Úloha 1. Ak aritmetický priemer štyroch rôznych kladných celých čísel je 10, aká je najväčšia možná hodnota najväčšieho z týchto čísel?

Výsledok. 34

Riešenie. Ak jedno z čísel má byť najväčšie možné, zvyšné čísla musia byť najmenšie možné. Musia mať hodnoty 1, 2 a 3, pretože majú byť rôzne. Keďže priemer čísel je 10, súčet týchto 4 čísel je $4 \cdot 10 = 40$. Štvrté, a aj najväčšie, číslo je teda $40 - (1 + 2 + 3) = 34$.

Úloha 2. Ak je číslo 4 riešením kvadratickej rovnice $x^2 + mx + 2020 = 0$ s celočíselným parametrom m, aké je druhé riešenie tejto rovnice?

Výsledok. 505

Riešenie. Keďže 4 je koreňom, tak po dosadení máme $4^2 + 4m + 2020 = 0$, teda $m = -509$. Rovnicu vieme prepísať na $x^2 - 509x + 2020 = 0$ a tá ma riešenia 4 a 505.
Iné riešenie: Ak označíme s druhé riešenie kvadratickej rovnice, tak

$$x^2 + mx + 2020 = (x - 4)(x - s) = x^2 - 4x - sx + 4s$$

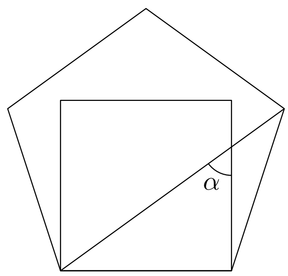
a porovnaním koeficientov polynómov dostaneme $4s = 2020$, teda $s = 505$.

Úloha 3. Číslo 95 dáva po delení číslom N zvyšok 4. Aké najmenšie kladné celé číslo môže byť N?

Výsledok. 7

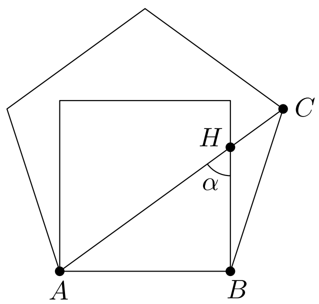
Riešenie. Pretože N je väčšie ako 1 a delí $95 - 4 = 91 = 7 \cdot 13$, tak najmenšia možná hodnota je 7.

Úloha 4. Štvorec a pravidelný päťuholník sú umiestnené ako na obrázku. Nájdite veľkosť uhla α v stupňoch.



Výsledok. $54°$

Riešenie. Označme body ako na nasledujúcom obrázku.



Veľkosť vnútorného uhla pravidelného päťuholníka je $108°$. Trojuholník ABC je rovnoramenný s $|\sphericalangle ABC| = 108°$, takže

$$|\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle BAC| = \tfrac{1}{2}(180° - 108°) = 36°.$$

Keďže ABH je pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole B, tak

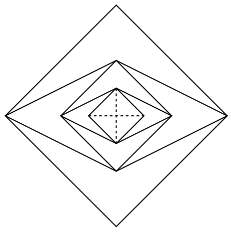
$$\alpha = |\sphericalangle AHB| = 180° - 90° - 36° = 54°.$$

Úloha 5. Na autobusovej zastávke stoja linky A, B a C s intervalmi odchodov postupne 12, 10 a 8 minút. Tomáš raz išiel okolo a všimol si, že zastávku naraz opúšťajú autobusy všetkých troch liniek. O koľko najmenej minút nastane takáto situácia znovu?

Výsledok. 120

Riešenie. Hľadaný počet minút musí byť násobkom každého z intervalov. Hľadáme najmenšie také číslo, takže hľadáme najmenší spoločný násobok čísel 8, 10 a 12 a tým je číslo 120.

Úloha 6. Kosoštvorcová kvetina rastie podľa nasledujúceho vzoru: V strede je štvorcový lupeň s oboma diagonálami dĺžky 1. V prvom kroku je horizontálna diagonála zdvojnásobená a vytvorí sa nový štvoruholníkový lupeň. V ďalšom kroku je vertikálna diagonála zdvojnásobená a znovu sa vytvorí štvoruholníkový lupeň. Takáto procedúra sa opakuje, kým kvetina nemá päť štvoruholníkových lupeňov. Nájdite obvod vonkajšieho, piateho, lupeňa.



Výsledok. $8\sqrt{2}$

Riešenie. Piaty lupeň je štvorec s diagonálami dĺžky 4, preto je jeho strana dĺžky $2a^2 = 4^2$ a teda $a = 2\sqrt{2}$. Obvod piateho lupeňa je rovný štvornásobku strany, teda $8\sqrt{2}$.

Úloha 7. Záhradník vysadil dve kvetiny Prvosienku a Druhosienku a zmeral ich výšky. Po týždni, počas ktorého podrástli o rovnaké percento svojej pôvodnej výšky, ich zmeral znovu a zistil, že Prvosienka je taká vysoká ako bola Druhosienka pred týždňom a Druhosienka je o 44% vyššia ako bola Prvosienka pred týždňom. O aké percento rastliny podrástli počas týždňa?

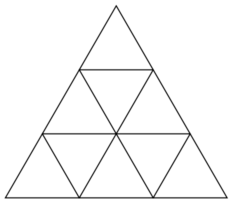
Výsledok. 20%

Riešenie. Označíme P_1 a P_2 pôvodné výšky Prvosienky a Druhosienky. Keďže obe vyrástli o rovnaké percento, môžeme ich výšky po týždni zapísať ako kP_1 a kP_2, pre nejaké reálne číslo $k > 1$ také, že $(k-1)\cdot 100\%$ je hľadaná hodnota percent. Meranie nám dáva rovnice

$$kP_1 = P_2,$$
$$\frac{kP_2}{P_1} = 1,44.$$

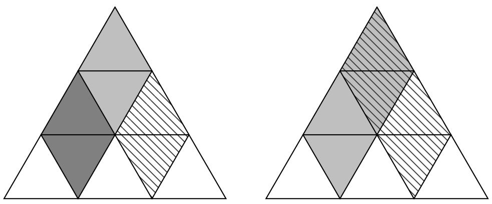
Dosadením P_2 z prvej rovnice do druhej dostaneme $\frac{k^2P_1}{P_1} = k^2 = 1,44$. Teda $k = 1,2$, a preto rastliny podrástli o 20%.

Úloha 8. Koľko rovnobežníkov je na obrázku?



Výsledok. 15

Riešenie. Pre každý vrchol veľkého trojuholníka vieme nájsť 3 rovnobežníky, ktoré ho majú ako spoločný (ako na obrázku vľavo - svetlý, tmavý a šrafovaný). Ďalej vieme nájsť dva rovnobežníky 1×2, ktoré budú zdieľať vrchol trojuholníka (ako na obrázku vpravo - svetlý a šrafovaný).



Žiadne iné rovnobežníky nenájdeme, a preto ich dokopy bude $3 \cdot (2+3) = 15$.

Úloha 9. Autobusová spoločnosť ponúka autobusy pre 27 alebo 36 cestujúcich. Skupina 505 turistov chce cestovať autobusmi tejto spoločnosti. Autobusy boli vybrané tak, aby počet prázdnych miest N bol čo najmenší. Určite N.

Výsledok. 8

Riešenie. Hľadáme najmenšie s také, že $s = 27x + 36y$ a $s \geq 505$ pre nejaké vhodné x a y, kde x a y sú počty príslušných autobusov. Keďže 27 aj 36 sú násobkom čísla 9, tak s musí byť násobkom 9. Hľadáme najmenší násobok 9 väčší ako 505 a tým je 513. 513 vieme dostať napríklad ako $513 = 27 \cdot 3 + 36 \cdot 12$, preto najmenší možný počet voľných miest je 8.

Úloha 10. Fanúšik divokých zvierat si kúpil šesť obrazov. Dva rovnaké obrazy vlka a štyri rovnaké obrazy líšky. Chce si ich zavesiť do obývačky na stenu vedľa seba. Navyše chce každý deň zmeniť ich poradie tak, aby každý deň výsledná postupnosť vlkov a líšok vyzerala inak ako vyzerala niektorý predošlý deň. Okrem toho nechce, aby dva obrazy vlka boli vedľa seba ktorýkoľvek deň. Koľko najviac dní vie dodržiavať tieto podmienky?

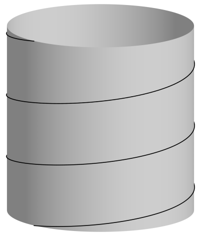
Výsledok. 10

Riešenie. V skutočnosti sa zadanie pýta na počet rôznych postupností obrazov neobsahujúcich dvoch vlkov vedľa seba. Navyše, vlky sú zameniteľné a líšky sú zameniteľné. Očíslujme si pozície obrazov zľava doprava od 1 do 6. Ľavý obraz vlka môže byť zavesený na pozíciach 1, 2, 3 a 4. Pravý vlk môže byť zavesený na nasledujúcich pozíciach:

$$\begin{aligned} 1 &: 3, 4, 5, 6 \\ 2 &: 4, 5, 6 \\ 3 &: 5, 6 \\ 4 &: 6 \end{aligned}$$

Máme iba 10 možných postupností.

Úloha 11. Valec výšky 18 cm s obvodom 8 cm má okolo seba trikrát omotanú napnutú šnúrku. Šnúrka končí presne nad miestom, kde začína. Aká je dĺžka šnúrky v cm?



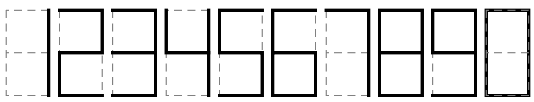
Výsledok. 30

Riešenie. Každé kolečko šnúrka prejde 6 cm výšky a kolečko o dĺžke 8 cm. Rozrežme valec od bodu začiatku po bod konca šnúrky a rozvinieme ho do obdĺžnika. Potom vidíme, že šnúrka urobí 3 diagonály, troch obdĺžnikov s dĺžkami 8 a 6 cm. Z Pytagorovej vety vieme, že budú dlhé

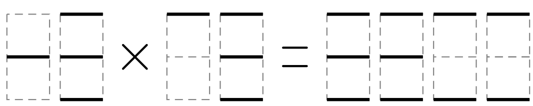
$$\sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,\text{cm}.$$

Celá šnúrka bude mať preto 30 cm.

Úloha 12. Správne fungujúca kalkulačka zobrazuje číslice nasledujúcim spôsobom:



Adamovi však jeho kalkulačka vypadla z okna, a preto teraz ukazuje len vodorovné segmenty. Aby sa Adam uistil, že jeho kalkulačka stále počíta správne, vykonal nasledujúci výpočet:



Aký je súčet všetkých číslic v tomto výpočte?

Výsledok. 33

Riešenie. Posledné dve číslice musia byť nuly. Ďalej prvá číslica prvého činiteľa je 4 a prvá číslica druhého činiteľa je 7. Keďže súčin je deliteľný 100, a teda aj 25, jeden z činiteľov musí byť deliteľný 25 alebo oba 5. Neexistuje žiadny dvojciferný násobok 25 začínajúci číslicou 4, takže druhý činiteľ musí byť deliteľný aspoň 5, je teda rovný 75. Keďže je súčin deliteľný aj 4, prvý činiteľ musí byť deliteľný 4, takže je rovný 48. Máme $48 \times 75 = 3600$, pričom súčet všetkých číslic je 33.

Úloha 13. Edo sčítaval dve čísla, ale omylom pripísal navyše jednu číslicu na koniec jedného z nich. Ako výsledok dostal súčet 44444 namiesto 12345. Aké bolo menšie z čísel, ktoré Edo pôvodne chcel sčítať?

Výsledok. 3566

Riešenie. Označme x and y pôvodné čísla a c číslicu, ktorú Edo pripísal k (povedzme) číslu x. Potom platí

$$x + y = 12345 \quad \text{a} \quad (10x + c) + y = 44444$$

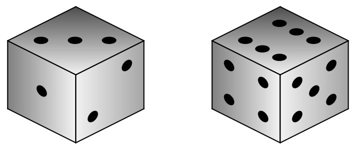
Preto potom

$$9x + c = 32099.$$

Z toho vyplýva, že c musí byť 5, pretože $32099 - c$ musí byť deliteľné 9. Na záver dopočítame $x = 3566$ a $y = 8779$, kde odpoveďou je menšie z nich.

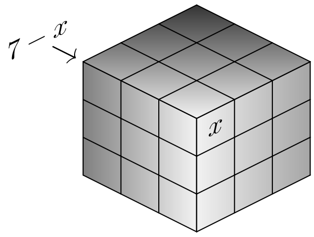
Úloha 14. Peter má 27 klasických hracích kociek a chce ich zlepiť dokopy do väčšej $3 \times 3 \times 3$ kocky tak, aby susedné steny (tie, ktoré sú k sebe prilepené) mali rovnaký počet bodiek. Aký je najvyšší možný počet bodiek, ktoré môže Peter nechať viditeľné na vonkajších stranách svojej $3 \times 3 \times 3$ kocky?

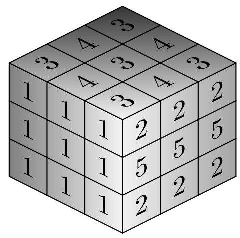
Poznámka: Nižšie sú zobrazené dva pohľady na štandardnú hraciu kocku. Steny sú usporiadané tak, že súčet bodiek na protiľahlých stenách je 7.



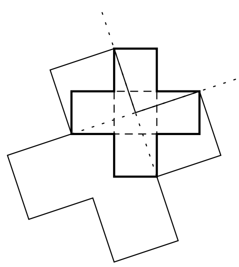
Výsledok. 189

Riešenie. Kľúčové pozorovanie je, že súčet bodiek na protiľahlých stenách veľkej kocky je vždy 7 - ako vidno nižšie na obrázku vľavo. Veľká kocka má 27 párov protiľahlých stien, takže bez ohľadu na to, ako Peter usporiada svoje kocky, počet všetkých viditeľných bodiek bude $27 \cdot 7 = 189$. Jedno z možných usporiadaní, ktoré Peter môže použiť, je na obrázku vpravo.



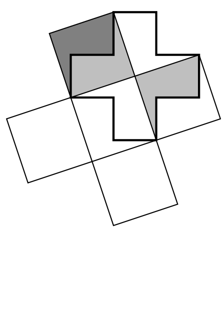


Úloha 15. Antónia nakreslila malé X-pentomino pozostávajúce z 5 zhodných štvorcov. Potom nakreslila dve kolmé uhlopriečky tohto pentomina čiarkovanými čiarami. Napokon zostrojila väčšie X-pentomino s niektorými stranami ležiacimi na uhlopriečkach malého pentomina tak, ako na obrázku. Nájdite pomer plochy Antóninho veľkého pentomina k ploche malého.



Výsledok. 5 : 2.

Riešenie. Uhlopriečky delia malé X-pentomino na štyri zhodné časti. Navyše dve také časti sa dajú k sebe prilepiť tak, aby vytvorili jeden štvorec veľkého pentomina, ako je vidieť na obrázku. Veľké pentomino sa tak dá rozdeliť na desať takýchto kúskov a hľadaný pomer plôch je $10 : 4 = 5 : 2$.



Úloha 16. Koľko palindrómov medzi 10^3 a 10^7 má párny ciferný súčet?

Poznámka: *Palindróm* je číslo, ktoré ostane rovnaké, ak jeho číslice napíšeme odzadu, napríklad 12321 je palindróm.

Výsledok. 5940

Riešenie. Všetky čísla medzi 10^3 a 10^4 majú párny počet číslic, preto ciferný súčet každého takého palindrómu je párny. Navyše palindrómy v tomto rozsahu sú práve čísla tvaru $\overline{abba}$, kde a, b sú ľubovoľné cifry, a nie je nula. Z toho vidno, že v tomto rozsahu existuje 90 palindrómov. Podobným spôsobom zistíme, že existuje presne 900 palindrómov medzi 10^5 a 10^6 a ciferný súčet každého z nich je párny.

Palindrómy medzi 10^4 a 10^5 sú tvaru $\overline{abcba}$ pre cifry a, b, c pričom a je nenulové. Ich ciferný súčet je zrejme párny práve vtedy, keď c je párne. Preto existuje 9 možností pre a, 10 pre b a 5 pre c, čo dáva $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$ hľadaných palindrómov v tomto rozsahu. Podobne vieme vyriešiť aj rozsah od 10^6 do 10^7, ktorý obsahuje 4500 palindrómov s párnym ciferným súčtom.

Zo všetkých palindrómov medzi 10^3 a 10^7 má teda $90 + 900 + 450 + 4500 = 5940$ párny ciferný súčet.

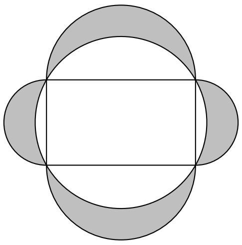
Úloha 17. Na letnej škole Trojstenu je 60 vedúcich: 20 matematikov, 20 fyzikov, 20 informatikov a v každom obore je 6 skúsených vedúcich, ktorí vedia prednášať hocičo. Ostatní vedúci vedia prednášať iba vo svojej oblasti. Aké je najväčšie číslo C také, že keď ľubovoľných C vedúcich ochorie a nemôžu prednášať, tak stále ostane dostatok vedúcich, aby odprednášali aspoň 10 prednášok v každej oblasti? Všetky prednášky prebiehajú naraz.

Výsledok. 22

Riešenie. Ak napríklad všetci matematici spolu s deviatimi inými skúsenými prednášajúcimi ochorejú, tak zostáva iba deväť ostatných skúsených prednášajúcich a tí nepokryjú desať matematických prednášok. Preto $C < 23$.

Na druhú stranu – ak nejaký vedúci ochorie, tak je horšie, ak ochorie „skúsený“ prednášajúci ako keď ochorie „obyčajný“ prednášajúci. Takže ak ochorie 22 prednášajúcich, tak v najhoršom prípade je 18 z nich skúsených. Potom zostanú 4 obyčajní vedúci, ktorí môžu ochorieť, a ak budú všetci z jedného odboru, tak stále zostane 10 prednášajúcich zdravých v danom odbore. Takže $S \geq 22$, teda $C = 22$.

Úloha 18. Obdĺžnik so stranami dĺžok 3 a 4 je vpísaný do kružnice. K jeho stranám sú zvonka prilepené štyri polkruhy ako na obrázku. Aká je plocha šedej oblasti, ktorá pozostáva z bodov polkruhov, ktoré neležia vnútri kružnice?



Výsledok. 12

Riešenie. Pytagorova veta nám dáva vzťah plôch štvorcov nad stranami pravouhlého trojuholníka. Rovnaký vzťah platí aj pre polkruhy a využijeme ho na obe polovice daného obdĺžnika (rozdeleného uhlopriečkou). Priamočiaro odpozorujeme, že akékoľvek dve susedné šedé oblasti majú plochu rovnú polovici obdĺžnika. Preto celková šedá plocha je rovná ploche obdĺžnika, čo je $3 \cdot 4 = 12$.
Iné riešenie: Stačí spočítať obsah celej plochy a odpočítať vnútornú kružnicu, pričom celá plocha pozostáva z dvoch polkružníc s polomerom 1,5 a dvoch polkružníc s polomerom 2 a obdĺžnika. Obdĺžnik má plochu $3 \cdot 4 = 12$. Polkružnice s príslušnými polomermi spojíme a dostaneme postupne veľkosti plôch $1{,}5^2\pi$ a $2^2\pi$. Pričom kružnica uprostred, ktorú vynechávame má polomer 2,5 a teda plochu $2{,}5^2\pi$. Dostaneme teda výraz pre šedú oblasť $12 + 1{,}5^2\pi + 2^2\pi - 2{,}5^2\pi$. A to sa rovná 12 pretože platí Pytagorova veta, medzi číslami $(3/2,\ 4/2,\ 5/2)$.

Úloha 19. Nájdite najväčšie trojciferné prvočíslo p_1 také, že ciferný súčet p_1 je dvojciferné prvočíslo p_2 a ciferný súčet p_2 je jednociferné prvočíslo p_3.

Výsledok. 977

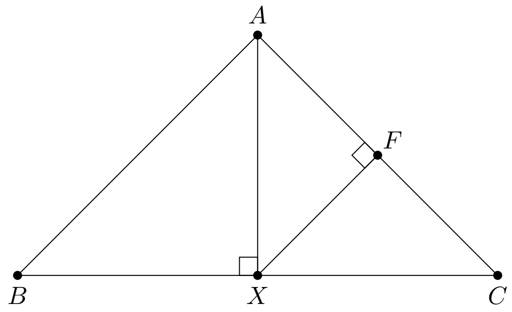
Riešenie. Ciferný súčet trojciferného čísla je najviac $9 + 9 + 9 = 27$. Existuje päť dvojciferných prvočísel, ktoré sú nanajvýš 27 a to 11, 13, 17, 19 a 23. Ciferné súčty týchto prvočísel sú postupne 2, 4, 8, 10 a 5. Preto jediné možnosti sú $p_2 = 11$ alebo $p_2 = 23$. Najväčšie trojciferné prvočíslo s ciferným súčtom 23 je 977. Keďže $977 > 911$, čo je najväčšie trojciferné prvočíslo s ciferným súčtom 11, hľadané číslo je 977.

Úloha 20. V trojuholníku ABC spĺňajúcom $|AB| = |AC|$ niektorá os strany pretína jednu z výšok v jedinom bode ležiacom na obvode trojuholníka ABC. Určite všetky možné veľkosti uhla ACB v stupňoch.

Výsledok. $45°$, $67{,}5°$

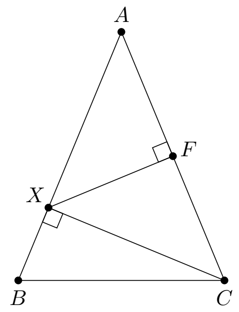
Riešenie. Označme skúmaný priesečník X a stred AC ako F. Všimnime si, že výška vedúca cez X musí byť tá, ktorá prislúcha tej istej strane, na ktorej leží X. Teraz preskúmame všetky možné polohy bodu X.

Ak X leží na základni BC, musí byť priesečníkom výšky z A a jednej z osi strán. Zo symetrie trojuholníka ABC vidíme, že táto výška je zhodná s osou BC, takže jediný priesečník musí byť zároveň priesečníkom s jednou zo zostávajúcich osí. Zo symetrie potom vyplýva, že táto výška vlastne pretína obidve osi AB aj BC v jedinom bode.



Keďže FX je os AC, trojuholník AXC je rovnoramenný. Ďalej máme $|\sphericalangle AXC| = 90°$, a preto $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ACX| = 45°$.

Ak X leží na AB, potom musí byť priesečníkom výšky z C a osi AC.



Rovnako ako v predošlom prípade, trojuholník AXC je rovnoramenný a pravouhlý s pravým uhlom pri X, z čoho $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle XAC| = 45°$. Preto v tomto prípade

$$|\sphericalangle ACB| = \tfrac{1}{2}(180° - |\sphericalangle BAC|) = 67{,}5°$$

Prípad, kedy X leží na AC je úplne symetrický.

Úloha 21. Zistite súčet všetkých kladných deliteľov čísla 3599.

Poznámka: Medzi deliteľov patria aj 1 a 3599.

Výsledok. 3720

Riešenie. Máme

$$3599 = 3600 - 1 = 60^2 - 1 = (60 + 1)(60 - 1) = 59 \cdot 61.$$

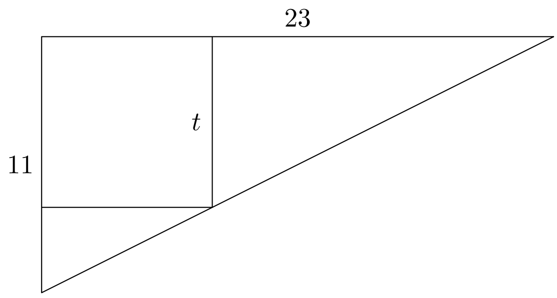
Je ľahké vidieť, že 59 aj 61 sú prvočísla, takže odpoveď je $1 + 59 + 61 + 3599 = 3720$.

Úloha 22. Sestry Danka, Janka a Anka si urobili opekačku s párkami. Danka kúpila 17 párkov, Janka 11 a Anka nekúpila žiadne. Keď všetky zjedli, tak sa rozhodli, že si rozdelia náklady rovným dielom. Koľko peňazí by mala dostať Danka, ak Anka zaplatila 28 eur svojim sestrám, aby splatila dlh?

Výsledok. 23

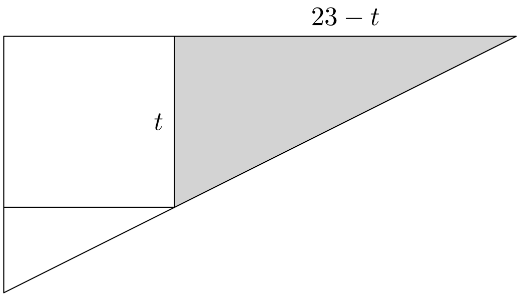
Riešenie. Anka zaplatila presne jednu tretinu celkových nákladov, takže všetky párky dohromady stáli $28 \cdot 3 = 84$ eur. Danka zaplatila za 17 párkov z 28, teda $84 \cdot 17/28 = 51$ eur. Keďže sestry si náklady rozdelili rovným dielom, mala zaplatiť len 28 eur, preto by mala dostať $51 - 28 = 23$ eur.

Úloha 23. Odvesny pravouhlého trojuholníka majú dĺžky 11 a 23. Dve strany štvorca so stranou dĺžky t ležia na odvesnách trojuholníka a jeden vrchol leží na jeho prepone ako na obrázku. Nájdite t.



Výsledok. $\frac{253}{34}$

Riešenie. Sivý trojuholník na obrázku je pravouhlý a má jeden uhol spoločný s veľkým trojuholníkom, takže tieto dva trojuholníky sú podobné.



Pomer dĺžok odvesien musí byť rovnaký pre oba trojuholníky, z čoho dostávame rovnicu

$$\frac{23-t}{t} = \frac{23}{11}$$

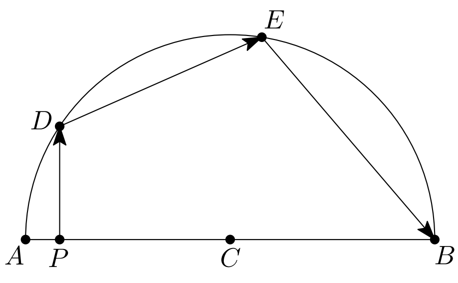
s riešením $t = 253/34$.

Úloha 24. Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že $11 \cdot 19 \cdot n$ je rovné súčinu troch po sebe idúcich celých čísel.

Výsledok. 840

Riešenie. Keďže 11 a 19 sú prvočísla, jedno z troch po sebe idúcich čísel nachádzajúcich sa v súčine musí byť deliteľné 11 a jedno, nie nutne iné, deliteľné 19. Navyše, keďže súčin je kladný, všetky tri čísla musia byť tiež kladné. Takže hľadáme malé kladné násobky 11 a 19 líšiace sa najviac o 2. Najmenšie sú $3 \cdot 19 = 57$ a $5 \cdot 11 = 55$, takže musíme súčin doplniť o 56, aby sme dostali $55 \cdot 56 \cdot 57 = 11 \cdot 19 \cdot 840$. Hľadané číslo je teda 840.

Úloha 25. Uvažujme polkružnicu so stredom C a priemerom AB. Bod P na úsečke AB spĺňa nasledujúcu vlastnosť: laserový lúč vychádzajúci z P smerom kolmým na AB sa odrazí od polkružnice v bodoch D a E spĺňajúc zákon odrazu, teda $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle EDC|$ a $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle BEC|$, až napokon príde do bodu B. Určte $|\sphericalangle DCP|$ v stupňoch.



Výsledok. $36°$

Riešenie. Označme $|\sphericalangle DCP|$ ako α. Keďže D a E oba ležia na kružnici so stredom C, $\triangle DCE$ je rovnoramenný trojuholník so základňou DE. Z prvej danej rovnosti $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle EDC|$ plynie, že $\triangle CDP$ je zhodný s polovicou $\triangle CDE$ (konkrétne s $\triangle CDM$, kde M je stred DE). Použitím aj druhej rovnosti máme, že $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle ECD| = 2|\sphericalangle DCP| = 2\alpha$ a keďže tieto tri uhly tvoria dokopy priamy uhol máme $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = |\sphericalangle DCP| = 36°$.

Úloha 26. V krajine sa nachádza 2020 miest označených $1, 2, 3, \ldots, 2020$. Prezident sa rozhodol vybudovať železničnú sieť. Aby ušetril peniaze, postavil trať len medzi dvojicami miest označených a a b, $a < b$, ktoré spĺňajú nasledujúcu podmienku: číslo b je násobok a a neexistuje c také, že $a < c < b$, kde c je násobok a a b je násobok c. S koľkými ďalšími mestami je spojené mesto 42?

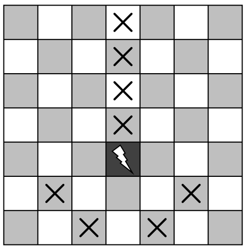
Výsledok. 18

Riešenie. Uvažujme dvojicu spojených miest. Jedno z nich musí mať o jedno prvočíslo viac v prvočíselnom rozklade. Nemôžu mať úplne rovnaké prvočísla, pretože to by znamenalo, že obe mestá by boli jedno a to isté. Na druhej strane, nemôžu sa líšiť v dvoch alebo viacerých prvočíslach. Prečo? Označme p, q prvočísla v ktorých sa budú líšiť (nie nutne rôzne) a nech mestá a, $b = a \cdot p \cdot q$ sú spojené. Potom $a \cdot p$ delí b, čím porušuje druhú podmienku.

Mesto s číslom 42 má prvočíselný rozklad $2 \cdot 3 \cdot 7$. To znamená, že mestá s nižšími číslami spojené s týmto mestom sú tri a majú tieto prvočíselné rozklady: $2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$ and $3 \cdot 7$.

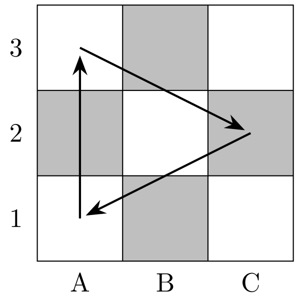
Čísla miest väčšie ako 42 sa dajú zapísať v tvare $42 \cdot p$ pre nejaké prvočíslo p. Najväčšie také prvočíslo spĺňajúce $42 \cdot p < 2020$ je 47, takže $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$. To znamená, že existuje pätnásť ďalších miest spojených s mestom číslo 42, teda dohromady ich je 18.

Úloha 27. Marek vymyslel novú šachovú figúrku nazvanú *blesk*. Blesk sa vie pohybovať dopredu ako veža a dozadu ako jazdec - tak, ako je ukázané na obrázku. Marek ho položil na stredné políčko šachovnice rozmerov 3×3 a pohol bleskom 2020-krát podľa pravidiel. Najviac koľkokrát mohol blesk navštíviť niektoré jedno políčko? Počiatočná pozícia blesku sa nepočíta ako návšteva políčka.



Výsledok. 673

Riešenie. Z pravidiel je jasné, že ak sa blesk pohne z jedného políčka na druhé, nemôže sa vrátiť na počiatočné políčko v nasledujúcom ťahu. Vie sa však na toto políčko vrátiť po dvoch ťahoch, aj na šachovnici 3×3, ako je vidieť na obrázku:



Ak sa teda blesk dostane na jedno z políčok A1, A3, C2, môže sa začať „cykliť“ a navštíviť každé z týchto políčok v každom treťom ťahu.

Ak blesk začína na B2, jeho jediný možný prvý ťah je krok ako pešiak na B3 a ďalšie možnosti sú A1 alebo C1 krokom jazdca. A1 je teda dosiahnuteľné z B2 dvomi ťahmi, ale blesk sa nemôže priamo pohnúť na B2 z A1 alebo C1 (čím by mal cyklus troch ťahov skôr), takže musíme použiť aspoň dva ťahy, aby sme sa dostali do takého cyklu. Ostáva tak 2018 ťahov na cyklenie bleskom a keďže $2018 = 672 \cdot 3 + 2$, blesk môže urobiť 672 cyklov. Políčko A1 pritom navštívi 673-krát.

Úloha 28. Dávid pretekal so slimákom na okruhu so štartom a cieľom v tom istom bode. Začali v tom istom čase, bežali v tom istom smere a stretli sa v cieli. Slimák bol však rýchlejší, takže spravil viac kolečiek ako Dávid, ktorý prešiel iba tri kolá. Dávid a slimák sa tak navzájom stretli 2020-krát, vrátane stretnutí na štarte a v cieli. Na ďalší deň bežali ten istý závod, ale Dávid zmenil smer, v ktorom bežal. Dávid znovu odbehol iba tri kolečká. Ich rýchlosti boli rovnaké ako deň predtým. Koľkokrát sa stretli v druhom závode?

Výsledok. 2026

Riešenie. Predpokladajme, že slimák spravil presne n kôl počas závodu. Rýchlosť Dávida bola 3 a rýchlosť slimáka bola n (v kolách za závod). Potom orientovaná vzdialenosť Dávida a slimáka bola na konci $n - 3$. Stretli sa vždy, keď táto vzdialenosť bola celočíselná (teda na okruhu sa nachádzali na tom istom mieste), takže sa stretli $n - 3$ ráz, ak by sme nerátali stretnutie na začiatku, preto $n = 2022$. Keď bežali opačnými smermi, ich finálna orientovaná vzdialenosť bola $n + 3 = 2025$, takže sa stretli 2025 ráz ak by sme nerátali štart, teda dokopy 2026 ráz.

Úloha 29. Matúš sa hrá počítačovú hru, v ktorej zbiera tri typy magických predmetov: podporné, útočné a obranné. Každý z týchto predmetov môže byť na úrovni 1 až 10. V tejto hre môže skombinovať dva predmety rôzneho typu, ktoré majú rovnakú úroveň a získať predmet tretieho typu s úrovňou o jedna väčšou. Napr. ak skombinuje obranný predmet na úrovni 3 a podporný predmet na úrovni 3, tak vznikne útočný predmet úrovne 4. Koľko najmenej útočných predmetov úrovne 1 musí pozbierať aby získal útočný predmet úrovne 10, pričom predpokladáme, že má k dispozícii neobmedzené množstvo podporných a obranných predmetov úrovne 1?

Výsledok. 170

Riešenie. Označme p_i, o_i, u_i počet predmetov podpory, obrany a útoku na úroveni i potrebných na zisk jedého predmetu útoku úrovne 10. Máme $p_{10} = o_{10} = 0$, $u_{10} = 1$. Pravidlá o kombinovaní predmetov vieme zapísať

$$\begin{aligned} p_{i-1} &= o_i + u_i, \\ o_{i-1} &= u_i + p_i, \\ u_{i-1} &= p_i + o_i \end{aligned}$$

pre všetky $i \in \{2, \ldots, 10\}$. Podľa týchto pravidiel vieme vyplniť tabuľku 10×3, tak, že hodnota v každom políčku (okrem políčok v prvom riadku) je súčet dvoch čísel v riadku o jedna vyššie, ale v inom stĺpci:

0	0	1
1	1	0
1	1	2
3	3	2
5	5	6
11	11	10
21	21	22
43	43	42
85	85	86
171	171	170

Správna odpoveď je preto 170.

Iný pohľad je uvedomiť si, že $p_i = o_i$, nakoľko sú podporné a obranné predmety navzájom vymeniteľné. Taktiež sa dá jednoducho pomocou matematickej indukcie dokázať, že $|u_i - p_i| = 1$. Toto platí aj pre $i = 10$ a

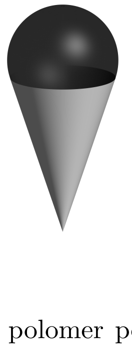
$$|u_{i-1} - p_{i-1}| = |(p_i + o_i) - (u_i + o_i)| = |p_i - u_i| = 1.$$

Pre súčet všetkých predmetov platí

$$p_{i-1} + o_{i-1} + u_{i-1} = (o_i + u_i) + (u_i + p_i) + (p_i + o_i) = 2(p_i + o_i + u_i),$$

so $p_1 + o_1 + u_1 = 2^9 = 512$. Keď dáme tieto dva poznatky dokopy, tak získame, že $p_1 = o_1 = 171$ a $u_1 = 170$.

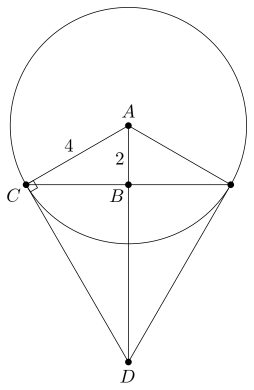
Úloha 30. Jožko si kúpil zmrzlinu v kornútku. Zmrzlina má tvar gule s polomerom 4 cm, kornútok má tvar kužeľa. Jožko si všimol, že zmrzlina bola v kornútku uložená nasledovným spôsobom: stred gule bol presne 2 cm nad podstavou kužeľa a plášť kužeľa končil práve v mieste, kde sa dotýkal gule. Aký objem mal kornútok - kužeľ? *Poznámka:* Dotyk gule a kužeľa je myslený tak, že každá priamka na kuželi prechádzajúca jeho vrcholom je vskutku dotyčnica gule.



Výsledok. 24π

Riešenie. Označíme $|AC| = 4$ polomer gule, $|BC|$ polomer podstavy kužeľa a $|BD|$ jeho výšku, viď obrázok. Z Pytagorovej vety pre trojuholník AMC dostávame $|BC|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = 16 - 4 = 12$. Z podobnosti trojuholníkov ABC a CBD potom máme $\frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$. Objem kužeľa teda vieme vyjadriť ako

$$V = \frac{1}{3}\pi|BC|^2|BD| = \frac{1}{3}\pi|BC|^2\frac{|BC|^2}{|AB|} = \frac{\pi \cdot 12^2}{3 \cdot 2} = 24\pi.$$



Úloha 31. Použijúc každú cifru 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, a 9 práve raz, Števka vytvorila dve štvorciferné čísla, ktoré potom sčítala dokopy. Nájdite najväčší možný ciferný súčet výsledku.

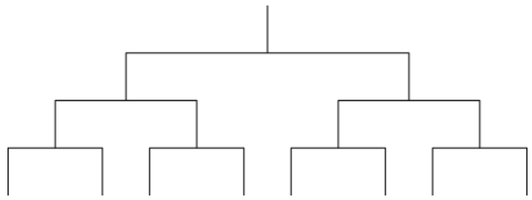
Výsledok. 31

Riešenie. Pripomeňme si najprv základnú vlastnosť sčítania: čísla sčítavame cifru po cifre s tou výnimkou, že musíme správne sčítať prenosy. Teda sčítavame štyri dvojice cifier a prenosy. Keďže sčítavame iba dve čísla, prenosy sú najviac 1.

Označme teraz Števkine čísla a a b a ciferný súčet čísla n ako $S(n)$. Potom platí $S(a+b) = S(a) + S(b) - 9 \cdot c$, kde c je počet nenulových prenosov. Spočítame $S(a) + S(b) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$, takže možné hodnoty $S(a+b)$ sú 40, 31, 22, 13 a 4.

Nie je však možné dosiahnuť 40, pretože cifra 9 sčítaná s akoukoľvek nenulovou cifrou je väčšia alebo rovná 10, zatiaľ čo 31 vieme dostať napríklad takto: $9678 + 4321 = 13999$; $1 + 3 + 9 + 9 + 9 = 31$. Výsledok teda znie 31.

Úloha 32. Vo vyraďovacom tenisovom turnaji je osem hráčov náhodne priradených k ôsmim voľným koncom na spodku grafu na obrázku. Následne sa hrajú tri kolá podľa grafu – víťaz zápasu vždy postupuje do ďalšieho (vyššieho) kola. V našom turnaji sú dvaja profesionálni hráči a šesť začiatočníkov - jedným z nich je Juro. Ľubovoľný profesionálny hráč vždy porazí začiatočníka a sily každých dvoch profesionálov či začiatočníkov sú vyrovnané, takže každý má rovnakú šancu na postup. Aká je pravdepodobnosť, že Juro bude hrať v poslednom kole?



Výsledok. $\frac{1}{14}$

Riešenie. Uvažujme polovicu hráčov, do ktorej patrí Juro. Juro bude hrať finále práve vtedy, keď obaja profesionálni hráči začínajú v druhej polovici a on porazí ostatných troch začiatočníkov vo svojej polovici.

Začnime s pevne danou Jurovou pozíciou v grafe a poďme umiestniť dvoch profesionálnych hráčov. Pravdepodobnosť, že obaja pôjdu do druhej polovice je $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}$. Využitím toho, že všetci začiatočníci majú rovnakú šancu, pravdepodobnosť, že Juro vyhrá dva zápasy proti nim je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Hľadaná pravdepodobnosť je preto $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$.

Úloha 33. Na tabuli sú napísané čísla

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{100}.$$

V každom kroku zoberieme dve z čísel - povedzme, že a a b, zmažeme ich a na tabuľu napíšeme číslo

$$\frac{ab}{a + 2ab + b}.$$

Túto procedúru opakujeme, kým na tabuli nezostane iba jedno číslo. Nájdite všetky možné hodnoty tohto čísla.

Výsledok. $\frac{1}{5248}$

Riešenie. Všimnime si, že ak číslo n nahradí čísla a a b tak máme

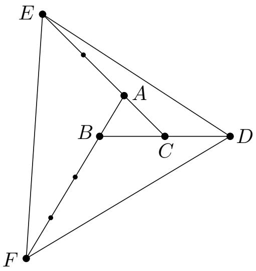
$$\frac{1}{n} = \frac{a+2ab+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 2.$$

Z toho je vidieť, že ak pri každom kroku zvýšime celkový súčet o 2. Keďže máme 99 krokov, tak posledné číslo l spĺňa

$$\frac{1}{l} = 2 \cdot 99 + 1 + 2 + \cdots + 100 = 198 + \frac{101 \cdot 100}{2} = 5248.$$

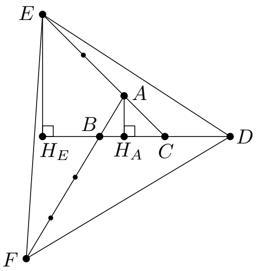
Preto je číslo rovné $\frac{1}{5248}$.

Úloha 34. Majme trojuholník ABC s obsahom 1. Predĺžme jeho strany BC, CA a AB do bodov D, E a F ako je na obrázku tak, že $|BD| = 2|BC|$, $|CE| = 3|CA|$ a $|AF| = 4|AB|$. Nájdite obsah trojuholníka DEF.



Výsledok. 18

Riešenie. Označme H_A a H_E päty kolmíc z bodov A a E na priamku BC.



Pravouhlé trojuholníky CAH_A a CEH_E sú podobné, preto spolu s $|CE| = 3|CA|$ nám dávajú $|EH_E| = 3|AH_A|$. Zo vzťahu $|CD| = |BD| - |BC| = |BC|$ dostaneme, že obsah trojuholníka CDE je rovný

$$\tfrac{1}{2} \cdot CD \cdot EH_E = 3 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AH_A = 3.$$

Podobný argument použijeme na trojuholníky AEF a BFD a ukážeme, že ich plochy sú postupne $2 \cdot 4 = 8$ a $3 \cdot 2 = 6$. Celková plocha je potom $1 + 3 + 8 + 6 = 18$.

Úloha 35. Kráľovský vyberač daní zozbieral tri vrecká po sto mincí. Každá minca v prvom vrecku váži 10 gramov, v druhom 11 gramov a v treťom 12 gramov. Nanešťastie si nepoznačil, ktoré vrecko je ktoré. Kráľ má váhu, ktorá ukáže hmotnosť v gramoch až do hmotnosti $N \in \mathbb{N}$ – ak je na váhe viac ako N, váha ukáže N. Kráľ chce zistiť, ktoré vrecko obsahuje aké mince tým, že odváži nejaké mince z vreciek v jednom vážení. Aká je najmenšia možná hodnota N taká, že sa mu to vždy podarí?

Výsledok. 47

Riešenie. Označme počet mincí vybraných z vreciek postupne a, b a c. Všimnime si, že čísla musia byť rôzne, pretože inak nevieme rozlíšiť príslušné vrecká. Hľadáme najmenšie možné čísla a, b a c také, že $a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m$ sú po dvoch rôzne čísla a čísla k, l, m sú čísla 10, 11 a 12 v nejakom poradí.

Najmenšia možná trojica je $a = 0$, $b = 1$ a $c = 2$, ale táto trojica nevyhovuje, nakoľko $32 = 2 \cdot 10 + 12 = 2 \cdot 11 + 10$. Druhá najmenšia možná trojica je $a = 0$, $b = 1$ a $c = 3$, ktorá už spĺňa podmienky:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 10 + 11 &= 41,\\
3 \cdot 10 + 12 &= 42,\\
3 \cdot 11 + 10 &= 43,\\
3 \cdot 11 + 12 &= 45,\\
3 \cdot 12 + 10 &= 46,\\
3 \cdot 12 + 11 &= 47.
\end{aligned}$$

Váha musí ukazovať hmotnosť až do 47 gramov.

Úloha 36. Robber-ta sa rozhodla podstúpiť ananásovú diétu. Každý deň sa o jednej poobede pozrie na svoje zásoby ananásov. Ak má nejaký ananás, tak zje práve jeden. Ak nemá žiadne ananásy, tak ide do obchodu a kúpi o jeden ananás viac ako kedykoľvek mala. Robber-ta si kúpila svoj prvý ananás v deň číslo 1 o druhej poobede. Koľko ananásov má v deň číslo 2020 o druhej poobede?

Výsledok. 59

Riešenie. Označme počet ananásov v deň číslo i o druhej poobede ako $a(i)$. Prvé dva dni, v ktoré má prázdne ananásové zásoby sú dni 2 a 5 a Robber-ta vždy zväčšuje svoj nákup o jeden ananás. Rozdiely v počte dní, kedy Robber-ta nemá zásoby ananásov, tvoria postupnosť $3, 4, 5, \ldots$. Dni, kedy má Robber-ta prázdne zásoby majú čísla

$$2 + 3 + 4 + \cdots + n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

Nás zaujíma, kedy naposledy pred 2020. dňom nemá zásoby a teda pôjde do obchodu. Vyriešime kvadratickú rovnicu $\frac{1}{2}x(x+1) - 1 = 2020$. Má jedno záporné riešenie, ktoré je nepodstatné a jedno kladné riešenie $\frac{\sqrt{16169}}{2} - \frac{1}{2}$, čo je číslo medzi 63 a 64. Teda 62 krát sa jej minú zásoby a posledný taký deň bude deň číslo $\frac{63 \cdot 64}{2} - 1 = 2015$. Postupnosť $a(i)$ následne pokračuje $63, 62, 61, 60, 59, \ldots$, a teda hľadaný počet ananásov $a(2020)$ je 59.

Úloha 37. Chovateľ prasiat Tomáš má výbeh o ploche $252\,\mathrm{m}^2$ pre svoje prasatá. Výbeh je rozdelený plotmi tak, že vnútro je rozdelené na 16 obdĺžnikových oblastí so stranami s celočíselnými dĺžkami. Oblasti majú plochu udanú v m^2 ako na obrázku. Nájdite všetky možnosti veľkosti plochy oblasti, ktorá je vpravo hore na obrázku označená otáznikom.

24			?
18		12	
			12
30	10		

Výsledok. 8, 24

Riešenie. Najprv si všimnime pomer medzi šírkou prvého a druhého stĺpca (30 : 10) a prvého a tretieho stĺpca (18 : 12). Taktiež vieme zistiť pomer medzi prvým, druhým a štvrtým riadkom (24 : 18 : 30). Zjednodušením pomerov dostaneme 3 : 1 : 2 a 4 : 3 : 5 postupne pre stĺpce a riadky. Doplňme tabuľku hodnotami podľa pomerov a tretí riadok so štvrtým stĺpcom vyplníme v závislosti od celočíselných parametrov x a y tak, aby odzrkadľovali pomery.

24	8	16	$4y$
18	6	12	$3y$
$3x$	x	$2x$	12
30	10	20	$5y$

Pomer medzi výškami druhého a tretieho riadku vieme vyjadriť ako $12 : 2x$ z tretieho stĺpca a ako $3y : 12$ zo štvrtého stĺpca (ako v šedej oblasti na obrázku). Tieto hodnoty musia byť rovnaké, a preto $12 : 2x = 3y : 12$ alebo $y = 24/x$.

Nakoniec porovnajme plochu celého výbehu so sumou častí a dostaneme rovnicu

$$96 = 6x + 12y = 6x + 12\frac{24}{x},$$

alebo

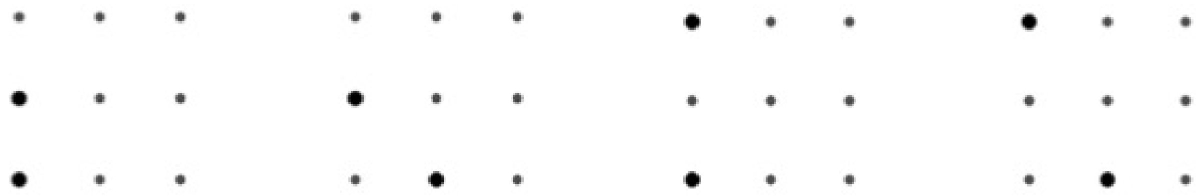
$$0 = x^2 - 16x + 48 = (x-4)(x-12).$$

Možné riešenia sú $x = 4$ alebo $y = 12$, teda pre pravý horný obdĺžnik buď $y = 6$ a $S = 24$, alebo $y = 2$ a $S = 8$.

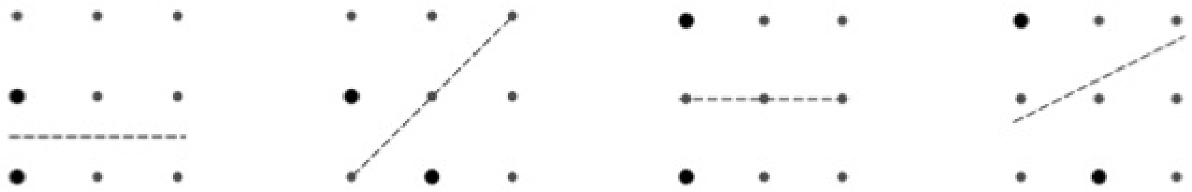
Úloha 38. Ondro a Janko nakreslili obaja kružnice na kus štvorčekového papiera so štvorčekami rozmerov 1×1. Obe kružnice prechádzajú cez presne tri mrežové body. Ondrova kružnica má polomer $\frac{5}{4}$, Jankova je ešte menšia. Aký je polomer Jankovej kružnice?

Výsledok. $\frac{5\sqrt{2}}{6}$

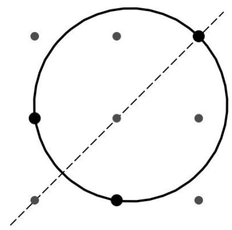
Riešenie. Nech A, B, C sú mrežové body na Jankovej kružnici. Vieme, že polomer musí byť menší ako $\frac{5}{4}$, takže vzdialenosť medzi A a B je najviac $\frac{5}{2}$. Preto, až na rotácie, sú všetky relatívne pozície A a B zobrazené na obrázku:



V každom prípade vieme nájsť os úsešky AB. Os úsečky je priemerom kružnice, a teda aj osou zobrazenia. Aby existovalo iba jediné C, tak musí buď ležať na tejto osi alebo tak, aby jeho obraz nebol mrežovým bodom. Možnosť 1 je preto určite nevyhovujúca.



Pre možnosť 2 je jediná možnosť, keď C leží na osi. Navyše pozície A, C a B, C musia spĺňať rozloženie 2, 3 alebo 4 až na rotáciu. To nám dáva Jankovu kružnicu.



Stále však potrebujeme nájsť jej polomer. Na to použijeme algebru. Zaveďme súradnicový systém tak, že body A, B, C majú súradnice $(1, 0)$, $(0, 1)$ a $(2, 2)$. Dosadením týchto hodnôt do všeobecnej rovnice kružnice $(x - h)^2 + (y - k)^2 + r^2$ dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned}(1 - h)^2 + (0 - k)^2 &= 1 - 2h + h^2 + k^2 = r^2,\\ (0 - h)^2 + (1 - k)^2 &= h^2 + 1 - 2k + k^2 = r^2,\\ (2 - h)^2 + (2 - k)^2 &= 4 - 4h + h^2 + 4 - 4k + k^2 = r^2.\end{aligned}$$

Odčítaním druhej od prvej dostaneme

$$1 - 2h - 1 + 2k = 0 \Rightarrow h = k.$$

Teraz porovnaním prvej a tretej rovnice dostaneme

$$2(4 - 4h + h^2) = 1 - 2h + 2h^2,$$

$$h = \frac{7}{6}.$$

Ľahko dopočítame, že $r^2 = \frac{25}{18}$, a teda $r = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Úloha 39. Sedem trpaslíkov nosí sedem čiapok rôznych farieb. Čarodejník Farbius chce vymyslieť kúzlo na zmenu farieb čiapok tak, aby:

- farba každej čiapky závisela iba na predchádzajúcej farbe, nie na tom, ktorý trpaslík ju má a ani na tom, aké sú ostatné čiapky.
- po použití kúzla všetkých sedem pôvodných farieb sa bude stále vyskytovať na nejakých čiapkách
- ak Farbius použije to isté kúzlo dva alebo trikrát za sebou, tak žiadny trpaslík nebude nosiť čiapku s pôvodnou farbu.

Koľko takých kúziel vie Farbius vymyslieť?

Výsledok. $6! = 720$

Riešenie. Keďže všetky farby zostanú prítomné po použití kúzla, tak je jasné, že kúzlo iba poprehadzuje farby čiapiek. Predstavme si, že nejaká čiapka si ponechá svoju farbu, potom po dvoch kúzlach si ponechá tú istú farbu a teda máme spor so zadaním. Preto si žiadna čiapka nenechá svoju farbu. Nech teraz pošleme farby a a b následujúcim spôsobom: $a \to b$ a $b \to a$, to tiež zjavne vedie ku sporu. A taktiež pre tri farby a, b, a c a kúzlo $a \to b$ $b \to c$, $c \to a$ vedie ku sporu, pretože po troch kúzlach by farba a skončila znovu na farbe a. Môžeme si teda všimnúť, že nemôžeme mať žiaden separátny cyklus dĺžky 1, 2 ani 3 a keďže máme iba 7 čiapok tak musia byť už všetky v cykle. Takých cyklov je 6!; Pozrime sa na jednu farbu - potom je 6 farieb, na ktoré ju môže kúzlo zmeniť. Pre danú farbu zostane 5 farieb, na ktoré sa môže zmeniť a tak ďalej, až kým nezostane iba jedna farba, ktorá sa zmení na našu prvotnú.

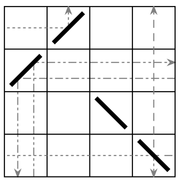
Úloha 40. Majka má číselný zámok. Avšak, nie je to žiaden obyčajný zámok. Každé jeho koliesko má na sebe rôzne čísla. Prvé koliesko má čísla od 0 do 4, druhé od 0 do 6, tretie od 0 do 10 a štvrté od 0 do 9. Majka vie, že ak nastaví kolieska tak, aby ukazovali $0, 0, 0, 0$ a začne točiť všetkými kolieskami súčasne (takže ako ďalšia sa ukáže kombinácia $1, 1, 1, 1$), tak sa napokon dostane do kombinácie, ktorá sa končí na $5, 1$. Majka taktiež vie, že keď sa to stane po druhýkrát, tak kolieska ukážu kombináciu, ktorá odomkne zámok. Pomôžte jej nájsť kombináciu, ktorá odomyká zámok.

Výsledok. $1, 6, 5, 1$

Riešenie. Označme si ako x počet otočení koliesok, po ktorých prvýkrát nastane kombinácia končiaca sa na $5, 1$. Keďže na poslednom koliesku (ktoré má spolu 10 čísel) je číslo 1, tak x musí dávať zvyšok 1 po delení 10. Podobne, aby sme na predposlednom (11-číselnom) koliesku dostali 5, tak x musí dávať zvyšok 5 po delení 11. Hľadáme teda kladné celé číslo x, ktoré dáva po delení 11 a 10 postupne zvyšky 5 a 1. Keďže 10 a 11 sú nesúdeliteľné, podľa čínskej zvyškovej vety vieme, že spomedzi čísel $0, 1, \ldots, 109$ existuje práve jedno také číslo (označme si ho x_0) a všetky ďalšie také x dostaneme pripočítavaním $10 \cdot 11 = 110$ k číslu x_0.

Jeden možný spôsob, ako nájsť x_0 je vypísať si čísla tvaru $11k + 5$ (k je celé číslo) a vybrať si to, ktoré končí na 1, čím dostaneme číslo 71. Toto je počet otočení koliesok potrebný na to, aby sme dostali kombináciu končiacu $5, 1$ poprvýkrát. Z úvah vyššie vieme, že nasledujúca taká kombinácia sa vyskytne po 110 otočeniach (a nie skôr), t. j. po $110 + 71 = 181$ otočeniach od samotného začiatku. Keďže 181 dáva zvyšky 1 a 6 po delení postupne číslami 5 a 7, tak v tom momente bude zámok ukazovať kombináciu $1, 6, 5, 1$.

Úloha 41. Na štvorčekovú sieť 4×4 položíme diagonalne štyri obojstranné zrkadlá. Z každej zo šestnástich úsečiek na hranici tabuľky vyšleme lúč svetla kolmo na stranu, smerom do tabuľky. Lúč ide rovno a zabočí o $90°$ ak narazí na zrkadlo. Lúče niekedy opustia tabuľku. Stalo sa, že práve štyri lúče majú jeden koniec vpravo a jeden hore, podobne štyri lúče majú jeden koniec vpravo a jeden dole, ďalšie štyri lúče majú jeden koniec vľavo a druhý hore a nakoniec posledné štyri lúče majú jeden koniec vľavo a jeden dole. Pre koľko rôznych konfigurácií zrkadiel sa toto mohlo stať? (Obrázok ukazuje jednu takú konfiguráciu zrkadiel a nejakých lúčov.)



Výsledok. 144

Riešenie. Keďže máme k dispozícií iba štyri zrkadlá a každý lúč zatočil tak v každom riadku a v každom stĺpci musí byť práve jedno zrkadlo. To nám dá $4! = 24$ možností; možností ako položiť zrkadlo v prvom riadku je 4, potom možností kam položiť zrkadlo v druhom riadku je len 3 a tak ďalej.

Vďaka obmedzeniam na počet lúčov zatáčajúcich určitým spôsobom je jasné, že musíme mať po dvoch zrkadlách každého typu. Preto máme $\binom{4}{2} = 6$ výberov, ktoré zrkadlá ako smerujú. Nakoniec vidíme, že všetky konfigurácie máme popísané. Preto všetkých možností je $24 \cdot 6 = 144$.

Úloha 42. Nech $x_1 = 2020$ a nech $x_n = \frac{a}{b} x_{n-1}$, kde a je najmenšie prvočíslo také, že a nie je deliteľom x_{n-1} a b je súčin všetkých prvočísel menších ako a. Nájdite počet rôznych prvočíselných deliteľov čísla x_{2020}.

Výsledok. 9

Riešenie. Vidíme, že $x_1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$ a $x_2 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 101$. Je ľahké vidieť, že keď člen postupnosti je bez štvorcov (tj. žiadne p^2 ho nedelí), všetky nasledujúce členy majú túto vlastnosť, preto môžeme reprezentovať členy postupnosti x_n väčšie ako x_2 v binárnej sústave ako b_n, kde na k-tej pozícií sprava je 1 práve vtedy, keď k-te prvočíslo delí x_n. Ďalšie pozorovanie je, že $b_{n+1} = b_n + 1$, pre všetky $n \geq 2$. Máme

$$b_2 = 10000000000000000000000111_2,$$

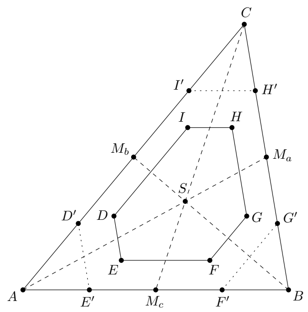
$$b_{2020} = b_2 + \underbrace{11111100010_2}_{=2018} = 1000000000000000011111101001_2.$$

Z definície b_n je jasné, že počet rôznych deliteľov x_n je počet jednotiek v b_n, a preto počet rôznych prvočíselných deliteľov $x_{2020} = 9$.

Úloha 43. Ťažnice trojuholníka ABC rozdeľujú trojuholník na šesť menších trojuholníkov. Ťažiská týchto trojuholníkov sú vrcholmi šesťuholníka $DEFGHI$. Nájdite pomer plôch medzi šesťuholníkom $DEFGHI$ a trojuholníkom ABC.

Výsledok. $\frac{13}{36}$

Riešenie. Nasledujúci obrázok znázorňuje situáciu zo zadania, pričom S je ťažisko trojuholníka ABC a body M_a, M_b, M_c sú stredy strán trojuholníka ABC, body D, E, F, G, H, I sú ťažiská menších trojuholníkov a nakoniec $D', E', \ldots, I'$ sú postupne stredy strán $M_bA, AM_c, \ldots, CM_b$.



Keďže $AE' = \frac{1}{4}AB$ a $AD' = \frac{1}{4}AC$, tak trojuholník $AE'D'$ je rovnoľahlý s trojuholníkom ABC so stredom rovnoľahlosti v bode A a koeficientom $\frac{1}{4}$. Obsah trojuholníka $AE'D'$ je preto rovný $\frac{1}{16}$ obsahu trojuholníka ABC. Obdobný výsledok máme pre plochy trojuholníkov $BG'F'$ a $CI'H'$, teda pre šesťuholník $D'E'F'G'H'I'$ je obsah rovný $1 - 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$ obsahu ABC.

Ďalej máme rovnoľahlosť so stredom v bode S a koeficientom $\frac{3}{2}$, ktorá zobrazí šesťuholník $DEFGHI$ na šesťuholník $D'E'F'G'H'I'$, a tak dostaneme plochu šesťuholníka $DEFGHI$ ako

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{13}{16}[ABC] = \frac{13}{36}[ABC],$$

kde $[ABC]$ značí obsah trojuholníka ABC. Hľadaný pomer je teda $\frac{13}{36}$.

Úloha 44. Nech $a_1 a_2, a_3 \ldots$ je postupnosť reálnych čísel takých, že $a_{m+1} = m(-1)^{m+1} - 2a_m$ pre všetky kladné celé čísla m pričom $a_1 = a_{2020}$. Nájdite hodnotu $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}$.

Výsledok. $\frac{1010}{3}$

Riešenie. Sčítaním rovníc pre $m = 1, \ldots, 2019$ dostaneme

$$(a_2 + a_3 + \cdots + a_{2020}) = (1 - 2 + 3 - \cdots + 2019) - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}).$$

Použitím $a_1 = a_{2020}$, to vieme preusporiadať takto:

$$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019}) = 1 - 2 + 3 - \cdots + 2019 = (1-2) + (3-4) + \cdots + (2017 - 2018) + 2019 = -1009 + 2019 = 1010.$$

Preto

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = 1010/3.$$

Všimnime si, že postupnosť reálnych čísel skutočne existuje: Ak je daná a_1, tak zvyšok postupnosti je jasne daný rovnicou zo zadania. Teda vieme člen a_{2020} skutočne napísať iba v závislosti od členu a_1, a spolu s podmienkou $a_1 = a_{2020}$ dostaneme lineárnu rovnicu v a_1; ktorá sa dá vyriešiť.

Úloha 45. Na zemi je natiahnutých 5 dlhých špagátov. Marek našiel jeden koniec a Magda druhý koniec, tak že sa nevideli. Potom obaja na každej strane náhodne zviazali konce špagátov dokopy tak, že ostal na každej strane iba jeden koniec špagátu nezviazaný. Špagáty viazali po dvoch. Aká je pravdepodobnosť, že Marek a Magda zviazali konce špagátov tak, že nakoniec vznikol jeden dlhý špagát?

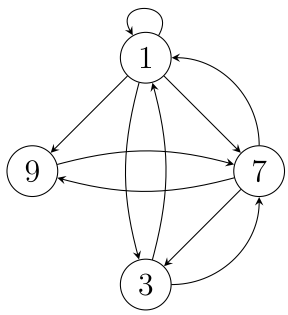
Výsledok. 8/15

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že špagáty, ktoré si označíme A, B, C, D, a E sú na Marekovej strane zviazané nasledovne: A má voľný koniec, B je zviazané s C a D je zviazané s E. Môžeme pozorovať, že pri takýchto podmienkach vieme získať jeden súvislý špagát vtedy a len vtedy ak na Magdinej strane zviažeme špagát A s niektorým so špagátov B, C, D, E (4 možnosti) a následne zviažeme ostávajúci voľný koniec daného páru s jedným z dvoch koncov druhého páru (2 možnosti)— napríklad, ak A zviažeme s B, potom musíme zviazať koniec špagátu C so špagátom D alebo E. Tým pádom to máme dokopy $4 \cdot 2 = 8$ možností. Celkový počet možností, ako vieme zviazať konce špagátov na Magdinej strane je 15: Najprv si vyberieme, ktorý koniec špagátu ostane nezviazaný (5 možností) a zvyšok je už jasne určený tým, ako spárujeme jeden konkrétny koniec so zvyšnými troma koncami (3 možnosti). Preto tvrdíme, že pravdepodobnosť s akou Magda zviaže špagáty do jedného dlhého špagátu je 8/15.

Úloha 46. Nazveme číslo *2-prvočíslo*, ak hocijaký pár jeho po sebe idúcich cifier tvorí iné dvojciferné prvočíslo. Napríklad, 237 je 2-prvočíslo, zatiaľ čo 136 a 1313 nie sú. Nájdite najväčšie 2-prvočíslo.

Výsledok. 619737131179

Riešenie. Uvažujme nad problémom ako nad orientovaným grafom na 4 vrcholoch označených 1, 3, 7 a 9, kde dva vrcholy sú spojené šípkou práve vtedy keď príslušné dvoj-ciferné číslo je prvočíslo. Všimnime si, že máme šípku z 1 do 1, reprezentujúcu číslo 11.



Pripusťme na chvíľu, že existuje cesta cez všetky hrany, každú práve raz. Potom najväčšie 2-prvočíslo nájdeme prilepením 6 alebo 8 na začiatok postupnosti takej cesty. Vskutku je to podľa definície 2-prvočísla, že všetky cifry okrem prvej musia byť $\{1, 3, 7, 9\}$ a žiadna šípka nemôže byť použitá dva krát. Preto, žiadne 2-prvočíslo nemôže mať viac cifier ako počet šípiek plus dva. (jednu za pridanie prvej cifry a jednu za to, že počítame cifry nie šípky) teda maximálne 12. Na začiatku nemôže byť 7 ani 9 lebo by sa musela opakovať hrana A keďže, 61, 83, 87 a 89 sú prvočísla, nepotrebujeme menej cifier.

Teraz potrebujeme nájsť spomenutú cestu. Všimnime si, že z 9 vychádza o šípku menej ako do nej prichádza, kým o jednu šípku do 1 prichádza viac ako vychádza. Ostatné dva vrcholy sú v tomto zmysle vyrovnané. Z toho je jasné, že naša prechádzka musí začať v 1 a skončiť v 9. Z jednotky prejdeme na 9 nakoľko je to najväčší sused, potom do 7 a nemôžme sa vrátiť do 9 lebo by sme skončili. Potom pokračujeme na 3 znovu späť na 7 a tak ďalej, v zmysle "pažravého postupuaž kým nedostaneme cestu 19737131179 keďže 81 nie je prvočíslo tak musíme mať 619737131179 ako najväčšie 2-prvočíslo

Úloha 47. Nech O je stred opísanej kružnice trojuholníka ABC. Ďalej nech body D a E ležia postupne na úsečkách AB a AC, tak, že O je stred úsečky DE. Ak $|AD| = 8$, $|BD| = 3$, a $|AO| = 7$, určte dĺžku úsečky CE.

Výsledok. $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

Riešenie. Zvážme symetriu s vzhľadom na stredový bod O a označme jednotlivé vzniknuté obrazy pomocou čiarky. Pozorujeme, že body A' a B' ležia na opísanej kružnici trojuholníka $|\triangle ABC|$ a $D' = E$ (teda $E' = D$). Z Pytagorovej vety v provouhlom trojuholníku $AA'B'$ (všimnite si, že AA' je priemer opísanej kružnice) nám dáva

$$|AB'|^2 = |AA'|^2 - |A'B'|^2 = 14^2 - |AB|^2 = 14^2 - 11^2 = 75.$$

Keďže $|\sphericalangle AB'E| = |\sphericalangle A'BD| = 90^\circ$, z Pytagorovej vety v $\triangle AB'E$ vieme

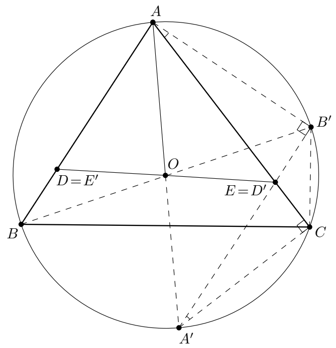
$$|AE| = \sqrt{|AB'|^2 + |BD|^2} = \sqrt{75 + 9} = 2\sqrt{21}.$$

Keďže E (obraz D) leží na $A'B'$ (obraz AB) a keďže štvoruholník $AB'CA'$ je tetivový, dostaneme, že $\triangle AB'E \sim \triangle A'CE$. Z toho dostaneme

$$\frac{|CE|}{|A'E|} = \frac{|B'E|}{|AE|}$$

a dospejeme k záveru

$$|CE| = |AD| \cdot \frac{|BD|}{|AE|} = 8 \cdot \frac{3}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$



Alternatívne riešenie: Mocnosť bodu D vzhľadom na opísanú kružnicu trojuholníka $\triangle ABC$ s polomerom $r = AO$ je rovná

$$-3 \cdot 8 = -|DB| \cdot |DA| = |OD|^2 - r^2 \Rightarrow |OE| = |OD| = \sqrt{49 - 24} = 5$$

(mínus je prítomné kvôli tomu, že bod D leží vnútri kruhu). Z kosínusovej vety v $\triangle ADO$ dostaneme

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(|\sphericalangle AOD|).$$

Keďže $\cos(|\sphericalangle AOE|) = \cos(180^\circ - |\sphericalangle AOD|) = -\cos(|\sphericalangle AOD|) = -\frac{1}{7}$, tá istá veta pre $\triangle AOE$ potom dáva

$$|AE|^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(|\sphericalangle AOE|) = 84 \Rightarrow |AE| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

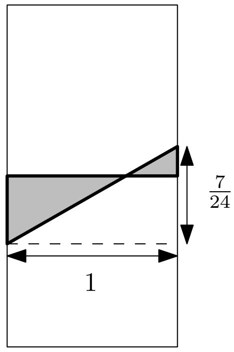
Podobne ako vyššie z mocnosti bodu E vzhľadom na opísanú kružnicu $\triangle ABC$ dostaneme

$$-2\sqrt{21} \cdot |EC| = 5^2 - 7^2 \Rightarrow |EC| = \frac{24}{2\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{7}.$$

Úloha 48. Obdĺžnik s rozmerom 7×24 je rozdelený na štvorce s rozmermi 1×1. Jedna z jeho diagonál odrezáva z niektorých týchto štvorcov trojuholníky. Aký je súčet obvodov všetkých týchto trojuholníkov?

Výsledok. $\frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$

Riešenie. Nech 24 je šírka a 7 je výška obdĺžnika. Diagonála ide z ľavého dolného rohu do horného pravého rohu a má sklon $\frac{7}{24}$. Keď prechádza cez štvorec, odrezáva trojuholník vtedy a len vtedy keď križuje horizontálnu stranu, ktorá oddeľuje dva štvorce. Keďže sklon je konštantný, môžeme preusporiadať úsečky dvoch trojuholníkov, ktoré sú odrezané z týchto dvoch štvorcov na jeden veľký pravý trojuholník so šírkou 1. Potom odvesny majú dĺžky 1 a $\frac{7}{24}$ a dĺžka prepony je $\sqrt{1 + \left(\frac{7}{24}\right)^2} = \frac{25}{24}$.



Súčet dĺžok týchto dvoch trojuholníkov je $\frac{56}{24}$. Diagonála prechádza cez horizontálne steny presne šesťkrát, plus dva veľké pravé trojuholníky vyššie uvedených rozmerov sú odrezané z prvého a posledného, ktorým diagonála prechádza. Takže súčet všetkých dĺžok obvodov trojuholníkov je $8 \cdot \frac{56}{24} = \frac{56}{3}$.

Úloha 49. Kladné celé číslo n nazveme *dvíhajúce* ak sa dá dostať z ľubovoľného poschodia 8787-poschodovej budovy na ľubovoľné iné poschodie, keď sa môžeme hýbať iba 2020 poschodí smerom nahor a n poschodí smerom nadol. Nájdite najväčšie dvíhajúce číslo.

Poznámka: Budovu voláme k-poschodová ak má prízemie a k nadúrovňových poschodí.

Výsledok. 6763

Riešenie. Aby sa dalo vôbec pohnúť z poschodia 2019 musí platiť $2019 + n \leq 8787 \Rightarrow n \leq 6768$. Ďalej, podmienka $d := \mathrm{nsd}(2020, n) = 1$ je nutná, lebo medzi poschodiami a a b sa vieme hýbať ak platí $d \mid a - b$. Pozrime sa na rozklad $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Vieme vylúčiť niekoľko najväčších kandidátov pre n: 6766 je deliteľné číslom 2, 6765 je deliteľné číslom 5, 6764 je deliteľné číslom 2. Všimnime si, že $\mathrm{nsd}(6763, 2020) = 1$.

Dokážme, že 6763 je dvíhajúce. S pomocou Euklidového algoritmu (alebo podľa Bézoutovej identity) vieme nájsť celé čísla x a y t.ž. $6763x - 2020y = 1$. Môžeme dokonca predpokladať, že x a y sú nezáporné, lebo ak pripočítame 2020 ku x a 6763 ku y, rovnosť sa zachová. Začínajúc na poschodí $0 \leq f \leq 8786$, tvrdíme že vieme uskutočniť x ťahov hore a y ťahov dole tak, že zostaneme v budove a skončíme na poschodí $f + 1$. Nakoľko platí $2020 + 6763 \leq 8787$, vždy sa vieme pohnúť aspoň na jednu stranu. Keď sme použili všetky ťahy hore (resp. hore), museli sme skončiť pod (resp. nad) poschodím $f + 1$. Potom môžeme uskutočniť chýbajúce ťahy a dostať sa na poschodie $f + 1$. Podobne sa dá ukázať, že vieme z poschodia $1 \leq f \leq 8787$ zísť o jedno poschodie nižšie. Teda 6763 je najväčšie dvíhajúce číslo.

Úloha 50. V kryptograme

$$\begin{array}{cccccc} & & & R & E & D \\ + & & B & L & U & E \\ + & G & R & E & E & N \\ \hline = & B & R & O & W & N \end{array}$$

rôzne písmená reprezentujú rôzne cifry. Žiadne zo štyroch čísel nemôže začať nulou. Navyše vieme že $BLUE$ je druhou mocninou celého čísla. Nájdite päť-ciferné číslo $BROWN$.

Výsledok. 85230

Riešenie. Očíslujeme stĺpce z ľava do prava číslami od 1 do 5 a označíme prebytok zo stĺpca i číslom c_i. Všimnime si, že $c_1 = 0$ a $0 \leq c_i \leq 2$ pre $i = 2, \ldots, 5$: Vskutku nemôžeme pri sčítavaní troch cifier a prebytku, nanajvýš veľkosti 2 dostať viac ako 29. Posledná nerovnosť platí induktívne. Ďalej si všimnime, že $c_2 \leq 1$ pretože sčítavame dve rôzne cifry v druhom stĺpci a $c_3 \leq 2$ a zároveň $c_3 \neq 0$ lebo prvý stĺpec zmení cifru. Takže $c_2 = 1$ a $G + 1 = B$. Z piateho stĺpca dostaneme, že $D + E = 10$, lebo D a E nemôžu byť obe nuly, a teda $c_5 = 1$. Keďže $B + R + c_3 = c_2 \cdot 10 + R$, tak buď $B = 9$ alebo $B = 8$. Preto $BLUE$ je štvorec kladného celého čísla n práve vtedy keď $90 \leq n \leq 99$ a má štyri rôzne cifry. Vylúčením možností s rovnakými ciframi dostaneme, že $BLUE$ môže byť 8649, 9025, 9216, 9604, a 9801. Keďže $D + E = 10$ môžme taktiež vylúčiť 9025, keďže by to viedlo k $D = E =(5)$. Taktiež 9801 nemôžeme mať lebo by sme dostali $B = D =(9)$, a číslo 9604 tiež nemôžeme mať lebo $L = D =(6)$. S pomocou štvrtého stĺpca vieme vylúčiť aj číslo 9216, pretože to by viedlo k $D = 4$ a $E + U + 1 = 6 + 1 + 8 + 1 = 14$ a teda $W = 4$. Preto jediná možnosť pre $BLUE$ je 8649.

Keďže $B = 8$, $L = 6$, $U = 4$ a $E = 9$ môžeme ľahko dostať, $D = 1$, $W = 3$ a $G = 7$ a prebytky $c_3 = c_4 = 2$. Tretí stĺpec teraz dáva $R + L + E + c_4 \cdot 10 + 0$, čo môžeme zjednodušiť na $R + 17 = 20 + O$, čo je možné iba aj $R = 5$ a $O = 2$. Preto dostaneme ako dôsledok, že $N = 0$ a kryptogram vyzerá unikátne:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 5 & 9 & 1 \\ + & & 8 & 6 & 4 & 9 \\ + & 7 & 5 & 9 & 9 & 0 \\ \hline = & 8 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Úloha 51. Nájdite najmenšie kladné celé číslo $k > 1$ také, že neexistuje k-ciferné číslo n s každou cifrou nepárnou a $S(S(n)) = 2$, kde $S(x)$ označuje súčet cifier x.

Výsledok. 103

Riešenie. Najprv si všimnime, že $S(m) = 2$ pre nepárne celé číslo m práve vtedy keď $m = 10^l + 1$ pre nejaké kladné celé číslo l. Ak $k = 103$, tak $S(n)$ je určite nepárne pre hocijaké k-ciferné n so všetkými nepárnymi ciframi. Preto aby bolo splnené $S(S(n)) = 2$ musí $S(n)$ byť spomínaného tvaru. Avšak

$$101 < 103 \cdot 1 \leq S(n) \leq 103 \cdot 9 = 927 < 1001$$

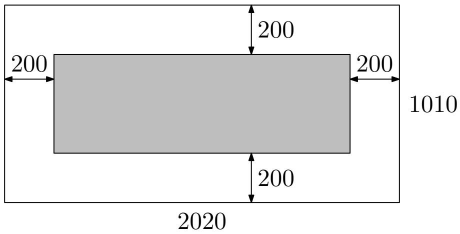
pre každé n so 103 ciframi. Preto $k = 103$ spĺňa podmienky zo zadania.

Teraz dokážeme, že pre $k < 103$, existuje n také, že ako sa spomína v zadaní. Je ľahké vidieť, že $S(n)$ vie nadobudnúť ľubovoľnú nepárnu hodnotu medzi k a $9k$. Ak $1 < k \leq 11$, tak $9k \geq 18 > 11$, takže $S(n)$ môže byť rovné 11 a teda existuje také n, že $S(S(n)) = 2$. Ak $101 \geq k > 11$, tak $9k \geq 9 \cdot 13 = 117 > 101$, takže $S(n)$ môže byť rovné 101 a znovu $S(S(n)) = 2$. Takže $k > 101$.

Ak $k < 103$ je párne tak je argument skoro rovnaký až na to, že $S(n)$ je párne. Pre $k = 2$ môžeme použiť $n = 11$. Ak $2 < k \leq 20$, tak $9k > 20$, a vieme nájsť n s $S(n)$ rovným 20. Ak $103 > k > 20$, tak $9k > 180 > 110$, takže $S(n)$ môže byť rovné 110.

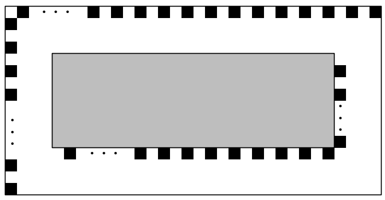
Takto sme ukázali, že 103 je hľadané najmenšie číslo s popísanou vlastnosťou.

Úloha 52. Maťko kúpil šachovnicu, obdĺžnikového tvaru pozostávajúcu zo 1010×2020 štvorčekov, z ktorej bol vystrihnutý obdĺžnik ako je zobrazené na obrázku. Maťko položil na každé políčko šachovnice chrobáka. Niekoľko chrobákov malo chrípku. Chrípka je veľmi nákazlivá; každý chrobák susediaci s aspoň dvoma nakazenými chrobákmi ochorie tiež. (chrobáky nazývame susediace ak príslušné štvorce, na ktorých sedia, susedia hranami) Určte najmenší možný počet chrobákov, ktorý sú schopný nakaziť všetky ostatné chrobáky. Chrobáky sa nepohybujú.



Výsledok. 2630

Riešenie. Všimnime si, že keď chrobák je nakazený spomínaným "mechaniymom" tak celkový obvod ohraničujúci chorých sa zachová. Preto musí byť aspoň $P/4$ počiatočne nakazených, kde P je obvod "O"čkovej šachovnice. Vieme ľahko spočítať, že $P = 2(2020 + 1010 + (2020 - 400) + (1010 - 400)) = 10520$, teda $P/4 = 2630$. Obrázok ukazuje spôsob ako rozložiť chorých chrobákov aby sa nakazili všetci ostatní chrobáci.



Úloha 53. Kladné celé číslo má 25! rôznych kladných delitelov. Nájdite koľko najviac z nich mohlo byť 5-tou mocninou prvočísla.

Poznámka: Symbol $n!$ označuje súčin všetkých kladných celých čísel menších alebo rovných ako n.

Výsledok. 27

Riešenie. Číslo $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ kde p_i sú rôzne prvočísla má $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ rôznych deliteľov. Takže maximálny počet piatych mocnín prvočísel deliacich naše číslo je rovný maximálnemu počtu súčiniteľov väčších ako 5 v nejakej faktorizácií čísla 25!. Pre maximalizovanie sa pozrime na prvočíselnú faktorizáciu

$$25! = 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23.$$

Prvočísla $7^3, 11^2, 13, 17, 19, 23$ nám dávajú 9 deliteľov. Skombinujme päťky a trojky s dvojkami a dostaneme 10^6 a 6^{10}, čo nám dá ďalších 16 deliteľov, a nakoniec napíšeme 2^6 ako 8^2, čím dosiahneme vyžadované číslo 27.

Úloha 54. Kladné reálne čísla x, y, z spĺňajú

$$x^2 + xy + y^2 = 1,$$
$$y^2 + yz + z^2 = 2,$$
$$z^2 + zx + x^2 = 3.$$

Určte hodnotu $xy + yz + zx$.

Výsledok. $2\sqrt{2/3} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

Riešenie. Ak sčítame prvú a tretiu rovnicu a odčítame od nich dvakrát druhú, tak dostaneme

$$(2x - y - z)(x + y + z) = 0$$

a keďže x, y, z sú kladné, tak $2x = y + z$. Položme $y = x - \delta$, $z = x + \delta$ a dosaďme do rovníc zo zadania. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x\delta + \delta^2 &= 1, \\ 3x^2 + \delta^2 &= 2, \\ 3x^2 + 3x\delta + \delta^2 &= 3. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $x\delta = 1/3$ a dosadením do druhej novej rovnice dostaneme kvadratickú rovnicu s riešeniami

$$\delta^2 = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6}.$$

Máme vypočítať $3x^2 - \delta^2 = 2 - 2\delta^2$ a keďže výsledok musí byť kladný, jediná možnosť je $2\sqrt{2/3}$.

Iné riešenie: Zvoľme si v rovine bod P a dokreslime k nemu úsečky PA, PB a PC dĺžok postupne x, y a z tak, že $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPA| = 120°$. Keďže $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$, tak zo zadaných rovníc a kosínusovej vety dostame $|AB| = 1$, $|BC| = \sqrt{2}$ a $|AC| = \sqrt{3}$. Preto ABC je pravouhlý trojuholník s obsahom $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Všimnime si, že tento obsah môžeme tiež vypočítať pomocou troch trojuholníkov so spoločným bodom P nasledovne: $S = \frac{1}{2}\sin(120°)(xy + yz + zx)$. Využijeme, že $\sin(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a prídeme k záveru, že $xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Úloha 55. Nech I a O sú postupne stredy vpísanej a opísanej kružnice trojuholníka ABC s parametrami $|AB| = 495$, $|AC| = 977$ a $|\sphericalangle AIO| = 90°$. Určte dĺžku úsečky BC.

Výsledok. 736

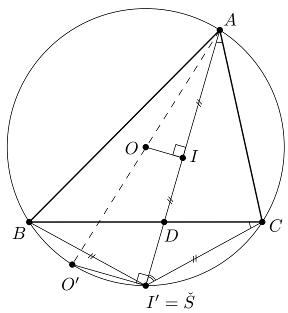
Riešenie. Uvažujme rovnoľahlosť v bode A a koeficientom 2, a označme príslušné zobrazené body apostrofom. Potom AO' je jasne priemer kružnice opísanej trojuholníku ABC a keďže $|\sphericalangle AIO| = 90°$ tak I' leží tiež na opísanej kružnici. Je to stred oblúka BC neobsahujúceho A. Je známe, že tento bod (označme ho tradične $\check{S}$) spĺňa $|\check{S}I| = |\check{S}C|$ a jednoduchým porovnaním uhlov dostaneme $|\sphericalangle BC\check{S}| = |\sphericalangle BA\check{S}| = |\sphericalangle CA\check{S}|$. Nech D je priesečník $A\check{S}$ a BC. Potom $\triangle D\check{S}C \sim \triangle C\check{S}A$ sú podobné, a preto

$$\frac{|\check{S}D|}{|\check{S}I|} = \frac{|D\check{S}|}{|\check{S}C|} = \frac{|C\check{S}|}{|\check{S}A|} = \frac{|\check{S}I|}{|\check{S}A|} = \frac{1}{2}$$

je prevrátená hodnota rovnoľahlosti. Potom dostaneme, že $[BCI] = \frac{1}{3}[ABC]$, kde $[XYZ]$ označuje plochu trojuholníka XYZ. Toto vieme prepísať pomocou polomeru r kružnice vpísanej trojuholníku ABC ako

$$\frac{1}{2}r \cdot |BC| = \frac{1}{6}r(|AB| + |BC| + |CA|),$$

z čoho následne jednoduchým vyjadrením dostaneme $|BC| = \frac{|AB|+|AC|}{2} = \frac{495+977}{2} = 736$.



Úloha 56. Nájdite všetky trojice (a, b, c) kladných celých čísel splňujúcich rovnicu $3abc = 2a + 5b + 7c$.

Výsledok. $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$, $(12, 1, 1)$

Riešenie. Vydelením rovnice (kladným) číslom abc dostaneme

$$3 = \frac{2}{bc} + \frac{5}{ca} + \frac{7}{ab}.$$

Ak všetky tri neznáme sú ostro väčšie ako jeden a aspoň jedno je ostro väčšie ako dva tak pravá strana je nanajvýš

$$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{2 \cdot 2} = \frac{35}{12} < 3,$$

a preto za týchto podmienok nie je žiadne riešenie. Taktiež nie je riešením $a = b = c = 2$. Takže aspoň jedna neznáma a, b, alebo c musí byť rovná 1.

Ak $a = 1$, tak pôvodná rovnica dáva

$$3bc = 2 + 5b + 7c,$$

ktorú po vynásobení 3 a preusporiadaní vieme zapísať ako

$$(3b - 7)(3c - 5) = 41.$$

Keďže oba súčinitele sú kladní delitelia prvočísla 41, ktoré dáva zvyšok 2 po delení 3. Preto dostaneme jediné riešenie $3b - 7 = 41$ a $3c - 5 = 1$ z čoho máme $b = 16$ a $c = 2$.

Ak $b = 1$, tak

$$3ac = 2a + 5 + 7c$$

a podobne

$$(3a - 7)(3c - 2) = 29,$$

čím dostaneme $a = 12$ a $c = 1$, použijúc rovnaký argument ako pred tým.

Nakoniec $c = 1$ a dostaneme rovnicu

$$(3a - 5)(3b - 2) = 31$$

s riešeniami $a = 12$, $b = 1$ a $a = 2$, $b = 11$ pričom prvé už bolo nájdené v predchádzajúcom odseku.

Na záver teda máme tri riešenia: $(1, 16, 2)$, $(2, 11, 1)$ a $(12, 1, 1)$.

Úloha 57. Na párty sa každý hosť kamaráti s presne štrnástimi ďalšími hosťami (nerátajúc jeho samého/ju samu). Každí dvaja kamaráti majú presne šesť spoločných kamarátov na párty a každí dvaja hostí, ktorí sa nekamarátia majú iba dvoch spoločných kamarátov. Koľko hostí je na párty?

Výsledok. 64

Riešenie. Vyberme hosťa x spolu so všetkými jeho kamarátmi a nazvime túto skupinu pätnástich ľudí H. Nech y je člen H rôzny od x, chceme povedať, že y má presne 7 kamarátov mimo skupiny H: Zo 14 kamarátov y, jeden je x a majú spolu 6 spoločných kamarátov, ktorí musia byť zjavne v skupine H. Preto dokopy $c = 14 \cdot 7 = 98$ párov (y, z), kde y je člen H rôzny od x a z je kamarát y mimo skupiny H. Ale počet c môže byť vypočítaný aj nasledovne: Každý hosť z mimo H má presne dvoch kamarátov v H, pretože x nie je kamarát spolu so z podla definície skupiny H a teda musia mať spoločných kamarátov v skupine H, presne dvoch. Inými slovami c je dvojnásobok počtu hostí mimo H a preto $98/2 = 49$ hostí je mimo H. Keďže H má 15 členov tak dopočítame, že na párty je $15 + 49 = 64$ ľudí.

Nakoniec ukážeme, že taká konfigurácia skutočne môže existovať: Dajme hostí do tabuľky 8×8 a nech každí dvaja hostia sa kamarátia presne ak sú v rovnakom stĺpci alebo riadku. Je ľahké vidieť, že podmienky zo zadania sú skutočne splnené.

Úloha 58. Bod P sa nachádza vo vnútri trojuholníka ABC. Ak platí

$$|AP| = \sqrt{3}, \quad |BP| = 5, \quad |CP| = 2, \quad |AB| : |AC| = 2 : 1, \quad \text{and} \quad |\sphericalangle BAC| = 60^\circ,$$

tak aká je plocha trojuholníka ABC?

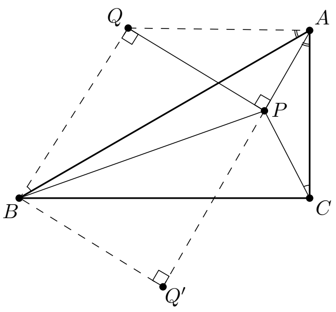
Výsledok. $\frac{6+7\sqrt{3}}{2}$

Riešenie. Zoberme bod Q na opačnej stene priamky AB ako bod C tak, že $\triangle ABQ \sim \triangle ACP$. Podobne pomer dĺžok $\frac{|AB|}{|AC|} = 2$, a potom aj $|AQ| = 2|AP| = 2\sqrt{3}$ a $|BQ| = 2|CP| = 4$. Všimnime si, že tieto rovnosti spolu s $|\sphericalangle QAB| = |\sphericalangle PAC|$ implikujú $\triangle APQ \sim \triangle ACB$, a preto $|\sphericalangle APQ| = 90^\circ$ a

$$|PQ| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$$

vďaka Pytagorovej vete. Keďže $|BP|^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = |BQ|^2 + |PQ|^2$, takže znovu vďaka Pytagorovej vete máme $|\sphericalangle BQP| = 90^\circ$. Uvažujme bod Q' obraz bodu Q okolo stredu úsečky BP, potom znovu využijeme Pytagorovu vetu v pravouhlom trojuholníku $AQ'B$ na vypočítanie $|AB|^2 = |PQ|^2 + (|AP| + |BQ|)^2 = 28 + 8\sqrt{3}$, a na záver plocha trojuholníka ABC je rovná

$$\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8}|AB|^2 = \frac{6 + 7\sqrt{3}}{2}.$$



Úloha 59. Majme polynóm $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ s nezápornými celočíselnými koeficientami taký, že

$$P\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right) = 2020.$$

Nájdite najmenšiu možnú hodnotu výrazu $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

Výsledok. 22

Riešenie.

Nech $u = \frac{\sqrt{21}-1}{2}$. Všimnime si, že minimalizujeme $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1)$. Rozdelíme riešenie na niekoľko krokov.

Krok 1: Presvedčme sa, že u je koreňom $G(x) = x^2 + x - 5$ a vydeľme $P(x)$ polynómom $G(x)$, teda

$$P(x) = Q(x)G(x) + Ax + B$$

pre celé čísla A, B a polynóm Q s celočíselnými koeficientami (nakoľko vedúci koeficient $G(x)$ je 1, štandardný algoritmus na delenie polynómov prinesie požadovaný výsledok).

Krok 2: Keďže $P(u) - 2020 = 0$, A, B sú celé čísla a u je iracionálne, musí byť $A = 0$ a $B - 2020 = 0$, teda

$$P(x) = Q(x)G(x) + 2020. \tag{$\star$}$$

.

Krok 3: Ak by ktorýkoľvek z koeficientov polynómu $P(x)$, povedzme a_k splĺňal $a_k \geq 5$, potom polynóm $\tilde{P}(x) = P(x) + G(x)x^k = P(x) + (x^2 + x - 5)x^k$ tiež splĺňa všetky podmienky a $\tilde{P}(1) = P(1) - 3$. Opakovaním tohto postupu tak veľa krát, ako je len možné, skončíme s polynómom $P(x)$, ktorého všetky koeficienty splĺňajú $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a $P(u) = 2020$.

Krok 4: Všmimnime si, že P s týmito vlastnosťami je jednoznačne určený. Naozaj, ak akýkoľvek taký polynóm splĺňa rovnicu ($\star$) s vhodným polyómom $Q(x)$, tak, aby $0 \leq a_0 \leq 4$, kde a_0 je koeficient konštanty $P(x)$, potom koeficient konštanty $Q(x)$ musí splnať $q_0 = 404$. Nakoľko poznáme všetky koeficienty $G(x)$ a koeficient konštanty má hodnotu 5, môžeme ďalej určiť lineárny koeficient q_1 z rovnice ($\star$), a tak ďalej. Jednoznačnosť $Q(x)$ jasne implikuje jednoznačnosť $P(x)$.

Krok 5: Teraz to už treba iba vypočítať. Výpočty vyplývajuce z opakovania postupu popísaného v kroku 3 sú nasledovné. Začneme s konštantným polynómom $P_0(x) = 2020$ a pokračujeme takto:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= 404x^2 + 404x \\
P_2(x) &= 80x^3 + 484x^2 + 4x \\
P_3(x) &= 96x^4 + 176x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_4(x) &= 35x^5 + 131x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_5(x) &= 26x^6 + 61x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_6(x) &= 12x^7 + 38x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_7(x) &= 7x^8 + 19x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_8(x) &= 3x^9 + 10x^8 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_9(x) &= 2x^{10} + 5x^9 + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \\
P_{10}(x) &= x^{11} + 3x^{10} + 4x^7 + 3x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x.
\end{aligned}$$

Hľadané minimum je teda $P_{10}(1) = 1 + 3 + 4 + 3 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 = 22$.