Úloha 1. Kolik různých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran má obvod 7? Které to jsou?

Výsledek. 2. Jsou to $(1,3,3)$ a $(2,2,3)$.

Návod. Nejdelší strana musí být menší než 4 (aby strany splňovaly trojúhelníkovou nerovnost) a větší než 2 (protože trojúhelník $(2,2,2)$ má obvod jen 6). Odtud dostaneme jediné dvě možnosti $(1,3,3)$ a $(2,2,3)$.

Úloha 2. V růžovém království se platí mincemi v hodnotě 3 a 7. Určete největší částku, která se nedá pomocí těchto mincí přesně zaplatit.

Výsledek. 11.

Návod. Do hodnoty 7 umíme zaplatit jen čísla dělitelná třemi. Od sedmičky nahoru zaplatíme čísla dávající po dělení třemi zbytek 0 nebo 1. Od čtrnáctky už zaplatíme všechny sumy. 12 a 13 dávají zbytek 0 a 1, proto je největším nezaplatitelným číslem číslo 11.

Úloha 3. V cukrárně prodávají kremrole, věnečky a trubičky. Kolika způsoby si můžeme koupit právě 6 sladkostí, jestliže chceme od každého druhu alespoň jednu, ale nejvýš dva věnečky?

Výsledek. 7.

Návod. Koupíme si nejprve „povinné“ tři sladkosti (od každého druhu jednu) a dáme si je bokem. Pokud si nekoupíme další věneček, máme čtyři možnosti, jak si koupit zbylé cukroví: $(0 \text{ kremrolí}, 3 \text{ trubičky})$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,0)$. Pokud si druhý věneček koupíme, máme už jen tři možnosti, jak doplnit zbylé dva kousky cukroví: $(0,2)$, $(1,1)$, $(2,0)$. Sečtením počtu možností dostaneme výsledek 7.

Úloha 4. Máme pět červených karet s čísly $1,2,3,4,5$ a čtyři modré s čísly $3,4,5,6$. Jak je potřeba všechny karty uspořádat do řady, aby se střídaly barvy a každé číslo na modré kartě bylo dělitelné čísly na sousedních kartách?

Výsledek. **5**, 5, **1**, 3, **3**, 6, **2**, 4, **4** nebo obráceně.

Návod. Řada musí začínat a končit červenou kartou, protože je červených o jedna víc a mají se střídat. Řada musí začínat a končit čísly 5 a 4, protože tato čísla mají mezi modrými čísly $3,4,5,6$ vždy jen jeden násobek a nemůžou sousedit s více (dvěma) modrými kartami. Postavíme si „5“ na začátek, „4“ na konec, a doplňujeme postupně čísla. Ze zbývajících čísel můžeme doplnit vždy jen jediné.

Úloha 5. Čtverci o obsahu S_1 je vepsána kružnice k a té je vepsán rovnostranný trojúhelník o obsahu S_2. Určete poměr obsahů $\frac{S_1}{S_2}$.

Výsledek. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

Návod. Označme stranu čtverce a. Pak $S_1 = a^2$ a

$$S_2 = 3 \cdot \left(\frac{(a/2)^2 \cdot \sin 120^\circ}{2} \right) = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot a^2}{16}.$$

Poměr je $\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

Úloha 6. Najděte všechna reálná čísla x, která pro libovolné reálné y splňují

$$8xy - 12y + 2x - 3 = 0.$$

Výsledek. $x = \frac{3}{2}$.

Návod. Rovnici si rozepíšeme jako $(4y+1)(2x-3) = 0$. Aby pro všechna y rovnice pořád platila, musí být $2x - 3 = 0$. Odtud $x = \frac{3}{2}$.

Úloha 7. Na strany čtverce $ABCD$ se stranou délky 1 umístíme zvenku rovnostranné trojúhelníky ABK, BCL, CDM a DAN. Spočtěte obsah čtyřúhelníka $KLMN$.

Výsledek. $S_{KLMN} = 2 + \sqrt{3}$.

Návod. Čtyřúhelník $KLMN$ je čtverec, protože se otočením o $90°$ kolem středu čtverce $ABCD$ nezmění. Délka u úhlopříčky čtverce $KLMN$ je rovna $a + 2v$, kde a je strana čtverce $ABCD$ a v je kterákoli výška v kterémkoli rovnostranném trojúhelníku. Dosazením dostaneme $u = a+2v = 1+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Při výpočtu jsme použili vztah $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ pro výšku v rovnostranném trojúhelníku, který lze snadno odvodit z Pythagorovy věty. Spočtěme obsah čtverce $KLMN$ roven

$$S = \frac{u^2}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Úloha 8. Najděte největší násobek čísla 8, v jehož desítkovém zápisu jsou každé dvě cifry různé. Poznámka: desítkový zápis je běžně používaný zápis číslicemi 0 až 9.

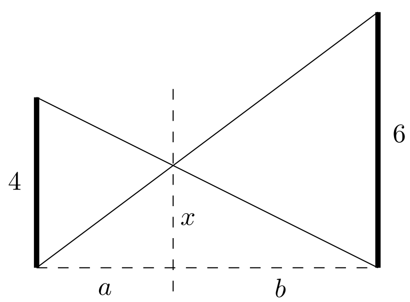
Výsledek. 9876543120.

Návod. Největší číslo, které má každé dvě cifry různé, je 9876543210. Zkusíme zaměňovat postupně pořadí číslic na jeho konci tak, aby byl výsledek dělitelný 8. Druhé největší číslo 9876543201 není dělitelné osmi, třetí největší číslo 9876543120 už dělitelné osmi je, dostali jsme výsledek.

Úloha 9. U cesty stojí dva sloupy vysoké 4 a 6 metrů. Z vršku každého z nich vede napnuté lano do spodku druhého. V jaké výšce se lana protínají?

Výsledek. $2,4\,\mathrm{m}$.

Návod. Označme si délky jako na obrázku.



Všechny délky jsou v metrech. Z podobností trojúhelníků dostáváme $4\cdot\frac{b}{a+b} = x = 6\cdot\frac{a}{a+b}$, kde 4 a 6 jsou délky sloupů. Pak z předchozích dvou rovností dostáváme

$$\frac{5x}{12} = \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

Po úpravě $x = \frac{12}{5} = 2,4\,\mathrm{m}$.

Úloha 10. Jaký je ciferný součet čísla $25^{64}\cdot 32^{25}$?

Výsledek. 8.

Návod. Je $25^{64}\cdot 32^{25} = 5^{128}\cdot 2^{125} = 5^3\cdot 10^{125} = 125\cdot 10^{125}$. Číslo $125\cdot 10^{125}$ je tvořeno číslicemi 1, 2, 5 a sto dvaceti pěti 0. Proto je jeho ciferný součet roven 8.

Úloha 11. Účastníci Jardáč, Franta a Kenny vyhráli na Náboji hromadu cukru, kterou si mají rozdělit mezi sebou v poměru 1 : 2 : 3. Pro cenu si však každý z nich přišel jindy a vždy si myslel, že dorazil jako první, tedy sebral si pouze část, která mu podle poměru patřila. Kolik cukru organizátorům soutěže po návštěvě všech tří účastníků zůstalo?

Výsledek. $\frac{5}{18}$.

Návod. Každý vzal poměrnou část, po Jardáčovi zbylo $\frac{5}{6}$ z toho, co tam při jeho příchodu bylo, po Frantovi $\frac{4}{6}$ a po Kennym $\frac{3}{6}$. Vynásobením těchto čísel dostaneme poměr celkového koncového a počátečního stavu cukru. Protože se výsledek, ať už násobíme poměry v jakémkoli pořadí, nemění, tak na pořadí nezáleží a řešením je $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$.

Úloha 12. Pavel a Rasťo si povídali celý večer. Když už jim ale došly nápady, začal Pavel vyjmenovávat všechny dvouprvkové podmnožiny $\{1, 2, \dots 10\}$. Rasťo si pokaždé zapsal do notýsku menší ze dvou čísel, která Pavel řekl. Když Pavel s vyjmenováváním skončil, Rasťo všechna čísla v notýsku sečetl. Kolik mu vyšlo?

Výsledek. 165.

Návod. Číslo 10 si Rasťo nezapsal ani jednou, protože je největší. Číslo 9 si zapsal, když mu Pavel řekl dvojici $(9, 10)$. Číslo 8 si Rasťo zapsal dvakrát, při dvojicích $(8, 9)$ a $(8, 10)$, a tak dál. Celkově potom součet byl

$$1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + \cdots + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 = 9 + 16 + 21 + 24 + 25 + 24 + 21 + 16 + 9 = 165.$$

Úloha 13. Rovnice $x^2 + ax + b = 0$ má řešení a a b. Najděte všechny takové dvojice (a, b).

Výsledek. $(0, 0)$ a $(1, -2)$.

Návod. Jestliže má kvadratická rovnice kořeny a a b, tak ji lze zapsat ve tvaru $(x - a)(x - b) = 0$, po roznásobení $x^2 + (-a - b)x + ab = 0$. Aby to byla stejná kvadratická rovnice jako ta v zadání, musí se rovnat koeficienty u jednotlivých jejich členů polynomu: $-a - b = a$ a $ab = b$. Druhou rovnost si přepišme na $b(a - 1) = 0$ a máme dvě možnosti, buď $b = 0$ nebo $a = 1$. První vede ke dvojici $(0, 0)$, druhá možnost ke dvojici $(1, -2)$.

Úloha 14. Součet několika (ale nejméně dvou) po sobě jdoucích přirozených čísel je 1000. Jaké největší číslo mezi nimi může být?

Výsledek. 202.

Návod. Součet dvou po sobě jdoucích čísel je vždy lichý, číslo 1000 je ale sudé, proto ho nepůjde jako součet dvou čísel zapsat. Součet tří po sobě jdoucích čísel je dělitelný třemi, číslo 1000 však ne. Čtyři po sobě jdoucí přirozená čísla 248, 249, 250, 251 dávají součet menší než 1000 a čísla 249, 250, 251, 252 už dávají součet větší než 1000. Proto ani čtyři čísla nestačí. Pětice 198, 199, 200, 201, 202 už však řeší naši úlohu. Protože je to jediná vyhovující pětice a protože by při zvýšení počtu sčítanců došlo ke zmenšení největšího z nich, je 202 největším vyhovujícím číslem, které můžeme najít.

Úloha 15. Zuzka s Háňou hrají následující hru. Na začátku mají přirozené číslo n a povolený tah je k němu přičíst 1 nebo odečíst 3. Kdo dosáhne 0, vyhrává; tah do záporného čísla je zakázaný. Pro která n může Zuzka, která začíná, vždy, nezávisle na tazích Háni, vyhrát?

Výsledek. Pro všechna n lichá.

Návod. Zuzčina vyhrávající strategie pro n lichá je přičíst v prvním tahu 1 a pak vždycky udělat to, co Háňa před ní neudělala. Například pokud Háňa odečte 3, přičte Zuzka 1. Pokud Háňa přidá 1, Zuzka odečte 3. Takto Háňa nemůže nikdy vyhrát, protože svým tahem vytvoří vždy liché číslo (a vyhrávající 0 je sudé číslo), a Zuzka naopak zajistí, že se po každém kole výsledné číslo o 2 sníží. Tím Zuzka jednou dojde do nuly a vyhraje. Pro n sudé Zuzka nemůže vyhrát, protože po svém prvním tahu vytvoří liché číslo a dovolí tak Háně použít proti ní onu výherní strategii pro lichá čísla.

Úloha 16. Pavel jednou vzal obdélníkový kus papíru, ustřihl mu roh, čímž získal pětiúhelník a trojúhelník. Pak si všiml, že strany pětiúhelníka mají délku 10, 17, 18, 24 a 39 v nějakém pořadí. Dokážete určit, jaké byly původní rozměry papíru a jak dlouhé strany měl odstřižený trojúhelník?

Výsledek. Původní rozměry papíru 18x39, strany trojúhelníka 8, 15 a 17.

Návod. 39 nemůže být přepona ustřiženého pravoúhlého trojúhelníka, protože by se tato přepona nevešla do největšího možného zbývajícího obdélníka 18x24. Proto je 39 stranou obdélníka. Zakreslením 24 jako druhé strany se dostaneme do úzkých, 24 bude příliš velké číslo, tak vyzkoušíme rozměry 18x39. K nim bude vyhovovat Pythagorova věta pro odseklý trojúhelník: $(39-24)^2+(18-10)^2 = 17^2$, neboli $15^2+8^2 = 17^2$, a tedy 8, 15 a 17 jsou rozměry hledaného pravoúhlého trojúhelníka.

Úloha 17. Žabák Jardáč skáče pouze celočíselné vzdálenosti. Jednou skákal po úsečce AB dlouhé 8^8 z bodu A do bodu B. Vždy nejprve skočil polovinu vzdálenosti zbývající do bodu B, dalším skokem skočil polovinu předchozího skoku zpět. Poté zase polovinu vzdálenosti k bodu B a polovinu zpět, a tak dále. Kolik skoků by udělal, než by poprvé musel skočit neceločíselně?

Výsledek. 24.

Návod. Zapišme si prvotní vzdálenost jako 4^{12}, a dívejme se na dva Jardovy po sobě jdoucí skoky, jako by je Jarda uskutečnil zaráz. Pak Jarda (jakoby) skočí vždy $\frac{1}{4}$ vzdálenosti, co mu zbývá k bodu B, a zbývající vzdálenost k bodu B bude po prvním dvojskoku $3 \cdot 4^{11}$, po druhém dvojskoku $3^2 \cdot 4^{10}$, po třetím dvojskoku $3^3 \cdot 4^9$, ... , po jedenáctém dvojskoku $3^{11} \cdot 4^1$, po dvanáctém dvojskoku 3^{12}. V dalším skoku už by Jarda musel skočit neceločíselně, protože polovina z lichého čísla 3^{12} není celé číslo. Celkový počet skoků, které by Jarda udělal, je tedy $2 \cdot 12 = 24$.

Úloha 18. Nalezněte nejmenší přirozené číslo začínající číslicí 6, které se po odebrání této první číslice zmenší na $\frac{1}{25}$ své původní hodnoty.

Výsledek. 625.

Návod. Číslo musí být dělitelné 25, jinak by se nemohlo zmenšit na $\frac{1}{25}$ své původní hodnoty. Čísla dělitelná 25 musí končit na dvojčíslí 00, 25, 50, nebo 75. Proto cifra 6 nemůže být v hledaném nejmenším čísle na místě jednotek, ani desítek. Číslo 600 nevyhovuje, ale další číslo v pořadí, 625, už splňuje podmínky úlohy.

Úloha 19. Pro kolik přirozených čísel k platí $\mathrm{nsn}(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$? Poznámka: $\mathrm{nsn}(a, b, c)$ značí nejmenší společný násobek čísel a, b, c.

Výsledek. 25.

Návod. Číslo k musí být ve tvaru $3^{12} \cdot 2^l$, kde $l \in \mathbb{N}$, protože čísla 6^6 a 8^8 mají ve svém prvočíselném rozkladu trojku v mocnině na maximálně šestou, ale v nejmenším společném násobku je 3^{12}. Navíc z $k \mid 12^{12} = 3^{12} \cdot 2^{24}$ plyne, že dalším prvočíslem v prvočíselném rozkladu čísla k už může být jen prvočíslo 2, proto to 2^l. Hodnoty l jsou z rozmezí 0 až 24, je jich 25, proto je možných k též 25.

Úloha 20. Zjednodušte výraz

$$\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \ldots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \ldots + n \cdot 3n \cdot 9n}}.$$

Výsledek. $\frac{2}{3}$.

Návod. Upravujme výraz:

$$\sqrt[3]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + \ldots + n \cdot 2n \cdot 4n}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + \ldots + n \cdot 3n \cdot 9n}} = \sqrt[3]{\frac{(1 \cdot 2 \cdot 4)(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)}{(1 \cdot 3 \cdot 9)(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)}} = \sqrt[3]{\frac{(1 \cdot 2 \cdot 4)}{(1 \cdot 3 \cdot 9)}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{2}{3}.$$

Úloha 21. Pro přirozená čísla a, b, c platí, že $abc = 78$ a $a^2 + b^2 + c^2 = 206$. Zjistěte součet $a + b + c$.

Výsledek. $a + b + c = 20$.

Návod. Vycházejme z prvočíselného rozkladu $abc = 78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$. Třináctka dělí jedno z čísel a, b, c, přitom $(2 \cdot 13)^2$ je už větší než 206, proto musí být jedno z čísel a, b, c rovno 13. Nezáleží na pořadí, nechť je třeba $a = 13$. Potom zbývá $bc = \frac{78}{13} = 6$ a $b^2 + c^2 = 206 - 13^2 = 37$, odkud je vidět, že dalšími čísly musí být 6 a 1 (dvojice 2,3 nevyhovuje). Celkově pak $a + b + c = 13 + 6 + 1 = 20$.

Úloha 22. Jarda si vybral pět čísel z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ a řekl Zuzce jejich součin. Zuzka se snažila zjistit, zda je součet Jardových čísel sudý nebo lichý. Po chvíli usoudila, že se to zjistit nedá. Jaký byl onen součin, který Jarda Zuzce pověděl?

Výsledek. 420.

Návod. Poví-li Jarda Zuzce součin svých pěti čísel, sdělí jí tím zároveň součin dvou čísel, která si nevybral. Obdobně, nemůže-li Zuzka zjistit, zda je součet Jardových čísel sudý či lichý, nemůže to zjistit ani o součtu těch zbylých. Stačí nám tedy určit součin těch čísel, která si Jarda nevybral. Pak hledáme takové číslo, které se dá zapsat více způsoby jako součin čísel z $\{1, 2, \dots, 7\}$ tak, že součty jednotlivých činitelů mají různou paritu. Takové číslo existuje jen jedno: $12 = 4 \cdot 3 = 6 \cdot 2$, přičemž $3 + 4$ je liché, zatímco $6 + 2$ je sudé, což přesně chceme. Součin čísel, která si Jarda nevybral je tedy 12. Snadno dopočteme, že součin vybraných je 420.

Úloha 23. Každá ze tří skříněk má dvě zásuvky, v každé zásuvce je jeden drahokam. V jedné skříňce jsou dva rubíny, v druhé jeden rubín a jeden smaragd a v poslední dva smaragdy. Zvolili jsme si náhodně skříňku a v ní zásuvku. Jestliže jsme v první zásuvce našli rubín, s jakou pravděpodobností bude i ve druhé rubín?

Výsledek. $\frac{2}{3}$.

Návod. Pojmenujme si rubíny písmeny A, B, C, spolu ve skříňce jsou A s B. Při vybírání náhodné skříňky a zásuvky máme stejnou šanci (která je rovna $\frac{1}{3}$), že jsme otevřeli zásuvku s kterýmkoli z drahokamů. Pokud jsme našli rubín A, je ve druhé zásuvce stejné skříňky další rubín. Pokud jsme našli B, je taktéž v druhé zásuvce další rubín. Jedině pokud jsme sáhli na C, je ve druhé zásuvce smaragd. S pravděpodobností $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{2}{3}$ je tedy i ve druhé zásuvce rubín.

Úloha 24. Kolik existuje čtyřciferných čísel $abcd$ takových, že pro jejich cifry platí $0 < a < b < c < d \leq 9$?

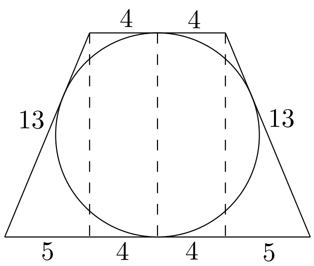
Výsledek. $\binom{9}{4} = 126$.

Návod. Vezměme si množinu čísel $\{1, 2, \dots, 9\}$. Z každé vybrané čtveřice z této množiny umíme poskládat právě jedno číslo $abcd$, které splňuje podmínky úlohy. Proto je počet vyhovujících čísel $abcd$ roven počtu možností, jak z devítiprvkové množiny vybrat čtyřprvkovou podmnožinu. Výsledek je $\binom{9}{4}$.

Úloha 25. V rovnoramenném lichoběžníku mají základny délky 8 a 18. Navíc se lichoběžníku dá vepsat kružnice. Jaký je její poloměr?

Výsledek. 6.

Návod. Snadno si pomocí pravidla $a + c = b + d$ pro tečnový čtyřúhelník a pomocí rovnoramennosti dopočteme, že délky ramen lichoběžníku jsou 13. Spusťme z krajních bodů a středu kratší základny kolmice jako na obrázku (jsou značeny čárkovaně).



Úseky, na které je větší základna rozdělena, jsou délek 5, 4, 4, 5. Protože je délka kterékoli čárkované čáry na obrázku i průměrem vepsané kružnice, stačí pro vyřešení úlohy určit velikost výšky lichoběžníka a vydělit dvěma. Z Pythagorovy věty je tato délka $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ a poloměr je tedy 6.

Úloha 26. Najděte největší podmnožinu množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$ takovou, že každé dva její prvky jsou nesoudělné, tedy nemají žádného společného dělitele.

Výsledek. 1 a všechna prvočísla do 100.

Návod. Čísla v množině $\{1, 2, \dots, 100\}$ mají všechny prvočíselné dělitele menší než 101, každé má jiné prvočíselné dělitele a jen číslo 1 může být bez prvočíselného dělitele. Proto nemůže být čísel v množině víc, než je počet prvočísel do 100 plus 1. Množina $\{1;$ všechna prvočísla do $100\}$ má ale přesně tento počet prvků, proto je hledanou největší množinou.

Úloha 27. Pro která všechna přirozená čísla n platí, že $6n$ je dělitelné číslem $6+n$?

Výsledek. 3, 6, 12, 30.

Návod. Je zřejmé, že $\frac{6n}{6+n} < 6$. Jestliže $6+n \mid 6n$, potom podíl $\frac{6n}{6+n}$ celé číslo ležící v intervalu $\langle 1, 5\rangle$. Prozkoušejme možnosti.

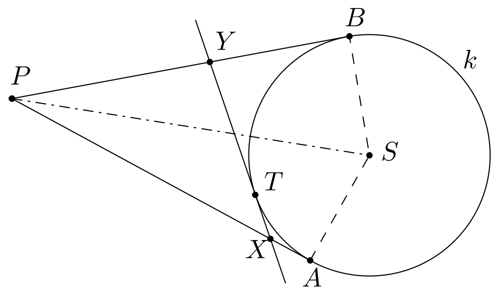
- $\frac{6n}{6+n} = 1 \Rightarrow n = \frac{6}{5}$, což není přirozené číslo
- $\frac{6n}{6+n} = 2 \Rightarrow n = 3$
- $\frac{6n}{6+n} = 3 \Rightarrow n = 6$
- $\frac{6n}{6+n} = 4 \Rightarrow n = 12$
- $\frac{6n}{6+n} = 5 \Rightarrow n = 30$

Závěr: $6+n \mid 6n$ pro $n \in \{3, 6, 12, 30\}$.

Úloha 28. Mějme kružnici k se středem S o poloměru 1 a bod P takový, že $|PS| = 3$. Tímto bodem veďme tečny ke kružnici k, které se jí dotknou v bodech A, B. Dále si zvolme libovolný bod T kratšího oblouku AB kružnice k a jím veďme tečnu ke kružnici k. Tato tečna protne úsečky AP a BP v bodech X a Y. Určete obvod trojúhelníka PXY.

Výsledek. $o = 4\sqrt{2}$.

Návod. Pro obvod ΔPXY platí $o = |PX|+|XY|+|YP| = |PX|+|XT|+|TY|+|YP| = |PX|+|XA|+|BY|+|YP| = |PA|+|PB|$, neboť tečny ke kružnici z bodu jsou stejně dlouhé.

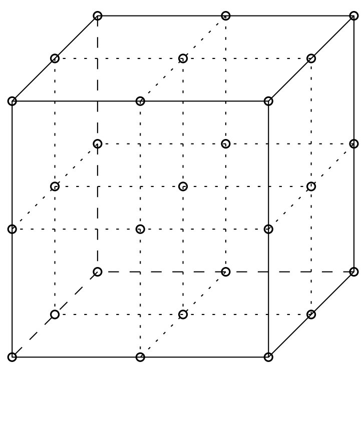


Dále platí $|PA| = |PB| = \sqrt{|PS|^2 - |SB|^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$. Odtud $o = |PA| + |PB| = 2|PB| = 4\sqrt{2}$.

Úloha 29. V krychli si vyznačme několik bodů: všechny vrcholy, všechny středy hran, všechny středy stěn a střed krychle. Kolik jsme jich vyznačili? Kolik existuje přímek takových, že procházejí právě dvěma vyznačenými body?

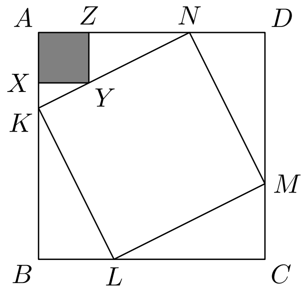
Výsledek. Počet bodů je 27, počet přímek 204.

Návod. Z obrázku vidno, že bodů je 27 (třikrát počet na nějaké stěně).



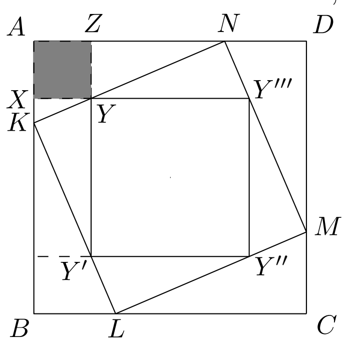
Každé dva body určují přímku. Takto přiřazených přímek ke dvěma bodům je $\binom{27}{2} = 351$. Do tohoto součtu jsme ale započítali i přímky, na kterých leží tři body, každou z nich dokonce třikrát (za každou dvojici bodů). Proto musíme od 351 odečíst trojnásobek počtu přímek, na kterých leží tři body. V každém ze tří směrů (zhora–dolů, zleva–doprava, zepředu–dozadu) leží 9 přímek, na nichž leží tři body. Ve směrech stěnových úhlopříček leží vždy tři přímky se třemi body, směrů stěnových úhlopříček je 6. V každém ze čtyř směrů tělesových úhlopříček pak leží jedna přímka, na níž jsou tři body. Pojďme sečíst počet přímek, na nichž leží 3 body: $3 \cdot 9 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 49$. Hledaný počet přímek ze zadání je $351 - 3 \cdot 49 = 204$.

Úloha 30. Čtverci $ABCD$ se stranou délky 1 je vepsaný čtverec $KLMN$ tak, že body K, L, M a N leží po řadě na stranách AB, BC, CD a DA. Body X, Y a Z leží po řadě na úsečkách AB, KN a DA tak, že $AXYZ$ je čtverec. Vyjádřete obsah čtverce $AXYZ$, jestliže víte, že obsah čtverce $KLMN$ je S.



Výsledek. $\frac{(1-S)^2}{4}$.

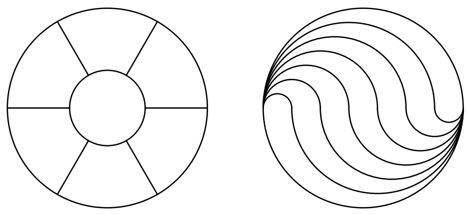
Návod. Dorýsujme si do čtverce $KLMN$ další čtverec $YY'Y''Y'''$, který je rovnoběžný s $ABCD$.



Poměry obsahů $S_{ABCD} : S_{KLMN}$ a $S_{KLMN} : S_{YY'Y''Y'''}$ jsou díky stejným úhlům svíraných jednotlivými čtverci stejné, proto jestliže zadání praví $S_{ABCD} = 1$ a $S_{KLMN} = S$, pak $S_{YY'Y''Y'''} = S^2$. Poměr $|AB| : |YY'|$ je odmocninou poměru obsahů, tedy $|AB| : |YY'| = \frac{1}{S}$, z čehož díky $|AB| = 1$ dostaneme $|YY'| = S$. Dopočítejme $|AX| = \frac{|AB|-|YY'|}{2} = \frac{1-S}{2}$. Obsah malého čtverce $AXYY$ je už maličkostí: $S_{AXYZ} = |AX|^2 = \left(\frac{1-S}{2}\right)^2$.

Úloha 31. Jak lze rozdělit kruh na 7 částí se stejným obsahem jenom s pomocí pravítka (bez míry, bez délek, pravítko může být libovolně dlouhé) a kružítka? Není nutné rýsovat, ale je nutné ukázat postup konstrukce.

Výsledek. Dvě z možných řešení, mohou existovat i další. Součástí řešení je i postup konstrukce.

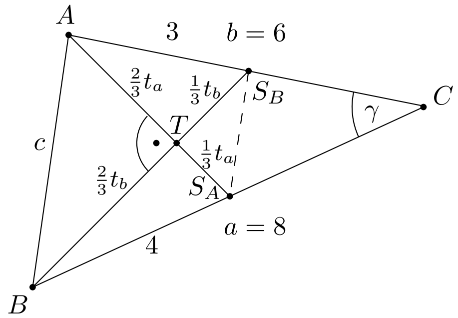


Návod. Nejprve rozdělíte kruh jako „koláč“ na šest dílů, to je lehké. Potom musíte sestrojit délku $\frac{r}{\sqrt{7}}$, abyste mohli sestrojit vnitřní kružnici. Mezikrokem je sestrojení délky $\sqrt{7}r$. Tu najdeme v pravoúhlém trojúhelníku se stranami $3r$, $4r$, $\sqrt{7}r$, který sestrojit umíme. Pomocí přenášení poměrů zkonstruujeme $\frac{r}{\sqrt{7}}$ (vezmeme nějaký úhel, na jedno jeho rameno naneseme za sebe délky $\sqrt{7}r$ a r, na druhé rameno jen délku r a délku $\frac{r}{\sqrt{7}}$ zkonstruujeme pomocí rovnoběžek).

Úloha 32. V trojúhelníku ABC je těžnice na stranu a kolmá na těžnici na stranu b. Určete délku strany c, víte–li navíc $a = 8$, $b = 6$.

Výsledek. $2\sqrt{5}$.

Návod. Označme si délky podle obrázku.



Pak podle Pythagorovy věty použité na trojúhelníky ATS_B, BTS_A platí

$$3^2 = \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t_a\right)^2 \qquad \text{a} \qquad 4^2 = \left(\frac{1}{3}t_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2,$$

což po sečtení dává $\frac{5}{9}(t_a^2 + t_b^2) = 3^2 + 4^2 = 5^2$. Z potřetí použité Pythagorovy věty dostáváme

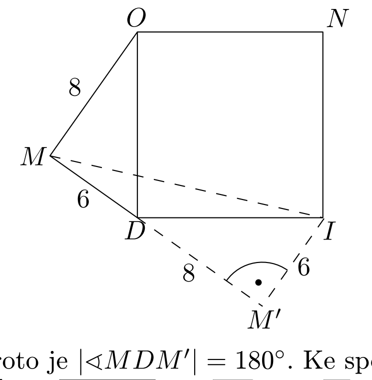
$$c^2 = \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t_b\right)^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_b^2) = \frac{4}{5}\frac{5}{9}(t_a^2 + t_b^2) = 20.$$

Odtud $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Úloha 33. Nad přeponou DO pravoúhlého trojúhelníku DOM leží zvenku čtverec $DINO$. Určete $|MI|$, víte-li $|MD| = 6$ a $|MO| = 8$.

Výsledek. $2\sqrt{58}$.

Návod. Pro vyřešení si dokreslíme ke straně DI čtverce trojúhelník shodný s DOMem.



Úhly do sebe pěkně zapadnou, proto je $|\sphericalangle MDM'| = 180°$. Ke spočítání $|MI|$ můžeme použít Pythagorovu větu: $|MI| = \sqrt{(6+8)^2 + 6^2} = \sqrt{14^2 + 6^2} = \sqrt{232} = 2\sqrt{58}$.

Úloha 34. Určete počet řešení rovnice

$$\sin(\pi x) = \frac{x}{100}.$$

Výsledek. 199.

Návod. Zřejmým řešením je $x = 0$. Zbylá řešení jsou symetrická podle 0, takže pro každé x řešící zadanou rovnici řeší rovnici i číslo $-x$. Na každém intervalu $\langle k, k+2\rangle$, kde $k \in \{0, 1, \ldots, 49\}$, leží právě dvě řešení, neboť tam lineární funkce $\frac{x}{100}$ protne graf funkce $\sin(\pi x)$ právě dvakrát (perioda funkce $\sin(\pi x)$ je 2, tedy přesně délka intervalu). Těchto intervalů máme 50, nezáporných kořenů je tedy $2 \cdot 50 = 100$. Nekladných je díky symetrii také 100, a po odečtení jednoho řešení za nulu, kterou jsme započítali dvakrát, dostáváme celkový počet kořenů 199.

Úloha 35. Kenny, Luboš a Monika postupně házejí poctivou mincí (pravděpodobnosti padnutí orla a panny jsou stejné). Všichni tři hrají hru, která vypadá následovně. Nejprve hodí Kenny, pak Luboš, pak Monika, pak zase Kenny, tak pořád dokola, dokud prvnímu z nich nepadne panna, a to je vítěz. S jakou pravděpodobností vyhraje Luboš?

Výsledek. $\frac{2}{7}$.

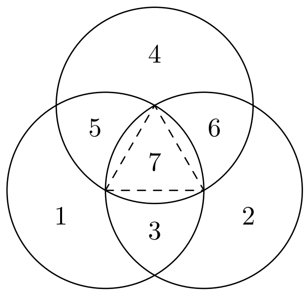
Návod. Označme pravděpodobnosti výher Kennyho, Luboše a Moniky symboly P_k, P_l, P_m. Pravděpodobnost, že vyhraje Kenny je určitě dvakrát větší, než že vyhraje Luboš, protože jen s poloviční pravděpodobností se Luboš vůbec dočká svého tahu, a až se ho dočká, tak přejmenováním účinkujících dostaneme analogickou situaci jako na začátku. Podobně má Luboš dvakrát větší šanci na výhru než Monika. Proto jsou poměry $P_k : P_l : P_m = 4 : 2 : 1$. Remízou hra skončit nemůže, proto vždy nakonec někdo vyhraje, takže je $P_k + P_l + P_m = 1$, a pravděpodobnost P_l dopočítáme snadno přes poměr $4 : 2 : 1$. Výsledek je $P_l = \frac{2}{7}$.

Úloha 36. V rovině leží 8 bodů tak, že žádné tři neleží na jedné přímce. Kolik nejvíc trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech lze vytvořit tak, aby měla každá dvojice trojúhelníků společný nejvýše jeden vrchol? Poznámka: překrývání trojúhelníků je povolené.

Výsledek. 8.

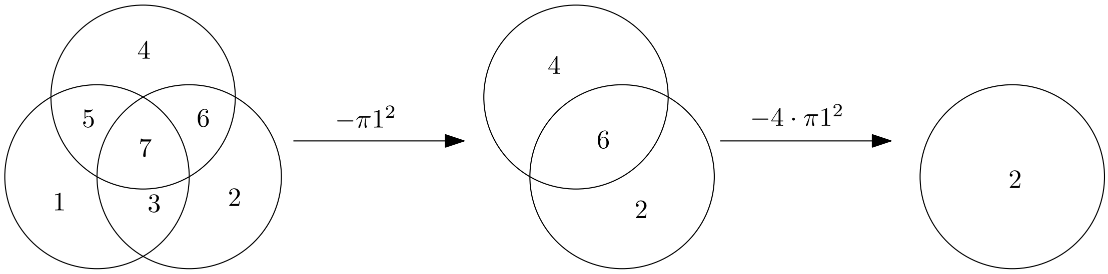
Návod. Dva trojúhelníky mají společný maximálně jeden vrchol, právě když nemají společnou žádnou stranu. Počet možných nesplývajících úseček (s krajními body v dané množině) je roven $\binom{8}{2} = 28$. Největší možný počet trojúhelníků je teď $\left\lfloor \frac{28}{3} \right\rfloor = 9$. Tento počet trojúhelníků ale nejde naskládat do množiny úseček mezi zadanými osmi body, protože aspoň jeden bod musel být koncovým bodem sedmi použitých úseček, a to nelze, neboť kdykoli je bod vrcholem nějakých k trojúhelníků, je koncovým bodem $2k$ stran těchto trojúhelníků, a to je spor s lichostí čísla 7. Naopak, osm trojúhelníků už utvořit zvládneme, což se snadno ověří.

Úloha 37. Kuba s Pavlem namalovali na zeď tři kruhy, jejichž středy leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka se stranou délky 1 a poloměry rovnými délce strany. Vzniklo jim sedm částí a každou by chtěli natřít jinou barvou. Kolik je bude celý obrazec stát, jestliže ceny natření jedné čtvereční jednotky jsou jako na obrázku níže?



Výsledek. 7π korun.

Návod. Vezměme si kruh vlevo dole a vymalujme ho celý barvou stojící 1 na čtvereční jednotku (celý kruh tak bude stát $\pi 1^2 = \pi$). Předpokládejme, že vymalování políček, která jsou společná s ostatními kružnicemi a jsou dražší, se o jedničku zlevní (jakobychom už nanesli vrstvu za hodnotu 1). Pak si můžeme levou dolní kružnici odmyslet a provést stejný postup (akorát čtyřikrát intenzivnější) na horní kruh (to bude stát čtyřikrát víc: $4(\pi 1^2) = 4\pi$). Zbyde nám kruh, který vymalujeme za cenu $2(\pi 1^2) = 2\pi$. Celkově nás toto vymalování stojí $\pi + 4\pi + 2\pi = 7\pi$.



Úloha 38. Vypočtěte hodnotu $\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ$.

Výsledek. $\frac{1}{4}$.

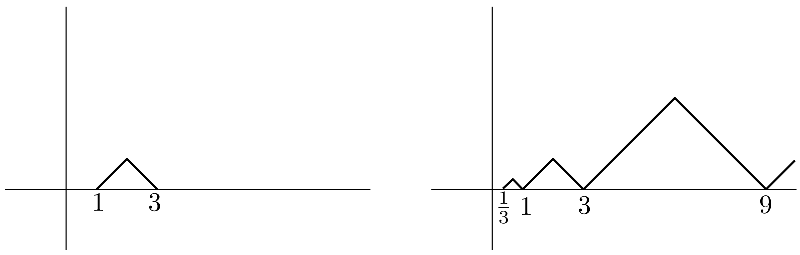
Návod. Upravujme výraz pomocí vzorce pro dvojnásobný úhel, pravidel pro rozšiřování zlomku a vlastnosti $\sin x = \cos(90^\circ - x)$:

$$\sin 54^\circ \sin 18^\circ = \cos 36^\circ \sin 18^\circ = \cos 36^\circ \cdot (2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ) \cdot \frac{1}{2\cos 18^\circ} =$$
$$= \cos 36^\circ \sin 36^\circ \cdot \frac{1}{4\cos 18^\circ} = \sin 72^\circ \cdot \frac{1}{4\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4 \sin 72^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Úloha 39. Funkce $f(x)$ splňuje $f(3x) = 3f(x)$ pro všechna reálná x, dále $f(x) = 1 - |x-2|$ pro x z intervalu $[1,3]$. Najděte nejmenší kladné x, pro které platí $f(x) = f(2008)$.

Výsledek. 422.

Návod. K řešení vede představa, jak vlastně funkce vypadá.



Na intervalu $\langle 1,3\rangle$ je tvar na obrázku vlevo. Celou funkci pak (na kladných číslech) dostaneme tak, že si „zkopírujeme“ interval $\langle 1,3\rangle$ na interval $\langle 3,9\rangle$ a třikrát zvětšíme. Pro následující intervalyi $\left\langle 3^k, 3^{k+1}\right\rangle$ provedeme totéž. V každém intervalu $\left\langle 3^k, 3^{k+1}\right\rangle$ nabývá funkce maxima v jeho prostředku a toto maximum je rovno 3^k. Hledejme teď k_0 takové, že $3^{k_0} \le 2008 < 3^{k_0+1}$. Takovým k_0 je $k_0 = 6$ ($3^6 = 729 \le 2008 < 2187 = 3^7$). Zřejmě $f(2008) = 2187 - 2008 = 179$, protože je funkce f po částech lineární a 2008 je blíže 2187 než 729. Teď už hledáme jen x, pro které $f(x) = 179$. Takové x může ležet nejblíže v intervalu $\langle 243, 729\rangle$, protože maximum v předchozích intervalech je $3^4 = 81$. Od čísla 243 jde funkce lineárně nahoru, a my jen čekáme, kdy $f(x)$ vystoupá na hodnotu 179. To se stane přesně v bodě $x = 243 + 179 = 422$.

Úloha 40. Kouzelný automat umí vyplatit částku n pomocí mincí v hodnotě od 1 do n. Kolika způsoby to může udělat, jestliže má dostatek každé hodnoty platidla? Při vyplácení záleží na pořadí.

Výsledek. 2^{n-1}.

Návod. Jednotlivé mince o hodnotě k si představme jako k jednotkových mincí, které vypadnou z automatu téměř zaráz. Potom jakoby automat vrací jednotkové mince po dávkách. Dejme tomu, že automat vyplatí n mincí v m dávkách. Počet možností, jak mohl tyto dávky naporcovat, je stejný, jako počet způsobů, kolika můžeme mezi n jednotkových mincí v řadě vložit m přepážek, přičemž dvě přepážky nesmí být vedle sebe. Představme si tedy, že máme řadu n mincí a mezi nimi $n-1$ volných políček (mince – políčko – mince – políčko – … – políčko – mince), na která můžeme umísťovat přepážky. To lze udělat $\binom{n-1}{m}$ způsoby. Pokud uvažujeme postupně $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, dostaneme podle binomické věty

$$\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Úloha 41. Najděte největší n takové, že $2^n \mid (3^{1024} - 1)$.

Výsledek. 12.

Návod. Postupně rozkládejme závorky podle vzorce $(A^2 - B^2) = (A + B) \cdot (A - B)$ a dostaneme

$$3^{1024} - 1 = (3^{512} + 1)(3^{512} - 1) = (3^{512} + 1)(3^{256} + 1)(3^{256} - 1) =$$
$$(3^{512} + 1)(3^{256} + 1)(3^{128} + 1)(3^{64} + 1)(3^{32} + 1)(3^{16} + 1)(3^{8} + 1)(3^{4} + 1)(3^{2} + 1)(3 + 1)(3 - 1).$$

Číslo 3^{2k} dává po dělení 4 zbytek 1, proto $3^{2k} + 1$ dá po dělení čtyřmi zbytek 2, a je tedy dělitelné dvěma, ale čtyřmi už ne. Proto si můžeme za každou z prvních 9 závorek zapsat jednu dvojku do čísla 2^n, z poledních dvou závorek pak další tři dvojky. Celkový počet dvojek v rozkladu na součin je 12 a největší n, pro které $2^n \mid (3^{1024} - 1)$, je taky 12.

Úloha 42. Nechť x je největší dvojciferné přirozené číslo, pro které existuje celé číslo y a prvočíslo z tak, že platí $x^2 + 2y^2 + 3xy = 5z^2$. Která jsou čísla x, y a z?

Výsledek. $(x, y, z) = (99, -44, 11)$.

Návod. Pro začátek si rovnici upravíme na

$$(x + y)(x + 2y) = 5z^2.$$

Máme hledat největší dvojciferné číslo x, tak zkusíme zvolit $x = 99$ a doufáme, že najdeme příslušná y a z. Nyní máme

$$(99 + y)(99 + 2y) = 5z^2.$$

Ježto je z prvočíslo, vidíme, že pravá strana se dá rozložit na součin dvou celých čísel jen málo způsoby

$$5z^2 = 1 \cdot 5z^2 = 5 \cdot z^2 = 5z \cdot z = (-1) \cdot (-5z^2) = (-5) \cdot (-z^2) = (-5z) \cdot (-z).$$

Každá z možností nám určí hodnoty závorek $(99 + y)$ a $(99 + 2y)$ a my jsme schopni y a z dopočítat a zjistit tak, jestli vyhovují zadání úlohy. Rozebráním všech případů nalezneme jediné řešení $(x, y, z) = (99, -44, 11)$.

Úloha 43. Víme, že pro reálná čísla a, b, c platí $a - 7b + 8c = 4$ a $8a + 4b - c = 7$. Jakých hodnot může nabývat $a^2 - b^2 + c^2$?

Výsledek. Je to vždy 1.

Návod. Podívejme se, jakou část prostoru $\mathbb{R}^3$ vyplňují trojice a, b, c, které vyhovují podmínkám ze zadání. První podmínka je vlastně rovnicí roviny, takže množina bodů $[a, b, c]$ splňujících $a - 7b + 8c = 4$ je rovina v $\mathbb{R}^3$. Druhá podmínka určuje též rovinu a průsečnice těchto rovin je přímka, která splňuje obě podmínky. Vyjádřeme si tuto přímku. Dosazením $a = 4 + 7b - 8c$ do $8a + 4b - c = 7$ dostaneme $8(4 + 7b - 8c) + 4b - c = 7$, po úpravě $b = \frac{13}{12}c - \frac{5}{12}$. Vyjádření a je $a = -\frac{5}{12}c + \frac{13}{12}$. Pokud $[a, b, c]$ vyhovuje zadání, pak tedy nutně $[a, b, c] = [-\frac{5}{12}c + \frac{13}{12}, \frac{13}{12}c - \frac{5}{12}, c]$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Dosazením do výrazu $a^2 - b^2 + c^2$ dostáváme řešení

$$\left(-\frac{5}{12}c + \frac{13}{12}\right)^2 - \left(\frac{13}{12}c - \frac{5}{12}\right)^2 + c^2 =$$
$$= \left(\frac{25}{144} - \frac{169}{144} + 1\right)c^2 + 2\left(\frac{5 \cdot 13}{144} - \frac{5 \cdot 13}{144}\right)c + \left(\frac{13}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = 0c^2 + 0c + 1 = 1.$$

Úloha 44. Najděte přirozené číslo n, pro které platí

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Výsledek. 47.

Návod. Vzpomene si na součtový vzorec pro tangens

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

a zjevnou identitu $\operatorname{arctg}\big(\operatorname{tg}(x)\big) = x$. Nyní spočteme

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1/3+1/4}{1-1/3\cdot 1/4}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{11}\right).$$

Vidíme, že jsme schopni vyjádřit součet dvou hodnot funkce arkustangens pomocí její jedné hodnoty. Víme-li, že $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$, stačí nám to, abychom se opakováním tohoto postupu dopočítali k řešení $n = 47$.

Úloha 45. Uvažujme posloupnosti skládající se pouze z písmen A a B takové, že každý souvislý úsek po sobě jdoucích písmen A (který už nejde prodloužit) má sudou délku a úsek písmen B lichou délku. Jsou to například $AABBB$, B, $BAAAABBB$. Najděte počet takových posloupností délky 14.

Výsledek. 172.

Návod. Označme si A_n, resp. B_n počet vyhovujících posloupností délky n, které končí písmenem A, resp. B. Chceme-li určit A_n, víme, že každá taková posloupnost končí dvěma písmeny A. Tedy na pozici $n-1$ musí být také A, proto nás zajímá pouze počet řetězců délky $n-2$. Těch je $A_{n-2} + B_{n-2}$. Máme tedy vztah $A_n = A_{n-2} + B_{n-2}$. Podobně odvodíme též vztah $B_n = A_{n-1} + B_{n-2}$. Snadno určíme, že $B_1 = 1$, $A_1 = 0$, $B_2 = 0$, $A_2 = 1$ a pomocí odvozených rekurentních vztahů dopočteme počet všech vyhovujících posloupností jako $A_{14} + B_{14} = 172$.

Úloha 46. V trojúhelníkové tabulce čísel jsou v prvním řádku čísla $1, 3, 5, \ldots, 99$. Každý další řádek má o jedno číslo méně a jeho členy jsou součty čísel nad ním (takže druhý řádek je $4, 8, \ldots, 196$). Kolik čísel z trojúhelníka je dělitelných 67?

Výsledek. 17.

Návod. Povšimneme si, že hned ve druhém řádku jsou všechna čísla dělitelná čtyřmi, což ovšem znamená, že i všechna čísla v nižších řádcích jsou dělitelná čtyřmi. Jelikož jsou 4 a 67 nesoudělné, můžeme všechna čísla od druhého řádku níž vydělit čtyřmi a jejich dělitelnost 67 tím nezměníme. Ve druhém řádku pak budou čísla $\{1, 2, \ldots, 49\}$ a ve třetím $\{3, 5, \ldots, 97\}$. Na dalším řádku budou opět čísla dělitelná 4 a stejný argument nám dovolí i tentokrát všechna čísla od tohoto řádku níž vydělit čtyřmi. Zjistíme, že se nám opakují dva „typy“ řádků. Typ $\{k, k+1, k+2, \ldots, n\}$ a $\{2k+1, 2k+3, 2k+5, \ldots, 2n+1\}$. Rovnou vidíme, že čísla dělitelná 67 se mohou vyskytnout pouze u druhého typu, za podmínky, že číslo 67 je ještě prvkem onoho řádku (krajní hodnoty se přibližují). Takových řádků je ale 17, proto je i 17 čísel dělitelných 67 v celém trojúhelníku.

Úloha 47. Najděte počet osmic nezáporných celých čísel $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ splňujících $0 \le a_k \le k$ pro $k = 1, 2, 3, 4$, a

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 5b_4 = 19.$$

Výsledek. $\binom{22}{3} = 1540$.

Návod. Součet si převeďme na

$$(a_1 + 2b_1) + (a_2 + 3b_2) + (a_3 + 4b_3) + (a_4 + 5b_4) = 19$$

a nyní si uvědomíme klíčovou věc. Kdykoliv teď zvolíme za i-tou závorku konkrétní nezáporné číslo, existuje *právě jeden* způsob, jak toto číslo pomocí nezáporných čísel a_i, b_i vyjádřit. To platí právě díky nerovnostem $a_i \le i$. Nyní už stačí tedy spočítat počet způsobů, jak vyjádřit 19 pomocí součtu 4 nezáporných čísel. Představme si celkem 22 políček v řadě za sebou, na které umístíme 19 puntíků a 3 přepážky, přičemž počet puntíků od začátku k první přepážce bude hodnota prvního nezáporného čísla, počet puntíků mezi první a druhou přepážkou bude hodnota druhého nezáporného čísla, a tak dál. To můžeme udělat $\binom{22}{3} = 1540$ způsoby.