Úloha 1J. Čitatel i jmenovatel Kennyho zlomku jsou přirozená čísla se součtem 2011. Hodnota zlomku je přitom menší než $\frac{1}{3}$. Jaká největší může tato hodnota být?

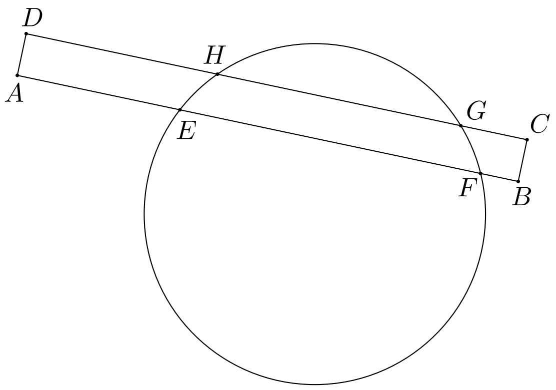
Výsledek. $\frac{502}{1509}$.

Řešení. Hledáme vlastně největší přirozené číslo $a < 2011$ splňující nerovnici

$$\frac{a}{2011-a} < \frac{1}{3}.$$

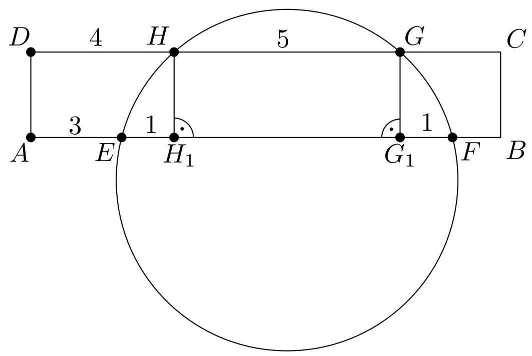
Tu ekvivalentně upravíme do tvaru $4a < 2011$ a vidíme, že největší vyhovující a je 502 a výsledný zlomek je pak roven $\frac{502}{1509}$.

Úloha 2J. Obdélník $ABCD$ protíná kružnici v bodech E, F, G, H jako na obrázku. Jestliže platí $|AE| = 3$, $|DH| = 4$ a $|GH| = 5$, určete $|EF|$.



Výsledek. 7.

Řešení. Označme G_1, H_1 po řadě průměty bodů G, H na přímku AB. Potom zřejmě $|H_1G_1| = |HG| = 5$. Dále si všimneme, že díky osové souměrnosti je $|EH_1| = |G_1F|$ a navíc $|EH_1| = |DH| - |AE| = 1$. Tedy $|EF| = |EH_1| + |H_1G_1| + |G_1F| = 7$.



Úloha 3J. Čemu je roven ciferný součet čísla $1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \cdots + 1\underbrace{0\ldots0}_{50}1$?

Výsledek. 58.

Řešení. Upravujme

$$1 + 11 + 101 + 1001 + \cdots + 1\underbrace{0\ldots0}_{50}1 =$$

$$= 1 + (10+1) + (100+1) + (1000+1) + \cdots + (1\underbrace{0\ldots0}_{51} + 1) = \underbrace{11\ldots11}_{51}0 + 52 = \underbrace{11\ldots11}_{50}62.$$

Hledaný ciferný součet je tedy roven 58.

Úloha 4J. Ve třech sáčcích jsou mandarinky. V prvním sáčku je o 6 mandarinek méně než ve dvou ostatních dohromady, ve druhém sáčku je o 10 mandarinek méně než ve dvou ostatních dohromady. Kolik mandarinek je ve třetím sáčku?

Výsledek. 8.

Řešení. Označme a, b, c postupně počty mandarinek v prvním, druhém a třetím sáčku. Podle zadání je

$$\begin{aligned} a &= b + c - 6, \\ b &= a + c - 10. \end{aligned}$$

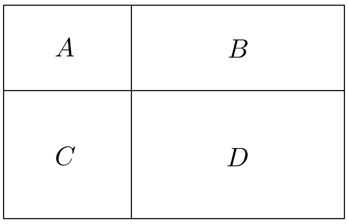
Po sečtení rovnic můžeme od obou stran odečíst $a + b$ a dopočteme $c = 8$.

Úloha 5J. Na stole leží 33 ořechů v několika (alespoň dvou) hromádkách. V každé hromádce jsou alespoň dva ořechy. Poté, co z každé hromádky odebereme jeden ořech a dáme ho na první hromádku, bude na každé hromádce ořechů stejně. Kolik hromádek bylo původně na stole? Nalezněte všechny možnosti.

Výsledek. 3.

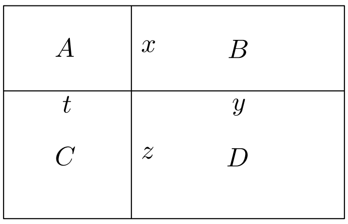
Řešení. Protože nakonec bylo ve všech hromádkách stejně ořechů, musel být počet hromádek dělitelem čísla 33. Možnosti 33 a 11 však nevyhovují, protože v obou případech by na počátku musel být počet ořechů v první hromádce záporný. Počáteční situace se 3 hromádkami postupně s 9, 12 a 12 ořechy vyhovuje.

Úloha 6J. Obdélník je dvěma úsečkami rovnoběžnými se svými stranami rozdělen na čtyři menší obdélníky. Označme je A, B, C, D jako na obrázku. Víme, že obvody obdélníků A, B, C jsou po řadě rovny 2 cm, 4 cm a 7 cm. Jaké jsou všechny možné hodnoty obvodu obdélníka D?



Výsledek. 9 cm.

Řešení. Označme délky x, y, z, t jako na obrázku.



Pro obvody obdélníků o_A, o_B, o_C, o_D pak platí

$$o_A + o_D = 2(t + x) + 2(y + z) = 2(x + y) + 2(t + z) = o_B + o_C,$$

takže $o_D = 4 + 7 - 2 = 9$ cm.

Úloha 7J. Najděte navzájem různé cifry A, B, C tak, aby platilo následující písemné sčítání:

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ +\,ABC \\ \hline =BCB \end{array}$$

Výsledek. $A = 6$, $B = 7$, $C = 4$.

Řešení. Jelikož cifry A a C nemohou být obě zároveň nulové, muselo mezi sloupci jednotek a desítek dojít k přenosu. Jelikož $A \neq B$, muselo k přenosu dojít i mezi sloupci desítek a stovek. Můžeme tedy postupně zprava psát $A + C = 10$, $A + B + 1 = C + 10$ a $B = A + 1$. Vyřešením těchto tří rovnic získáme $A = 6$, $B = 7$ a $C = 4$.

Úloha 8J. Určete obsah obdélníka, víte-li, že jeho obvod je $10\,\mathrm{cm}$ a jeho úhlopříčka má délku $\sqrt{15}\,\mathrm{cm}$.

Výsledek. $5\,\mathrm{cm}^2$.

Řešení. Označme a, b délky stran obdélníka v centimetrech. Ze zadání $2(a + b) = 10$, $a^2 + b^2 = 15$. Hodnotu ab určíme například pomocí

$$2ab = (a + b)^2 - \left(a^2 + b^2\right) = 5^2 - 15 = 10.$$

Obsah je tedy $5\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 9J. Mišo si vzal N^3 stejně velkých krychliček a sestavil z nich jednu velkou krychli o rozměrech $N \times N \times N$. Celý její povrch obarvil a pak ji znovu rozložil na původní krychličky. Určete N, víte-li, že je nyní obarvena jedna desetina povrchu všech krychliček.

Výsledek. 10.

Řešení. Označme S plochu jedné stěny krychličky. Povrch všech krychliček je $6S \cdot N^3$ a povrch velké krychle je $6S \cdot N^2$. Pokud je obarvena jedna desetina celkového povrchu všech krychliček, musí platit $6S \cdot N^2 = \frac{6S}{10} N^3$. Odtud vychází $N = 10$.

Úloha 10J. Kolik nejméně členů má matematický klub, v němž je zastoupení dívek větší než 48,5%, ale menší než 50%?

Výsledek. 35.

Řešení. Nechť n značí počet členů klubu. Podívejme se, o jakou nejmenší část se můžeme odchýlit od jedné poloviny. Pro sudá n se můžeme odchýlit o $1/n$ (například pro $n = 10$ se od čísla $5/10$ odchýlíme o $1/10$ k číslu $4/10$), zatímco pro lichá n dokonce jen o $1/2n$ (pro $n = 11$ od $(5 + 1/2)/11$ k $5/11$). Odtud vidíme, že je výhodnější hledat lichá n. Zbývá najít nejmenší liché n splňující $1/2n < 1{,}5\% = 3/200$, kterým je $n = 35$.

Úloha 11J / 1S. Zvětšíte-li číslo úlohy, kterou nyní držíte v ruce, o číslo n, získáte číslo úlohy s nejvíce šokujícím zadáním. Zvětšíte-li jej místo toho o dvojciferné číslo k, získáte číslo nejhravější úlohy. Navíc platí, že $n^3 = k^2$. Určete n a k, víte-li, že vám nyní zbývá spočítat už jen 44 úloh (včetně této).

Výsledek. $n = 9$, $k = 27$.

Řešení. Aby k^2 bylo třetí mocninou přirozeného čísla, musí být rovněž k třetí mocninou přirozeného čísla. Jediné takové dvojciferné $k < 44$ je $k = 27$. Zbývá dopočítat $n = 9$.

Úloha 12J / 2S. Najděte přirozené n splňující $6666^2 + 8888^2 = n^2$.

Výsledek. 11110.

Řešení. Počítání si usnadníme vytýkáním, tedy

$$n = \sqrt{1111^2 \cdot 6^2 + 1111^2 \cdot 8^2} = 1111\sqrt{36 + 64} = 11110.$$

Úloha 13J / 3S. Nalezněte nejmenší přirozené číslo, které končí na 17, je dělitelné 17 a má ciferný součet 17.

Výsledek. 15317.

Řešení. Hledané číslo si napíšeme ve tvaru $100 \cdot a + 17$ pro nějaké $a \in \mathbb{N}_0$. Za zadání plyne, že a je dělitelné 17 a má ciferný součet 9. Pak ovšem musí být a nenulové a dělitelné 9 (podle kritéria pro dělitelnost 9), tudíž $a \geq 17 \cdot 9 = 153$, přičemž 15317 vyhovuje.

Úloha 14J / 4S. Každá dvojice po sobě jdoucích cifer jistého 2011ciferného čísla je násobkem 17 nebo 23. Jeho poslední číslice je přitom 1. Určete jeho první číslici.

Výsledek. 3.

Řešení. Vypsáním dvojciferných násobků čísel 17 a 23 zjistíme, že každé cifře 1 až 9 na místě jednotek odpovídá právě jedna cifra na místě desítek. Hledané číslo vytváříme odzadu jako $\ldots 92346\,92346\,851$. Zbývá dopočítat, že $2011 = 3+401 \cdot 5+3$, takže první cifra hledaného čísla je třetí cifra odzadu v sekvenci 92346.

Úloha 15J / 5S. Přirozené číslo nazveme *luxusní*, jestliže každé jiné přirozené číslo se stejným ciferným součtem je větší. Zjistěte, kolik luxusních čísel je trojciferných.

Výsledek. 9.

Řešení. Uvědomíme si, že pro každou hodnotu ciferného součtu $k \in \mathbb{N}$ existuje právě jedno nejmenší číslo s tímto ciferným součtem, a tedy i právě jedno luxusní číslo. Označme ho $l(k)$. Jelikož dvojciferná čísla nabývají všech hodnot ciferného součtu od 1 do 18, jsou čísla $l(1), \ldots, l(18)$ nejvýše dvojciferná. Protože ciferné součty trojciferných čísel nabývají všech hodnot od 1 do 27, jsou luxusní čísla $l(19), \ldots, l(27)$ trojciferná a je jich 9.

Úloha 16J / 6S. Pepova reálná čísla x, y, z splňují $\frac{x-y}{z-y} = -10$. Jakých hodnot může nabývat výraz $\frac{x-z}{y-z}$? Najděte všechny možnosti.

Výsledek. 11.

Řešení.

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{(x-y)+(y-z)}{y-z} = \frac{x-y}{y-z} + \frac{y-z}{y-z} = 10 + 1 = 11.$$

Úloha 17J / 7S. Číslice $1, 2, \ldots, 9$ napíšeme za sebe v nějakém pořadí tak, aby vzniklo devíticiferné číslo. Uvážíme všechny trojice po sobě jdoucích cifer tohoto čísla a odpovídajících sedm trojciferných čísel sečteme. Jaký největší můžeme dostat výsledek?

Výsledek. 4648.

Řešení. Označíme cifry a_1, a_2, …, a_9. Jednotlivé trojice jsou pak rovny:

$$100a_1 + 10a_2 + a_3, \quad 100a_2 + 10a_3 + a_4, \quad 100a_3 + 10a_4 + a_5, \quad \ldots, \quad 100a_7 + 10a_8 + a_9,$$

takže jejich součet je roven

$$100a_1 + 110a_2 + 111a_3 + \cdots + 111a_7 + 11a_8 + 1a_9.$$

Chceme-li tento součet maximalizovat, použijeme nejvyšší čísla pro cifry a_3 až a_7. Dále $a_2 = 4$, $a_1 = 3$, $a_8 = 2$, $a_9 = 1$. Součet vyjde

$$111 \cdot (5 + \cdots + 9) + 4 \cdot 110 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 1 = 4648.$$

Úloha 18J / 8S. V každém políčku tabulky 10×10 je napsáno číslo. Mirek si všiml, že mezi součiny všech možných dvojic čísel z různých políček tabulky je přesně 1000 čísel záporných. Kolik čísel v tabulce může být nulových? Určete všechny možnosti.

Výsledek. 30, 35.

Řešení. Označme postupně k, z počty kladných, resp. záporných čísel a $n = 100 - k - z$ počet nul. Součin dvou čísel je záporný, právě když je jedno z nich kladné a druhé záporné. Počet možností, jak vybrat jedno kladné číslo z k a jedno záporné ze z, je $k \cdot z$. Kromě samozřejmého $k + z \leq 100$ tedy musí platit i $k \cdot z = 1000$. Tomu vyhovují jen neuspořádané dvojice $\{20, 50\}$ a $\{25, 40\}$ skýtající postupně $n = 30$, $n = 35$.

Úloha 19J / 9S. V království začali razit mince. Celý první den razili mince v hodnotě 1 fufník. Každý další den razili mince v té hodnotě, která se jako první nedá zaplatit pomocí deseti nebo méně již existujících mincí. Mince jaké hodnoty razili během 2011. dne?

Výsledek. 20101 (fufníků).

Řešení. Indukcí dokážeme, že během k-tého dne razili mince o hodnotě $10(k - 1) + 1$. První krok splněn je, pro druhý si všimněme, že pomocí nejvyšší mince (o hodnotě H) a odpovídajícího počtu mincí o hodnotě 1 umíme zaplatit částky $H + 1$ až $H + 9$. Naopak $H + 10$ zaplatit nelze, neboť jak požadovaná částka, tak hodnoty všech doposud vyrobených mincí dávají po dělení deseti zbytek 1. Výsledek plyne dosazením.

Úloha 20J / 10S. Nechť je číslo p řešením úlohy na tomto papíře. Určete pravděpodobnost (číslo z intervalu $\langle 0, 1\rangle$), že náhodně vybraný bod uvnitř čtverce o straně 1 cm je od všech jeho stran vzdálen alespoň p cm.

Výsledek. $\frac{1}{4}$.

Řešení. Bod je od každé strany vzdálený alespoň p cm právě tehdy, když je uvnitř čtverce o straně $1 - 2p$ umístěného uprostřed (má-li tento čtverec nezápornou velikost). Pravděpodobnost spočítáme jako podíl obsahů, tedy

$$\frac{(1 - 2p)^2}{1^2} = p.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení: $p = \frac{1}{4}$ zadání vyhovuje, $p = 1$ ne.

Úloha 21J / 11S. Tabulka 3×3 je vyplněna celými čísly tak, že součty v jednotlivých řádcích postupně shora dolů rostou o 2 a součty v jednotlivých sloupcích se postupně zleva doprava zdvojnásobují. Pokud je součet v jednom z řádků roven 2011, určete součet čísel v levém sloupci.

Výsledek. 861.

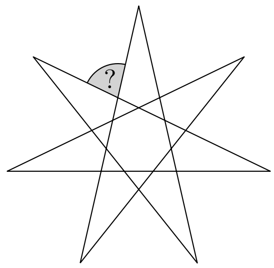
Řešení. Označme a součet čísel v prvním řádku a b součet čísel v levém sloupci. Součet všech čísel v tabulce vyjádříme dvěma způsoby, a to jako $3a + 6$ (sčítáme-li po řádcích) a $7b$ (sčítáme-li po sloupcích). Tedy $3a + 6$ je dělitelné sedmi, z čehož plyne, že a dává po dělení sedmi zbytek 5. Číslo 2011 dává po dělení sedmi zbytek 2, takže jde o součet čísel ve třetím řádku a platí $2011 = a + 4$. Zbývá dopočítat $b = \frac{3a+6}{7} = 861$.

Úloha 22J / 12S. Dva trajekty vyrazily v jeden okamžik proti sobě přes zátoku. Pluly oba konstantní (ale každý jinou) rychlostí a minuly se ve vzdálenosti 100 m od jednoho břehu. Když každý z nich doplul k protějšímu břehu, rovnou se otočil a vracel se zpět. Podruhé se trajekty minuly 70 m od druhého břehu. Jak široká je zátoka?

Výsledek. 230 m.

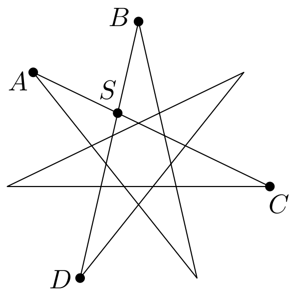
Řešení. Označme S šířku zátoky v metrech. Když se trajekty míjely poprvé, měly dohromady najeto S metrů, když se míjely podruhé, měly najeto $3S$ metrů. Jelikož trajekty jedou konstantními rychlostmi, nastalo jejich druhé setkání po třikrát delším čase než to první. Pro ten trajekt, který do prvního setkání najel 100 metrů, lze tedy sestavit rovnici $3 \cdot 100 = S + 70$, z níž $S = 230$ plyne bezprostředně.

Úloha 23J / 13S. Hvězda má vrcholy ve vrcholech pravidelného sedmiúhelníku. Jaká je velikost vyznačeného úhlu?



Výsledek. $\frac{3\pi}{7} = \frac{540^\circ}{7} = 77^\circ + \frac{1^\circ}{7}$.

Řešení.



Označme body A, B, C, D, S jako na obrázku. Pokud otočíme úsečku AC kolem středu hvězdy o úhel $2\pi \cdot \frac{2}{7}$ proti směru hodinových ručiček, dostaneme úsečku DB. Tedy $|\sphericalangle DSA| = \frac{4\pi}{7}$, úhel ASB je pak jeho doplněk.

Úloha 24J / 14S. Najděte x splňující $2^{2^{3^{2^2}}} = 4^{4^x}$.

Poznámka: patrové mocniny se vyhodnocují odshora, tj. $4^{3^2} = 4^9$.

Výsledek. 40.

Řešení. Upravíme pravou stranu rovnice:

$$4^{4^x} = \left(2^2\right)^{\left(2^2\right)^x} = 2^{2\cdot 2^{2x}} = 2^{2^{2x+1}}.$$

Požadované rovnosti tedy bude dosaženo, pokud $2x + 1 = 3^{2^2} = 3^4 = 81$, neboli $x = 40$.

Úloha 25J / 15S. Kolik existuje uspořádaných trojic přirozených čísel (a, b, c) takových, že

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11$$

a $a + b + c \leq 30$?

Výsledek. 24.

Řešení. První jedničku zapíšeme jako $\frac{a}{a}$, druhou jako $\frac{b}{b}$. Potom

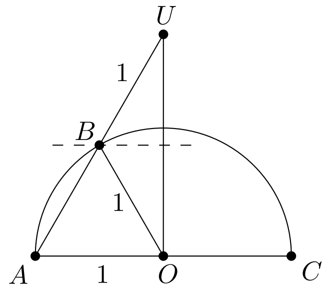
$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = \frac{a\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)}{b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{a}{b} = 11.$$

Pro $b = 1$, $a = 11$ vyhovuje $c = 1, 2, \ldots, 18$ a pro $b = 2$, $a = 22$ vyhovuje $c = 1, 2, \ldots, 6$, což dává celkem 24 trojic.

Úloha 26J / 16S. V rovině je dána kružnice s poloměrem 1, se středem O a průměrem AC. Na kolmici k AC procházející bodem O je vně kružnice zvolen bod U tak, že označíme-li druhý průsečík kružnice s přímkou AU jako B, platí $|BU| = 1$. Určete $|OU|$.

Výsledek. $\sqrt{3}$.

Řešení.



Jelikož $|OB| = 1 = |BU|$, je trojúhelník OUB rovnoramenný. Bod B tak leží na ose odvěsny pravoúhlého trojúhelníku AOU a zároveň na jeho přeponě, takže je středem této přepony. Tím pádem i $|AB| = 1$ a z Pythagorovy věty dopočteme $|OU| = \sqrt{3}$.

Úloha 27J / 17S. Bitvy armád A a B se zúčastnilo dohromady 1000 vojáků. Armády střílejí v salvách. V jedné salvě zastřelí každý živý voják ze střílející armády jednoho vojáka ze soupeřovy armády (pokud možno každý jiného). V naší bitvě střílela nejdřív armáda A, pak armáda B a nakonec opět armáda A. Kolik nejméně vojáků bitvu určitě přežilo?

Výsledek. 200.

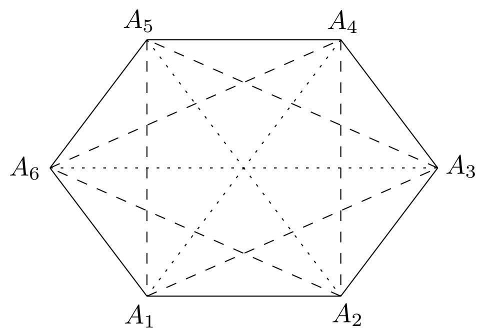
Řešení. Předpokládejme, že přežilo n vojáků, z toho a ($a \leq n$) v armádě A a $n - a$ v armádě B. Počet vojáků v B před třetí salvou tedy byl nejvýše $(n - a) + a = n$ a počet vojáků v A byl nejvýše n. Před druhou salvou bylo v B nejvýše n vojáků a v A nejvýše $n + n = 2n$ vojáků. Konečně před první salvou bylo v B nejvýše $n + 2n = 3n$ vojáků a v A nejvýše $2n$ vojáků.

Na začátku bitvy mohlo bojovat maximálně $5n$ vojáků, tj. $1000 \leq 5n$ a máme $n \geq 200$. Tento stav je dosažitelný, neboť volbou $a = n = 200$ se každé maximální hodnoty nabyde.

Úloha 28J / 18S. Všech šest stran konvexního šestiúhelníku $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ je obarveno červeně. Každá z úhlopříček je obarvena červeně nebo modře. Určete počet obarvení takových, že každý trojúhelník $A_iA_jA_k$ ($i \neq j \neq k \neq i$) má alespoň jednu stranu červenou.

Výsledek. $392 = 7 \cdot 7 \cdot 8$.

Řešení. Kromě trojúhelníků $A_1A_3A_5$ a $A_2A_4A_6$ (na obrázku čárkovaně) všechny ostatní trojúhelníky již mají červenou hranu. Každý čárkovaný trojúhelník můžeme obarvit $2^3 - 1 = 7$ způsoby, protože nemůžeme všechny jeho hrany obarvit modře. Nakonec ještě můžeme dohromady $2^3 = 8$ způsoby obarvit tečkovaně vyznačené úhlopříčky A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6. Celkem máme $7 \cdot 7 \cdot 8 = 392$ vyhovujících obarvení.



Úloha 29J / 19S. Mirek pověděl Kennymu a Pavlovi každému jedno přirozené číslo a dále jim sdělil, že jejich čísla jsou různá a jejich součtem je dvojciferné číslo. Pak se mezi Kennym a Pavlem odehrála následující konverzace:

- Kenny: „Nedovedu určit, kdo z nás má větší číslo.“
- Pavel: „Ani já to nedovedu určit, ale prozradím, že moje číslo je dělitelné 17.“
- Kenny: „Aha, tak teď už umím jednoznačně určit, jaký je součet našich čísel.“

Čemu se rovnal tento součet, pokud oba po celou dobu uvažovali bezchybně?

Výsledek. 51.

Řešení. To, že Kenny ani Pavel neumí určit, kdo z nich má větší číslo, znamená, že oba mají číslo menší než 50. Kdyby tomu tak nebylo, součet by byl trojciferný. Jelikož má Pavel číslo dělitelné 17, musí mít 17 nebo 34. Aby mohl Kenny jednoznačně určit, které z těchto dvou čísel Pavel má, musí mít sám to druhé (jejich čísla jsou ze zadání různá). Hledaným součtem je proto 51.

Úloha 30J / 20S. V kavárně je dohromady 55 Indů a Turků, z nichž každý pije buď kávu, nebo čaj. Ind je pravdomluvný, pokud pije čaj, a lže, pokud pije kávu, přičemž u Turků je tomu právě naopak. Na otázky: „Pijete kávu?“, „Jste Turek?“ a „Prší venku?“ byly počty kladných odpovědí postupně 44, 33 a 22. Kolik Indů pije čaj? Nalezněte všechny možnosti.

Výsledek. 0.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že na otázku „Pijete kávu?“ odpoví kladně právě Turci a na otázku „Jste Turek?“ odpoví kladně právě ti, kdo pijí kávu.

Víme tedy, že Turků je 44 a těch, kdo pijí kávu, je 33. Z toho dopočteme, že Indů je 11 a těch, kteří pijí čaj, je 22. Když sečteme počet Indů a počet lidí pijících čaj a odečteme od toho počet lidí, kteří lžou, dostaneme dvojnásobek počtu Indů pijících čaj.

Pokud venku prší, lže 33 lidí a čaj pije 0 Indů, pokud venku neprší, lže 22 lidí a čaj tak pije $\frac{11}{2}$ Indů. Necelou možnost kvůli humánnosti zavrhujeme.

Úloha 31J / 21S. K přirozenému číslu A byly zprava připsány tři cifry, čímž vzniklo číslo, které je součtem všech přirozených čísel od 1 do A. Nalezněte všechny možné hodnoty A.

Výsledek. 1999.

Řešení. Označme B připsané trojčíslí. Jelikož $1 + 2 + \cdots + A = \frac{1}{2}A(A + 1)$, máme dle zadání

$$1000A + B = \frac{A(A + 1)}{2},$$

což upravíme na $2B = A(A - 1999)$. Levá strana je alespoň 0 a nejvýše $2 \cdot 999$, zatímco pravá strana je pro přirozené $A \leq 1998$ záporná a pro $A \geq 2000$ alespoň $2000 \cdot 1$. Jediné možné $A = 1999$ vyhovuje pro $B = 000$.

Úloha 32J / 22S. Adéla, Bára, Cilka, Dana a Eliška hrály turnaj ve čtyřhře ve stolním tenise (tj. každá dvojice hrála proti každé další přesně jednou). Adéla vyhrála 12 zápasů a Bára jich vyhrála 6. Kolik zápasů mohla vyhrát Cilka? Nalezněte všechny možnosti.

Výsledek. 4.

Řešení. Spočítáme, kolik zápasů odehraje jedna hráčka. Chceme-li vytvořit zápas s danou hráčkou H, vybereme si, která hráčka ze zbývajících hrát nebude (4 možnosti) a která z hrajících bude hrát s H (3 možnosti). Každá hráčka tedy odehraje 12 zápasů.

Z toho rovnou vidíme, že Adéla vyhrála všechno. Dále spočítáme, kolik zápasů hrála Adéla proti Báře. Máme tři možnosti, kdo může hrát s Adélou, pak 2 možnosti, kdo ze zbývajících může hrát s Bárou. Bára tedy prohrála 6 zápasů proti Adéle, všechny ostatní tak musela vyhrát.

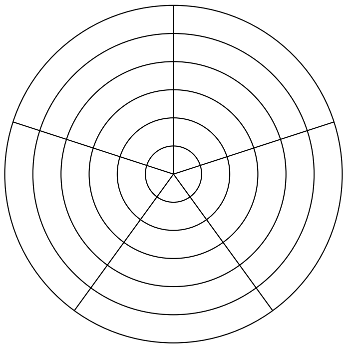
Nyní už víme, jak poznat, která dvojice vyhrála. Je to ta, kde hrála Adéla, a byla-li Adéla mimo hru, vyhrála dvojice obsahující Báru.

Když hrála Cilka s Adélou, byly 3 možnosti, kdo je mimo hru, tedy takto vyhrála Cilka 3 zápasy. Když vyhrála Cilka s Bárou, byla mimo hru Adéla, to se stalo jednou. Celkem tak Cilka vyhrála 4 zápasy.

Úloha 33J / 23S. Dva hráči hrají na uvedeném plánu sestávajícím ze 30 políček hru podle následujících pravidel:

- hráči se střídají v tazích,
- tahem rozumíme vybarvení právě jednoho políčka,
- v prvním tahu se vybarví políčko sousedící s vnějškem a v každém dalším tahu políčko, které sousedí s posledně vybarveným a není dále od středu,
- vybarvené políčko se nesmí znovu vybarvovat,
- kdo nemůže táhnout, prohrál.

Kolik políček bude vybarveno na konci hry, ve které oba hráči hrají bezchybně a ten, kdo nemůže vyhrát, se snaží hru co nejvíc prodlužovat?



Výsledek. 18.

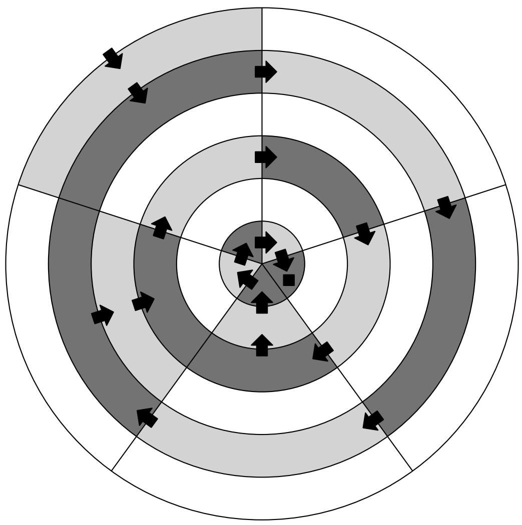
Řešení. Jednotlivým mezikružím (včetně vnitřního kruhu) budeme říkat vrstvy. Za první považujeme tu na okraji, za šestou kruh uprostřed. Vrstvu s posledním vybarveným políčkem nazýváme aktuální.

Druhý hráč má následující vyhrávající strategii:

- Pokud je aktuální vrstva lichá, zahraje do následující vrstvy.
- v opačném případě v aktuální vrstvě zbývá licho volných políček, zahraje tedy do této vrstvy.

Touto strategií pošle vždy protihráče do pozice, kde je aktuální vrstva sudá a obsahuje sudo volných políček. Ten tak musí buď zahrát do liché vrstvy, nebo způsobit, že bude v aktuální vrstvě licho volných políček.

Druhý hráč přitom nemůže zahrát jinak, protože by mu tak mohl první hráč strategii převzít. První hráč bude hru prodlužovat tím, že bude oddalovat přesunutí se do další vrstvy. Hra tedy dopadne nějak takto:



Úloha 34J / 24S. V trojúhelníku ABC je $|AC| = |BC|$. Uvnitř strany AB blíže bodu B nalezneme bod P ($P \neq B$) tak, že $|\sphericalangle ACP| = 30°$. Dále nalezneme bod Q tak, že $|\sphericalangle CPQ| = 78°$ a body C a Q leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Jestliže jsou vnitřní úhly v trojúhelnících ABC a BQP vyjádřeny ve stupních celočíselně, určete, jakých hodnot může nabývat velikost úhlu BQP.

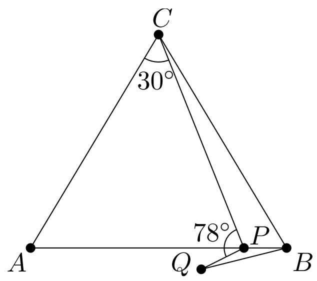
Výsledek. $1°$.

Řešení. Jelikož $|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle CBA| < |\sphericalangle CPA|$ a $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle CPA| = 180° - 30° = 150°$, musí být $|\sphericalangle PAC| < 75°$. Jeho velikost ve stupních je ale celočíselná, takže musí být dokonce $|\sphericalangle PAC| \leq 74°$ a $|\sphericalangle CPA| \geq 76°$.

Zároveň ale $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle PBQ| + |\sphericalangle BQP| \geq 1° + 1° = 2°$, z čehož

$$78° = |\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle CPA| + |\sphericalangle APQ| \geq 76° + 2° = 78°.$$

Ve všech neostrých nerovnostech tedy musela nastat rovnost a speciálně $|\sphericalangle BQP| = 1°$.



Úloha 35J / 25S. Deset lidí sedělo vedle sebe v divadle. Po přestávce si sedli tak, že právě dva z nich zůstali na svém původním místě a zbylých osm se posadilo na židli jednoho ze svých sousedů. Kolika způsoby to mohli udělat?

Výsledek. $15 = \binom{6}{2}$.

Řešení. Člověk, který původně seděl na levém okraji řady, musel zůstat sedět na svém místě nebo se prohodit se svým sousedem, neboť jeho místo nemohl obsadit nikdo jiný. Stejnou úvahu můžeme zopakovat pro dalšího člověka zleva, o jehož usazení jsme zatím nerozhodli. Každý tedy musel zůstat sedět na svém místě nebo se prohodit s jedním ze svých sousedů. Libovolné vyhovující rozsazení si proto můžeme představit jako posloupnost, která v nějakém pořadí obsahuje čtyři prvky P (reprezentující prohození dvou sousedů) a dva prvky M (reprezentující situaci, kdy člověk zůstal na svém místě). Počet vyhovujících rozsazení pak musí být roven počtu takovýchto posloupností, to jest $\binom{6}{2} = 15$.

Úloha 36J / 26S. Na každé stěně krychle je napsáno přirozené číslo. Každému vrcholu krychle přiřadíme součin čísel napsaných na třech jeho přilehlých stěnách. Víme, že součet čísel přiřazených vrcholům je 165. Jakých všech hodnot může nabývat součet čísel na stěnách?

Výsledek. 19.

Řešení. Označme čísla na stěnách písmeny a, b, c, d, e, f tak, aby proti sobě ležely dvojice a a f, b a e, c a d. Pak

$$3 \cdot 5 \cdot 11 = 165 = (a+f)(b+e)(c+d),$$

kde o druhé rovnosti se můžeme přesvědčit roznásobením. Jelikož čísla a až f jsou přirozená, je každá závorka na pravé straně přirozená a větší než 1. Závorky se tedy (v nějakém pořadí) rovnají číslům 3, 5 a 11. Součet čísel na stěnách tak může být jedině $3 + 5 + 11 = 19$. Zkonstruovat příklad s požadovanými součty je snadné.

Úloha 37J / 27S. Dva cyklisté závodili na rovné ulici v silničním maratonu. Startovali společně z jednoho konce a pokaždé, když někdo z nich dorazil na (libovolný) konec ulice, otočil se a jel zpět. Do okamžiku, než se poprvé od startu potkali na některém z konců, projel pomalejší z nich ulici 35-krát a rychlejší 47-krát. Kolikrát se během té doby čelně minuli?

Výsledek. 40.

Řešení. Na začátku jedou cyklisti stejným směrem. Pak se jeden z nich otočí, tedy pojedou proti sobě. Pak se čelně minou, tedy pojedou od sebe. Pak se jeden z nich otočí a jedou tak opět stejným směrem. Toto se opakuje, dokud neurazí své vzdálenosti, nakonec dorazí oba stejným směrem. V každém cyklu proběhnou dvě otočení se a jedno čelní minutí. První se otáčel 34 krát, druhý 46 krát, to je dohromady 80. Čelních minutí je pak dvakrát méně.

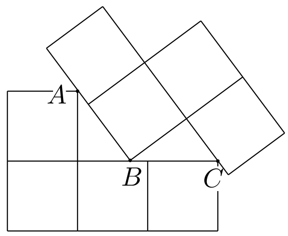
Úloha 38J / 28S. Najděte největší přirozené číslo takové, že všechny jeho cifry kromě první a poslední jsou ostře menší než aritmetický průměr sousedních dvou cifer.

Výsledek. 96433469.

Řešení. Označme $a_1, \ldots, a_k$ cifry hledaného čísla. Nejprve určíme maximální délku úseku, v němž cifry neklesají. Podmínku $a_i < \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$ přepíšeme jako $a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i$ a interpretujeme tak, že postupně rostou rozdíly mezi po sobě jdoucími ciframi. Pokud by čísel v rostoucím úseku bylo alespoň 5, byly by hodnoty rozdílů postupně rovny nejméně číslům 1, 2, 3, 4 a rozdíl mezi první a poslední cifrou by tak byl alespoň $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, což nelze. Každý rostoucí úsek má tedy nejvýše délku 4 a zcela obdobně odvodíme, že i každý klesající úsek má nejvýše délku čtyři.

Jelikož rozdíly mezi po sobě jdoucími ciframi postupně rostou, nejdříve mohou být tyto rozdíly záporné – tam budou samotné cifry klesat, pak může být rozdíl jednou nulový a pak budou rozdíly kladné – tam budou samotné cifry růst. Odtud plyne, že hledané číslo se skládá z jednoho klesajícího úseku a jednoho rostoucího úseku a má tedy nejvýše 8 cifer. Nyní začneme osmiciferná čísla zkoušet od největších. Ta, která začínají dvojicemi cifer 99, 98, 97, nemohou tvořit dostatečně dlouhé klesající úseky a jako řešení tak nalézáme číslo 96433469.

Úloha 39J / 29S. Dvě tetrisové kostičky sestavené ze čtverců o rozměrech 1×1 dm se dotýkají v bodech A, B, C jako na obrázku. Určete vzdálenost $|AB|$.



Výsledek. $\frac{5}{4}$ dm $= 1{,}25$ dm.

Řešení. Pravoúhlé trojúhelníky s přeponami AB a BC jsou shodné podle věty *usu*. Označme x jejich kratší odvěsnu. Platí $2 = x + |BC| = x + |AB|$ a podle Pythagorovy věty také $x^2 + 1 = |AB|^2$. Dosazením za x do druhé rovnice získáváme $(2 - |AB|)^2 + 1 = |AB|^2$. Odtud vychází $|AB| = 1{,}25$ dm.

Úloha 40J / 30S. V rovině je dáno 100 různých mřížových bodů. Každé dva z nich spojíme úsečkou. Kolik nejméně z těchto úseček má určitě svůj střed v mřížovém bodě?

Poznámka: bod v rovině nazýváme *mřížový*, jsou-li obě jeho souřadnice celočíselné.

Výsledek. $1200 = 4 \cdot \binom{25}{2}$.

Řešení. Souřadnice středu spojnice dvou mřížových bodů určíme jako průměr souřadnic těchto bodů. Všimneme si, že střed je opět mřížový bod právě tehdy, když mají vodorovné i svislé souřadnice obou bodů stejnou paritu. Všechny body se tedy podle parity souřadnic rozdělí do čtyř skupin (sudá-sudá, sudá-lichá, lichá-sudá, lichá-lichá), přičemž v každé skupině budou mít všechny spojnice za svůj střed mřížový bod a žádná spojnice bodů z různých skupin tuto vlastnost mít nebude. Aby byl počet úseček se středem v mřížovém bodě minimální, musí být všechny čtyři skupinky stejně velké. Rozmyslete si, že kdyby nebyly, tak přesunutím jednoho bodu z nejpočetnější skupiny do nejméně početné skupiny bychom počet takových úseček snížili. Počet spojnic v jedné skupince je tudíž $\binom{25}{2}$ a celkem tedy bude úseček se středem v mřížovém bodě $4 \cdot \binom{25}{2}$.

Úloha 41J / 31S. Pěticiferné číslo nazveme *nerozkládací*, jestliže ho nelze zapsat jako součin dvou trojciferných čísel. Kolik nejvíce nerozkládacích čísel může následovat bezprostředně za sebou?

Výsledek. 99.

Řešení. Všimneme si, že čísla $100 \cdot 100 = 10000$ a $100 \cdot 101 = 10100$ jsou dvě nejmenší rozkládací pěticiferná čísla. Tedy $10001, 10002, \ldots, 10099$ tvoří posloupnost 99 po sobě jdoucích nerozkládacích čísel. Více než 99 nerozkládacích čísel za sebou následovat nemůže, neboť mezi každými 100 po sobě jdoucími čísly najdeme jedno rozkládací, které je dělitelné 100.

Úloha 42J / 32S. Reálná čísla x a y splňují $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$. Nalezněte minimální hodnotu výrazu $x^2 + y^2$.

Výsledek. 1.

Řešení. Výrazy budeme interpretovat geometricky. V rovině s počátkem souřadnic O je množina bodů splňujících $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$ kružnice k se středem $S[-5, 12]$ a poloměrem 14. Bod O leží uvnitř kružnice k. Výraz $x^2 + y^2$ je druhou mocninou vzdálenosti od počátku, tj. hledáme bod na kružnici k, který je nejblíže počátku. Takovým bodem je průsečík P přímky SO s kružnicí k, jehož vzdálenost od počátku je

$$|SP| - |SO| = 14 - \sqrt{5^2 + 12^2} = 14 - 13 = 1.$$

Úloha 43J / 33S. Posloupnost má první dva členy $a_1 = 20$ a $a_2 = 11$ a dále je definovaná pomocí vzorce

$$a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}},$$

dokud má pravá strana smysl (tj. nedělí se nulou). Určete nejmenší t takové, že $a_t = 0$.

Výsledek. 222.

Řešení. Dokud má pravá strana smysl, můžeme zadanou podmínku roznásobit a upravit na

$$a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+1}a_n - 1.$$

Vidíme, že $a_1a_2 = 220$, $a_2a_3 = 219$, $\ldots$, $a_{220}a_{221} = 1$, $a_{221}a_{222} = 0$, a proto $t = 222$.

Úloha 44J / 34S. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami AA', BB', CC', které se protínají v bodě H. Navíc platí

$$\frac{|AH|}{|HA'|} = 1, \quad \frac{|BH|}{|HB'|} = 2.$$

Určete $\frac{|CH|}{|HC'|}$.

Výsledek. 5.

Řešení. Hranatými závorkami budeme značit obsah trojúhelníku. Potom platí $[ABC] = [ABH] + [ACH] + [BCH]$. Protože trojúhelníky ABC a ABH mají společnou stranu AB, je poměr jejich obsahů roven poměru jejich výšek na stranu AB. Použijeme-li podobný argument rovněž pro trojúhelníky ACH a BCH, dostaneme

$$1 = \frac{[ABH] + [ACH] + [BCH]}{[ABC]} =$$
$$= \frac{|C'H|}{|C'H| + |CH|} + \frac{|B'H|}{|B'H| + |BH|} + \frac{|A'H|}{|A'H| + |AH|} = \frac{|C'H|}{|C'H| + |CH|} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2},$$

tedy

$$\frac{|C'H|}{|C'H| + |CH|} = \frac{1}{6}$$

a

$$\frac{|CH|}{|HC'|} = \frac{|C'H| + |CH|}{|C'H|} - 1 = 5.$$

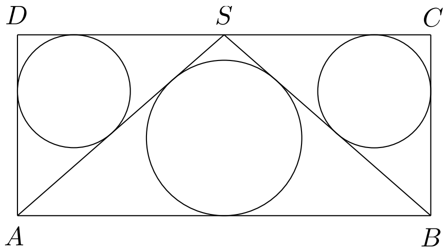
Úloha 45J / 35S. Na oslavě zná každý (včetně Pavla) přesně sedm chlapců a přesně deset děvčat („znání se“ je vzájemné, sám sebe nikdo nezná). Kolik nejméně lidí se na oslavě mohlo sejít?

Výsledek. 34.

Řešení. Označme počet chlapců c a počet dívek d. Znání se mezi chlapci a dívkami je vzájemné, tedy sečteme-li přes všechny dívky chlapce, které znají, dostaneme totéž jako když sečteme přes všechny chlapce dívky, které znají. Máme tak $7d = 10c$, z toho vidíme, že počet chlapců je přímo úměrný počtu dívek (stačí tedy minimalizovat počet dívek) a že počet dívek musí být dělitelný deseti. Každá dívka zná deset dívek, tedy $d \geq 11$, nejmenší možný počet dívek tak je 20, chlapců pak je 14. Takovou situaci však umíme sestrojit například následovně:

- Rozdělíme společnost do dvou skupinek po 10 dívkách a 7 chlapcích. V každé skupince seznámíme každého chlapce s každou dívkou.
- Postavíme dívky do kolečka. Pak každou seznámíme s deseti nejbližšími.
- Postavíme chlapce do kolečka. Pak každého seznámíme s šesti nejbližšími a dále s chlapcem naproti.

Úloha 46J / 36S. Bod S je středem strany CD obdélníku $ABCD$. Kružnice vepsané trojúhelníkům ASD a BSC mají každá poloměr 3 a kružnice vepsaná trojúhelníku ASB má poloměr 4. Určete strany obdélníka.



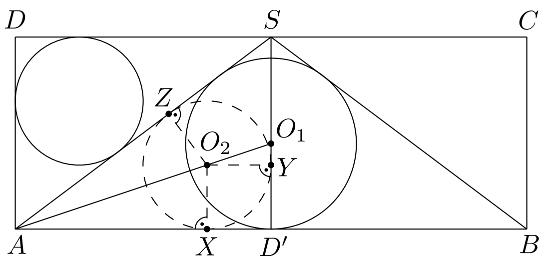
Výsledek. 9, 24.

Řešení. Označme body D', O_1, O_2, X, Y, Z jako na obrázku a $|AD| = a$, $|DS| = b$. Potom je $\triangle ADS \cong \triangle SD'A$, takže poloměr kružnice vepsané trojúhelníku $SD'A$ je 3. Navíc je tato kružnice vepsána úhlu SAB, takže její střed O_2 leží na přímce AO_1. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle AO_1D' \cong \triangle AO_2X$ (věta uu) máme

$$\frac{4}{b} = \frac{|O_1D'|}{|D'A|} = \frac{|O_2X|}{|XA|} = \frac{3}{b-3},$$

tj. $b = 12$.

Protože úseky tečen jsou shodné, platí $|SZ| = |SY| = a - 3$ a $|AZ| = |AX| = 12 - 3$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník $SD'A$ dostaneme druhou rovnici $(a+6)^2 = |AS|^2 = a^2 + 12^2$, odkud $a = 9$, takže strany obdélníku jsou 9 a 24.



Úloha 47J / 37S. Dělitele přirozeného čísla n, kteří jsou menší než n, si vypíšeme od největšího po nejmenší. Pokud je součet druhého a třetího napsaného čísla roven prvnímu napsanému číslu, pak n nazveme *sčítací*. Kolik existuje sčítacích čísel menších než 15000?

Výsledek. 1000.

Řešení. Vezmeme číslo n a zjistíme, co po něm požadujeme, aby bylo sčítací. Pokud by bylo liché, mělo by všechny dělitele liché. Ale to by pak součet dvou lichých čísel musel být liché číslo, což nejde. Číslo n je tedy sudé.

Všechny vypsané dělitele podělíme n. Tak získáme převrácené hodnoty všech dělitelů setříděných vzestupně, tentokrát kromě jedničky. Potřebujeme, aby součet převrácené hodnoty druhého a třetího nejmenšího dělitele dával jednu polovinu. Sčítance musí být různé, takže jeden z nich musí být větší než $\frac{1}{4}$. Víme tak, že druhý nejmenší dělitel musí být roven třem. Třetí pak vyjde šest.

Tedy číslo n je sčítací právě tehdy, když jeho dělitelé jsou vzestupně $1, 2, 3, 6, \ldots$ neboli když je dělitelné šesti, ale ne čtyřmi ani pěti. Vydělíme všechna taková čísla z rozmezí 1 až 15000 šesti a dostáváme všechna lichá čísla nedělitelná pěti v rozmezí 1 až 2500. Číslo je liché a nedělitelné pěti, pokud končí na jednu z cifer 1, 3, 7, 9. Mezi každými deseti po sobě jdoucími čísly jsou taková čísla 4. To máme $2500 \cdot \frac{4}{10} = 1000$ sčítacích čísel.

Úloha 48J / 38S. Najděte všechna reálná x splňující

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{50}{x-49} + \frac{49}{x-50}.$$

Výsledek. 99, 0, $\frac{4901}{99} = 49\frac{50}{99}$.

Řešení. Označme $a = \frac{x-49}{50}$ a $b = \frac{x-50}{49}$. Pak lze rovnici přepsat jako $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Po roznásobení a rozkladu na součin získáme ekvivalentní rovnici $(a + b)(ab - 1) = 0$, takže stačí rozlišit dva případy. Rovnice $a = -b$ je lineární vzhledem k x s řešením $x = \frac{4901}{99}$. Rovnice $ab = 1$ je kvadratická vzhledem k x s kořeny $x = 0$ a $x = 99$.

Úloha 49J / 39S. Umístění hodinové a minutové ručičky na ciferníku nazveme *platné*, pokud vyjadřuje skutečný čas v průběhu dne. Zjistěte, kolik existuje platných umístění, která zůstanou platnými i po prohození ručiček.

Výsledek. 143.

Řešení. Označme h, resp. m úhly měřené ve stupních $(0 \leq h, m < 360)$, které svírají hodinová, resp. minutová ručička se spojnicí středu a dvanáctky. Uvědomíme si, že umístění ručiček je platné, právě když existuje celé a takové, že

$$m = 12h - 360a.$$

Aby umístění ručiček zůstalo platné i po jejich prohození, musí existovat celé b takové, že

$$h = 12m - 360b.$$

Dosazením první rovnice do druhé dostáváme

$$h = 144h - 360(12a + b)$$

a jednoduchou úpravou

$$h = \frac{360b'}{143},$$

kde $b' = 12a + b$ je rovněž celočíselné. Poslední rovnice má pro h z intervalu $\langle 0, 360)$ právě 143 řešení, která nalezneme pro $b' = 0, 1, \ldots, 142$. A protože pro každé h dostáváme z první rovnice jednoznačně určené m z intervalu $\langle 0, 360)$, existuje právě 143 hledaných dvojic (h, m).

Úloha 50J / 40S. Nechť a, b, c jsou taková nenulová reálná čísla, že kvadratické trojčleny $ax^2 + bx + c$ a $bx^2 + cx + a$ mají společný kořen. Určete, jaké všechny reálné hodnoty může tento kořen mít.

Výsledek. 1.

Řešení. Označme t společný kořen kvadratických trojčlenů. Pak $0 = at^2 + bt + c$ a $0 = bt^2 + ct + a$, takže i

$$0 = t \cdot (at^2 + bt + c) - (bt^2 + ct + a) = a(t^3 - 1).$$

Jelikož $a \neq 0$, musí být $t = 1$. Volbou $a = -2$, $b = 1$, $c = 1$ zjišťujeme, že jednička také společným kořenem být může.

Úloha 51J / 41S. Nalezněte všechna celá čísla n taková, že jak číslo $16n + 9$, tak číslo $9n + 16$ je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

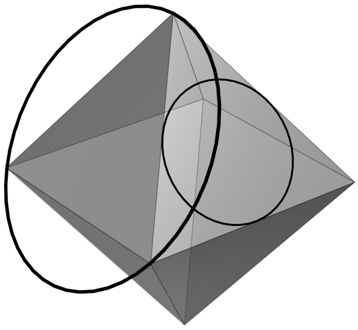
Výsledek. 0, 1, 52.

Řešení. Má-li n má požadovanou vlastnost, pak jsou druhými mocninami i čísla

$$9 \cdot (16n + 9), \qquad 16 \cdot (9n + 16).$$

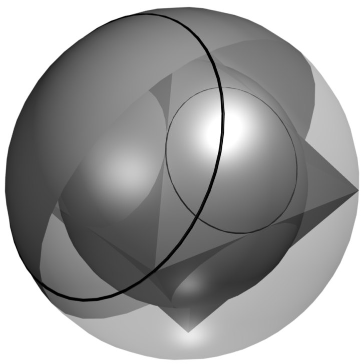
Hledejme tedy dvě druhé mocniny, které se liší o $16 \cdot 16 - 9 \cdot 9 = 175$. Pro přirozená $k > l$ řešíme rovnici $k^2 - l^2 = (k - l)(k + l) = 175 = 5^2 \cdot 7$ a postupně vyzkoušíme možné rozklady čísla 175. Řešení $(88, 87)$, $(20, 15)$, $(16, 9)$ postupně odpovídají hodnotám $n = 52, 1, 0$, které jsou skutečně řešením.

Úloha 52J / 42S. Je dán pravidelný osmistěn o hraně délky 2. Jedné jeho stěně vepíšeme kružnici a jedné stěně s ní sousedící kružnici opíšeme. Jaká je nejmenší vzdálenost těchto dvou kružnic?



Výsledek. $\sqrt{2} - 1 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

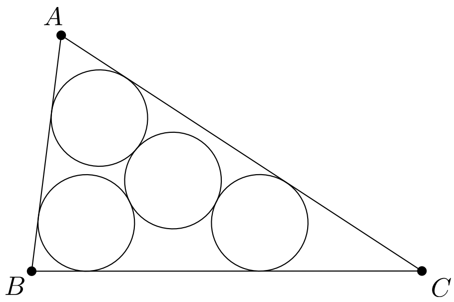
Řešení. Přikreslíme si do obrázku dvě sféry. Jednu osmistěnu opíšeme a druhou vepíšeme jeho hranám. Celá opsaná kružnice tak leží na opsané sféře a celá vepsaná kružnice na vepsané sféře.



Nejmenší vzdálenost kružnic tak určitě nebude menší než nejmenší vzdálenost sfér. Nejmenší vzdálenost soustředných sfér je rovna rozdílu jejich poloměrů, tedy $\sqrt{2} - 1$.

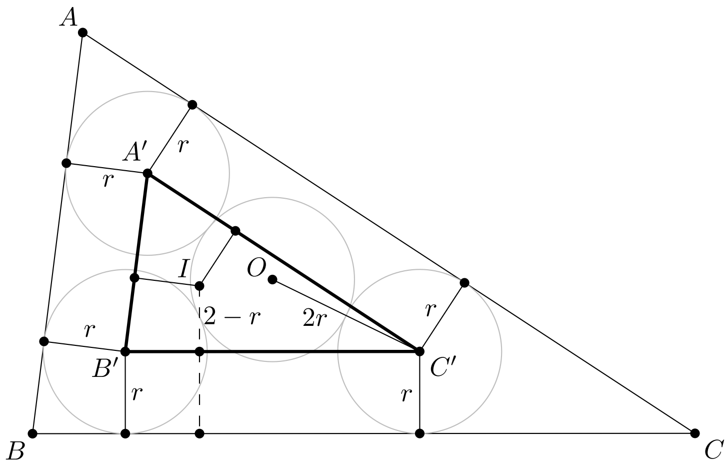
Zbývá si uvědomit, že této vzdálenosti se skutečně nabývá. To nastane, pokud existuje polopřímka s počátkem ve středu osmistěnu, která prochází oběma kružnicemi. Můžeme snadno najít polopřímku protínající vepsanou kružnici, která vede vnitřkem opsané kružnice, i takovou, která opsanou zvenku míjí. Bude tedy existovat i taková polopřímka, co opsanou kružnici protíná.

Úloha 53J / 43S. Je dán trojúhelník ABC s poloměrem kružnice opsané 5 a poloměrem kružnice vepsané 2. Uvnitř trojúhelníka jsou do úhlů BAC, CBA, ACB vepsány shodné kružnice o poloměru r tak, že existuje další kružnice o poloměru r, která s nimi má se všemi vnější dotyk. Určete r.



Výsledek. $\frac{10}{9}$.

Řešení.



Označme postupně A', B', C' středy kružnic vepsaných do úhlů BAC, CBA, ACB, O střed kružnice čtvrté a I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ mají rovnoběžné odpovídající si strany, takže jsou si podobné. Vyjádřeme poloměry kružnice vepsané a opsané trojúhelníku $A'B'C'$ pomocí r.

Bod I má z rovnoběžnosti od všech stran trojúhelníka $A'B'C'$ vzdálenost $2 - r$, proto je středem kružnice jemu vepsané a tato má poloměr právě $2 - r$. Podobně má bod O díky dotykům kružnic od všech vrcholů trojúhelníka $A'B'C'$ vzdálenost $r + r = 2r$, takže je středem kružnice jemu opsané a tato má poloměr právě $2r$. Využitím podobnosti trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ tak máme

$$\frac{2-r}{2r} = \frac{2}{5},$$

což dává $r = \frac{10}{9}$.

Úloha 54J / 44S. Pro reálná čísla a, b, x, y platí

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42. \end{aligned}$$

Určete hodnotu $ax^5 + by^5$.

Výsledek. 20.

Řešení. Rozmyslíme si, že pro každé přirozené n platí

$$\big(ax^n + by^n\big)(x+y) = \big(ax^{n+1} + by^{n+1}\big) + xy\big(ax^{n-1} + by^{n-1}\big).$$

Označme $t = x+y$, $s = xy$ a dosaďme do předchozího vztahu postupně $n = 2, 3$. Dostaneme tak soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 7t &= 16 + 3s, \\ 16t &= 42 + 7s. \end{aligned}$$

Řešením soustavy jsou $t = -14$, $s = -38$. Nakonec stačí do prvního vztahu dosadit $n = 4$, čímž dostaneme $42 \cdot (-14) = ax^5 + by^5 - 38 \cdot 16$ a dopočteme $ax^5 + by^5 = 20$.