.

Samm 1: Kontrollime, et u on polünoomi $G(x) = x^2 + x - 5$ juur ja jagame $P(x)$ polünoomiga $G(x)$ ehk kirjutame

$$P(x) = Q(x)G(x) + Ax + B$$

mingite täisarvude A, B ja täisarvuliste kordajatega polünoomi Q jaoks (kuna $G(x)$ pealiige on 1, siis saame tulemuse leida polünoome tavalist moodi jagades).

Samm 2: Kuna $P(u) - 2020 = 0$, A, B on täisarvud ja u on irratsionaalne, siis järelikult $A = 0$ ja $B - 2020 = 0$, ehk

$$P(x) = Q(x)G(x) + 2020. \qquad (\star)$$

Samm 3: Kui mõni $P(x)$ kordajatest, ütleme a_k, rahuldab tingimust $a_k \geq 5$, siis polünoom $\tilde{P}(x) = P(x) + G(x)x^k = P(x) + (x^2 + x - 5)x^k$ rahuldab samuti kõiki tingimusi ja $\tilde{P}(1) = P(1) - 3$. Seda protseduuri võimalikult palju korrates lõpetame me polünoomiga $P(x)$, mille kõik kordajad rahuldavad tingimust $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ja $P(u) = 2020$.

Samm 4: Paneme tähele, et neid tingimusi rahuldav polünoom P on unikaalne. Tõepoolest, mõni teine tingimusi rahuldav polünoom rahuldab võrrandit $(\star)$ mingi sobiva polünoomiga $Q(x)$. Et kehtiks $0 \leq a_0 \leq 4$, kus a_0 on polünoomi $P(x)$ vabaliige, peab polünoomi $Q(x)$ vabaliige rahuldama tingimust $q_0 = 404$. Kuna me teame kõiki $G(x)$ kordajaid ja vabaliikme absoluutväärtus on 5, saame me lineaarliikme kordaja q_1 leida võrrandist $(\star)$, jne. Kuna $Q(x)$ on unikaalne, siis pole raske näha, et ka $P(x)$ on unikaalne.

Samm 5: Nüüd piisab vaid sammus 3 kirjeldatud arvutused läbi viia. Me alustame konstantse polünoomiga $P_0(x) = 2020$ ja leiame:

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= 404x^2 + 404x \\
P_2(x) &= 80x^3 + 484x^2 + 4x \\
P_3(x) &= 96x^4 + 176x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_4(x) &= 35x^5 + 131x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_5(x) &= 26x^6 + 61x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_6(x) &= 12x^7 + 38x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_7(x) &= 7x^8 + 19x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_8(x) &= 3x^9 + 10x^8 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_9(x) &= 2x^{10} + 5x^9 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_{10}(x) &= x^{11} + 3x^{10} + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x.
\end{aligned}
$$

Seega otsitud minimaalne väärtus on $P_{10}(1) = 1 + 3 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 = 22$.