Zadanie 1. Jeśli średnia arytmetyczna czterech różnych liczb całkowitych dodatnich wynosi 10, to jaka jest największa możliwa wartość jednej z tych liczb?

Wynik. 34

Rozwiązanie. Żeby jedna z liczb była jak największa, to pozostałe liczby muszą być jak najmniejsze. Liczby są różne, więc najmniejsze możliwe trzy wartości to 1, 2 i 3. Średnia arytmetyczna wszystkich czterech liczb będzie równa 10, czyli ich suma będzie równa $4 \cdot 10 = 40$, gdy ostatnia liczba będzie wynosić $40 - (1 + 2 + 3) = 34$.

Zadanie 2. Wiedząc, że 4 jest rozwiązaniem równania kwadratowego $x^2 + mx + 2020 = 0$, gdzie m jest liczbą całkowitą, wyznacz wartość drugiego rozwiązania.

Wynik. 505

Rozwiązanie. Z faktu, że 4 jest pierwiastkiem otrzymujemy, że $4^2 + 4m + 2020 = 0$, skąd $m = -509$. Dane równanie możemy zatem zapisać jako $x^2 - 509x + 2020 = 0$ — to zaś ma jako pierwiastki 4 i 505.

Można do tego zadania podejść również w następujący sposób: jeśli s jest drugim pierwiastkiem danego równania, to

$$x^2 + mx + 2020 = (x - 4)(x - s) = x^2 - 4x - sx + 4s.$$

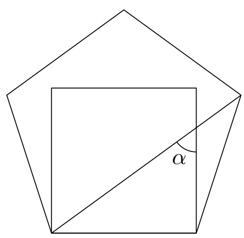
Porównując współczynniki obu wielomianów otrzymujemy $4s = 2020$, a więc $s = 505$.

Zadanie 3. Liczba 95 daje resztę 4 przy dzieleniu przez dodatnią liczbę całkowitą N. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość N?

Wynik. 7

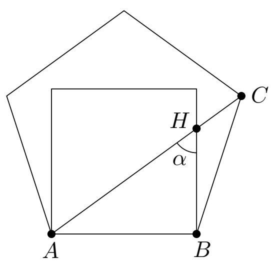
Rozwiązanie. Skoro N jest większe od 1 oraz dzieli $95 - 4 = 91 = 7 \cdot 13$, to jego najmniejszą możliwą wartością jest 7.

Zadanie 4. Dane są kwadrat oraz pięciokąt foremny, jak na rysunku poniżej. Znajdź miarę kąta α w stopniach.



Wynik. 54°

Rozwiązanie. Oznaczmy punkty jak na rysunku.



Miara kąta wewnętrznego pięciokąta foremnego wynosi $108°$. Trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym o kącie $\angle ABC = 108°$, skąd

$$\angle BAH = \angle BAC = \tfrac{1}{2}(180° - 108°) = 36°.$$

Skoro trójkąt ABH jest trójkątem prostokątnym z kątem prostym przy wierzchołku B, to otrzymujemy

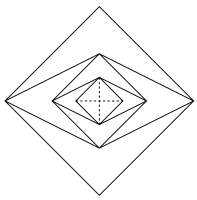
$$\alpha = \angle AHB = 180° - 90° - 36° = 54°.$$

Zadanie 5. Na przystanku autobusowym zatrzymują się autobusy linii A, B oraz C, które odjeżdżają z przystanku odpowiednio co 12, 10 oraz 8 minut. Gdy Tomek przybył na przystanek autobusowy, zobaczył trzy autobusy różnych linii odjeżdżające równocześnie z przystanku. Po ilu minutach taka sytuacja powtórzy się po raz pierwszy?

Wynik. 120

Rozwiązanie. Szukana liczba musi być wspólną wielokrotnością wszystkich trzech okresów, więc odpowiedzią jest najmniejsza wspólna wielokrotność 12, 10 oraz 8, czyli 120.

Zadanie 6. Romboidalny kwiat rośnie według następującego wzorca: na środku znajduje się romboidalny płatek o przekątnych długości 1. W pierwszym kroku długość poziomej przekątnej zostaje podwojona, tworząc nowy romboidalny płatek. W kolejnym kroku pionowa przekątna zostaje podwojona i kolejny romboidalny płatek zostaje stworzony. Procedura ciągnie się, aż powstanie kwiat z pięcioma romboidalnymi płatkami. Znajdź obwód zewnętrznego (tj. piątego) płatka.



Wynik. $8\sqrt{2}$

Rozwiązanie. Piąty płatek jest kwadratem o przekątnej długości 4. Długość boku to zatem $2\sqrt{2}$, więc obwód wynosi $8\sqrt{2}$.

Zadanie 7. Botanik Blefistofeles zasadził dwie rośliny, P_1 i P_2, tego samego gatunku i zmierzył ich wysokości. Po tygodniu, w trakcie którego rośliny urosły o taki sam procent, Blefistofeles zmierzył rośliny ponownie i zauważył, że roślina P_1 była tak wysoka jak P_2 tydzień wcześniej, a P_2 była o 44% wyższa niż P_1 tydzień wcześniej. O ile procent rośliny urosły przez ten tydzień?

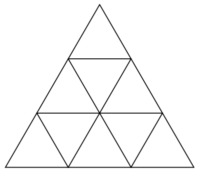
Wynik. 20%

Rozwiązanie. Oznaczmy przez P_1 i P_2 początkowe wysokości roślin. Ponieważ obie urosły o taki sam procent przez ten tydzień, ich nowe wysokości to odpowiednio kP_1 i kP_2, dla pewnej liczby rzeczywistej $k > 1$, przy czym $(k-1)\cdot 100\%$ jest szukanym procentem. Z pomiarów wynika, że

$$kP_1 = P_2,$$
$$\frac{kP_2}{P_1} = 1.44.$$

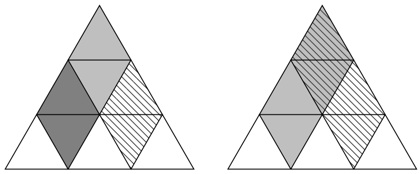
Po podstawieniu wartości kP_1 w miejsce P_2 w drugim równaniu i po skróceniu P_1 w otrzymanym ułamku otrzymujemy $k^2 = 1.44$, zatem $k = 1.2$, co oznacza, że rośliny urosły o 20%.

Zadanie 8. Ile równoległoboków znajduje się na poniższym rysunku?



Wynik. 15

Rozwiązanie. Dla każdego z trzech wierzchołków dużego trójkąta, mamy trzy romby „zwrócone” w kierunku tego wierzchołka i dwa równoległoboki 1×2 zawierające go jako jeden ze swych wierzchołków. Poniższy rysunek pokazuje dwa rodzaje równoległoboków dla górnego wierzchołka.



To jedyne możliwe rodzaje równoległoboków, zatem całkowita liczba równoległoboków na rysunku wynosi $3 \cdot (2 + 3) = 15$.

Zadanie 9. Spółka autobusowa dysponuje autobusami na 27 oraz na 36 pasażerów. Grupa wycieczkowa składająca się z 505 turystów chciałaby skorzystać z usług tej spółki. Spółka wybrała pewien zestaw autobusów w taki sposób, by całkowita liczba N pustych siedzeń była możliwie najmniejsza. Znajdź N.

Wynik. 8

Rozwiązanie. Musimy znaleźć najmniejszą liczbę $s \geqslant 505$, którą da się zapisać w postaci $s = 27x + 36y$, gdzie x i y oznaczają odpowiednio liczbę autobusów pierwszego i drugiego rodzaju. Skoro największy wspólny dzielnik liczb 27 i 36 wynosi 9, to s musi być wielokrotnością 9. Najmniejszą wielokrotnością 9 większą bądź równą 505 jest 513, a ponieważ $513 = 27 \cdot 3 + 36 \cdot 12$, więc otrzymujemy, że najmniejsza liczba pustych siedzeń to $513 - 505 = 8$.

Zadanie 10. Miłośnik zwierząt kupił dwa identyczne obrazy z wilkiem oraz cztery identyczne obrazy z lisem. Chce powiesić je obok siebie na sześciu hakach w swoim salonie. Ponadto chce codziennie zmieniać ich kolejność w taki sposób, żeby ciąg wyglądał inaczej niż w każdym z poprzednich dni. Dodatkowo nie chce, żeby dwa obrazy z wilkiem wisiały obok siebie. Przez ile co najwyżej dni może to robić?

Wynik. 10

Rozwiązanie. Innymi słowy, pytamy o liczbę różnych ciągów obrazów, które nie mają dwóch wilków koło siebie. Lewy obraz wilka może być powieszony na pozycjach $1, 2, 3, 4$ spośród sześciu dostępnych. Dla każdego z wyborów prawy obraz wilka może być na następujących pozycjach:

$$1 : 3, 4, 5, 6$$

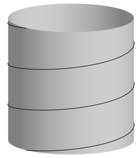
$$2 : 4, 5, 6$$

$$3 : 5, 6$$

$$4 : 6.$$

Zatem w sumie jest 10 takich ciągów.

Zadanie 11. Walec o wysokości 18 cm i obwodzie podstawy 8 cm obwiązano trzykrotnie sznurkiem zaczynając od dołu walca, a kończąc na górze, dokładnie powyżej punktu startowego. Ile wynosi długość sznurka w cm?



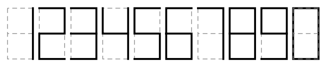
Wynik. 30

Rozwiązanie. Rozcinając walec widzimy, że w trakcie każdego obrotu wokół walca, sznurek przesuwa się pionowo o 6 cm, przesuwając się jednocześnie poziomo o 8 cm. Używając twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy, że odcinek sznurka odpowiadający jednemu obrotowi ma długość

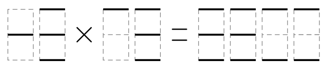
$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Skoro są trzy takie obroty, otrzymujemy, że całkowita długość sznurka wynosi 30 cm.

Zadanie 12. Poprawnie działający kalkulator wyświetla cyfry w następujący sposób:



Kalkulator Grzesia wypadł przez okno i pokazuje teraz tylko poziome kreski, ale dalej liczy prawidłowo. Grześ wykonał następujące działanie:



Jaka jest suma wszystkich cyfr występujących w tym działaniu?

Wynik. 33

Rozwiązanie. Ostatnie dwie cyfry muszą być zerami. Pierwszą cyfrą pierwszego czynnika jest 4, a pierwszą cyfrą drugiego czynnika 7. Skoro iloczyn liczb jest podzielny przez 100, a co za tym idzie przez 25, to jeden z czynników musi być podzielny przez 25 lub oba przez 5. Nie istnieje dwucyfrowa wielokrotność 25 zaczynająca się cyfrą 4, zatem drugi czynnik musi być podzielny przez 5, a więc równy 75. Iloczyn jest podzielny przez 4, zatem podzielny przez 4 jest też pierwszy czynnik. Pierwszy czynnik jest więc jest równy 48. Kalkulator wyświetla zatem działanie $48 \times 75 = 3600$, więc suma cyfr to 33.

Zadanie 13. Łukasz miał za zadanie dodać dwie liczby, ale niestety dopisał dodatkową cyfrę na końcu jednej z liczb. W efekcie otrzymał wynik 44444 zamiast 12345. Jaka była mniejsza spośród dwóch liczb, które Łukasz chciał początkowo do siebie dodać?

Wynik. 3566

Rozwiązanie. Niech x i y oznaczają szukane dwie liczby, zaś c — cyfrę, którą Łukasz dopisał do (powiedzmy) liczby x. Otrzymujemy wtedy

$$x + y = 12345 \quad \text{oraz} \quad (10x + c) + y = 44444,$$

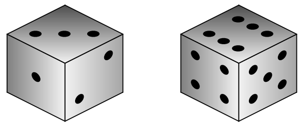
a zatem

$$9x + c = 32099.$$

Otrzymujemy stąd, że c musi wynosić 5, gdyż $32099 - c$ musi być podzielne przez 9. W rezultacie dostajemy $x = 3566$ oraz $y = 8779$.

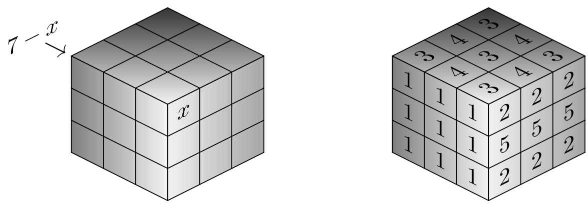
Zadanie 14. Ania dostała 27 standardowych kości i ma za zadanie skleić je w sześcian $3 \times 3 \times 3$ w taki sposób, by ściany sklejone ze sobą miały taką samą liczbę oczek. Jaka jest największa liczba oczek, którą Ania może otrzymać na zewnętrznych ścianach swojego sześcianu $3 \times 3 \times 3$?

Uwaga: Poniżej widać standardową kość do gry z dwóch różnych perspektyw. Liczby oczek na przeciwległych ścianach sumują się do 7.

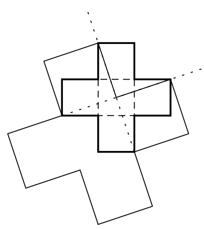


Wynik. 189

Rozwiązanie. Kluczową obserwacją jest tutaj fakt, że suma oczek na przeciwległych ściankach w dużym sześcianie zawsze wynosi 7, jak zaprezentowano po lewej stronie poniższego rysunku. Duży sześcian ma 27 takich par przeciwległych ścianek, więc niezależnie jak Ania ułoży swoje kości, całkowita liczba oczek na zewnętrznych ścianach wynosi $27 \cdot 7 = 189$. Jedno z możliwych ustawień przedstawiono na rysunku po prawej stronie.

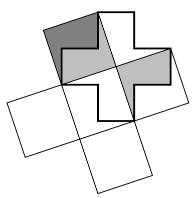


Zadanie 15. Karolina narysowała małe X-pentomino składające się z pięciu sąsiadujących kwadratów. Następnie zaznaczyła kropkowaną linią dwie prostopadłe przekątne. W końcu skonstruowała większe X-pentomino, którego niektóre boki leżą na kropkowanych liniach, jak na rysunku. Znajdź stosunek pola dużego X-pentomina do pola małego.



Wynik. 5 : 2

Rozwiązanie. Przekątne dzielą małe X-pentomino na cztery identyczne kawałki. Ponadto, dwa z nich można skleić i stworzyć jednostkowy kwadrat większego X-pentomina, jak na rysunku. Większe X-pentomino można zatem podzielić na dziesięć takich kawałków, a więc stosunek pól wynosi $10 : 4 = 5 : 2$.



Zadanie 16. Ile palindromów pomiędzy 10^3 a 10^7 ma parzystą sumę cyfr?

Uwaga: *Palindrom* to liczba, która się nie zmienia, gdy odwrócimy kolejność jej cyfr, np. 12321 jest palindromem.

Wynik. 5940

Rozwiązanie. Wszystkie liczby pomiędzy 10^3 a 10^4 mają parzystą liczbę cyfr, więc suma cyfr każdego takiego palindromu jest parzysta. Ponadto, palindromy z tego przedziału są dokładnie liczbami postaci $\overline{abba}$, gdzie a, b są dowolnymi cyframi, a jest różna od zera. Otrzymujemy stąd, że jest 90 palindromów w tym przedziale. Podobnie też możemy wywnioskować, że jest dokładne 900 palindromów o parzystej sumie cyfr pomiędzy 10^5 a 10^6.

Palindromy między 10^4 a 10^5 są postaci $\overline{abcba}$, gdzie a, b, c są cyframi, przy czym a jest różna od 0. Widzimy, że suma cyfr jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy c jest parzysta. Zatem mamy 9 możliwości na wartość a, 10 na wartość b i 5 na c, co daje $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ szukanych palindromów w powyższym przedziale. Podobne rozumowanie stosuje się dla przedziału od 10^6 do 10^7 pokazując, że ten przedział zawiera 4500 palindromów o parzystej sumie cyfr.

Otrzymujemy, że liczba wszystkich palindromów o parzystej sumie cyfr pomiędzy 10^3 a 10^7 wynosi $90 + 900 + 450 + 4500 = 5940$.

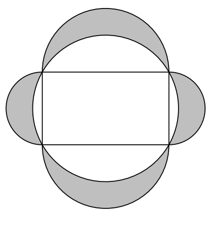
Zadanie 17. Chór składa się z 60 śpiewaczek po 20 w każdym z trzech głosów: sopranie, mezzosopranie i alcie. W każdej z grup znajduje się sześć wyjątkowo zdolnych wokalistek, które mogą zaśpiewać partię dowolnego głosu (pozostałe znają jedynie partie swojego głosu). Jaka jest największa liczba S taka, że niezależnie od tego, które S śpiewaczek zachoruje, pozostałe będą w stanie zaśpiewać utwór wymagający po 10 osób w każdym z trzech głosów?

Wynik. 22

Rozwiązanie. Jeżeli rozchorują się wszystkie alty i dodatkowo trzy uzdolnione soprany, pozostanie jedynie 9 zdolnych śpiewaczek i nie będą one w stanie stworzyć dziesięcioosobowej grupy altów. Czyli $S < 23$.

Z drugiej strony zauważmy, że najgorsza możliwa sytuacja zachodzi, gdy rozchorują się uzdolnione śpiewaczki. Możemy więc założyć, że jeżeli chore będą 22 chórzystki, to 18 z nich jest wybitnie zdolnych, a tylko 4 to zwykłe śpiewaczki. W takiej sytuacji w każdej z grup pozostanie przynajmniej 10 osób. Rozwiązaniem zadania jest więc $S = 22$.

Zadanie 18. Prostokąt o bokach długości 3 i 4 jest wpisany w koło. Ponadto zbudowano cztery półkola na jego bokach skierowane na zewnątrz prostokąta, tak jak na rysunku. Jakie jest pole zacieniowanego obszaru, który składa się z punktów leżących wewnątrz półkoli, ale nieleżących wewnątrz koła?



Wynik. 12

Rozwiązanie. Twierdzenie Pitagorasa daje związek między polami kwadratów zbudowanych na bokach trójkąta prostokątnego. Taki sam związek zachodzi dla półkoli. Związek ten stosujemy dla dwóch połówek danego prostokąta (podzielonego przekątną na dwie części). Prosta obserwacja pokazuje teraz, że każde dwa sąsiadujące szare pola sumują się do połowy prostokąta. W takim razie pole zacieniowanego obszaru jest równe polu prostokąta, które wynosi $3 \cdot 4 = 12$.

Zadanie 19. Znajdź największą trzycyfrową liczbę pierwszą p_1 o tej własności, że suma jej cyfr jest dwucyfrową liczbą pierwszą p_2, a suma cyfr liczby p_2 jest jednocyfrową liczbą pierwszą p_3.

Wynik. 977

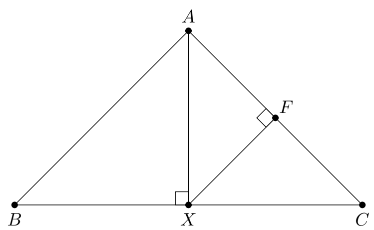
Rozwiązanie. Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi co najwyżej $9 + 9 + 9 = 27$. Jest pięć dwucyfrowych liczb pierwszych nie większych niż 27, tj. 11, 13, 17, 19 i 23. Sumy cyfr tych liczb to odpowiednio 2, 4, 8, 10, 5. Zatem jedyne możliwości to $p_2 = 11$ lub $p_2 = 23$. Największa trzycyfrowa liczba pierwsza o sumie cyfr 23 to 977, natomiast o sumie cyfr 11 to 911. Szukaną liczbą jest zatem 977.

Zadanie 20. W trójkącie ABC spełniającym równość $AB = AC$ symetralna pewnego boku przecina jedną z wysokości trójkąta w ich jedynym wspólnym punkcie leżącym na obwodzie trójkąta ABC. Wyznacz wszystkie możliwe wartości kąta ACB w stopniach.

Wynik. $45°$, $67.5°$

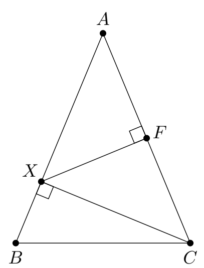
Rozwiązanie. Oznaczmy punkt, o którym mowa w zadaniu przez X oraz środek odcinka AC przez F. Zauważmy, że wysokość przechodząca przez X musi być wysokością poprowadzoną do boku, na którym leży X. Rozważymy teraz wszystkie możliwe położenia punktu X.

Jeśli punkt X leży na podstawie BC, to musi być on punktem przecięcia wysokości poprowadzonej z wierzchołka A i symetralnej któregoś boku. Z symetrii trójkąta ABC wnioskujemy, że ta wysokość pokrywa się z symetralną boku BC, tak więc wysokość ta musi przecinać symetralną któregoś z pozostałych boków. Symetria trójkąta implikuje wtedy, że ta wysokość przecina symetralne obu boków AB i AC w tym samym punkcie.



Ponieważ FX jest symetralną boku AC, trójkąt AXC jest równoramienny. Co więcej, mamy $\angle AXC = 90°$, tak więc $\angle ACB = \angle ACX = 45°$.

Jeżeli punkt X leży na AB, to musi być on przecięciem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C i symetralnej boku AC.



Tak jak w poprzednim przypadku, trójkąt AXC jest równoramienny i prostokątny z kątem prostym przy wierzchołku X. To oznacza, że $\angle BAC = \angle XAC = 45°$. Wobec tego w tym przypadku mamy

$$\angle ACB = \tfrac{1}{2}(180° - \angle BAC) = 67.5°.$$

Przypadek, gdy X leży na AC jest analogiczny.

Zadanie 21. Znajdź sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby 3599.

Uwaga: Dzielnikami liczby 3599 są w szczególności 1 oraz 3599.

Wynik. 3720

Rozwiązanie. Zauważmy, że

$$3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1 = (60 - 1)(60 + 1) = 59 \cdot 61.$$

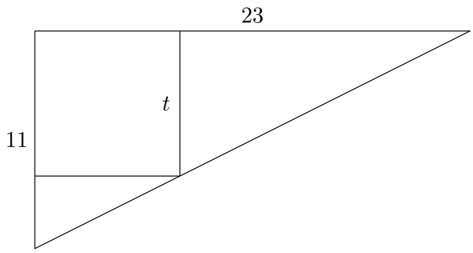
Można łatwo sprawdzić, że zarówno 59, jak i 61 są liczbami pierwszymi, zatem odpowiedź to $1 + 59 + 61 + 3599 = 3720$.

Zadanie 22. Siostry Asia, Kasia i Basia zorganizowały ognisko z kiełbaskami. Asia kupiła 17 kiełbasek, Kasia 11, a Basia nie kupiła żadnej. Po zjedzeniu wszystkich kiełbasek, siostry postanowiły równo rozłożyć koszty. Ile pieniędzy powinna dostać Asia, jeśli Basia łącznie oddała swoim siostrom 28 zł?

Wynik. 23

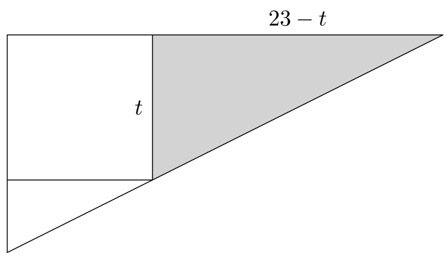
Rozwiązanie. Basia oddała siostrom dokładnie jedną trzecią całkowitej ceny kiełbasek, zatem łącznie kosztowały one $28 \cdot 3 = 84$ złote. Asia zapłaciła za 17 spośród 28 kiełbasek, czyli $84 \cdot 17/28 = 51$ złotych. Ponieważ koszty dzielone są po równo, powinna ona zapłacić tylko 28 złotych. Powinna zatem otrzymać $51 - 28 = 23$ złote.

Zadanie 23. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 11 i 23. Kwadrat o boku długości t ma dwa boki leżące na przyprostokątnych tego trójkąta i jeden wierzchołek na jego przeciwprostokątnej, jak na rysunku. Oblicz t.



Wynik. $\frac{253}{34} = 7\frac{15}{34}$

Rozwiązanie. Szary trójkąt na rysunku jest prostokątny i jeden z jego kątów ostrych pokrywa się z kątem dużego trójkąta, więc te dwa trójkąty są podobne.



Stosunek długości przyprostokątnych musi być taki sam dla obu trójkątów, więc otrzymujemy równanie

$$\frac{23 - t}{t} = \frac{23}{11},$$

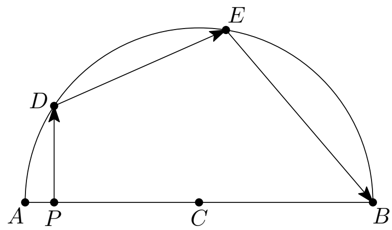
którego rozwiązaniem jest $t = 253/34$.

Zadanie 24. Znajdź najmniejszą taką dodatnią liczbę całkowitą n, że $11 \cdot 19 \cdot n$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych.

Wynik. 840

Rozwiązanie. Ponieważ 11 i 19 są liczbami pierwszymi, więc przynajmniej jedna z trzech szukanych liczb jest podzielna przez 11 i przynajmniej jedna przez 19. Dodatkowo z faktu, że ich iloczyn jest dodatni wnioskujemy, że wszystkie trzy muszą być dodatnie. Szukamy więc małych wielokrotności 11 i 19 różniących się o maksymalnie 2. Najmniejsze liczby spełniające te warunki to $3 \cdot 19 = 57$ i $5 \cdot 11 = 55$. Po obliczeniach dostajemy $55 \cdot 56 \cdot 57 = 11 \cdot 19 \cdot 840$. Odpowiedzią do zadania jest więc $n = 840$.

Zadanie 25. Rozważmy półokrąg o środku C i średnicy AB. Z pewnego punktu P leżącego na AB wypuszczono wiązkę lasera w kierunku prostopadłym do AB w taki sposób, że odbija się ona od półokręgu w punktach D i E, a następnie trafia w punkt B. Każde odbicie następuje zgodnie z zasadą „kąt padania równa się kątowi odbicia”, to znaczy $\angle PDC = \angle EDC$ oraz $\angle DEC = \angle BEC$. Wyznacz $\angle DCP$ w stopniach.



Wynik. 36°

Rozwiązanie. Oznaczmy $\angle DCP = x$. Ponieważ punkty D i E leżą na okręgu o środku C, więc trójkąt DCE jest równoramienny i ma podstawę DE. Z równości $\angle PDC = \angle EDC$ dostajemy, że trójkąt CDP jest przystający do trójkąta CDM, gdzie M jest środkiem odcinka DE. Korzystając z równości $\angle DEC = \angle BEC$ otrzymujemy $\angle BCE = \angle ECD = 2\angle DCP = 2x$ i ponieważ te trzy kąty dają razem kąt półpełny, mamy $x + 2x + 2x = 180°$, więc $x = \angle 36°$.

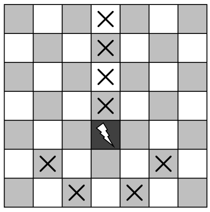
Zadanie 26. W pewnym odległym kraju znajduje się 2020 miast ponumerowanych liczbami $1, 2, \ldots, 2020$. Prezes postanowił wybudować sieć połączeń kolejowych. Tory powstaną między takimi miastami a i b, $a < b$, że b jest wielokrotnością a i nie istnieje liczba c, $a < c < b$, która jest wielokrotnością a oraz dzielnikiem b. Do ilu miast można bezpośrednio dojechać z miasta 42?

Wynik. 18

Rozwiązanie. Rozważmy parę połączonych miast. W rozkładzie na czynniki pierwsze jedno z nich musi mieć dokładnie jeden czynnik więcej niż drugie. Nie mogą mieć identycznego rozkładu, bo wtedy miałyby ten sam numer. Pokażemy teraz, że nie mogą się różnić więcej niż jednym czynnikiem. Aby to udowodnić załóżmy, że a oraz $b = a \cdot p \cdot q$ są połączonymi miastami dla pewnych niekoniecznie różnych liczb pierwszych p i q. Wtedy liczba $a \cdot p$ dzieli b, co jest niezgodne z warunkami zadania.

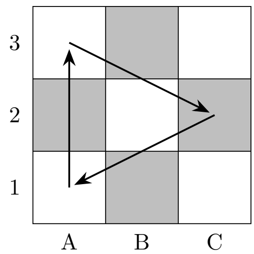
Miasto o numerze 42 ma rozkład $2 \cdot 3 \cdot 7$, czyli jest połączone z trzema miastami o mniejszych numerach ($2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$ oraz $3 \cdot 7$). Miasta o numerach większych niż 42 z którymi jest ono skomunikowane mają postać $42 \cdot p$ dla pewnego pierwszego p. Największa liczba pierwsza p spełniająca nierówność $42 \cdot p \leqslant 2020$ to 47, więc $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. Miasto 42 jest zatem połączone z 15 miastami o większych numerach.

Zadanie 27. Arek wymyślił nową figurę szachową którą nazwał *piorun*. Piorun może poruszać się do przodu jak wieża oraz do tyłu jak skoczek tak jak pokazano na rysunku. Arek postawił go na środku szachownicy 3×3 i wykonał 2020 ruchów zgodnie z zasadami. Ile maksymalnie razy piorun stanął na jednym polu?



Wynik. 673

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć że po dwóch ruchach nie możemy wrócić na to samo miejsce. Nawet na szachownicy 3×3 możemy jednak wrócić po trzech ruchach jak pokazano na rysunku.



Jeżeli piorun dostanie się na jedno z pól A1, A3, C2 może zacząć krążyć i odwiedzać każde z tych pól co trzeci ruch. Ponieważ zaczynamy na B2 możemy przejść na B3 a następnie A1 i dostać się na cykl w dwóch ruchach (w jednym ruchu nie jest to możliwe). To zostawia nam 2018 ruchów na chodzenie po cyklu i ponieważ $2018 = 672 \cdot 3 + 2$ możemy wykonać 672 obrotów. Czyli pole A1 zostanie odwiedzone 673 razy.

Zadanie 28. Radek ścigał się z baranem na okrągłym torze, na którym start i meta znajdują się w tym samym miejscu. Rozpoczęli bieg w tym samym momencie, biegli w jednakowym kierunku i spotkali się na mecie. Jednakże baran był szybszy, więc przebiegł więcej okrążeń niż Radek, który ukończył tylko trzy okrążenia. W sumie spotkali się 2020 razy, wliczając w to spotkanie na starcie i na mecie. Następnego dnia biegli ponownie, ale Radek zmienił kierunek biegu. Ich prędkości i czas trwania wyścigu były takie same jak poprzedniego dnia. Ile razy spotkali się w trakcie drugiego wyścigu?

Wynik. 2026

Rozwiązanie. Oznaczmy przez n liczbę okrążeń wykonanych przez barana. To znaczy, że prędkość Radka wynosi 3, a prędkość barana n (w okrążeniach na wyścig). Prędkość barana względem Radka wynosi $n - 3$. Spotkanie następuje za każdym razem, gdy baran (patrząc względem Radka) przebiegł pełną liczbę okrążeń, czyli $n - 3$ razy, nie licząc spotkania na starcie. Wynika stąd, że $n = 2022$. Analogicznie, gdy biegli w przeciwnych kierunkach, ich prędkość względna wynosiła $n + 3 = 2025$, czyli spotkali się 2025 razy, nie licząc startu. Ostateczna odpowiedź to $2025 + 1 = 2026$.

Zadanie 29. Patryk gra w grę, w której jego bohater zbiera trzy rodzaje przedmiotów: obronę, atak i zdrowie. Każdy z nich może być na poziomie od 1 do 10. Można połączyć dwa różne przedmioty tego samego poziomu, aby uzyskać trzeci przedmiot na poziomie o jeden wyższym. Na przykład z połączenia obrony z poziomem 3 i ataku z poziomem 3 otrzymamy zdrowie z poziomem 4. Ile ataków z poziomem 1 musimy mieć, aby uzyskać atak z poziomem 10, zakładając, że mamy dostęp do dowolnej liczby obron i zdrowia z poziomem 1?

Wynik. 170

Rozwiązanie. Oznaczmy przez a_i, o_i, z_i liczbę ataków, obron i zdrowia z poziomem i potrzebnych do stworzenia ataku z poziomem 10. Wiemy, że $o_{10} = z_{10} = 0$, $a_{10} = 1$ i zgodnie z treścią zadania otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= o_i + z_i, \\ z_{i-1} &= a_i + o_i, \\ o_{i-1} &= z_i + a_i \end{aligned}$$

dla każdego $i \in \{2, \ldots, 10\}$. Zgodnie z tymi zasadami możemy teraz wypełnić tabelkę 10×3, która w górnym wierszu ma liczby $(0, 0, 1)$.

0	0	1
1	1	0
1	1	2
3	3	2
5	5	6
11	11	10
21	21	22
43	43	42
85	85	86
171	171	170

Zatem odpowiedzią jest 170.

Aby rozwiązać zadanie w inny sposób zauważmy, że przez symetrię $o_i = z_i$. Indukcyjnie udowodnimy też, że $|a_i - o_i| = 1$. Równość zachodzi dla $i = 10$ oraz

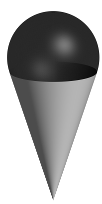
$$|a_{i-1} - o_{i-1}| = |(z_i + o_i) - (a_i + z_i)| = |o_i - a_i| = 1.$$

Wiemy też, że

$$a_{i-1} + o_{i-1} + z_{i-1} = (o_i + z_i) + (a_i + z_i) + (a_i + o_i) = 2(a_i + o_i + z_i),$$

czyli $a_1 + o_1 + z_1 = 2^9 = 512$. Korzystając z powyższych obserwacji dostajemy $o_1 = z_1 = 171$ i $a_1 = 170$.

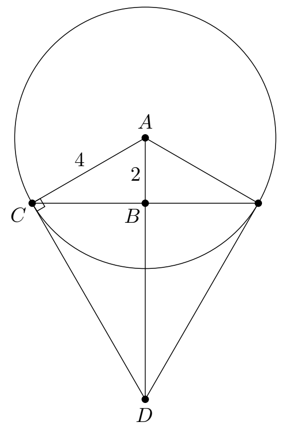
Zadanie 30. Adam kupił córce loda gałkowego. Lód miał kształt kuli o promieniu 4 cm w wafelku o kształcie stożka. Adam zauważył, że gałka umieszczona została w wafelku w następujący sposób: środek kuli znajdował się dokładnie 2 cm powyżej podstawy stożka, stożek był styczny do kuli oraz powierzchnia stożka kończyła się dokładnie w miejscu styczności z kulą. Jaka była objętość stożka?



Wynik. 24π

Rozwiązanie. Niech punkt A będzie środkiem kuli, punkt B środkiem podstawy stożka, punkt C pewnym punktem styczności stożka z kulą, a punkt D wierzchołkiem stożka, jak na rysunku poniżej. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABC mamy $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 16 - 4 = 12$. Z podobieństwa trójkątów ABC i CBD otrzymujemy $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Wobec tego objętość stożka wynosi

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot BC^2 \cdot BD = \frac{1}{3}\pi \cdot BC^2 \cdot \frac{BC^2}{AB} = \frac{\pi \cdot 12^2}{3 \cdot 2} = 24\pi.$$



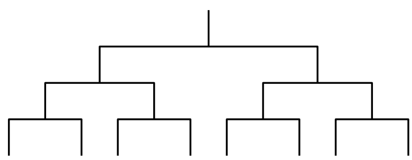
Zadanie 31. Używając każdej z cyfr 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 i 9 dokładnie raz, Weronika stworzyła dwie liczby czterocyfrowe i dodała je do siebie. Znajdź maksymalną możliwą sumę cyfr tak powstałej liczby.

Wynik. 31

Rozwiązanie. Oznaczmy dane dwie czterocyfrowe liczby przez a i b, zaś sumę cyfr dowolnej liczby n przez $S(n)$. Zachodzi wtedy następująca zależność: $S(a+b) = S(a)+S(b)-9\cdot c$, gdzie c jest liczbą sytuacji, gdy przenosimy jedynkę do kolejnej kolumny w algorytmie dodawania pisemnego. Obliczmy zatem $S(a) + S(b) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$. Otrzymujemy stąd, że jedyne możliwe wartości $S(a + b)$ to 40, 31, 22, 13 i 4.

Nie da się jednak uzyskać 40, gdyż 9 dodana do jakiejkolwiek niezerowej liczby daje co najmniej 10, a zatem powoduje przenoszenie jedynki. Z drugiej jednak strony 31 da się uzyskać, np. w następujący sposób: $9678 + 4321 = 13999$; $1 + 3 + 9 + 9 + 9 = 31$. Wynik zatem to 31.

Zadanie 32. W pewnym turnieju badmintonowym rywalizuje ośmiu zawodników przydzielonych losowo do drabinki turniejowej przedstawionej poniżej. Następnie zostają rozegrane trzy rundy zgodnie z zadaną drabinką. Zwycięzca danej rozgrywki przechodzi do kolejnej rundy, przesuwając się tym samym do najbliższego „węzła” powyżej. W naszym turnieju gra dwóch profesjonalistów oraz sześciu amatorów, w tym Dominik. Każdy z profesjonalnych graczy zawsze pokona amatora, z kolei mecze między dwoma profesjonalistami lub dwoma amatorami są wyrównane i każdy z graczy ma równą szansę ich wygrania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Dominik zagra w finale?



Wynik. $\frac{1}{14}$

Rozwiązanie. Dominik zagra w finale wtedy i tylko wtedy, gdy obaj profesjonalni gracze zaczną w drugiej połówce drabinki i Dominik wygra oba mecze w swojej połówce. Zacznijmy od ustalonej pozycji Dominika i wybierzmy pozycje dwóch profesjonalnych graczy. Prawdopodobieństwo, że obaj oni znajdą się w drugiej połówce wynosi $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$. Wszyscy amatorzy są na tym samym poziomie, więc prawdopodobieństwo, że Dominik wygra oba mecze wynosi $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$.

Zadanie 33. Na tablicy napisano następujące liczby

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}.$$

W każdym ruchu wybrane zostają dwie liczby a i b. Następnie zostają one zmazane i zastąpione liczbą

$$\frac{ab}{a + 2ab + b}.$$

Operacja ta jest powtarzana tak długo, aż na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Znajdź wszystkie możliwe wartości ostatniej liczby na tablicy.

Wynik. $\frac{1}{5248}$

Rozwiązanie. Zauważmy, że liczba n, która zastępuje na tablicy liczby a i b, spełnia

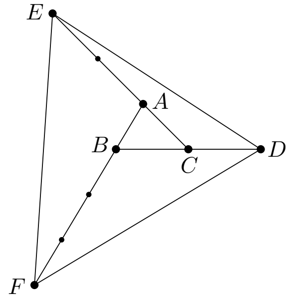
$$\frac{1}{n} = \frac{a + 2ab + b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2.$$

Otrzymujemy, że suma odwrotności wszystkich liczb na tablicy zwiększa się o 2 w każdym ruchu. Skoro zostanie wykonanych dokładnie 99 operacji, to ostatnia liczba ℓ spełnia następujące równanie

$$\frac{1}{\ell} = 2 \cdot 99 + 1 + 2 + \ldots + 100 = 198 + \frac{101 \cdot 100}{2} = 5248.$$

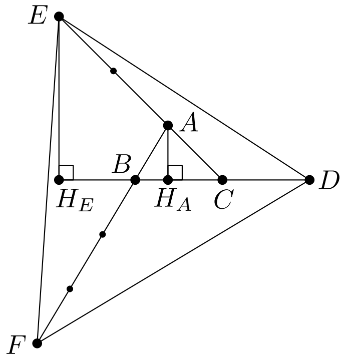
Zatem ostatnia liczba wynosi $\frac{1}{5248}$.

Zadanie 34. Dany jest trójkąt ABC o polu 1. Jego boki BC, CA, AB przedłużono odpowiednio do punktów D, E i F, w taki sposób, że $BD = 2BC$, $CE = 3CA$ oraz $AF = 4AB$, jak na rysunku. Znajdź pole trójkąta DEF.



Wynik. 18

Rozwiązanie. Oznaczmy przez H_A i H_E spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z punktów A i E na prostą BC.



Trójkąty prostokątne CAH_A oraz CEH_E są podobne, zatem z równości $CE = 3CA$ otrzymujemy $EH_E = 3AH_A$. Ponadto, z równości $CD = BD - BC = BC$ dostajemy, że pole trójkąta CDE jest równe

$$\tfrac{1}{2} \cdot CD \cdot EH_E = \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot 3AH_A = 3.$$

Podobne rozumowanie pokazuje, że pola trójkątów AEF i BFD wynoszą odpowiednio $2 \cdot 4 = 8$ oraz $3 \cdot 2 = 4$, skąd otrzymujemy, że całkowite pole trójkąta wynosi $1 + 3 + 8 + 6 = 18$.

Zadanie 35. Królewska skarbniczka Halina podczas zbierania podatków wrzucała monety do trzech worków, dzieląc je na te ważące po 10, 11 i 12 gramów. Niestety nie opisała ich poprawnie i teraz nie wiadomo, który rodzaj monet znajduje się w którym worku. Król posiada wagę umożliwiającą ważenie przedmiotów o masie do N gramów, gdzie N jest pewną liczbą całkowitą (jeżeli na wadze położymy cięższy przedmiot, to wskaże ona N). Twoim celem jest poprawne przyklejenie etykiet na worki, wykonując tylko jedno ważenie. Jaka jest minimalna wartość N, dla której taka operacja jest możliwa?

Wynik. 47

Rozwiązanie. Oznaczmy liczbę monet wyjętych z worków do zważenia przez a, b i c. Liczby te muszą być parami różne, aby dało się rozróżnić worki. Szukamy najmniejszych różnych liczb a, b i c takich, żeby $a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m$ były parami różne dla każdej permutacji $(k,\ l,\ m)$ liczb 10, 11 i 12. Najmniejsza możliwa trójka to $a = 0$, $b = 1$ i $c = 2$. Jednak nie jest ona poprawna, bo $32 = 2 \cdot 10 + 12 = 2 \cdot 11 + 10$. Kolejna możliwość to $a = 0$, $b = 1$ and $c = 3$. Okazuje się, że ta trójka spełnia warunki zadania:

$$3{\cdot}10{+}11 = 41,\ \ 3{\cdot}10{+}12 = 42,\ \ 3{\cdot}11{+}10 = 43,\ \ 3{\cdot}11{+}12 = 45,\ \ 3{\cdot}12{+}10 = 46,\ \ 3{\cdot}12{+}11 = 47.$$

Czyli waga musi działać poprawnie do 47 gramów.

Zadanie 36. Dominika zdecydowała się przejść na dietę ananasową. Codziennie o 13:00 sprawdza, ile posiada ananasów. Jeżeli ma co najmniej jednego, zjada go. W przeciwnym przypadku kupuje o jednego ananasa więcej niż miała w jakimkolwiek innym dniu. Dominika kupiła swojego pierwszego ananasa pierwszego dnia o 13:00. Ile ananasów będzie miała 2020 dnia o 14:00?

Wynik. 59

Rozwiązanie. Oznaczmy liczbę ananasów posiadanych przez Dominikę w i-tym dniu o 14:00 jako $s(i)$. Pierwsze dwa zera w ciągu $s(1), s(2), s(3), \ldots$ pojawią się na pozycji drugiej i piątej. Skoro Dominika za każdym razem kupuje o jednego ananasa więcej, to odległości między kolejnymi zerami w ciągu tworzą ciąg $3, 4, 5, \ldots$. Zera w ciągu $s(i)$ znajdują się zatem na pozycjach o indeksie postaci

$$2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

dla pewnego n. Naszym celem jest znalezienie ostatniego wystąpienia zera przed 2020 dniem. W tym celu rozwiązujemy równanie kwadratowe $\frac{1}{2}x(x+1) - 1 = 2020$, które ma dokładnie jedno dodatnie rozwiązanie. Jest ono równe $\frac{\sqrt{16169}-1}{2}$, czyli leży między 63 a 64. Stąd ostatnie zero jest 62. i znajduje się na pozycji $\frac{63 \cdot 64}{2} - 1 = 2015$. Ciąg $s(i)$ wygląda potem następująco: $63, 62, 61, 60, 59, \ldots$, zatem $s(2020)$ jest równe 59.

Zadanie 37. Farmer Janek wybudował dla swoich prosiaczków chlew o powierzchni $252\,\mathrm{m}^2$. W środku ma ścianki, które dzielą chlew na 16 prostokątnych sektorów. Ścianki te można przesuwać równolegle do zewnętrznych ścian budynku na całej długości lub szerokości. W tym momencie sektory mają powierzchnie zaznaczone na obrazku (w m^2). Janek lubi matematykę i dba o to, żeby sektory miały zawsze boki o długościach całkowitych w metrach. Wyznacz wszystkie możliwe powierzchnie sektora (w m^2), który znajduje się w prawym górnym rogu (zaznaczonego znakiem zapytania).

24			?
18		12	
			12
30	10		

Wynik. 8, 24

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że znamy stosunek szerokości pierwszej i drugiej kolumny (30 : 10) oraz pierwszej i trzeciej (18 : 12). Natomiast stosunek długości pierwszej, drugiej i czwartej kolumny wynosi 24 : 18 : 30. Po uproszczeniu proporcji dostajemy stosunek 3 : 1 : 2 dla pierwszej, drugiej i trzeciej kolumny oraz 4 : 3 : 5 dla pierwszego, drugiego i czwartego wiersza. Dzięki temu możemy uzupełnić obrazek, wprowadzając niewiadome x i y dla uwzględnienia otrzymanych proporcji.

24	8	16	$4y$
18	6	12	$3y$
$3x$	x	$2x$	12
30	10	20	$5y$

Rozważając proporcje w zacieniowanym prostokącie dostajemy, że $12 : 2x = 3y : 12$, czyli $y = 24/x$. Sumując pola wszystkich sektorów otrzymujemy

$$156 + 6x + 12y = 252,$$

co po podstawieniu $y = 24/x$ i przekształceniu daje nam równanie kwadratowe

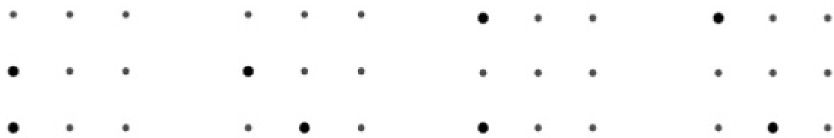
$$x^2 - 16x + 48 = 0,$$

którego rozwiązaniami są $x = 4$ i $x = 12$. Szukane pole wynosi $4y = 96/x$, czyli 24 lub 8.

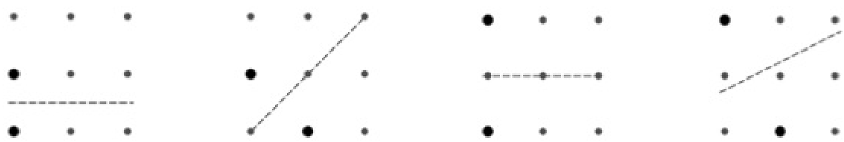
Zadanie 38. Krystyna i Stefan narysowali po jednym okręgu na kartce w kratkę. Każda z kratek ma wymiary 1×1. Oba okręgi przechodzą dokładnie przez trzy punkty kratowe (punkty będące wierzchołkami kratek). Okrąg Krystyny ma promień $\frac{5}{4}$, a okrąg Stefana jest jeszcze mniejszy. Jaki jest promień okręgu Stefana?

Wynik. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

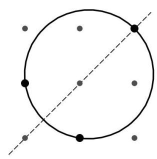
Rozwiązanie. Niech A, B, C oznaczają punkty kratowe na okręgu Stefana. Wiemy, że okrąg Stefana ma promień mniejszy od $\frac{5}{4}$, więc odległość między A i B wynosi co najwyżej $\frac{5}{2}$, a zatem z dokładnością do obrotu, poniższe rysunki przedstawiają wszystkie możliwe wzajemne położenie punktów A i B:



Symetralna odcinka AB jest jednocześnie osią symetrii okręgu, a punkt C musi albo leżeć na tej osi symetrii albo odbicie punktu C względem tej osi nie jest punktem kratowym. To wyklucza sytuację przedstawioną na pierwszym rysunku.



Sytuacja z drugiego rysunku możliwa jest wyłącznie, jeśli C leży na osi symetrii. Ponadto, ustawienie punktu C względem A oraz B musi być zgodnie z sytuacją z drugiego, trzeciego lub czwartego ustawienia, z dokładnością do obrotu. To prowadzi do wniosku, że okrąg Stefana wygląda następująco:



Musimy wyznaczyć promień tego okręgu. Wprowadźmy układ współrzędnych w taki sposób, że punkty A, B, C mają współrzędne $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,2)$. Podstawiając te wartości do równania okręgu $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, wyliczamy h, k i r, i otrzymujemy równanie $(x-\frac{7}{6})^2+(y-\frac{7}{6})^2=\frac{25}{18}$.

Zadanie 39. Siedmiu krasnoludków ma na głowie siedem kapeluszy o parami różnych kolorach. Podły czarodziej Vierr-Tarra chce opracować taką klątwę zmieniającą kolory kapeluszy, że:

- nowy kolor kapelusza zależy wyłącznie od jego poprzedniego koloru, w szczególności nie jest istotne kto miał go wcześniej na głowie,
- po tym jak klątwa zadziała, każdy z siedmiu pierwotnych kolorów jest obecny,
- jeżeli Vierr-Tarra użyje klątwy dwa razy lub trzy razy, to w obu przypadkach żaden z krasnoludków nie będzie miał tego samego koloru kapelusza co na początku.

Ile różnych klątw może opracować podły czarodziej Vierr-Tarra?

Wynik. 720

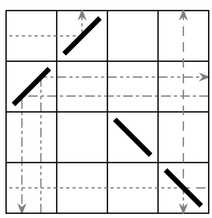
Rozwiązanie. Skoro wszystkie możliwe kolory kapeluszy mają być obecne po zadziałaniu klątwy, to klątwa jest po prostu permutacją siedmiu oryginalnych kolorów. Każda taka permutacja może zostać rozłożona na rozłączne cykle złożone z kolejnych kolorów. Z trzeciego warunku cykle nie mogą być utworzone z jednego, dwóch, ani trzech kolorów. Nie da się jednak podzielić siedmiu kolorów na więcej niż jeden cykl długości co najmniej cztery. Klątwa zatem musi być permutacją o jednym siedmioelementowym cyklu. Takich permutacji jest $6! = 720$: wybieramy jeden z kolorów, jest sześć możliwości wyboru koloru na jaki klątwa może go zmienić, dla tego koloru jest pięć możliwości, itd., aż ostatni kolor musi przejść na pierwszy kolor.

Zadanie 40. Świstak Wojtek ma bardzo nietypową kłódkę na kod. Jej nadzwyczajność polega na fakcie, że na każdym z czterech pierścieni służących do ustawienia kodu znajduje się inna liczba liczb. Na pierwszym pierścieniu umieszczone są liczby od 0 do 4, na drugim od 0 do 6, na trzecim od 0 do 10, a na ostatnim od 0 do 9. Wojtek pamięta, że jeżeli ustawi kod na $0, 0, 0, 0$ i zacznie kręcić wszystkimi pierścieniami jednocześnie (tak, że następną pozycją będzie $1, 1, 1, 1$), w pewnym momencie dotrze do kombinacji kończącej się na $5, 1$. Gdy taka sytuacja powtórzy się drugi raz, pierścienie będą ułożone we właściwej pozycji, aby otworzyć kłódkę. Jaki jest kod na kłódce Wojtka?

Wynik. $1, 6, 5, 1$

Rozwiązanie. Szukamy liczby całkowitej x, takiej że dzielenie x przez 11 da resztę 5, a przez 10 da resztę 1. Ponieważ 10 i 11 są względnie pierwsze, więc na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje dokładnie jedna taka liczba mniejsza od 110, a wszystkie inne rozwiązania powstają przez dodanie do niej 110. Łatwo sprawdzić, że najmniejsza liczba spełniające te warunki to 71. Aby ją znaleźć można wypisywać kolejne liczby postaci $11k + 5$ i sprawdzać czy są zakończone na 1. Po tylu obrotach pierwszy raz wystąpi układ cyfr kończący się na $5, 1$. Drugi raz taka sytuacja wystąpi po $110 + 71 = 181$ obrotach. Ponieważ dzielenie 181 przez 5 i 7 zwraca odpowiednio reszty 1 i 6, odpowiedzią do zadania jest kombinacja $1, 6, 5, 1$.

Zadanie 41. Na przekątnych niektórych pól planszy 4×4 umieszczono cztery dwustronne lustra. Z każdego z szesnastu odcinków znajdujących się na brzegu planszy wypuszczono wiązkę lasera w kierunku prostopadłym do tego odcinka. Wiązka lasera biegnie do przodu i zmienia kierunek o 90° za każdym razem, gdy napotka na swojej drodze lustro. Okazało się, że cztery wiązki lasera miały jeden swój koniec na dolnej, a drugi na prawej krawędzi planszy, inne cztery wiązki miały końce na prawej i górnej krawędzi planszy, jeszcze inne cztery wiązki miały końce na górnej i lewej krawędzi, a pozostałe cztery miały końce na lewej i dolnej krawędzi planszy. Dla ilu różnych ustawień luster mogła zajść taka sytuacja? (Rysunek przedstawia jedno z takich ustawień oraz niektóre z laserów.)



Wynik. 144

Rozwiązanie. Ponieważ do dyspozycji mamy tylko cztery lustra i każda wiązka lasera musi w pewnym momencie zmienić kierunek, więc każdy wiersz i każda kolumna musi zawierać dokładnie jedno lustro. To można osiągnąć na $4! = 24$ sposoby — wybieramy kolumnę dla lustra w pierwszym rzędzie na cztery sposoby, następnie kolumnę dla lustra w drugim rzędzie na trzy sposoby, itd. W związku z wymaganą liczbą wiązek biegnących w każdym kierunku, musimy umieścić dwa lustra równolegle do jednej przekątnej planszy i dwa pozostałe lustra równolegle do drugiej przekątnej. Wobec tego po wybraniu pól, na których umieszczamy lustra możemy wybrać orientację luster na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów. Ostatecznie, nietrudno spostrzec, że każda taka konfiguracja spełnia warunki zadania, więc jest $24 \cdot 6 = 144$ możliwych ustawień luster.

Zadanie 42. Niech $x_1 = 2020$, a x_n będzie liczbą powstałą przez przemnożenie x_{n-1} przez najmniejszą liczbę pierwszą p, która nie dzieli x_{n-1} oraz podzielenie przez wszystkie liczby pierwsze mniejsze od p. Znajdź liczbę różnych dzielników pierwszych x_{2020}.

Wynik. 9

Rozwiązanie. Pierwsze wyrazy ciągu to $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ oraz $x_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 101$. Zauważmy, że jeżeli wyraz ciągu nie dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej, to kolejny wyraz również nie. Zatem zaczynając od x_2 możemy przedstawić wyraz x_n jako liczbę b_n w systemie dwójkowym, gdzie k-ta cyfra (od prawej) jest równa 1, gdy x_n dzieli się przez k-tą liczbę pierwszą. Następnie zauważmy, że z definicji ciągu mamy $b_{n+1} = b_n + 1$ dla wszystkich $n \geqslant 2$. Mamy

$$b_2 = 10000000000000000000000111_2$$

oraz

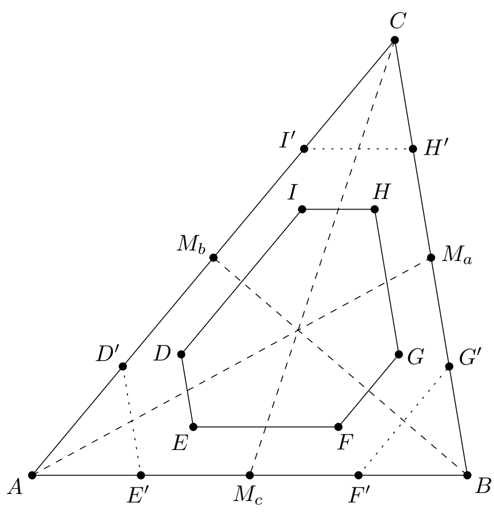
$$b_{2020} = b_2 + \underbrace{11111100010_2}_{=2018} = 10000000000000011111101001_2.$$

Zgodnie z definicją b_n, liczba różnych dzielników pierwszych x_{2020} jest równa liczbie jedynek w zapisie b_{2020}, czyli 9.

Zadanie 43. Środkowe w trójkącie ABC dzielą go na sześć mniejszych trójkątów. Środki ciężkości tych sześciu trójkątów są wierzchołkami sześciokąta $DEFGHI$. Znajdź stosunek pola $DEFGHI$ do pola ABC.

Wynik. $\frac{13}{36}$

Rozwiązanie. Na poniższym rysunku zaznaczone zostały wszystkie istotne punkty: środek ciężkości S trójkąta $\triangle ABC$, środki M_a, M_b, M_c boków $\triangle ABC$, środki ciężkości D, E, F, G, H, I mniejszych trójkątów, środki $D', E', \ldots, I'$ odcinków $M_bA, AM_c, \ldots, CM_b$.



Skoro $AE' = \frac{1}{4}AB$ oraz $AD' = \frac{1}{4}AC$, trójkąt $\triangle AE'D'$ jest podobny do $\triangle ABC$ w skali $\frac{1}{4}$ na mocy twierdzenia Talesa. Zatem, pole $[AE'D']$ jest równe $\frac{1}{16}[ABC]$. Analogicznie, mamy $[BG'F'] = [CI'H'] = \frac{1}{16}[ABC]$. Zatem, pole sześciokąta $D'E'F'G'H'I'$ wynosi $\frac{13}{16}[ABC]$. Co więcej, jednokładność o środku w S i skali $\frac{3}{2}$ przekształca sześciokąt $DEFGHI$ na sześciokąt $D'E'F'G'H'I'$, więc pole sześciokąta $DEFGHI$ jest równe

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{13}{16}[ABC] = \frac{13}{36}[ABC].$$

Zatem, szukany stosunek pól wynosi $\frac{13}{36}$.

Zadanie 44. Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniających warunek $a_1 = a_{2020}$ oraz $a_{m+1} = m(-1)^{m+1} - 2a_m$ dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych m. Znajdź wartość wyrażenia $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019}$.

Wynik. $\frac{1010}{3}$

Rozwiązanie. Dodając stronami równości dla $m = 1, \ldots, 2019$ otrzymujemy

$$(a_2 + a_3 + \ldots + a_{2020}) = (1 - 2 + 3 - \ldots + 2019) - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019}).$$

Korzystając z tego, że $a_1 = a_{2020}$ po przekształceniu mamy

$$\begin{aligned} 3(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019}) &= 1 - 2 + 3 - \ldots + 2019 = \\ &= (1 - 2) + (3 - 4) + \ldots + (2017 - 2018) + 2019 = \\ &= (-1) \cdot 1009 + 2019 = 1010. \end{aligned}$$

Zatem $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019} = 1010/3$.

Zauważmy, że istnieje ciąg spełniający warunki zadania. Dla dowolnego a_1, kolejne wyrazy są wyznaczone jednoznacznie. Możemy więc wyrazić wartość a_{2020} przy pomocy liniowego równania zależnego od a_1. Porównując $a_1 = a_{2020}$ można wyliczyć wartość a_1.

Zadanie 45. Sandra trzyma w ręce pięć identycznych sznurków w taki sposób, że ich końce zwisają po dwóch stronach ręki. Poprosiła Wojtka, żeby losowo wiązał w pary sznurki zwisające najpierw z jednej strony ręki, a potem z drugiej, tak, że zostanie jeden niezwiązany sznurek z każdej strony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że powstał w ten sposób jeden długi sznurek?

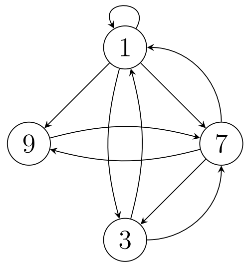
Wynik. $\frac{8}{15}$

Rozwiązanie. Nazwijmy sznurki A, B, C, D i E. Załóżmy, że po jednej stronie sznurek A jest niezwiązany, sznurek B jest związany z C, a D z E. W takim przypadku jeden długi sznurek otrzymamy dokładnie wtedy, gdy po drugiej stronie A zwiążemy z B, C, D lub E (4 opcje), a pozostały wolny koniec z danej pary do jednego z dwóch z drugiej pary, co można zrobić na 2 sposoby (np. A zwiążemy z B, wtedy C możemy związać z D lub E). To daje $4 \cdot 2 = 8$ opcji. Z kolei wszystkich możliwych sposobów związania sznurków z drugiej strony jest 15, ponieważ na pięć sposobów możemy wybrać niezwiązany sznurek i połączyć pozostałe 4 sznurki w pary na trzy sposoby. Daje to prawdopodobieństwo $8/15$.

Zadanie 46. Liczbę nazwiemy *2-pierwszą* jeśli każda para kolejnych cyfr tej liczby tworzy inną dwucyfrową liczbę pierwszą. Na przykład, 237 jest 2-pierwsza, ale 136 i 1313 nie są 2-pierwsze. Znajdź największą 2-pierwszą liczbę.

Wynik. 619737131179

Rozwiązanie. Rozważmy skierowany graf o czterech wierzchołkach oznaczonych cyframi 1, 3, 7 i 9, przy czym dwie cyfry łączymy strzałką wtedy i tylko wtedy, gdy dwucyfrowa liczba utworzona przez te cyfry jest pierwsza. Zauważmy, że w grafie występuje pętla przy wierzchołku oznaczonym cyfrą 1.



Załóżmy na chwilę, że istnieje ścieżka w tym grafie wzdłuż narysowanych strzałek, która wykorzystuje każdą strzałkę dokładnie raz. Wtedy największa liczba 2-pierwsza może być uzyskana przez dopisanie cyfry na początku ciągu cyfr odwiedzonych przez jedną z takich ścieżek. W rzeczy samej, z definicji liczby 2-pierwszej wynika, że wszystkie jej cyfry, nie licząc pierwszej cyfry od lewej, należą do zbioru $\{1, 3, 7, 9\}$ oraz że żadna strzałka nie może być użyta dwa razy. Wobec tego żadna liczba 2-pierwsza nie może mieć więcej cyfr niż liczba strzałek w grafie powiększona o dwa, tzn. 12. Ponadto, pierwszą cyfrą nie może być ani 9 ani 7, gdyż to spowodowałoby dwukrotne wystąpienie liczby odpowiadającej pewnej strzałce. Ponieważ liczby 61, 83, 87 i 89 są pierwsze, nie potrzebujemy mniejszych cyfr i pierwszą cyfrą jest 6 lub 8.

Teraz znajdujemy ścieżkę o opisanych wyżej własnościach, która utworzy największą możliwą liczbę. Z jednej strony, liczba strzałek wchodzących do 9 jest o jeden większa niż liczba strzałek wychodzących z 9. Z drugiej strony, liczba strzałek wchodzących do 1 jest o jeden mniejsza od liczby strzałek wychodzących z 1. Liczba strzałek wchodzących i wychodzących do pozostałych cyfr jest taka sama. Z obserwacji tych wynika, że nasza ścieżka musi zaczynać się w jedynce i kończyć w dziewiątce. Z jedynki wchodzimy do dziewiątki, ponieważ jest to największy możliwy sąsiad jedynki. Z tego samego powodu z dziewiątki przechodzimy do siódemki. Następnie nie możemy wrócić do dziewiątki, bo to zakończyłoby przedwcześnie naszą ścieżkę, więc musimy pójść do trójki, następnie z powrotem do siódemki, itd. Za pomocą takiego algorytmu zachłannego otrzymujemy 19737131179 i ponieważ 81 nie jest liczbą pierwszą, wnioskujemy że największą liczbą 2-pierwszą jest 619737131179.

Zadanie 47. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AB i AC, przy czym O jest środkiem odcinka DE. Wyznacz długość odcinka CE wiedząc, że $AD = 8$, $BD = 3$ oraz $AO = 7$.

Wynik. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

Rozwiązanie. Niech A', B', C' będą odbiciami odpowiednio punktów A, B, C względem punktu O. Ponieważ O jest środkiem odcinka DE, to punkt D (odpowiednio E) jest punktem przecięcia odcinków AB i $A'C'$ (odpowiednio AC i $A'B'$). Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla prostokątnego trójkąta $AA'B'$ obliczamy

$$AB' = \sqrt{AA'^2 - A'B'^2} = \sqrt{14^2 - 11^2} = 5\sqrt{3}.$$

Następnie, ponownie używając twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $AB'E$ otrzymujemy

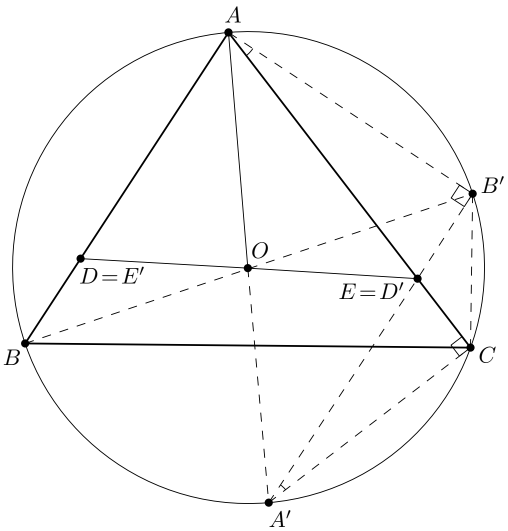
$$AE = \sqrt{75 + 9} = 2\sqrt{21}.$$

Trójkąty $AB'E$ oraz $A'CE$ są podobne, zatem

$$\frac{CE}{A'E} = \frac{B'E}{AE},$$

skąd wynika, że

$$CE = A'E \cdot \frac{B'E}{AE} = 8 \cdot \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{21}}{21} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$



Drugie rozwiązanie: Potęga punktu D względem okręgu opisanego na trójkącie ABC o promieniu $r = AO$ jest równa

$$-3 \cdot 8 = -DB \cdot DA = OD^2 - r^2 \Longrightarrow OE = OD = \sqrt{49 - 24} = 5.$$

Z twierdzenia cosinusów w $\triangle ADO$ otrzymujemy

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos(\angle AOD).$$

Ponieważ $\cos(\angle AOE) = \cos(180^\circ - \angle AOD) = -\cos(\angle AOD) = -\frac{1}{7}$, to z tego samego twierdzenia dla $\triangle AOE$ wynika

$$AE^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos(\angle AOE) = 84 \Longrightarrow AE = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

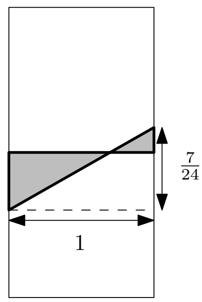
Podobnie jak wyżej, potęga punktu E względem okręgu opisanego na trójkącie ABC wynosi

$$-2\sqrt{21} \cdot EC = 5^2 - 7^2 \Longrightarrow EC = \frac{24}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

Zadanie 48. Prostokąt o wymiarach 7×24 jest podzielony na kwadraty 1×1. Jedna z jego przekątnych wycina trójkąty z niektórych kwadratów. Znajdź sumę obwodów wszystkich wyciętych trójkątów.

Wynik. $\frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$

Rozwiązanie. Niech 24 będzie szerokością, a 7 wysokością prostokąta. Rozważmy przekątną z lewego dolnego rogu do prawego górnego. Ma ona nachylenie $\frac{7}{24}$. Przekątna wycina trójkąty dokładnie wtedy, kiedy przechodzi przez poziomy odcinek oddzielający dwa kwadraty oraz przy przechodzeniu przez prawy bok kwadratu z lewego dolnego narożnika i lewy bok kwadratu z prawego górnego narożnika. Sytuacja, kiedy przekątna przechodzi przez poziomy odcinek została przedstawiona na rysunku.



Skoro kąt nachylenia jest stały, to suma obwodów powstałych dwóch trójkątów jest równa obwodowi trójkąta prostokątnego o bokach 1 i $\frac{7}{24}$. Przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość $\sqrt{1+\left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{25}{24}$, więc jego obwód to $\frac{56}{24}$. Przekątna przechodzi przez poziomy odcinek dokładnie 6 razy, a trójkąty wycięte z dwóch narożnych kwadratów są również trójkątami prostokątnymi o bokach 1 i $\frac{7}{24}$, więc daje to odpowiedź $8 \cdot \frac{56}{24} = \frac{56}{3}$.

Zadanie 49. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *piętrową*, jeśli da się przejść z dowolnego piętra 8788-kondygnacyjnego budynku do każdego innego piętra, dopuszczając wyłącznie schodzenie o 2020 pięter w dół lub wchodzenie o n pięter do góry. Znajdź największą piętrową liczbę.

Uwaga: 8788-kondygnacyjny budynek ma 8788 pięter: parter oraz 8787 pięter ponad parterem.

Wynik. 6763

Rozwiązanie. Po pierwsze, aby móc opuścić dwa tysiące dziewiętnaste piętro, musi zachodzić nierówność $2019 + n \leqslant 8787$, skąd $n \leqslant 6768$. Po drugie, warunek $d := \mathrm{NWD}(2020, n) = 1$ jest konieczny, gdyż z a-tego piętra można przemieścić się do b-tego piętra tylko jeśli $d \mid a - b$. Pamiętając o tym, że $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, możemy wykluczyć kilku kandydatów na największe możliwe n: 6768 dzieli się przez 2, 6767 dzieli się przez 101, 6766 dzieli się przez 2, 6765 dzieli się przez 5, 6764 dzieli się przez 2 i w końcu $\mathrm{NWD}(6763, 2020) = 1$.

Pozostaje wykazać, że liczba 6763 jest piętrowa. Korzystając z algorytmu Euklidesa znajdujemy liczby całkowite x, y takie, że $6763x - 2020y = 1$ i możemy założyć, że x, y są nieujemne, gdyż dodanie 2020 do x oraz 6763 do y zachowuje tę równość. Twierdzimy, że zaczynając od piętra o numerze $0 \leqslant f \leqslant 8786$ jesteśmy w stanie wykonać ciąg x ruchów do góry oraz y ruchów na dół w takiej kolejności, że na końcu znajdziemy się na piętrze o numerze $f+1$. W rzeczy samej, ponieważ $2020+6763 \leqslant 8787$, więc zawsze możemy wykonać ruch w co najmniej jednym kierunku. Ponadto, jeśli użyliśmy wszystkich ruchów na dół (odpowiednio: w górę), musimy być poniżej (odpowiednio: powyżej) piętra $f+1$ i wykonanie pozostałych ruchów w górę (odpowiednio: w dół) doprowadzi nas na piętro $f+1$. Podobnie pokazujemy, że z każdego piętra $1 \leqslant f \leqslant 8787$ możemy zejść piętro niżej. Wnioskujemy, że 6763 jest największą piętrową liczbą.

Zadanie 50. W poniższym kryptarytmie

$$\begin{array}{cccccc} & & & R & E & D \\ + & & B & L & U & E \\ + & G & R & E & E & N \\ \hline = & B & R & O & W & N \end{array}$$

różnym literom odpowiadają różne cyfry. Żadna z czterech powstałych liczb nie zaczyna się zerem. Ponadto wiadomo, że $BLUE$ jest kwadratem liczby całkowitej. Znajdź pięciocyfrową liczbę całkowitą odpowiadającą napisowi $BROWN$.

Wynik. 85230

Rozwiązanie. Oznaczmy kolumny od lewej do prawej liczbami od 1 do 5. Niech ponadto $c_1, c_2, \ldots, c_5$ oznaczają wartości „przenoszone” z odpowiedniej kolumny do następnej. Zauważmy, że $c_1 = 0$ oraz $0 \leqslant c_i \leqslant 2$ dla każdego $i = 2, \ldots, 5$: wynika to indukcyjnie ze spostrzeżenia, że suma trzech cyfr oraz cyfry nie większej niż 2 przeniesionej z poprzedniej kolumny daje co najwyżej 29. Zauważmy ponadto, że $c_2 \leqslant 1$ — wynika to z faktu, że w drugiej kolumnie mamy dwie różne cyfry, a ponadto $c_3 \leqslant 2$. Z obserwacji pierwszej kolumny otrzymujemy, że $c_2 \neq 0$, a zatem $c_2 = 1$ i $G + 1 = B$. Z obserwacji piątej kolumny otrzymujemy $D + E = 10$, gdyż obie liczby D i E nie mogą być równe zeru, zatem $c_5 = 1$. Skoro $B + R + c_3 = c_2 \cdot 10 + R$, to $B = 9$ lub $B = 8$. Zatem $BLUE$ składa się z czterech różnych cyfr i jest kwadratem liczby całkowitej n spełniającej $90 \leqslant n \leqslant 99$. Wykluczając kwadraty z powyższego przedziału, których cyfry się powtarzają, zostają nam tylko następujące możliwości dla wyrażenia $BLUE$: 8649, 9025, 9216, 9604 oraz 9801. Na mocy $D + E = 10$ możemy wykluczyć 9025, gdyż w przeciwnym przypadku otrzymalibyśmy $D = E = 5$. Ponadto 9801 nie jest możliwe, gdyż wtedy $D = B = 9$. Podobnie 9604 nie jest możliwe, ponieważ pociągałoby to za sobą $L = D = 6$. Z pomocą czwartej kolumny możemy także wyeliminować możliwość 9216, gdyż wtedy otrzymalibyśmy $E + U + E + 1 = 6 + 1 + 6 + 1 = 14$, skąd $W = 4$, co stałoby w sprzeczności z $D = 4$. Zatem jedyną możliwą wartością wyrażenia $BLUE$ jest 8649.

Z faktu, że $B = 8$, $L = 6$, $U = 4$, $E = 9$, łatwo otrzymujemy, że $D = 1$, $W = 3$ oraz $G = 7$, a ponadto $c_3 = c_4 = 2$. Na podstawie trzeciej kolumny otrzymujemy $R + L + E + c_4 = c_3 \cdot 10 + O$, co możemy przepisać jako $R + 17 = 20 + O$, jedyną możliwością wartości dla R i O jest $R = 5$ i $O = 2$. W rezultacie otrzymujemy $N = 0$, a zatem jedynym rozwiązaniem danego kryptarytmu jest

$$\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 9 & 1 \\ + & & 8 & 6 & 4 & 9 \\ + & 7 & 5 & 9 & 9 & 0 \\ \hline = & 8 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Zadanie 51. Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą $k > 1$, dla której nie istnieje taka k-cyfrowa liczba całkowita dodatnia n, że każda jej cyfra jest nieparzysta oraz $S(S(n)) = 2$, gdzie $S(x)$ oznacza sumę cyfr liczby x.

Wynik. 103

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $S(m) = 2$ dla nieparzystej liczby całkowitej m, wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 10^\ell + 1$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej ℓ. Jeśli $k = 103$, to $S(n)$ jest liczbą nieparzystą dla dowolnej k-cyfrowej liczby n o wszystkich cyfrach nieparzystych. Zatem jeśli $S(S(n)) = 2$, to $S(n)$ musi być postaci $10^\ell + 1$. Jednakże

$$101 < 103 \cdot 1 \leqslant S(n) \leqslant 103 \cdot 9 = 927 < 1001$$

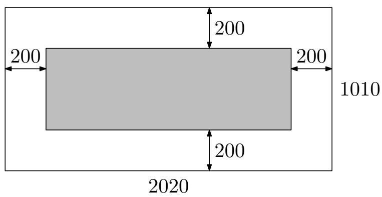
dla każdej liczby całkowitej dodatniej n, która posiada 103 cyfry. Zatem $k = 103$ spełnia warunki zadania.

Udowodnimy, że dla nieparzystych $k < 103$ istnieje n opisane w zadaniu. Łatwo zauważyć, że $S(n)$ może przyjąć dowolną nieparzystą wartość większą lub równą k oraz mniejszą lub równą $9k$. Jeśli $1 < k \leqslant 11$, to $9k \geqslant 18 > 11$, więc $S(n)$ może być równa 11, a zatem istnieje n takie, że $S(S(n)) = 2$. Jeśli $101 \geqslant k > 11$, to $9k \geqslant 9 \cdot 13 = 117 > 101$, więc $S(n)$ może być równe 101 oraz znowu $S(S(n)) = 2$. Zatem $k > 101$.

Jeśli $k < 103$ jest parzyste, to rozumowanie jest analogiczne. Jedyną różnicą jest to, że $S(n)$ jest parzyste. Dla $k = 2$ możemy użyć $n = 11$. Jeśli $2 < k \leqslant 20$, to $9k > 20$, więc możemy znaleźć n, dla którego $S(n)$ jest równe 20. Jeśli $103 > k > 20$, to $9k > 180 > 110$, więc $S(n)$ może być równe 110.

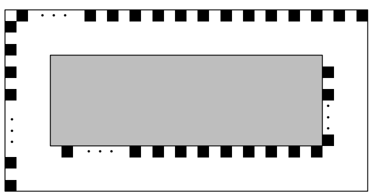
To pokazuje, że 103 jest najmniejszą liczbą o szukanych własnościach.

Zadanie 52. Piotrek kupił przedstawioną na rysunku poniżej szachownicę, która powstała z prostokąta o wymiarach 1010×2020 przez usunięcie mniejszego prostokąta. Następnie umieścił robaczka na każdym polu szachownicy. Niestety, niektóre robaczki miały kaszel. Co gorsza, kaszel był bardzo zaraźliwy: każdy robaczek znajdujący się na polu sąsiadującym z co najmniej dwoma polami zawierającymi kaszlącego robaczka również złapał kaszel. (Dwa pola sąsiadują ze sobą jeśli mają wspólny bok.) Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę robaczków, które mogłyby zarazić wszystkie pozostałe robaczki. Żaden robaczek nie ruszał się z zajmowanego pola.



Wynik. 2630

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli robaczek zostaje zarażony, to łączny obwód obszaru zajmowanego przez zarażone robaczki nie zwiększa się. Wobec tego na początku musi być co najmniej $P/4$ zarażonych robaczków, gdzie P jest obwodem szachownicy (czyli sumą obwodów dużego prostokąta i małego prostokąta). Dzięki temu z łatwością obliczamy $P = 2(2020 + 1010 + (2020 - 400) + (1010 - 400)) = 10520$, a poniższy obrazek przedstawia ustawienie $P/4 = 2630$ kaszlących robaczków, które są w stanie zarazić wszystkie pozostałe.



Zadanie 53. Dodatnia liczba całkowita ma 25! różnych dodatnich dzielników. Ile maksymalnie piątych potęg liczb pierwszych może być wśród tych dzielników?

Uwaga: Symbol $n!$ oznacza iloczyn wszystkich dodatnich liczb całkowitych mniejszych lub równych n.

Wynik. 27

Rozwiązanie. Liczba $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, gdzie p_i są parami różnymi liczbami pierwszymi ma $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ dodatnich dzielników. Widzimy więc, że największa liczba piątych potęg liczby pierwszej jest równa największej możliwej liczbie czynników większych lub równych 6 w rozkładzie liczby 25! na czynniki (niekoniecznie pierwsze). Aby zmaksymalizować tę liczbę, rozważamy rozkład na czynniki pierwsze

$$25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23.$$

Zostawiamy liczby pierwsze większe od 5, łączymy każdą piątkę i trójkę z dwójką oraz zapisujemy 2^6 jako 8^2. W ten sposób otrzymujemy, że największą możliwą liczbą jest 27.

Zadanie 54. Dodatnie liczby rzeczywiste x, y, z spełniają układ równań

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ y^2 + yz + z^2 = 2, \\ z^2 + zx + x^2 = 3. \end{cases}$$

Znajdź wartość wyrażenia $xy + yz + zx$.

Wynik. $\frac{2}{3}\sqrt{6} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

Rozwiązanie. Dodając stronami pierwsze i trzecie równanie i odejmując podwojone drugie otrzymujemy

$$(2x - y - z)(x + y + z) = 0$$

i skoro x, y, z są dodatnie, to $2x = y + z$. Podstawiając $y = x - \delta$, $z = x + \delta$ do układu równań danego w treści zadania otrzymujemy

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x\delta + \delta^2 &= 1, \\ 3x^2 + \delta^2 &= 2, \\ 3x^2 + 3x\delta + \delta^2 &= 3. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że $x\delta = 1/3$ i podstawienie otrzymanej równości do drugiej równości w nowym układzie równań prowadzi do równania kwadratowego o rozwiązaniach

$$\delta^2 = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Jesteśmy proszeni o wyznaczenie wartości $3x^2 - \delta^2 = 2 - 2\delta^2$ i ponieważ wynik ma być dodatni, jedyną możliwością jest $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Drugie rozwiązanie: Obierzmy punkt P na płaszczyźnie i narysujmy odcinki PA, PB i PC długości odpowiednio x, y i z, przy czym $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120°$. Ponieważ $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$, więc z danych równań i z twierdzenia cosinusów wynika, że $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$ i $AC = \sqrt{3}$. W takim razie ABC jest trójkątem prostokątnym o polu $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zauważmy też, że to pole może być obliczone jako suma pól trójkąt PAB, PBC, PCA, więc $S = \frac{1}{2}\sin(120°)(xy + yz + zx)$. Ponieważ $\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, to $xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Zadanie 55. Niech I i O będą odpowiednio środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Spełnione są przy tym równości $AB = 495$, $AC = 977$ oraz $\angle AIO = 90°$. Wyznacz długość odcinka BC.

Wynik. 736

Rozwiązanie. Rozważmy jednokładność o środku A i skali 2 oraz oznaczmy obrazy punktów przy tej jednokładności przez dostawienie apostrofu. Wówczas AO' jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC i skoro $\angle AIO = 90°$, I' również leży na tym okręgu. Wynika stąd, że I' jest środkiem łuku BC niezawierającego punktu A. Punkt I' będziemy teraz oznaczać przez $\check{S}$. Z lematu o trójliściu punkt $\check{S}$ spełnia równość $\check{S}I = \check{S}C$. Proste obliczenia na kątach pokazują, że $\angle BC\check{S} = \angle BA\check{S} = \angle CA\check{S}$. Oznaczmy przez D przecięcie prostych $A\check{S}$ i BC. Wówczas $\triangle D\check{S}C \sim \triangle C\check{S}A$ i w takim razie

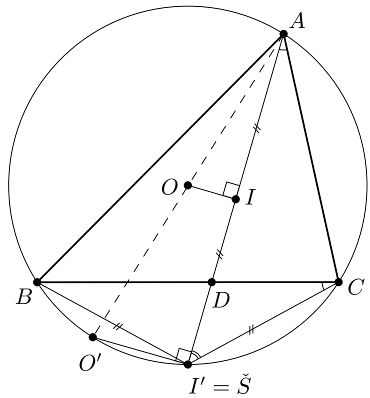
$$\frac{\check{S}D}{\check{S}I} = \frac{D\check{S}}{\check{S}C} = \frac{C\check{S}}{\check{S}A} = \frac{\check{S}I}{\check{S}A} = \frac{1}{2}$$

jest odwrotnością skali jednokładności. Stąd $[BCI] = \frac{1}{3}[ABC]$, gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ. Równość tę możemy przepisać korzystając z promienia r okręgu wpisanego w $\triangle ABC$ w następujący sposób:

$$\frac{1}{2}r \cdot BC = \frac{1}{6}r(AB + BC + CA)$$

i wobec tego

$$BC = \frac{AB + AC}{2} = \frac{495 + 977}{2} = 736.$$



Zadanie 56. Znajdź wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich, które spełniają równanie

$$3abc = 2a + 5b + 7c.$$

Wynik. $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$, $(12, 1, 1)$

Rozwiązanie. Podzielmy równanie stronami przez (dodatnią) liczbę abc:

$$3 = \frac{2}{bc} + \frac{5}{ca} + \frac{7}{ab}.$$

Jeśli wszystkie spośród liczb a, b, c są większe niż 1 oraz przynajmniej jedna z nich jest większa niż dwa, to prawa strona jest równa co najwyżej

$$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{2 \cdot 2} = \frac{35}{12} < 3,$$

więc przy tych założeniach nie istnieją liczby a, b, c spełniające warunki zadania. Łatwo zauważyć, że $a = b = c = 2$ nie spełnia warunków zadania. Zatem przynajmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

Jeśli $a = 1$, to wyjściowe równanie sprowadza się do

$$3bc = 2 + 5b + 7c,$$

które po przemnożeniu przez 3 można sprowadzić do postaci

$$(3b - 7)(3c - 5) = 41.$$

Skoro oba czynniki są dodatnimi dzielnikami liczby pierwszej 41, która daje resztę 2 przy dzieleniu przez trzy, to równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie $b = 16$, $c = 2$.

Jeśli $b = 1$, to otrzymujemy

$$3ac = 2a + 5 + 7c.$$

Analogicznie jak wcześniej, zwijamy w iloczyn

$$(3a - 7)(3c - 2) = 29,$$

co prowadzi nas do $a = 12$, $c = 1$ (analogicznie jak w przypadku $a = 1$).

Jeśli $c = 1$, to

$$(3a - 5)(3b - 2) = 31.$$

To równanie posiada dwie pary rozwiązań $a = 12$, $b = 1$ oraz $a = 2$, $b = 11$.

Zatem równanie ma dokładnie trzy rozwiązania: $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$ oraz $(12, 1, 1)$.

Zadanie 57. Na przyjęciu każdy gość ma dokładnie czternaścioro znajomych wśród pozostałych gości. Każda para znajomych ma dokładnie sześcioro innych wspólnych znajomych obecnych na przyjęciu. Natomiast każda para osób, które się nie znają, ma tylko dwoje wspólnych znajomych. Ile gości jest na tym przyjęciu?

Wynik. 64

Rozwiązanie. Wybierzmy gościa x wraz z jego znajomymi i oznaczmy tę grupę 15 osób jako H. Niech y będzie członkiem grupy H, różnym od x. Ma on dokładnie 7 znajomych poza H (z 14 jego znajomych jednym jest x, a sześcioro jest wspólnym znajomym x i y, czyli należy do H). Mamy więc dokładnie $c = 14 \cdot 7 = 98$ par (y, z) takich, że y jest członkiem H różnym od x, a z jest znajomym y spoza H. Z drugiej strony, każda osoba spoza H ma dokładnie dwoje znajomych w H różnych od x (skoro nie zna się z x, to mają oni dwoje wspólnych znajomych, a oni należą do H). Zatem liczba c wyznaczonych par jest dwukrotnie większa od liczby gości poza H. Skoro H składa się z 15 osób, to wszystkich osób na przyjęciu jest $15 + 98/2 = 64$.

Zauważmy, że taka konfiguracja 64 gości jest możliwa. Umieśćmy gości w tablicy 8×8, dwoje z nich są znajomymi, jeżeli leżą w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie. Łatwo zauważyć, że warunki zadania są wtedy spełnione.

Zadanie 58. Punkt P leży we wnętrzu trójkąta ABC. Jeżeli

$$AP = \sqrt{3}, \quad BP = 5, \quad CP = 2, \quad AB : AC = 2 : 1 \quad \text{oraz} \quad \angle BAC = 60^\circ,$$

to ile wynosi pole trójkąta ABC?

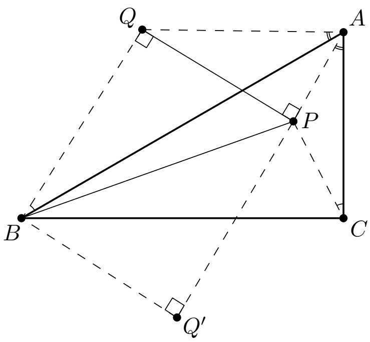
Wynik. $\frac{6+7\sqrt{3}}{2}$

Rozwiązanie. Rozważmy taki punkt Q, leżący po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C, że $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$. Skala tego podobieństwa jest równa $\frac{AB}{AC} = 2$, stąd $AQ = 2AP = 2\sqrt{3}$ oraz $BQ = 2CP = 4$. Zauważmy, że te równości wraz z równością kątów $\angle QAB = \angle PAC$ dają nam podobieństwo $\triangle APQ \sim \triangle ACB$, zatem $\angle APQ = 90^\circ$ oraz

$$PQ = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$$

na mocy twierdzenia Pitagorasa. Ponieważ $BP^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = BQ^2 + PQ^2$, więc korzystając ponownie z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $\angle BQP = 90^\circ$. Niech punkt Q' będzie odbiciem punktu Q względem środka odcinka BP. Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym $AQ'B$ dostajemy $AB^2 = PQ^2 + (AP + BQ)^2 = 28 + 8\sqrt{3}$. Ostatecznie możemy stwierdzić, że pole $\triangle ABC$ jest równe

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} AB^2 = \frac{6 + 7\sqrt{3}}{2}.$$



Zadanie 59. Niech $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie takim wielomianem o współczynnikach całkowitych nieujemnych, że

$$P\left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right) = 2020.$$

Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

Wynik. 22

Rozwiązanie. Niech $u = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$ i zauważmy, że $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = P(1)$. Rozwiążemy zadanie w kilku krokach.

Krok 1: Sprawdzamy, że u jest pierwiastkiem wielomianu $G(x) = x^2 + x - 5$ i dzielimy $P(x)$ przez $G(x)$, tzn. piszemy

$$P(x) = Q(x)G(x) + Ax + B$$

dla pewnych liczb całkowitych A, B i wielomianu Q o współczynnikach całkowitych (współczynnikiem wiodącym wielomianu $G(x)$ jest 1, więc standardowy algorytm dzielenia wielomianów prowadzi do takiego przedstawienia wielomianu P).

Krok 2: Ponieważ $P(u) - 2020 = 0$, więc A, B są całkowite i u jest liczbą niewymierną, skąd wnioskujemy, że $A = 0$ i $B - 2020 = 0$, tzn.

$$P(x) = Q(x)G(x) + 2020. \tag{$\star$}$$

Krok 3: Jeśli pewien współczynnik $P(x)$, powiedzmy a_k, spełnia $a_k \geqslant 5$, to wielomian $\widetilde{P}(x) = P(x) + G(x)x^k = P(x) + (x^2 + x - 5)x^k$ również spełnia wszystkie warunki zadania i $\widetilde{P}(1) = P(1) - 3$. Powtarzając tę procedurę tak długo jak to możliwe, otrzymujemy wielomian $P(x)$ spełniający $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ oraz $P(u) = 2020$.

Krok 4: Udowodnimy, że wielomian P spełniający te warunki jest wyznaczony jednoznacznie. Każdy taki wielomian spełnia ($\star$) dla pewnego wielomianu $Q(x)$. Celem uzyskania $0 \leqslant a_0 \leqslant 4$, gdzie a_0 jest wyrazem wolnym wielomianu $P(x)$, wnioskujemy, że wyraz wolny q_0 wielomianu $Q(x)$ musi spełniać $q_0 = 404$. Ze względu na to, że znamy wszystkie współczynniki $G(x)$ oraz to, że wyraz wolny ma wartość bezwzględną równą 5, możemy wyznaczyć współczynnik q_1 stojący przy jednomianie x w $Q(x)$ korzystając z równania ($\star$). Rozumowanie to możemy kontynuować obliczając w końcu wszystkie współczynniki Q. Jednoznaczność $Q(x)$ natychmiast implikuje jednoznaczność $P(x)$.

Krok 5: Wystarczy teraz wykonać obliczenia powstałe wskutek powtarzania procedury opisanej w kroku trzecim. Zaczynamy z wielomianem stałym $P_0(x) = 2020$ i liczymy:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 404x^2 + 404x, \\
P_2(x) &= 80x^3 + 484x^2 + 4x, \\
P_3(x) &= 96x^4 + 176x^3 + 4x^2 + 4x, \\
P_4(x) &= 35x^5 + 131x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x, \\
P_5(x) &= 26x^6 + 61x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x, \\
P_6(x) &= 12x^7 + 38x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x, \\
P_7(x) &= 7x^8 + 19x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x, \\
P_8(x) &= 3x^9 + 10x^8 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x, \\
P_9(x) &= 2x^{10} + 5x^9 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x, \\
P_{10}(x) &= x^{11} + 3x^{10} + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x.
\end{aligned}$$

Szukane minimum wynosi $P_{10}(1) = 1 + 3 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 = 22$.