Úloha 1. Kvádr s délkami hran 1, a, $2a$ má povrch 54. Najděte hodnotu čísla a.

Výsledek. 3.

Návod. Povrch kvádru s hranami délek x, y, z je $P = 2xy + 2xz + 2zy$. Po dosazení $54 = 2a + 4a^2 + 4a$ můžeme ještě zkrátit dvojkou a dostaneme kvadratickou rovnici $2a^2 + 3a - 27 = 0$. Ta má dvě řešení: 3 a $-9/2$. Jelikož a je hrana, tedy kladné číslo, je jediná možnost, a to $a = 3$.

Úloha 2. Pomocí právě tří osmiček a libovolných ze symbolů $+$, $-$, $*$, $/$, $\sqrt{\ }$ vytvořte číslo 3. Jeden symbol můžete použít i víckrát.

Výsledek. $\sqrt{8 + 8/8} = 3$.

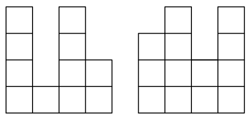
Návod. Prostě se to musí uvidět.

Úloha 3. Vejtek měl knihu z teorie množin, jejíž listy byly číslované postupně 0, 1, 2, 3, ... Afro mu z ní jeden list vytrhnul. Teď je součet čísel na zbylých listech 2010. List se kterým číslem Afro vytrhnul?

Výsledek. List s číslem 6.

Návod. Počet listů si označíme n. Kdyby byly všechny, je jejich součet roven $n(n+1)/2$ (jde o aritmetickou posloupnost). Číslo chybějícího listu označíme p, takže $2010+p = n(n+1)/2$. Rovnost můžeme přenásobit dvojkou a odhadnout: $4020 = n^2 + n - 2p \leq (n+1)^2$ (ze zadání víme $1 \leq p \leq n$). Hledáme tedy nejmenší celé n, pro které $(n+1)^2 \geq 4020$. Dostaneme $n = 63$ a pro toto n dopočteme $p = 6$. Kdyby n bylo 64 a víc, vyjde nám $p > n$, což zjevně nesplňuje zadání.

Úloha 4. Alča postavila stavbu z několika jednotkových kostek, které se vejdou do větší kostky rozměrů $4 \times 4 \times 4$. Pepovi však nakreslila jen pohledy postupně z jihu a z východu. Najděte největší a nejmenší počet kostek, ze kterých může být stavba postavená, pokud máte stejně jako Pepa k dispozici pouze tento obrázek.



Výsledek. Nejméně 14 kostek, nejvíce 38.

Návod. Když se podíváme na stavbu shora, vidíme následující tabulku:

				4
				2
				4
				3
4	1	4	2	

Čísla vedle řádků, resp. sloupců znamenají největší počet kostek na jednom políčku v daném řádku, resp. sloupci. Chceme-li, aby stavba obsahovala co nejvíce kostek, postavíme na každé políčko největší přípustný počet kostek, tj. menší ze zadaných maxim v daném řádku a sloupci. Výsledná tabulka vypadá takto:

4	1	4	2	4
2	1	2	2	2
4	1	4	2	4
3	1	3	2	3
4	1	4	2	

Hledaný největší počet kostek je součet všech čísel v tabulce, tedy 38.

Nyní najdeme nejmenší možný počet použitých kostek. Všimneme si, že podmínky pro maxima vynucují, aby bylo alespoň jedno políčko s právě jednou kostkou, alespoň jedno se dvěma kostkami, jedno se třemi a dvě se čtyřmi – vždy tedy musíme použít alespoň 14 kostek. Snadno však kostky rozestavíme tak, aby jich nebylo více než tento dolní odhad, např. takto:

0	1	4	0	4
0	0	0	2	2
4	0	0	0	4
0	0	3	0	3
4	1	4	2	

Nejméně tedy může být na stavbu použito 14 kostek.

Úloha 5. Blecha skáče po mřížových bodech čtverečkové sítě. Každým skokem se dostane o jeden mřížový bod výš, níž, doprava nebo doleva. Začne skákat z bodu $(0, 0)$. Do kolika mřížových bodů se může dostat přesně po deseti skocích?

Výsledek. 121.

Návod. Na začátku je součet bleších souřadnic sudý. Každým skokem se změní parita (zda je sudý nebo lichý) součtu – jedna souřadnice zůstane stejná, ke druhé se přičte nebo odečte 1, takže po 10 skocích bude součet opět sudý. Pro mřížový bod (a, b) vezmeme jeho „bleší vzdálenost“ od počátku jako $|a| + |b|$. Blecha se určitě nedostane na body vzdálenější než 10. Na všechny body do vzdálenosti 10 s oběma lichými/oběma sudými souřadnicemi se navíc dostat umí. Třeba tak, že si napřed doskáče doprava/doleva kam až potřebuje, potom nahoru/dolů tak daleko, aby se dostala do kýženého bodu, a případné zbylé skoky proskáče mezi ním a nějakým sousedním. Zbývá body sečíst. Tedy v bleší vzdálenosti 2 je $4 \cdot 2$ bodů, ve vzdálenosti 4 je $4 \cdot 4$ bodů, ..., ve vzdálenosti 10 je $4 \cdot 10$ a počátek je jeden.

Úloha 6. Kolik existuje tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 20\}$ takových, že součin jejich prvků je dělitelný čtyřmi?

Výsledek. 795.

Návod. Spočtěme naopak počet trojic, jejichž součin není dělitelný čtyřmi. Ten je buď lichý (takových možností je $\binom{10}{3} = 120$), nebo je sudý, ale nedělitelný čtyřmi, tedy vznikl jako součin dvou lichých čísel (ta můžeme vybrat $\binom{10}{2} = 45$ způsoby) a jednoho čísla z množiny $\{2, 6, 10, 14, 18\}$, neboli sudého a nedělitelného čtyřmi. Toto číslo můžeme vybrat $\binom{5}{1} = 5$ způsoby. Dohromady $120 + 45 \cdot 5 = 345$ trojic má součin nedělitelný 4, všech trojic je $\binom{20}{3} = 1140$, a tedy těch se součinem dělitelným 4 je $1140 - 345 = 795$.

Úloha 7. V aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_{47}$ je součet členů s lichými indexy rovný 1272. Zjistěte součet všech členů této posloupnosti.

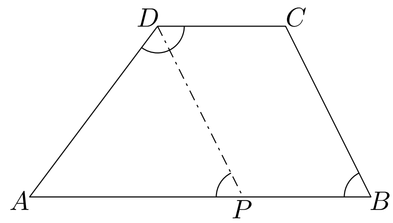
Výsledek. 2491.

Návod. Vyjádříme si každý člen posloupnosti pomocí členu a_{24} a diference d. Máme $a_1 = a_{24} - 23d$, $a_2 = a_{24} - 22d, \ldots, a_{47} = a_{24} + 23d$. Nyní vidíme, že součet všech členů s lichými indexy je $24 \cdot a_{24} = 1272$, protože diference se odečtou. Obdobně pro součet všech členů dostáváme $47 \cdot a_{24}$, což po dosazení dává výsledek $\frac{1272}{24} \cdot 47 = 2491$.

Úloha 8. V lichoběžníku $ABCD$ (se základnami AB a CD) platí $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Dále víme, že $|CD| = 3$ cm a $|DA| = 5$ cm. Zjistěte velikost úsečky AB.

Výsledek. 8 cm.

Návod. V lichoběžníku vyznačme osu úhlu $\sphericalangle CDA$ a označme P její průsečík se stranou AB:



Protože $|\sphericalangle CDP| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle PBC|$, je $PBCD$ rovnoběžník a $|PB| = |CD| = 3$ cm. Dále díky rovnosti $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle ADP|$ je trojúhelník APD rovnoramenný (se základnou PD), a tedy $|AP| = |AD| = 5$ cm. Hledanou velikost zjistíme jako $|AB| = |AP| + |PB| = 8$ cm.

Úloha 9. Tři planety K, A a G obíhají kolem hvězdy N po soustředných kružnicových dráhách (společný střed kružnic je hvězda N). Pohybují se konstantní rychlostí a mají různé periody oběhu: 60, 84 a 140 roků. Jednou se stalo, že tyto tři planety spolu s hvězdou N ležely na jedné přímce. Kolik nejméně roků musí uplynout, aby K, A, G a N znovu ležely na jedné přímce?

Výsledek. 105 roků.

Návod. Podívejme se nejprve, kdy budou hvězdy K a A znova ležet s N na jedné přímce. Bude to tehdy, když (rychlejší) hvězda K oběhne o polovinu dráhy více než hvězda A, neboli pro počet oběhů x hvězdy A musí platit $60(x + 1/2) = 84x$, z čehož jednoduše plyne $x = 5/4$. Tutéž myšlenku provedeme pro hvězdy A a G, kde y označíme počet oběhů hvězdy A za dobu, než se A, G a N znova srovnají do přímky. Dostaneme rovnici $84y = 140(y - 1/2)$ a řešení $y = 5/4$. Jelikož $x = y = 5/4$, tak za dobu, kdy hvězda A oběhne celkem $5/4$ své dráhy, což je 105 roků, budou všechny hvězdy opět na jedné přímce.

Úloha 10. Monča se v jednom svém snu ocitla v jedné zapadlé rovině. Nacházela se v bodě se souřadnicemi $[-30, 11]$ a vydala sa po přímce až do bodu $[9, -40]$. Kolik mřížových bodů (mřížový bod je takový, který má obě souřadnice celočíselné) cestou navštívila? Započítejte i počáteční a koncový bod.

Výsledek. 4.

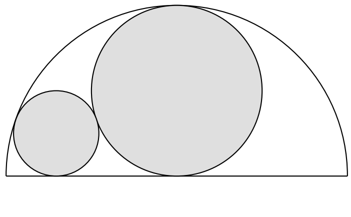
Návod. Nejprve si Mončinu rovinu posuneme tak, aby bod $[-30, 11]$ odpovídal bodu $[0, 0]$. Potom bod $[9, -40]$ odpovídá bodu $[39, -51]$. Pokud by Monča po cestě kromě počátečního a koncového bodu potkala právě k mřížových bodů, ty by dělily cestu na $k + 1$ stejně dlouhých úseků, a Monča by po cestě potkala celkem $k + 2$ mřížových bodů (počítáno i s krajními), tedy $k + 1$ musí dělit obě hodnoty 39 i 51. Protože největší společný dělitel čísel 51 a 39 je roven třem, Monča po cestě potká právě 4 mřížové body.

Úloha 11. Miloš má svoje oblíbené přirozené číslo. Víme, že je to nejmenší přirozené číslo m takové, že čísla m, $m + 1$ mají obě ciferný součet dělitelný číslem 14. Najděte Milošovo oblíbené číslo.

Výsledek. 5 899 999 999 999.

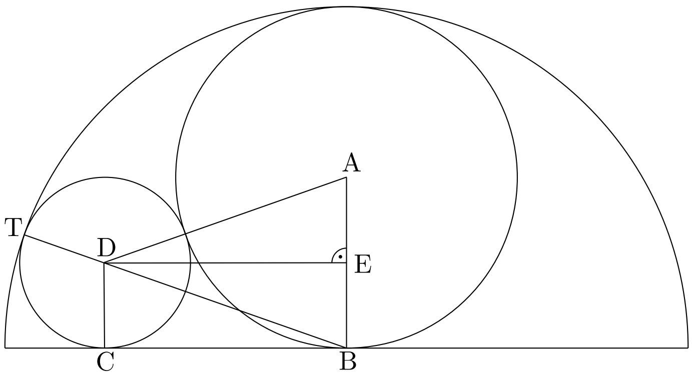
Návod. Pozorujeme, že pokud právě k posledních cifer čísla jsou samé devítky, ciferný součet se přičtením jedničky zmenší o $9k - 1$. Aby ciferné součty původního i nově vzniklého čísla byly oba dělitelné 14, musí být i jejich rozdíl dělitelný 14. Tedy musí platit $9k - 1 = 14n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Snadno zjistíme, že nejmenší k, pro které rovnost platí, je $k = 11$, a proto hledané číslo končí právě k devítkami. Nyní už stačí doplnit před našich k devítek několik cifer tak, aby ciferný součet našeho čísla byl dělitelný 14 a aby číslo bylo co nejmenší. Tomuto odpovídají cifry 5 a 8 (4 a 9 to být nemohou, protože jinak by číslo nekončilo na právě 11 devítek). Nejmenší takové přirozené číslo je tedy číslo 5899999999999.

Úloha 12. Mějme půlkruh s poloměrem 1. Do něho vepíšeme největší kruh, jaký se vejde, a vybarvíme ho šedě. Potom do nešedého zbytku půlkruhu vepíšeme největší kruh, jaký se vejde, tak, aby průnik s šedým kruhem byl nanejvýš jednobodový. Jaký poloměr má malý kruh?



Výsledek. 1/4.

Návod. Body si označíme jako na obrázku. B je střed půlkruhu, A střed šedého kruhu, D střed malého kruhu, C je jeho bod dotyku s poloměrem půlkruhu, T je bod dotyku půlkruhu a malého kruhu a E je pata kolmice z D na AB.



Poloměr šedého kruhu označíme $r = |AB| = 1/2$, poloměr malého kruhu bude $d = |DC|$. Víme: $|EB| = |CD|$, $|AD| = r+d$, $|AE| = r-d$, $|BD| = |BT| - |TD| = 1-d$. Trojúhelník ADE je pravoúhlý (s pravým úhlem u E), tedy z Pythagorovy věty platí: $|AD|^2 = |DE|^2 + |AE|^2$. Trojúhelník DEB je rovněž pravoúhlý (s pravým úhlem u E), takže podle Pythagorovy věty: $|BD|^2 = |DE|^2 + |EB|^2$. Dosazením do druhé rovnice dostáváme: $(1-d)^2 = |BD|^2 = |DE|^2 + |EB|^2 = |AD|^2 - |AE|^2 + |EB|^2 = (r+d)^2 - (r-d)^2 + d^2$. Po roznásobení: $1 - 2d + d^2 = r^2 + 2dr + d^2 - r^2 + 2dr - d^2 + d^2$ a po odečtení: $1 - 2d = 4dr$. Poloměr r známe $(1/2)$, tedy $4d = 1$, $d = 1/4$.

Úloha 13. Kolika způsoby můžeme z 12 různých hráčů sestavit tři týmy po čtyřech hráčích?

Výsledek. $\binom{12}{4}\binom{8}{4}/3! = 5775$.

Návod. Do prvního týmu vybereme hráče $\binom{12}{4}$ způsoby. Do druhého pak vybíráme ze zbylých 8 hráčů, tedy $\binom{8}{4}$ způsobů. Zbylí hráči budou ve třetím týmu. Protože týmy jsou od sebe nerozlišitelné, musíme celkový výsledek vydělit číslem 3!.

$$\frac{\binom{12}{4} \cdot \binom{8}{4}}{3!} = 5775.$$

Úloha 14. Vyčíslete výraz $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 2009^2 - 2010^2$.

Výsledek. $-2\,021\,055 = -2010 \cdot 2011/2$.

Návod. Označme S hledaný součet. Členy řady „chytře“ uzávorkujeme a použijeme vzorec pro rozdíl druhých mocnin:

$$S = \left(1^2 - 2^2\right) + \left(3^2 - 4^2\right) + \cdots + \left(2009^2 - 2010^2\right).$$

$$S = (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \cdots + (2009-2010)(2009+2010).$$

Je patrné, že všechny závorky obsahující rozdíl mají hodnotu -1. Dostáváme tedy

$$S = -(1+2) - (3+4) - \cdots - (2009+2010) = -(1+2+3+4+\cdots+2009+2010),$$

což už snadno vyčíslíme dosazením do známého vzorce $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

Úloha 15. Auto jede z kopce rychlostí 72 km/h, po rovině rychlostí 63 km/h a do kopce rychlostí 56 km/h. Cesta z města A do města B trvá 4 hodiny. Zpáteční cesta trvá 4 hodiny a 40 minut. Jaká je vzdálenost po cestě mezi městy A a B?

Výsledek. 273 km.

Návod. Označme s_1, s_2 resp. s_3 vzdálenosti, které je při cestě z A do B potřeba ujet z kopce, po rovině resp. do kopce. Při cestě zpět bude z kopce to, co bylo cestou tam do kopce a naopak, takže platí

$$\frac{s_1}{72} + \frac{s_2}{63} + \frac{s_3}{56} = 4$$

a

$$\frac{s_1}{56} + \frac{s_2}{63} + \frac{s_3}{72} = \frac{14}{3}.$$

Sečtením obdržíme

$$\frac{26}{3} = s_1\frac{7+9}{7\cdot 8\cdot 9} + s_2\frac{8+8}{7\cdot 8\cdot 9} + s_3\frac{9+7}{7\cdot 8\cdot 9} = (s_1+s_2+s_3)\frac{2}{63},$$

takže hledaná vzdálenost je $13\cdot 21 = 273$ km.

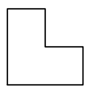
Úloha 16. Na matfyzu máme podivný bankomat. Když k němu Honzík naposledy přišel, byla v něm hotovost 500 korun v korunových mincích a nic jiného. Z bankomatu se dá buď vybrat přesně 300 korun (za předpokladu, že v něm alespoň taková hotovost je) nebo do něj vložit přesně 198 korun. Jakou největší hotovost si mohl Honzík vybrat, pokud u sebe na začátku neměl ani korunu? (Mohl vkládat a vybírat kolikrát chtěl a v libovolném pořadí.)

Výsledek. 498 korun.

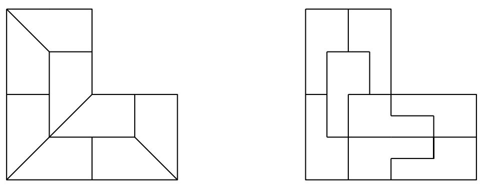
Návod. Předpokládejme, že během prvních několika kroků (krokem míníme buď vybrání hotovosti z bankomatu nebo její vložení) Honzík celkem m-krát vybral z bankomatu 300 korun a celkem n-krát vložil 198 korun. Potom částka, kterou u sebe nakonec měl, byla rovna $300m - 198n$ korunám. Protože 6 je (největším) společným dělitelem čísel 198 a 300, musela být Honzíkova hotovost v každém okamžiku dělitelná šesti, a tedy nemohla přesáhnout 498 korun.

Ukážeme, že vybrání částky 498 korun bylo možné. Je snadné si uvědomit, že v každém okamžiku mohl Honzík z bankomatu buď vybrat nebo do něj vložit, přičemž obě možnosti přicházely v úvahu jen tehdy, když u sebe měl 198 korun. Předpokládejme, že Honzík při vybírání postupoval tak, že pokud u sebe měl 198 korun, vybral z bankomatu dalších 300, a ve zbylých případech dělal to, co musel (a pokud měl 498, tak skončil). Nyní si stačí uvědomit (rozmysli si), že během každých pěti po sobě následujících kroků se Honzíkova hotovost zvýšila o šest korun (dvakrát vybral a třikrát vložil), takže se tímto algoritmem postupně dostal až na kýžených 498 korun.

Úloha 17. Slepíme tři stejně velké čtverce do tvaru L. Rozdělte tento útvar na osm shodných útvarů.



Výsledek.



Návod. Možností je víc.

Úloha 18. Olin dostal na Velikonoce šachovnici 8×8 bez pravého horního a levého dolního rohového políčka. Kolika způsoby na ni může postavit osm veží tak, aby se navzájem neohrožovaly?

Výsledek. $30960 = 5040 + 25920 = 7! + 36\cdot 6!$.

Návod. Aby se věže navzájem neohrožovaly, musí mít každá svůj vlastní sloupec a vlastní řádek (v žádném sloupci či řádku nemohou stát dvě věže). Jelikož je věží osm a šachovnice má pouze osm řádků a osm sloupců, bude v každém řádku a v každém sloupci právě jedna věž. Budeme rozestavovat věže do řádků, přičemž přednostně zaplníme krajní (neúplné) řádky.

Umístíme-li věž v horním řádku do políčka nejvíc vlevo, můžeme v dolním řádku umístit věž do kteréhokoliv políčka – políčko zcela nalevo, které ohrožuje první umístěná věž, na naší šachovnici chybí. Tuto věž tedy můžeme umístit sedmi způsoby. Zbývajících šest věží pak umístíme následovně: v druhém řádku (je jedno, jestli druhý odshora, nebo odspodu) můžeme věž umístit na libovolné z šesti políček (dvě jsou ohrožena již umístěnými věžemi), ve třetím pak vybíráme z pěti políček (tři jsou ohrožena) atd. atd., až poslední věž můžeme umístit pouze na jediné neohrožené políčko. Celkem tedy $7\cdot 6\cdot 5\cdot\ldots\cdot 1 = 7! = 5040$ způsobů.

V druhém případě umístíme věž v horním řádku na kterékoliv políčko, jen ne na to nejvíc vlevo (takovýchto políček je šest, jelikož v tomto řádku ještě chybí to nejvíc napravo). Potom můžeme umístit věž ve spodním řádku pouze šesti způsoby, protože ze sedmi políček v tomto řádku je již jedno ohrožené věží nahoře. Zbývajících šest věží umístíme stejně jako v předchozím případě, celkem je tedy v tomto případě $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1 = 36 \cdot 6! = 25920$ způsobů rozmístění.

Shrnutím obou alternativ dostáváme celkový počet způsobů rozmístění věží jako $5040+25920 = 30960$.

Úloha 19. Kvadratická rovnice $x^2 - mx + 2 = 0$ s parametrem m má kořeny a, b. Předpokládejme, že

$$a + \frac{1}{b}, \quad b + \frac{1}{a}$$

jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2 - px + q = 0$. Určete hodnotu q (v závislosti na m).

Výsledek. $9/2$.

Návod. Má-li kvadratická rovnice $x^2 - mx + 2 = 0$ kořeny a a b, potom platí $(x-a)(x-b) = 0$, tedy $x^2 - (a+b)x + ab = 0$. Takže $ab = 2$ a $a + b = m$. Má-li kvadratická rovnice $x^2 - px + q = 0$ kořeny $a + 1/b$ a $b + 1/a$, potom platí $(x - (a + 1/b))(x - (b + 1/a)) = 0$. Tedy $q = (a + 1/b)(b + 1/a) = ab + 2 + 1/(ab)$. Tedy $q = 9/2$.

Úloha 20. Vejtek si vymyslel čtyři kladná, ne nutně celá čísla a, b, c a d. Potom má šest možností, jak vynásobit právě dvě z nich, konkrétně ab, ac, ad, bc, bd a cd. Frantovi ale Vejtek řekl pouze pět z těchto šesti součinů, konkrétně 2, 3, 4, 5 a 6. Pomozte Frantovi najít šestý součin.

Výsledek. $12/5$.

Návod. Všimneme si, že součin $abcd$ lze dostat násobením čísel ab, ac, ad, bc, bd a cd třemi různými způsoby. Pokud postupně násobíme dvojice z čísel 2, 3, 4, 5 a 6, jediné číslo, které se nám vyskytne dvakrát je $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Proto poslední hledaný součin je $12/5$.

Úloha 21. V klobouku kouzelníka Pokustóna se krčí 8 černých a 4 bílí králíci. Náhodně z klobouku vytáhneme 6 králíků. Jaká je pravděpodobnost, že poslední vytažený králík bude černý?

Výsledek. $2/3$.

Návod. Uvažme všechna možná pořadí všech dvanácti králíků (králíky stejné barvy nerozlišujeme). Každé z nich má stejnou pravděpodobnost, že právě tak budeme králíky z klobouku tahat (rozmyslete si!). Počet pořadí v nichž je na šestém místě černý králík, je stejný jako počet těch, v nichž je na prvním místě černý králík (stačí ono pořadí posunout o 5 pozic). Hledaná pravděpodobnost je tedy stejná jako ta, že první vytažený králík bude černé barvy, čili $2/3$.

Úloha 22. Jaký zbytek dostaneme při dělení čísla $1^1 + 2^2 + \cdots + 2010^{2010}$ dvanácti?

Výsledek. 1.

Návod. Zvlášť určíme zbytek po dělení třemi a čtyřmi. Sudá čísla vždy umocňujeme alespoň na druhou a získáváme tak čísla dělitelná čtyřmi. Pro lichá čísla platí, že jejich zbytek po dělení čtyřmi se zachová, pokud je umocňujeme na liché číslo. To ověříme například roznásobením $(4n \pm 1)^{2k+1}$ pomocí binomické věty. Tyto zbytky jsou střídavě 1 a 3, přičemž poslední je 1 (od čísla 2009^{2009}), a zbytek zadaného čísla po dělení čtyřmi je pak 1. Podobným použitím binomické věty zjistíme, že čísla tvaru $(3k \pm 1)$ umocněná na n dávají po dělení třemi zbytek 1, pokud n je sudé, a svůj původní zbytek, pokud n je liché. Zbytky po dělení třemi se tedy periodicky opakují: $1, 1, 0, 1, 2, 0 \ldots.$ Tyto zbytky nyní sečteme a vyjde, že zbytek po dělení třemi je 1. Tím je zbytek po dělení dvanácti již určen jednoznačně a je to též 1.

Úloha 23. Kája má kus dřevěné desky tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka se stranami délky 1, 1 a $\sqrt{2}$. Chce ho rozříznout jedním řezem na dva kusy se stejným obsahem. Poraďte Káje, kudy vést nejkratší řez (tj. úsečku), a určete jeho délku.

Výsledek. $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Návod. Jednoduše spočteme obsah desky, $S = 1/2$, tedy obsahy obou částí budou $1/4$. Dále rozebereme dvě možnosti. Buď uřízneme trojúhelník T_1, který bude mít jeden vrchol při úhlu $45°$, nebo trojúhelník

T_2 s jedním vrcholem při pravém úhlu. Označíme-li strany trojúhelníka T_1 při úhlu 45° hodnotami a a b a třetí stranu c, pak platí

$$\frac{1}{4} = S_{T_1} = \frac{ab}{2}\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}ab \quad \Rightarrow \quad ab = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

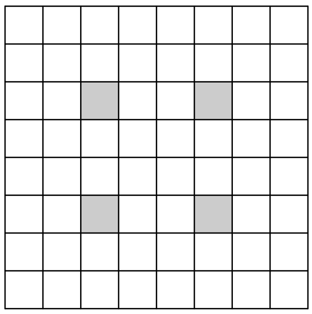
Podle Kosinové věty a AG-nerovnosti dále platí

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 45^\circ = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \geq 2ab - \sqrt{2}ab = \sqrt{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad c \geq \sqrt{\sqrt{2} - 1}.$$

Jelikož však pro $a = b$ nastává rovnost, umíme dosáhnout řezu s $c = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Ve druhém případě pro T_2 postupujeme obdobně, vychází postupně $ab = 1/2$ a $c = 1$. Nyní stačí vybrat menší z těchto dvou čísel, což je $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Úloha 24. Která políčka můžeme ze šachovnice 8×8 vystřihnout, aby se zbytek dal pokrýt 21 kostičkami tvaru 3×1?

Výsledek.



Návod. Políčka na šachovnici rozdělíme do tří skupin, tak jako na obrázku.

1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1
3	2	1	3	2	1	3	2
1	3	2	1	3	2	1	3
2	1	3	2	1	3	2	1

Všimněte si, že každá kostička zaplní právě jedno políčko od každé skupiny. Políček značených číslem 1 je o jedno více než ostatních, takže vystřihnout musíme jedno takové políčko. Nyní políčka rozdělíme do tří skupin ještě druhým způsobem, a to osově symetricky s prvním rozdělením. V jedné skupině bude opět o políčko více a výběr políček na vystřihnutí se nám zúží na pouhá čtyři políčka. Sami jistě ukážete, že při vystřižení libovolného z nich již lze šachovnici našimi kostičkami pokrýt a úloha je tím pak vyřešena.

Úloha 25. Šavlík s Pepou hrají následující hru. Mají hromádku s n zápalkami a střídají se v tazích. Každý musí ve svém tahu odebrat z hromádky kladný počet zápalek nepřevyšující polovinu zápalek na hromádce. Ten, kdo bude mít na začátku svého tahu jen jednu zápalku (a tedy nebude moci provést svůj tah), vyhraje. Když víte, že Šavlík začíná, najděte n nejblíže k číslu 2010 takové, že Pepa může vyhrát (bez ohledu na to, jak dobře hraje Šavlík).

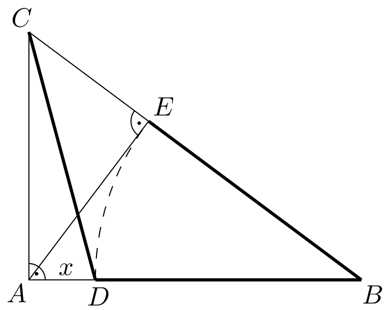
Výsledek. 1535.

Návod. Pozici nazveme vyhrávající, když existuje vyhrávající strategie pro hráče, který je na tahu. Ostatní pozice jsou prohrávající. Hledáme tedy prohrávající pozici nejblíže číslu 2010. Pokud máme nějakou prohrávající pozici k, pak $k+1$ až $2k$ jsou vyhrávající – lze jedním tahem dostat protivníka do prohrávající pozice k. Naopak $2k+1$ je prohrávající, protože všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic. Máme tedy posloupnost prohrávajících pozic definovanou rekurentně jako $k_{n+1} = 2k_n + 1$ a víme, že první prohrávající pozice je $2 = k_1$. Snadno dopočítáme, že $k_{10} = 1535$ a $k_{11} = 3071$. Výsledek je tedy 1535.

Úloha 26. Trojúhelník ABC má pravý úhel u vrcholu A. Na straně AB se nachází bod D, přičemž $|CD| = 1$. Dále AE je výška z bodu A na stranu BC. Najděte délku AD, pokud navíc víte, že $|BD| = |BE| = 1$.

Výsledek. $\sqrt[3]{2} - 1$

Návod.



Označme hledanou délku $|AD| = x$. Z Pythagorových vět pro trojúhelníky ABC a ADC vyjádříme $|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 = (1+x)^2 + 1^2 - x^2 = 2 + 2x$. Z podobných trojúhelníků ABE, CBA plyne rovnost poměrů

$$\frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|CB|}{|BA|},$$

ve které všechny vzdálenosti umíme vyjádřit pomocí x. Po úpravě (mimo jiné krácení nenulovým výrazem $x+1$) vyjde $2 = (x+1)^3$, tedy $x = \sqrt[3]{2} - 1$.

Úloha 27. Množina X má n prvků. Nechť A, B jsou dvě náhodné podmnožiny X. Jaká je pravděpodobnost, že A je podmnožina B? Upřesnění: Při náhodném výběru podmnožiny X vybereme každou z 2^n podmnožin se stejnou pravděpodobností (rovnou $1/2^n$). Výběry podmnožin A a B jsou navzájem nezávislé.

Výsledek. $(3/4)^n$.

Návod. Vezměme si jeden prvek $x \in X$. Pro něj máme čtyři možnosti. Buď $(x \in A,\ x \in B)$, nebo $(x \in A,\ x \notin B)$, nebo $(x \notin A,\ x \in B)$, nebo $(x \notin A,\ x \notin B)$. Aby platila inkluze $A \subset B$, nesmí pro žádný prvek $x \in X$ nastat možnost $(x \in A,\ x \notin B)$, čemuž odpovídá pravděpodobnost $3/4$. Tato pravděpodobnost je nezávislá pro všechny prvky $x \in X$, proto výsledek $(3/4)^n$.

Úloha 28. Najděte největší přirozené číslo m takové, že rovnice $2009x + 2011y = m$ má právě jedno řešení v přirozených číslec(tj. v číslech $1, 2, 3, \dots$).

Výsledek. $8\,080\,198 = 2 \cdot 2009 \cdot 2011$.

Návod. Předpokládejme, že jsme pro dané m našli nějaká x a y, která jsou řešením rovnice. Pokud je $x > 2011$, pak také dvojice $x - 2011$, $y + 2009$ je řešením. Obdobně pokud $y > 2009$ tak i $x + 2011$, $y - 2009$ je řešením rovnice. Nyní si stačí rozmyslet, že pro $m = 2009 \cdot 2011 + 2011 \cdot 2009$ má rovnice jen jedno řešení díky tomu, že $\mathrm{NSN}(2009, 2011) = 2009 \cdot 2011$.

Úloha 29. Najděte alespoň jedno reálné číslo x, pro které platí

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} = x.$$

Výsledek. $(\sqrt{5}+1)/2$.

Návod. Předpokládejme, že reálné číslo x splňuje $\sqrt{1+x}=x$. Potom

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}=\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+x}=x,$$

a tedy x je řešením naší úlohy. Pro nezáporné x lze rovnost $\sqrt{1+x}=x$ ekvivalentně přepsat jako $x+1=x^2$. Tato rovnice má nezáporné řešení $(\sqrt{5}+1)/2$, které je tedy i řešením původní úlohy.

Úloha 30. Najděte všechny dvojice (a,b) přirozených čísel takové, že $a+b$ má (v desítkové soustavě) na místě jednotek cifru 3, $a-b$ je prvočíslo a ab je druhou mocninou přirozeného čísla.

Výsledek. $(9,4)$.

Návod. Pokud mají čísla a, b společného dělitele většího než 1, pak vzhledem k tomu, že $a-b=p$ pro nějaké prvočíslo p, je tímto dělitelem právě ono prvočíslo. Pak ale musí platit $a=(k+1)p$ a $b=kp$ pro nějaké $k\in\mathbb{N}$. Dle zadání je $ab=(k+1)kp^2$ druhou mocninou přirozeného čísla, tedy rovněž $(k+1)k$ je druhou mocninou přirozeného čísla. Protože čísla k, $k+1$ jsou nesoudělná, musí být čtvercem přirozeného čísla každé z nich, což vede ke sporu.

Předpokládejme nyní, že a, b jsou nesoudělná čísla. Jelikož jejich součin je čtverec, musí být $a=n^2$, $b=m^2$ pro nějaká přirozená čísla m, n. Máme $a-b=(n+m)(n-m)=p$, což vzhledem k tomu, že p je prvočíslo, dává $n+m=p$, $n-m=1$. Odtud dostáváme $n=\frac{p+1}{2}$, $m=\frac{p-1}{2}$. Tedy

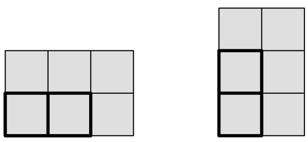
$$a+b=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}(p^2+1)\equiv 3 \pmod{10},$$

což dává $p^2\equiv 5 \pmod{10}$. Pak ale 5 dělí p, a protože p je prvočíslo, musí být $p=5$. Dosazením do vztahů pro a, b získáme jediné řešení úlohy, a to dvojici $(a,b)=(9,4)$.

Úloha 31. Na šachovnici $n\times n$ je rozmístěných 1005 dominových kostiček tak, že každá z nich zakrývá dvě políčka šachovnice sousedící stranou. Žádné dvě dominové kostičky se nepřekrývají ani nedotýkají (a to ani rohem). Najděte nejmenší možné n, pro které to může platit.

Výsledek. 77.

Návod. Rozšiřme si šachovnici na rozměr $(n+1)\times(n+1)$ přidáním jednoho sloupce vpravo a jednoho řádku nahoru. Každé dominové kostičce přiřadíme její *stín* jako na obrázku (stín je tedy obdélník 2×3 resp. 3×2).



Podmínka ze zadání nyní říká právě to, že žádným dvěma kostičkám se nesmějí překrývat stíny (dotýkat se mohou). Navíc díky přidanému sloupci a řádku zůstane celý stín každé kostičky na šachovnici. Každý stín pokrývá 6 políček, takže musí být $(n+1)^2\geq 6\cdot 1005$. Nejmenší přirozené n, které toto splňuje, je $n=77$.

Ukážeme nyní, že $n=77$ skutečně vyhovuje. Umístíme kostky do lichých sloupců (těch je 39). Do každého sloupce se vejde až 26 kostiček, což dává dohromady dokonce $39\cdot 26=1014$ kostiček.

Úloha 32. Nechť $n=p_1p_2\dots p_k$ je rozklad čísla n na prvočísla, ne nutně různá. Číslo n nazveme *zelené*, pokud n dělí $(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_k+1)$. Nalezněte nejmenší *zelené* číslo větší než 100.

Výsledek. 144.

Návod. Ukážeme, že mezi prvočísly mohou být jen 2 a 3. Vezměme si tedy zelené číslo n a největší prvočíslo p_k, které ho dělí. Pak p_k dělí jednu ze závorek $(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_k+1)$. Poslední závorku p_k jistě nedělí a ostatní závorky jsou pro $p_k>3$ ostře menší než p_k, takže jím nemůžou být dělitelné. V úvahu tedy připadají pouze čísla tvaru $2^m 3^l$, přičemž abychom splnili podmínku ze zadání, musí platit $l \le m \le 2l$. Nejmenší takové číslo větší než 100 je $144 = 2^4 3^2$.

Úloha 33. Pro každou uspořádanou dvojici přirozených čísel (m, n) definujeme hodnotu $f(m, n)$. Víme, že pro všechna m, n přirozená platí

$$f(1,1) = 1, \quad f(m+1, n) = f(m, n) + m, \quad f(m, n+1) = f(m, n) - n.$$

Najděte všechna přirozená čísla p, pro která existuje přirozené číslo q takové, že platí $f(p, q) = 2010$.

Výsledek. $2010, 1006, 291, 151, 70, 66$.

Návod. Postupným zvětšováním m a n dostaneme jednoznačný tvar funkce splňující dané podmínky, a to

$$f(m, n) = 1 + (1 + 2 + \cdots + (m-1)) - (1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 1 + \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Po dosazení $f(p, q) = 2010$ nám stačí zjistit, pro která přirozená p, q platí vztah (po úpravě) $2 \cdot 7^2 \cdot 41 = 2 \cdot 2009 = p(p-1) - q(q-1) = (p-q)(p+q-1)$. Jelikož však $p + q - 1 > p - q$, stačí nám najít všechna přirozená $k < \sqrt{4018}$ dělící 4018, pro která má soustava $p - q = k$ a $p + q - 1 = 4018/k$ řešení v přirozených číslech. Sečtením obdržíme $p = (k + 4018/k + 1)/2$, což je přirozené číslo vždy, neboť čitatel je sudý. Analogicky vyjde i q přirozené. Nyní již rutinně pro $k = 1, 2, 7, 14, 41, 49$ dosadíme a dostaneme $p \in \{2010, 1006, 291, 151, 70, 66\}$.

Úloha 34. Na univerzitě je s studentů. Ví se, že každý učitel učí právě k studentů a pro každou dvojici (různých) studentů existuje právě m učitelů, kteří je učí oba dva. Kolik učitelů je na univerzitě?

Výsledek. $u = ms(s-1)/k(k-1)$.

Návod. Řekneme, že trojice učitel–student–student tvoří *tým*, pokud učitel oba studenty učí. Označme počet týmů na univerzitě X a spočtěme X dvěma způsoby. Na jednu stranu každý z u učitelů učí $k(k-1)/2$ dvojic studentů, takže $X = u \cdot k(k-1)/2$. Na druhou stranu existuje pro každou dvojici studentů (jichž je $s(s-1)/2$) m učitelů, kteří je oba dva učí, takže $X = m \cdot s(s-1)/2$. Srovnáním získáme

$$u = \frac{ms(s-1)}{k(k-1)}.$$

Úloha 35. V rovině je nakreslených 9 různých přímek. Když se protnou právě 2 přímky v jednom bodě, nazveme tento průsečík modrý, když právě tři, nazveme ho červený. Našich 9 přímek umíme rozdělit na tři trojice. Každá přímka z první trojice obsahuje 3 červené a 1 modrý bod, přímky z druhé trojice mají 2 červené a 4 modré body a každá přímka z třetí trojice má 2 červené a 3 modré body. Určete, na kolik částí dělí těchto 9 přímek rovinu.

Výsledek. $10 + 12 + 2 \cdot 7 = 36$.

Návod. Celý obrázek si můžeme představit jako natažené provázky na stěně. Určitě umíme obrázek natočit tak, aby žádný provázek nebyl vodorovně. Do každé oblasti teď dáme jednu kuličku a budeme sledovat, co s nimi udělá gravitace. Stačí si rozmyslet, že 10 kuliček bude padat do nekonečna, u každého modrého bodu se zastaví právě jedna kulička a u každého červeného dvě kuličky. Stačí tedy už jen dopočítat, že modrých bodů je 12 a červených je 7. Počet oblastí je pak $10 + 12 + 2 \cdot 7 = 36$.

Úloha 36. Najděte nejmenší reálné číslo k takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí $2x + 3y \le k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Výsledek. $\sqrt{13}$.

Návod. Volbou $x = y = 1$ vidíme, že hledané číslo k musí být kladné. Dále si rozmyslíme, že stačí, aby nerovnost platila pro všechna kladná čísla x, y. Přejdeme-li totiž od čísla x k číslu $-x$, jen zmenšíme levou stranu a nerovnost si tak vlastně zjednodušíme. Pro kladná čísla x, y můžeme ekvivalentně umocnit a upravit do tvaru

$$(3x-2y)^2+(k^2-13)(x^2+y^2)\geq 0.$$

Nyní vidíme, že pokud $k^2<13$, nerovnost neplatí kdykoliv $3x=2y\neq 0$, přičemž pokud $k^2=13$, nerovnost samozřejmě platí. Hledané číslo je tedy $k=\sqrt{13}$.

Úloha 37. Jsou-li x a y kladná celá čísla splňující $xy=2010(x+y)$, jaká je potom největší možná hodnota x?

Výsledek. $x=2010\cdot 2011=4\,042\,110$.

Návod. Převedením na jednu stranu, přičtením 2010^2 a úpravou na součin získáme rovnici

$$(x-2010)(y-2010)=2010^2,$$

z níž je patrné, že x bude mít největší hodnotu, pokud bude první závorka 2010^2 a druhá 1. Je tedy $x=2010^2+2010=2010\cdot 2011$.

Úloha 38. Mišo chce nakreslit tabulku velikosti 25×25 složenou ze 625 malých čtverečků. Umí ale kreslit jenom čtverce (přesněji jejich obvody) libovolné velikosti. Vždycky kreslí celé čtverce a nemůže používat gumu. Kolik nejméně čtverců musí Mišo nakreslit, aby nakreslil celou tabulku a nic navíc?

Výsledek. 48.

Návod. Mišovi bude stačit 48 čtverců velikosti 13×13, přičemž nakreslí právě ty čtverce, které mají (alespoň) jednu stranu na obvodu velkého čtverce 25×25 (a pasují do tabulky). Rozmysli si, že tímto způsobem skutečně nakreslí celou tabulku. Ukážeme, že menší počet čtverců mu stačit nemůže. Uvažujme všechny jednotkové úsečky tabulky, které mají právě jeden svůj krajní bod na obvodu tabulky. Dohromady jich je $24\cdot 4=96$. Každý čtverec, který Mišo nakreslí, může obsahovat nejvýše dvě z těchto úseček (rozmysli si). Mišo tedy musí nakreslit alespoň $96/2=48$ čtverců.

Úloha 39. Každé políčko šachovnice 8×8 můžeme obarvit bíle nebo černě. Najděte počet různých obarvení takových, že každý čtverec 2×2 obsahuje dvě bílá a dvě černá políčka.

Poznámka: Na orientaci šachovnice záleží. Dvě obarvení, která se liší jen otočením či překlopením, považujeme za různá.

Výsledek. $2^9-2=510$.

Návod. Obarvíme nejprve první řádek šachovnice, přičemž rozlišíme dva případy:

(i) První řádek je černou a bílou obarvený na střídačku. Potom každý další řádek musí být zase obarvený na střídačku, jinak by některý čtverec 2×2 obsahoval tři stejně barevná políčka. Každý z osmi řádků může začínat černě nebo bíle, což dává 2^8 možností.

(ii) V prvním řádku mají některá dvě sousední políčka stejnou barvu. Pak dva sousední sloupce, ve kterých tato stejně barevná políčka leží, mají obarvení jednoznačně určené (barvy se střídají po řádcích). Z toho však s ohledem na podmínku o čtvercích 2×2 jednoznačně určíme i barvy všech ostatních políček. Vzniklé obarvení zjevně vyhovuje podmínkám zadání a je jednoznačně určené obarvením prvního řádku. Možných obarvení prvního řádku je 2^8-2 (dvě obarvení na střídačku jsme rozebrali v předchozím bodě).

Sečtením získáme $2^8+(2^8-2)=2^9-2=510$.

Úloha 40. Kubická rovnice $x^3+2x-1=0$ má právě jeden reálný kořen r. Víme, že $0{,}4<r<0{,}5$. Najděte všechny rostoucí posloupnosti přirozených čísel $a_1<a_2<a_3<\cdots$ takové, že platí

$$\frac{1}{2}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$$

Výsledek. Existuje jen jedna: $\{1,4,7,10\ldots\}$.

Návod. Dosaďme do dané kubické rovnice r a upravme ji na tvar

$$\frac{1}{2}=\frac{r}{1-r^3}.$$

Ze zadání $r \in (0,1)$, takže $r/(1-r^3)$ vyjadřuje součet nekonečné geometrické posloupnosti s prvním členem r a s koeficientem r^3, takže

$$\frac{1}{2} = r + r^4 + r^7 + r^{10} + \cdots$$

a máme jednu hledanou posloupnost, konkrétně $\{3k-2\}_{k=1}^{\infty}$. Ukážeme, že toto vyjádření je jednoznačné. Nechť platí

$$r^{a_1} + r^{a_2} + r^{a_3} + \cdots = \frac{1}{2} = r^{b_1} + r^{b_2} + r^{b_3} + \cdots,$$

pro dvě různé rostoucí posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$. Označme m nejmenší přirozené číslo takové, že m patří do jedné z těchto posloupností, ale nepatří do druhé. Bez újmy na obecnosti, $m = a_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $b_l < m < b_{l+1}$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$. Potom můžeme rovnost

$$r^{a_1} + r^{a_2} + r^{a_3} + \cdots = r^{b_1} + r^{b_2} + r^{b_3} + \cdots$$

upravit vyškrtnutím stejných členů na tvar

$$r^m + r^{a_{k+1}} + r^{a_{k+2}} + \cdots = r^{b_{l+1}} + r^{b_{l+2}} + r^{b_{l+3}} + \cdots$$

Ukážeme, že pravá strana je ve skutečnosti menší než levá, čímž dojdeme ke sporu. Platí

$$r^{b_{l+1}} + r^{b_{l+2}} + r^{b_{l+3}} + \cdots \le r^{b_{l+1}} + r^{b_{l+1}+1} + r^{b_{l+1}+2} + \cdots = r^{b_{l+1}}(r^0 + r^1 + r^2 + \cdots) = \frac{r^{b_{l+1}}}{1-r}$$

Z nerovností $0.4 < r < 0.5$ však lehce dostaneme $1/(1-r) < 1/r$, proto

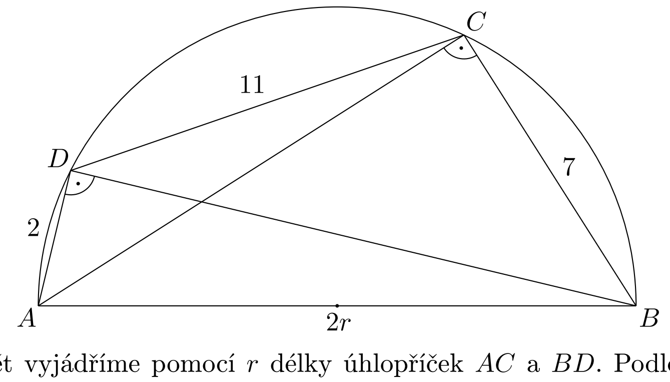
$$\frac{r^{b_{l+1}}}{1-r} < r^{b_{l+1}-1} \le r^m \le r^m + r^{a_{k+1}} + r^{a_{k+2}} + \cdots,$$

čímž jsme získali spor a tím i dokázali jednoznačnost.

Úloha 41. Konvexní šestiúhelník se stranami délek 2, 2, 7, 7, 11 a 11 je vepsaný do kružnice. Najděte její poloměr.

Výsledek. 7.

Návod. Hledaný poloměr r je stejný jako poloměr kružnice opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$, ve kterém AB je průměr, $|BC| = 7$, $|CD| = 11$ a $|DA| = 2$.



Z Pythagorových vět vyjádříme pomocí r délky úhlopříček AC a BD. Podle Ptolemaiovy věty pro čtyřúhelník $ABCD$ musí platit

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BD|,$$

takže

$$2r \cdot 11 + 7 \cdot 2 = \sqrt{4r^2 - 49} \cdot \sqrt{4r^2 - 4},$$

z čehož po umocnění na druhou, roznásobení a vydělení nenulovým r vyjde rovnice

$$2r^3 - 87r - 77 = 0.$$

Tipneme si kořen $r = 7$ a rozložíme na součin

$$0 = 2r^3 - 87r - 77 = (r - 7)(2r^2 + 14r + 11),$$

ve kterém je druhá závorka pro $r > 0$ kladná. Jediné řešení je tedy $r = 7$.

Úloha 42. V krabici je několik barevných míčků, přičemž od každé barvy jich tam je stejný počet. Pokud do krabice přidáme 20 míčků, které mají všechny stejnou barvu, ale různou od všech, které byly předtím v krabici, nezměníme tím pravděpodobnost, že při tahání dvou míčků bez vracení vytáhneme míčky stejné barvy. Kolik míčků bylo na začátku v krabici?

Výsledek. 190.

Návod. Předpokládejme, že na začátku jsou v krabici míčky c barev a od každé barvy jich tam je právě n. Dva míčky můžeme vytáhnout $cn(cn - 1)$ způsoby, dva míčky stejné barvy $cn(n - 1)$ způsoby. Pravděpodobnost, že vytáhneme dva míčky stejné barvy, je tedy $(n - 1)/(cn - 1)$.

Přidejme do krabice k nových míčků v barvě, kterou neměl žádný z míčků, jež tam byly původně (v našem případě je $k = 20$). Počet způsobů, jak vytáhnout dva míčky, je nyní roven $(cn + k)(cn + k - 1)$, dva míčky stejné barvy můžeme vytáhnout $cn(n - 1) + k(k - 1)$ způsoby. Pravděpodobnost vytáhnutí dvou míčků stejné barvy je proto rovna

$$\frac{cn(n-1) + k(k-1)}{(cn+k)(cn+k-1)}.$$

Protože obě pravděpodobnosti se mají rovnat, dostáváme

$$\frac{n-1}{cn-1} = \frac{cn(n-1) + k(k-1)}{(cn+k)(cn+k-1)}.$$

Po roznásobení se většina členů odečte a rovnost nabude tvar

$$cnk^2 = 2cn^2k + nk^2 - nk - cnk.$$

Vydělením nenulovým výrazem nk a převedením několika členů na opačnou stranu rovnice získáme

$$c(k + 1 - 2n) = k - 1.$$

Dosaďme nyní $k = 20$. Máme

$$c(21 - 2n) = 19.$$

Tato rovnice má v přirozených číslech dvě řešení, $c = 1$, $n = 1$ a $c = 19$, $n = 10$. První řešení ale zjevně nevyhovuje zadání (vyšlo nám proto, že ve vzorci pro pravděpodobnost jsme dělili výrazem $cn - 1$). Snadno nahlédneme, že druhé řešení podmínky zadání splňuje, a tedy dostáváme, že na začátku bylo v krabici $cn = 190$ míčků.