Úloha 1. V Americe se pro měření teploty používají místo Celsiových stupňů stupně Fahrenheitovy. Přepočet z Celsiových stupňů na Fahrenheitovy lze provést podle vzorce $f = \frac{9}{5}c + 32$ (c jsou stupně Celsiovy, f Farenheitovy). Jakou teplotu vyjádří Evropan i Američan stejnou hodnotou?

Výsledek. $-40°C = -40°F$.

Návod. Stejnou hodnotu dostanu, když $f = c$. Pak stačí vyřešit jednoduchou rovnici $x = \frac{9}{5}x + 32$. Dostaneme jediné řešení $x = -40$.

Úloha 2. Nalezněte všechny dvojice reálných čísel (a, b) takové, že čísla 10, a, b, ab tvoří v tomto pořadí aritmetickou posloupnost.

Výsledek. $(4, -2), (\frac{5}{2}, -5)$.

Návod. V aritmetické posloupnosti platí, že každý člen je aritmetickým průměrem členů sousedních. Sestavíme tedy příslušné rovnice

$$\frac{10 + b}{2} = a,$$
$$\frac{a + ab}{2} = b.$$

Tato soustava má dvě řešení $(4, -2), (\frac{5}{2}, -5)$, která obě vyhovují zadání.

Úloha 3. Miloš dostal na zkoušce z Esperanta 10 otázek, na které lze odpovídat pouze ANO nebo NE. Test je připraven natolik fikaně, že odpoví-li Miloš na libovolných pět otázek ANO a na zbylých pět otázek NE, bude mít vždy alespoň čtyři správné odpovědi. Zjistěte, kolika způsoby lze takovýto test připravit.

Výsledek. 22.

Návod. Jistota čtyř správných odpovědí znamená, že je buď aspoň devět odpovědí ANO nebo aspoň devět odpovědí NE. Možností, jak dát za sebe devětkrát ANO a jednou NE, je 10, analogicky je 10 možností s devíti NE. Ještě musíme připočíst možnost všech desíti ANO a možnost všech desíti NE. Dohromady $10 + 10 + 1 + 1 = 22$.

Úloha 4. Najděte nejmenší možnou hodnotu parametru a tak, aby nerovnice $x \geq 14\sqrt{x} - a$ platila pro všechna nezáporná čísla x.

Výsledek. 49.

Návod. Rovnici si ekvivalentně upravíme na tvar $(\sqrt{x} - 7)^2 + a - 49 \geq 0$. Pokud má nerovnost platit i pro $\sqrt{x} = 7$, musí být nutně $a \geq 49$. Protože je druhá mocnina vždy nezáporná, tak zároveň vidíme, že volba $a = 49$ stačí a toto a je minimální.

Úloha 5. Mějme krychli a uvažujme všechny trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech krychle. Kolik různých vnitřních úhlů se v těchto trojúhelnících objeví?

Výsledek. 5.

Návod. Délky stran všech možných trojúhelníků v jednotkové krychli tvoří pouze kombinace $(1, 1, \sqrt{2})$, $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ a $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$. První je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ležící celý na stěně, druhý je nerovnoramenný pravoúhlý trojúhelník a třetí je rovnostranný trojúhelník, který dostaneme tak, že v krychli nevybereme žádné sousedící vrcholy. Z rovnoramenného pravoúhlého si vezmeme úhly 45° a 90°, z nerovnoramenného 90° a nějaké dva další různé úhly, z rovnostranného pak velikost 60°. Dohromady tedy pět různých velikostí úhlů.

Úloha 6. Kolika způsoby lze seřadit čísla $-7, -6, \ldots, 6, 7$ tak, aby absolutní hodnota čísel v seřazené posloupnosti byla neklesající?

Výsledek. $2^7 = 128$.

Návod. Jediné, co můžeme při řazení podle absolutní hodnoty volit, je vzájemné pořadí prvků, které mají absolutní hodnotu stejnou. Pro každou dvojici $[-i, i]$ máme tedy 2 možnosti, jak ji uspořádat. Takových dvojic je 7 a jejich řazení je nezávislé. Celkem tedy 2^7 možností.

Úloha 7. ABCDEF je pravidelný osmistěn o straně 3 tvořený čtyřbokými jehlany $ABCDE$ a $ABCDF$. Určete obsah čtyřúhelníku $EAFC$.

Výsledek. 9.

Návod. Nejprve je nutné podotknout, že ze symetrie podle středu S čtverce $ABCD$ plyne, že čtyřúhelník $EAFC$ celý leží v rovině dané body E, A a F. Takže úloha je korektně zadána. Protože daný osmistěn je pravidelný (t.j. všechny hrany jsou stejně dlouhé), je $EAFC$ kosočtverec (každý čtverec je kosočtverec). Dále víme, že $EAFCB$ je jehlan s podstavou $EAFC$ a že $|AB| = |FB| = |CB| = |EB|$, a proto daná podstava $EAFC$ musí být čtverec. Dostáváme tedy její obsah $S_{EAFC} = |AE| \cdot |AF| = 3 \cdot 3 = 9$

Úloha 8. Do políček tabulky 5×5 jsou po řádcích (a v rámci řádku zleva doprava) vepsána čísla $1, 2, \ldots, 25$ v tomto pořadí. Vybereme pět políček tak, aby žádná dvě nebyla ve stejném řádku ani ve stejném sloupci, a čísla na těchto políčkách sečteme. Jaké hodnoty součtu můžeme tímto způsobem dostat?

Výsledek. 65.

Návod. Všimneme si, že každé číslo v tabulce umíme jednoznačně zapsat jako $r+s$, kde $r \in \{0, 5, 10, 15, 20\}$ a $s \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Tento rozklad má tu vlastnost, že číslům ve stejném řádku patří stejné číslo r a číslům ve stejném sloupci patří stejné číslo s. Proto, když vybereme 5 čísel tak, že každé bude z jiného řádku a jiného sloupce, musíme pětkrát vybrat různá čísla r a s, proto můžeme dostat jediný součet $0 + 5 + 10 + 15 + 20 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 65$.

Úloha 9. Vypočítejte $\frac{\tan^2(20^\circ) - \sin^2 20^\circ}{\tan^2(20^\circ) \sin^2 20^\circ}$.

Výsledek. 1.

Návod. Zlomek rozšíříme výrazem $\cos^2 20^\circ$ a pak upravíme

$$\frac{\tan^2(20^\circ) - \sin^2 20^\circ}{\tan^2(20^\circ) \sin^2 20^\circ} = \frac{\sin^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ \cos^2 20^\circ}{\sin^4 20^\circ} = \frac{\sin^2 20^\circ(1 - \cos^2 20^\circ)}{\sin^4 20^\circ} = 1.$$

Úloha 10. Káťa našla 2009 po sobě jdoucích přirozených čísel, která měla stejný součet jako 2008 po nich následujících čísel. Které z Kátiných čísel bylo nejmenší?

Výsledek. $2008^2 = 4032064$.

Návod. Označme a nejmenší Kátino číslo. Potom platí, že když ke každému z čísel $a+1, a+2, \ldots, a+2008$ přičteme 2008 a sečteme je, dostaneme součet těch 2008 následujících čísel. Zadání ale říká, že zároveň dostaneme stejný výsledek, jako když k součtu čísel $a+1, a+2, \ldots, a+2008$ připočteme jen číslo a. Touto dedukcí je nutně $a = 2008 \cdot 2008 = 2008^2$.

Úloha 11. Kterému celému číslu je roven součin

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} \cdots \frac{\frac{1}{98} - \frac{1}{99}}{\frac{1}{99} - \frac{1}{100}}?$$

Výsledek. 50.

Návod. Označme hledaný součet J. Stačí převést rozdíly na společné jmenovatele a dostaneme:

$$J = \frac{\frac{3-2}{2\cdot3}}{\frac{4-3}{3\cdot4}} \cdot \frac{\frac{5-4}{4\cdot5}}{\frac{6-5}{5\cdot6}} \cdots \frac{\frac{99-98}{98\cdot99}}{\frac{100-99}{99\cdot100}} = \frac{\frac{1}{2\cdot3}}{\frac{1}{3\cdot4}} \cdot \frac{\frac{1}{4\cdot5}}{\frac{1}{5\cdot6}} \cdots \frac{\frac{1}{98\cdot99}}{\frac{1}{99\cdot100}} = \frac{100}{2} = 50.$$

Úloha 12. Buď x reálné číslo a $y \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ splňující rovnice

$$x + \sin y = 2009$$
$$x + 2009 \cos y = 2008.$$

Určete součet $x + y$.

Výsledek. $2008 + \frac{\pi}{2}$.

Návod. Odečtením obou rovnic dostaneme $\sin y - 2009 \cos y = 1$. Protože je kosinus na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ nezáporný a sinus tam má maximum 1, tak aby výraz na levé straně mohl být 1, musí být $\sin y = 1$ a $\cos y = 0$, neboli $y = \frac{\pi}{2}$. Dopočítáme $x = 2008$ a v součtu $x + y$ vyjde $2008 + \frac{\pi}{2}$.

Úloha 13. Mějme posloupnost čísel, pro kterou platí $a_2 = 5$ a $a_n = \left\lfloor \frac{n^2}{a_{n-1}} \right\rfloor$ pro $n > 2$. Zjistěte hodnotu a_{999}. Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které nepřesahuje x.

Výsledek. 1.

Návod. Indukcí se ukáže, že $a_n = 1$ pro $n = 2k + 1$ a $a_n = n^2$ pro $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Je totiž

$$a_3 = \left\lfloor \frac{3^2}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor 1\frac{4}{5} \right\rfloor = 1,$$

a pak už dál střídavě $a_4 = \left\lfloor \frac{4^2}{1} \right\rfloor = 4^2$, $a_5 = \left\lfloor \frac{5^2}{4^2} \right\rfloor = 1$, $a_6 = 6^2, \ldots, a_{998} = 998^2$ a $a_{999} = 1$.

Úloha 14. Pro která přirozená čísla n není $n!$ násobkem n^2?

Výsledek. Pro prvočísla a číslo 4.

Návod. Nejprve si uvědomíme, že $n!$ je vždy násobkem n, tudíž zbývá zjistit, kdy je $(n-1)!$ násobkem n. Pro n prvočíslo toto nemůže nastat. Pokud je $n \geq 5$ složené číslo, rozlišíme dva případy.

(i) Lze psát $n = ab$ pro nějaká $1 \neq a \neq b \neq 1$. Pak je jasné, že $(n-1)!$ je násobkem ab a tím i n.

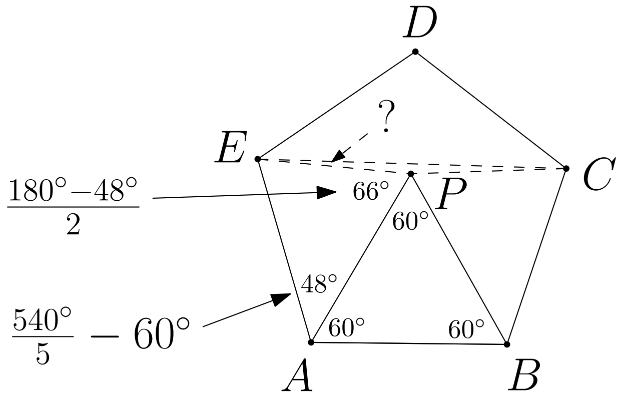
(ii) $n = p^2$, pro nějaké prvočíslo p. Pak jsou ovšem mezi čísly $1, 2, \ldots n-1$ čísla p i $2p$ (díky nerovnosti $n \geq 5$) a $(n-1)!$ je násobkem n.

Jiná možnost nastat nemůže (rozmysli si!) a díky tomu pro $n \geq 5$ složené je $(n-1)!$ vždy násobek n. Jediný opomenutý případ je $n = 4$. Ovšem $4! = 24$ není násobkem 16. Odpovědí jsou tedy všechna prvočísla a číslo 4.

Úloha 15. Mějme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Sestrojme rovnostranný trojúhelník PAB tak, aby bod P ležel uvnitř pětiúhelníka. Kolik stupňů má úhel PEC?

Výsledek. $6°$.

Návod. Některé úhly dopočítáme podle obrázku (využíváme rovnoramennost trojúhelníků a fakt, že vnitřní úhel v pětiúhelníku je $\frac{540°}{5}$).



Pro další úhly pak platí $|\sphericalangle EPC| = 360° - 2 \cdot 66° - 60° = 168°$ a z rovnoramennosti trojúhelníku EPC už lehko dopočteme $|\sphericalangle PEC| = 6°$.

Úloha 16. Nalezněte všechna reálná řešení rovnice

$$\sqrt{x + \sqrt{4x + \sqrt{16x + \sqrt{\cdots + \sqrt{4^{2009}x + 3}}}}} - \sqrt{x} = 1.$$

Výsledek. 2^{-4018}.

Návod. K oběma stranám rovnice přičteme $\sqrt{x}$ a začneme postupně umocňovat (vždy se některé členy odečtou, díky čemuž lze stále v umocňování pokračovat), až se dostaneme k rovnici

$$\sqrt{4^{2009}x+3} = 1 + 2^{2009}\sqrt{x},$$

jejímž řešením je $x = 2^{-4018}$. Zkouškou ověříme, že toto číslo vyhovuje i původní rovnici.

Úloha 17. Nechť a, b jsou takové konstanty, že body prostoru dané souřadnicemi $(1, a, b)$, $(a, 2, b)$ a $(a, b, 3)$ leží na jedné přímce. Určete $a + b$.

Výsledek. 4.

Návod. Všimneme si, že první dva body mají stejnou třetí souřadnici, která je rovna b. Protože všechny tři body leží na přímce, musí nutně i třetí bod mít souřadnici stejnou. Proto $b = 3$. Obdobnou úvahou o první souřadnici daných tří bodů zjistíme, že $a = 1$. Výsledný součet je tedy $a + b = 4$.

Úloha 18. Najděte největší přirozené číslo n takové, aby číslo $(2004!)!$ bylo dělitelné číslem $((n!)!)!$.

Výsledek. 6.

Návod. Protože $k!$ dělí číslo $l!$ pro libovolná $k \le l$, stačí, aby bylo $2004!$ větší nebo rovno $(n!)!$, neboli aby $n!$ bylo menší nebo rovno 2004. Protože $6! = 720$ a $7! = 5040$, je největším možným n číslo 6.

Úloha 19. Funkce f pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ splňuje $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot x$. Je-li $f(x)$ celé číslo, jaká je jeho největší možná dvojciferná hodnota? Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo, které nepřesahuje x.

Výsledek. 89.

Návod. Je $f(9) = \lfloor 9 \rfloor \cdot 9 = 81$ a $f(10) = 100$. Takže x, pro které je $f(x)$ největší možná, náleží do intervalu $\langle 9, 10)$. Pro $x \in \langle 9, 10)$ platí $f(x) = \lfloor x \rfloor x = 9x$. Pro $x < 10$ dále platí $9x < 90$, takže největší možné $f(x)$ je nejvýše 89. Hodnoty 89 už dosáhneme volbou $x = \frac{89}{9} \in \langle 9, 10)$.

Úloha 20. Jarda si upekl dokonale kulatou palačinku a z jejího středu vykrojil kruh, takže teď z palačinky zbylo mezikruží. Když se na ni chystal dát kečup, všiml si, že nejdelší rovná čára, kterou umí kečupem nakreslit, aniž by ho vylil na stůl, je dlouhá 12 cm. Jaký obsah má Jardova palačinka?

Výsledek. 36π cm^2.

Návod. Nejdelší rovná čára začíná a končí na vnějším okraji kruhu a navíc se dotýká okraje vyříznutého kruhu. Když označíme r_1 poloměr původní palačinky a r_2 poloměr vyříznutého kruhu, tak z Pythagorovy věty $r_1^2 - r_2^2 = 6^2$. Obsah mezikruží dostaneme z rozdílu obsahů kruhů: $S_1 - S_2 = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi 6^2\ \text{cm}^2 = 36\pi\ \text{cm}^2$.

Úloha 21. Spočtěte součet

$$\frac{1}{2\lfloor\sqrt{1}\rfloor+1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{2}\rfloor+1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{3}\rfloor+1} + \cdots + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{99}\rfloor+1}.$$

Výsledek. 9.

Návod. Označme hledaný součet I. Podívejme se nejprve, jak se chová $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Pro $k^2 \le n < (k+1)^2$ je $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$, tudíž hodnoty k nabude funkce $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ celkem $(k+1)^2 - k^2 = (2k+1)$-krát. A proto součet $\frac{1}{2\lfloor\sqrt{k^2}\rfloor+1} + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{k^2+1}\rfloor+1} + \cdots + \frac{1}{2\lfloor\sqrt{(k+1)^2-1}\rfloor+1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+1} + \cdots + \frac{1}{2k+1} = (2k+1)\frac{1}{2k+1} = 1$. Ale I je jen součet devíti předchozích součtů pro $k = 1, 2, \ldots, 9$, Proto $I = 9$.

Úloha 22. Vojenský pluk dlouhý tři kilometry pochoduje. Jejich nadřízený plukovník podél nich jezdí v autě třikrát rychleji, než vojáci pochodují. Vyjel s posledním vojákem a jede vždy přímo k prvnímu, otočí se a jede zpátky k poslednímu, pak se zase otočí a jede k prvnímu a tak pořád dokola. Jak daleko bude plukovník od posledního vojáka v momentě, kdy budou mít vojáci napochodováno 10 km?

Výsledek. 2 km.

Návod. Čas, za který vojáci ujdou $10km$, si můžeme libovolně označit, tak si ho označne $10t$. Vojáci se potom pohybují rychlostí $1km/t$ a plukovník jezdí rychlostí $3km/t$. Podívejme se, jak rychle se plukovník pohybuje vůči vojákům. Když jede stejným směrem, pohybuje se vůči nim $2km/t$, takže od prvního vojáka přejede k poslednímu za $3km/(2km/t) = 1,5t$. Pokud jede opačně, má vůči vojákům rychlost $4km/t$, takže od posledního k prvnímu přejede za $3km/(4km/t) = 0,75t$.

Tedy jedna „otočka“ od posledního znova k poslednímu mu trvá $1,5t + 0,75t = 2,25t$. To znamená, že plukovník za čas $9t$ udělá čtyři otočky a bude zase u posledního vojáka. Do konce pochodování v tom momentě zůstane ještě $1t$ a plukovník se znovu bude pohybovat vůči vojákům $2km/t$, takže už stihne přejet pouze $2km$.

Úloha 23. Mějme trojúhelník ABC s úhly $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCA| = 42°$. Nechť k je kružnice se středem K, která protíná stranu AB ve vnitřních bodech P, Q, stranu BC ve vnitřních bodech R, S a stranu CA ve vnitřních bodech T, U. Najděte úhel $|\sphericalangle CKB|$, jestliže víte, že $|PQ| = |RS| = |TU|$.

Výsledek. $|\sphericalangle CKB| = 138°$.

Návod. Střed K kružnice splňující vztah $|PQ| = |RS| = |TU|$ má nutně všechny vzdálenosti od stran trojúhelníku ABC stejné (to plyne z $|PQ| = |RS| = |TU|$ například použitím Pythagorovy věty). Tím pádem leží K na osách všech úhlů. Protože osy úhlů úhly půlí, tak má trojúhelník BCK dva úhly rovny $\frac{42°}{2}$ a snadno se dopočte, že hodnota třetího úhlu $|\sphericalangle CKB|$ je $180° - 42° = 138°$.

Úloha 24. Jaký zbytek dává 2^{9999} po dělení číslem $2^7 - 1$?

Výsledek. 8.

Návod. Zkusme postupně částečně dělit a vyjádřit 2^{9999} jako násobek $2^7 - 1$:

$$\begin{aligned} 2^{9999} &= 2^{9992}(2^7 - 1) + 2^{9992} \\ 2^{9992} &= 2^{9985}(2^7 - 1) + 2^{9985} \\ &\dots \\ 2^{10} &= 2^3(2^7 - 1) + 2^3 \end{aligned}$$

Na levé straně exponenty klesají po 7 a protože 9999 dává zbytek 3 po dělení 7, poslední člen na pravé straně musí být 2^3. Pokud nyní všechny rovnice sečteme, všechny mocniny 2 kromě 2^{9999} a 2^3 se budou vyskytovat na obou stranách rovnice, takže po jejich odečtení dostaneme:

$$2^{9999} = k \cdot (2^7 - 1) + 2^3$$

Z čehož hned plyne výsledek 8.

Úloha 25. Určete počet podmnožin množiny $\{1, 2 \dots, 63\}$ takových, že součet jejich prvků je roven 2009.

Výsledek. 5.

Návod. Sečtením všech prvků zadané množiny dostaneme $1 + \cdots + 63 = 63 \cdot \frac{1+63}{2} = 2016$, a tak jde spíš o to, kolika způsoby z ní vynechat prvky se součtem 7. Součet 7 dávají jen skupiny $\{7\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ a $\{1, 2, 4\}$, proto je správná odpověď 5.

Úloha 26. Najděte největší celé číslo, které dělí výraz $m^5 - 5m^3 + 4m$ pro každé $m \geq 10$.

Výsledek. $5! = 120$.

Návod. Daný mnohočlen rozložíme jako $V(m) = (m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)$. Z tohoto rozkladu ihned vidíme, že 3 i 5 vždy dělí V. Fakt, že 8 dělí $V(m)$ plyne ihned z toho, že dvě čísla z rozkladu $V(m)$ musí být sudá, navíc jsou po sobě jdoucí, tudíž je jedno z nich dělitelné 4. Tedy víme, že $5! = 120$ vždy dělí $V(m)$. Neexistenci většího dělitele dokážeme ve dvou krocích. Zaprvé volbou $m = 3^2 5^2 2^4 + 3$ zaručíme, že žádná větší mocnina čísel 2, 3 a 5 nebude dělit $V(3^2 5^2 2^4 + 3)$, protože „všechny vyšší mocniny budou schovány v $m - 3$“. Zadruhé, volbou $m = p + 3$, $p \geq 7$, p je prvočíslo, zaručíme, že $V(p+3)$ není dělitelné p, neboť $p \geq 7$. Proto největší číslo, které dělí všechna $V(m)$, je 120.

Úloha 27. Do kružnice je vepsaný šestiúhelník $ABCDEF$, pro který platí $|AB| = |CD| = |EF| = 2|BC| = 2|DE| = 2|AF|$. Určete obvod $ABCDEF$, víte-li, že $|AD| = 8$.

Výsledek. 24.

Návod. Důležité je uvědomit si, že vnitřní úhly šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou všechny $120°$, protože vznikne jakoby rovnoměrným roztažením tří nesousedních stran pravidelného šestiúhelníku. Vezměme lichoběžník $ADEF$, jehož úhly jsou $60°$, $60°$, $120°$ a $120°$. Právě díky těmto úhlům a faktu $|EF| = 2|AF| = 2|DE|$ lze lichoběžník $ADEF$ rozdělit na pět stejných rovnostranných trojúhelníků se stranami délky $|DE|$, z nichž tři mají svou stranu na $|AD|$. Proto $|AD| = 3|DE|$ a $|DE| = \frac{8}{3}$. Obvod šestiúhelníku je $|AB| + |CD| + |EF| + |BC| + |DE| + |AF| = 9|DE| = 9 \cdot \frac{8}{3} = 24$.

Úloha 28. Nechť $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ je libovolná permutace čísel $1, 2, \ldots, n$. Pro kolik z těchto permutací platí, že $s_k \geq k - 2$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$?

Výsledek. $2 \cdot 3^{n-2}$.

Návod. Konstruujme permutaci s danými vlastnostmi. Pro n musí platit $s_n \geq n - 2$, mohu ho tedy dát jen na poslední, předposlední nebo předpředposlední pozici. To jsou celkem 3 možnosti. Dále postupujme indukcí. Pro $3 \leq k < n$ mohu (díky podmínce $s_k \geq k - 2$) dát číslo k na pozice $(k-2), (k-1), \ldots, n$. Celkem tedy $n - k + 3$ možností. Všechna čísla větší než k jsou ale již umístěna na pozicích $(k-1), k \ldots, n$, celkem tedy zabírají $n - k$ míst. A proto mi zbyla $(n - k + 3) - (n - k) = 3$ volná místa pro položení čísla k. Celkem pro $3 \leq k < n$ mám tedy 3^{n-3} možností. Pro 2 však již mám pouze dvě volná místa a číslo 1 má již jen jednu volnou pozici, kam ho mohu uložit. To jsou celkem 2 možnosti pro položení dvojice $1, 2$. Pro položení všech n čísel mám tedy $3 \cdot 3^{n-3} \cdot 2 = 2 \cdot 3^{n-2}$ možností.

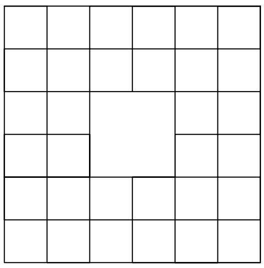
Úloha 29. Zjednodušte: $2\sqrt{1,5 + \sqrt{2}} - (1,5 + \sqrt{2})$.

Výsledek. $\frac{1}{2}$.

Návod.

$$2\sqrt{1,5 + \sqrt{2}} - (1,5 + \sqrt{2}) = \sqrt{(2 + \sqrt{2})^2} - (1,5 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} - 1,5 - \sqrt{2} = 0,5.$$

Úloha 30. Určete počet obdélníků (včetně čtverců) v tomto obrázku.



Výsledek. 297.

Návod. Spočítejme nejprve počet obdélníků, které by se v obrázku daly najít, kdyby uprostřed nebyla díra. Obdélník je jednoznačně dán dvojicí vodorovných a dvojicí svislých rovnoběžek. Vybíráme ze 7 vodorovných (resp. svislých) čar, máme tedy $\binom{7}{2}$ možností. Na vybrání obou dvojic pak zřejmě $\binom{7}{2}^2$ možností. Nyní budeme chtít odečíst ty obdélníky, které procházejí středem obrázku. Obdélníků, jejichž vodorovná přímka prochází středem a které nemají vrchol ve středu obrázku, je $6 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ (6 možností za druhou vodorovnou hranu a 3 možnosti pro boční hrany na obou stranách), stejně jako těch, jejichž svislá přímka prochází středem a které nemají vrchol ve středu obrázku. Obdélníků, jejichž jeden vrchol je střed obrázku, je celkem $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ (4 za každý vrchol obdélníka a $3 \cdot 3$ za zbylé dvě hrany). Celkový počet obdélníků tedy je $\binom{7}{2}^2 - 2 \cdot 54 - 36 = 297$.

Úloha 31. Mřížový bod v rovině je takový, jehož obě souřadnice jsou celočíselné. Předpokládejme, že Pravoslav jde z bodu $(0, 2009)$ přímou cestou (po přímce) do náhodného mřížového bodu se souřadnicemi ve čtverci $(0,0)$, $(0,99)$, $(99,99)$, $(99,0)$ včetně hranic (každý cílový bod má stejnou pravděpodobnost). Jaká je pravděpodobnost, že jeho cesta bude procházet sudým počtem mřížových bodů? Do cesty počítáme i počátek a konec.

Výsledek. $\frac{3}{4}$.

Návod. Nejdůležitější myšlenkou důkazu je uvědomit si, kolika mřížovými body procházíme, jdeme-li z bodu (a, b) do bodu (c, d). Počet těchto bodů je roven $NSD(c - a, d - b) + 1$ (a to včetně krajních bodů). V našem případě chceme zjistit, kdy počet protnutých mřížových bodů cesty z (a, b) do $(0, 2009)$ bude sudý pro $0 \leq a, b \leq 99$, stačí nám tedy zjistit, kdy je číslo $NSD(a, 2009 - b) + 1$ sudé, nebo ekvivalentně, kdy je $NSD(a, 2009 - b)$ liché. Lichost NSD máme zaručenou, bude-li alespoň jedno z čísel a, $2009 - b$ liché. Hodnota a bude lichá v polovině případů $0 \leq a \leq 99$, hodnota $2009 - b$ bude lichá taktéž v polovině případů. Proto $NSD(a, 2009 - b)$ bude liché ve $\frac{3}{4}$ případů. Hledaná pravděpodobnost je tedy $\frac{3}{4}$.

Úloha 32. Označme si $m \circ n = \frac{m+n}{mn+4}$. Spočtěte

$$((((2009 \circ 2008) \circ 2007) \circ \cdots \circ 2) \circ 1) \circ 0.$$

Výsledek. $\frac{1}{12}$.

Návod. Těžké je jen si uvědomit, že $t \circ 2 = \frac{t+2}{2t+4} = \frac{1}{2}$. Proto hodnota řešení nezávisí na prvních 2006 operacích a dostaneme výsledek $\left(\frac{1}{2} \circ 1\right) \circ 0 = \frac{1}{3} \circ 0 = \frac{1}{12}$.

Úloha 33. Čtyřúhelník $ABCD$ má délky stran $|AB| = 3$, $|BC| = 2$, $|CD| = 6$, $|DA| = 7$ a platí $|\sphericalangle ABC| = 90°$. Prozradíme vám, že tento čtyřúhelník má kružnici vepsanou. Dovedete určit její poloměr?

Výsledek. $\frac{1+\sqrt{13}}{3}$.

Návod. V řešení využijeme opakovaně Pythagrovu větu. Nejprve pomocí ní spočteme, že

$$|AC| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Nyní si všimneme, že platí $\sqrt{13}^2 + 6^2 = 7^2$, což říká, že i $\triangle ACD$ je pravoúhlý a platí $|\sphericalangle ACD| = 90°$. K výpočtu poloměru ρ kružnice vepsané využijeme dvojí vyjádření obsahu $ABCD$.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot \sqrt{13}}{2} = 3 + 3\sqrt{13}.$$

Označme nyní S střed kružnice vepsané $ABCD$ a pišme

$$S_{ABCD} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{CDS} + S_{DAS} = \frac{3 \cdot \rho}{2} + \frac{2 \cdot \rho}{2} + \frac{6 \cdot \rho}{2} + \frac{7 \cdot \rho}{2} = 9\rho.$$

Srovnáním pak získáme $\rho = \frac{1+\sqrt{13}}{3}$.

Úloha 34. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je výraz $n^3 + 2n^2 + 9n + 8$ třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

Výsledek. 7.

Návod. Vzhledem k odhadům $n^3 < n^3 + 2n^2 + 9n + 8 < (n + 2)^3$ musí nastat rovnost $n^3 + 2n^2 + 9n + 8 = (n + 1)^3$. Snadným výpočtem nakonec dostaneme $n = 7$.

Úloha 35. Mějme čtverec $ABCD$ se stranou 1 a uvnitř něj bod P tak, že $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCD|$. Navíc víte, že $|AP| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Určete vzdálenost $|BP|$.

Výsledek. 1.

Návod. Rovnost úhlů nám neříká nic jiného, než že CD je tečna ke kružnici s opsané trojúhelníku CPA (shodnost obvodového a úsekového úhlu). Střed s proto leží na přímce BC. Ale jelikož $A \in s$, potom musí být bod B středem s. Protože $P \in s$, máme $|BP| = 1$. Řešení nezávisí na velikosti $|AP|$, což byl také záměr úlohy.

Úloha 36. Určete počet trojic přirozených čísel (a, b, c) splňující následující vztahy

$$\begin{aligned} abc + 2009 &= ab + bc + ca \\ a + b + c &= 2010. \end{aligned}$$

Výsledek. 6021.

Návod. Hledejme nejprve řešení v nichž $a \le b \le c$. Z obou rovnic vyjádříme 2009 a srovnáním pravých stran dostaneme

$$-abc + ab + bc + ca = a + b + c - 1,$$

což upravíme na tvar

$$(a-1)(b-1)(c-1) = 0,$$

z něhož je zřejmé, že alespoň jedná neznámá musí být rovna 1. V našem případě nutně $a = 1$. Po dosazení do původních rovnic zjistíme, že stačí splnit podmínku $b + c = 2009$. Řešení, v nichž $a \le b \le c$, pak tvoří trojice $(1, 1, 2008), (1, 2, 2007) \dots (1, 1004, 1005)$. Vzhledem k symetrii zadané soustavy lze a, b, c libovolně prohazovat, což v případě trojice, v níž jsou všechna čísla různá, dá 6 $(= 3!)$ možností. Takové jsou všechny trojice kromě $(1, 1, 2008)$, od níž můžeme přejít pouze ke trojicím $(1, 2008, 1), (2008, 1, 1)$. Celkem tedy máme $(6 \cdot 1003) + 3 = 6021$ řešení.

Úloha 37. Mějme deset přirozených čísel uspořádaných do kruhu tak, že každé číslo je o jedna větší než největší společný dělitel jeho dvou sousedů. Najděte největší možný součet takto rozestavených čísel.

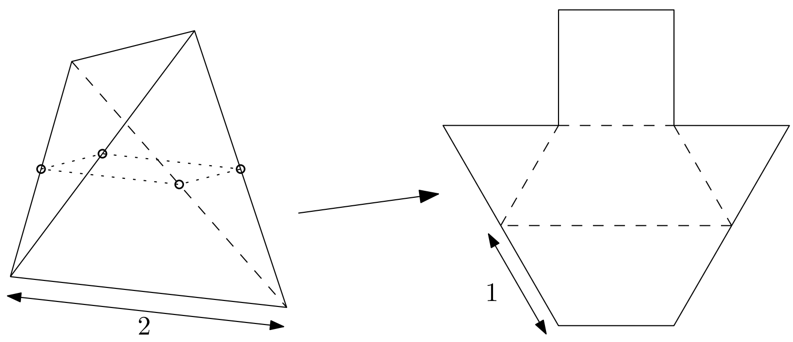
Výsledek. 28.

Návod. Nejprve podotkněme, že všechna čísla musí být alespoň 2, protože NSD dvou přirozených čísel je vždy alespoň 1. Uvažujme nyní největší číslo na kružnici a označme ho t. Dle zadání největší společný dělitel sousedů t je $t-1$, tudíž jeho sousedi mohou být pouze čísla t a $t-1$. Avšak protože $t-1$ nedělí t pro $t - 1 \ge 2$, oba sousedi musí být rovni $t-1$. Označíme-li m druhého souseda jednoho z čísel $t-1$, dostáváme $NSD(t, m) = t - 2$, tudíž $t - 2 | t$ a máme $t = 2$ a $m = 2$. Podobným postupem pokračujeme dále, až nakonec dostaneme desetici čísel 4322343223, jejichž výsledný součet je 28.

Úloha 38. Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s délkou hrany 2. Rovina ρ rovnoběžná s hranami AB a CD procházející středem AC rozřízne $ABCD$ na dva kusy. Najděte povrch jednoho z těchto kusů.

Výsledek. $1 + 2\sqrt{3}$.

Návod. Nejprve si uvědomme, že každá hrana čtyřstěnu (mimo AB a CD) je rozdělena rovinou ρ v polovině, tudíž řez touto rovinou bude čtyřúhelník. Dvě jeho strany budou dokonce rovnoběžné se stranou AB (střední příčky) a dvě rovnoběžné se stranou CD, tudíž řez bude rovnoběžník. Víme ale, že AB a CD jsou na sebe kolmé (vlastnost pravidelného čtyřstěnu), tudíž hledaný řez bude čtverec. Jeho strana je polovinou hrany čtyřstěnu, tedy 1. Tím nacházíme i obsah řezu rovinou ρ, který je taktéž 1. Povrch původního čtyřstěnu je $4\sqrt{3}$, a jelikož oba kusy rozříznutého čtyřstěnu jsou stejné, je původní povrch taktéž dělen na polovinu. Dostáváme tedy výsledný povrch $1 + 2\sqrt{3}$. Pro názornost přidáváme obrázek.



Úloha 39. Všechna políčka tabulky 8×8 vyplníme křížky a kolečky tak, že v každém sloupci i v každém řádku bude lichý počet křížků. Kolika způsoby můžeme tabulku takto vyplnit?

Výsledek. 2^{49}.

Návod. Ukážeme, že vyplnění tabulky je jednoznačně určené vyplněním jejího pravého dolního čtverce 7×7. Potom bude počet všech možností 2^{49}, protože pro každé z těchto políček máme dvě možnosti na vyplnění. Každé tabulce umíme zřejmě přiřadit vyplnění pravého dolního čtverce, takže stačí ukázat, že jeho vyplněním je už zbytek jednoznačně určený.

Máme-li vyplněný pravý dolní čtverec 7×7, symboly v prvním řádku a prvním sloupci kromě levého horního políčka jsou už jednoznačně určené tak, aby byla splněná podmínka parity pro řádky, resp. sloupce. Všimneme si, že kolečka v prvním sloupci (kromě levého horního políčka) jsou v těch řádcích, ve kterých pravý dolní čtverec obsahuje lichý počet křížků. Z toho vyplývá, že v pravém dolním čtverci je lichý počet křížků právě tehdy, když první sloupec (kromě levého horního políčka) obsahuje lichý počet křížků. Stejnou úvahu můžeme udělat i pro první řádek bez prvního políčka, takže parity symbolů v těchto oblastích jsou stejné a tedy symbol v levém horním políčku je tím jednoznačně určený.

Úloha 40. V PraSátkově je 10 měst. Nově zakládaná společnost Čuňas&spol. chce vytvořit letecké linky mezi městy v PraSátkově. Ví však, že vláda hodlá rozdělit PraSátkov na dva státy, oba po pěti městech. Ale bohužel neví, která města budou ve kterém státě. Při rozdělení státu se všechny linky mezi městy z různých států zruší. Poraďte Čuňasům, jaký nejmenší počet linek jim stačí vytvořit, aby po rozdělení PraSátkova mohli cestující s použitím leteckých linek Čuňas&spol. cestovat mezi libovolnými městy v rámci rozdělených států (klidně i s přestupy).

Výsledek. 30.

Návod. Podívejme se nejprve na jedno město, nazvěme ho Kocourkov. Kdyby z Kocourkova vedlo jenom pět linek, pak v rozdělení PraSátkova, při kterém by všech pět měst, kam Čuňasovi z Kocourkova létají, bylo spolu, nelétá žádná linka do Kocourkova (všechny byly zrušeny). Tudíž z každého města musí létat alespoň šest linek. Celkem tedy máme alespoň $\frac{6 \cdot 10}{2} = 30$ linek. Nyní ukážeme, že 30 linek stačí. Uspořádejme si všech 10 měst na kružnici a veďme linky vždy do 6 nejbližších měst (3 po levici, 3 po pravici). Lze snadno nahlédnout, že nelze zvolit pět měst, které nebudou propojeny.

Úloha 41. Mějme tětivový čtyřúhelník $TUVW$, jehož kružnice opsaná má poloměr 5. Délky stran jsou $|TU| = 6$, $|UV| = 7$, $|VW| = 8$. Určete délku poslední strany.

Výsledek. $\sqrt{51}$.

Návod. Nejdůležitější krok důkazu je uvědomit si, že úlohu jde ekvivalentně zformulovat pro tětivový čtyřúhelník $PQRS$ s délkami stran $|PQ| = 7$, $|QR| = 6$ a $|RS| = 8$ (první dvě délky stran jsou zaměněny) a poloměrem kružnice opsané s rovným 5. Důvod je ten, že jsme vlastně jen zobrazili bod U podle osy strany TR na Q a body T, U a W jen přeznačili na P, R a S. Navíc se nám velikost $|TW| = |PS|$ nezměnila. Ve čtyřúhelníku $PQRS$ si už ale všimnu, že průměr s, QR a RS tvoří pravoúhlý trojúhelník o stranách délek 10, 6 a 8, a proto QS je průměr s. Nyní již snadno dopočtu z Pythagorovy věty velikost strany PS: $|PS| = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$.

Úloha 42. Buď S množina všech trojic přirozených čísel (a, b, c), pro něž platí $a + b + c = 17$. Určete

$$\sum_{(i,j,k)\in S} ijk$$

Výsledek. $11628 = \binom{19}{5}$.

Návod. Hledanou sumu budeme kombinatoricky interpretovat. Postavme do řady 19 různých kuliček a snažme se z nich vybrat 5 (bez ohledu na pořadí). Vyberme nejprve tu, která ve vybrané pětici bude druhá zleva a také tu, která bude druhá zprava. Tyto dvě kuličky nám zbylých 17 rozdělí do tří neprázdných (rozmysli si!) úseků. Počty kuliček v těchto úsecích označme (zleva) a,b,c. Zjevně platí $a+b+c = 17$. Nyní zbývá vybrat tu „první“, tu „prostřední“ a tu „poslední“. Na tento výběr máme ovšem ijk možností. Zbývá si uvědomit, že různými volbami první dvojice kuliček získáváme různá řešení rovnice $a+b+c = 17$, přičemž každé řešení získáme právě jednou. Hledaná suma tedy popisuje počet možností, jak vybrat (bez ohledu na pořadí) 5 prvků z 19 a je tím pádem rovna $\binom{19}{5}$.

Úloha 43. Je dán trojúhelník ABC a jeho kružnice vepsaná se středem I. Ta se dotýká strany BC v bodě D. Označme l kružnici nad průměrem AI. Buď Q její druhý průsečík s přímkou BI a P její druhý průsečík s přímkou CI. Víte-li, že $|BI| = 6$, $|CI| = 5$, $|DI| = 3$, určete $\left(\frac{|DP|}{|DQ|}\right)^2$.

Výsledek. $\frac{64}{75}$.

Návod. Předně si označme E, F body dotyku kružnice vepsané postupně se stranami AB, AC a uvědomme si, že tyto body leží na kružnici l. Nyní porovnáme velikosti úhlů $\sphericalangle DFC$ a $\sphericalangle QFA$.

$$|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle DIC| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

Přičemž v první rovnosti jsme využili, že i čtyřúhelník $CDIF$ je tětivový a v druhé dopočet úhlů v $\triangle DIC$. Dále

$$|\sphericalangle QFA| = |\sphericalangle AIQ| = |\sphericalangle BAI| + |\sphericalangle ABI| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

kde jsme v první rovnosti pro změnu využili, že $AIQF$ je tětivový a v druhé jsme dopočítali úhly v $\triangle AIB$. Víme tedy, že $|\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle QFA|$, což znamená, že body F, Q a D leží v přímce. Obdobně odvodíme, že i body D, P a E leží v přímce. Vezměme nyní mocnost bodu D k (tětivovému) čtyřúhelníku $EFPQ$. Získáme

$$|DQ||DF| = |DP||DE| \Leftrightarrow \frac{|DP|}{|DQ|} = \frac{|DF|}{|DE|}.$$

Stačí tedy vypočítat délky úseček DE a DF, což již není těžké. Kupříkladu DF je dvojnásobkem výšky v pravoúhlém trojúhelníku CID, jehož strany dovedeme určit, a tuto výšku tak umíme dopočíst třeba užitím jedné z Euklidových vět. Nakonec vypočteme $\left(\frac{|DP|}{|DQ|}\right)^2 = \frac{64}{75}$.

Úloha 44. Je dána tabulka 3x3, v jejímž levém horním rohu je číslo 1 a v pravém dolním je číslo 2009. Rozhodněte, kolika způsoby lze vyplnit zbylá políčka tak, aby každé číslo dělilo číslo v políčku pod ním i číslo vpravo od něj.

Výsledek. $2448 = 18 \cdot 136$.

Návod. Nejprve rozložíme 2009 jako $7^2 \cdot 41$ a rozmyslíme si, že dělitelnost čísly 7 a 41 je možné řešit zvlášť. Uvažujme nejprve dělitelnost číslem 41. Označme a_i počet výskytů čísla 41 v i-tém sloupci. Požadavek ze zadání zaručí $a_1 \le a_2 \le a_3$ a $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$ pro $i = 1, 2, 3$. A i naopak, každá taková posloupnost (s výjimkou $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$) jednoznačně určuje vyhovující rozmístění čísel 41. Ať už rozborem případů či jinak dojdeme k tomu, že takových posloupností je 18.

Zabývejme se nyní zvlášť dělitelností sedmi a podle hodnoty prostředního políčka, rozlišme tři případy.

(i) Uprostřed je 7^2.

Vpravo a dolů od prostředka budou též násobky 7^2. Zbývá určit, kolika způsoby lze vyplnit zbylá políčka. Zkoumejme dvě nevyplněná políčka v horním řádku. Rozborem možností zjistíme, že mohou být vyplněna 6 způsoby. Obdobně políčka v prvním sloupci mohou být vyplněna 6 způsoby. Navíc jsou tato vyplnění nezávislá, takže celkem máme 36 možností.

(ii) Uprostřed je $1 = 7^0$.

Stejnou úvahou jako v předchozím případě určíme, že možností je 36.

(iii) Uprostřed je 7.

Políčka, která zbývá vyplnit rozdělíme na dvě trojice, jejichž vyplnění bude opět nezávislé. Trojici budou tvořit políčka, která jsou vpravo nahoře (resp. vlevo dole) od prostředka. Na vyplnění jedné z těchto trojic je 8 možností. Takže celkem je možností 64.

Máme tedy $64 + 2 \cdot 36 = 136$ možností, jak vyplnit do tabulky mocniny čísla 7 a 18 možností, jak vyplnit mocniny čísla 41. Znovu si rozmyslíme, že tato vyplnění jsou nezávislá a zkonstatujeme, že celkový možný počet vyplnění je $18 \cdot 136 = 2448$ možností.