Aufgabe 1J. Zähler a und Nenner b von Juan's Bruch sind positive ganze Zahlen, deren Summe 2011 ist. Der Wert dieses Bruches ist kleiner als $\frac{1}{3}$. Finde den größten solchen Bruch.

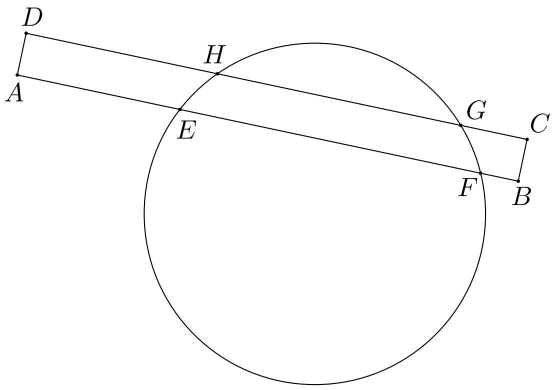
Ergebnis: $\frac{502}{1509}$

Lösungsweg: Offensichtlich gilt $a < 2011$, so dass die Ungleichung

$$\frac{a}{2011 - a} < \frac{1}{3}$$

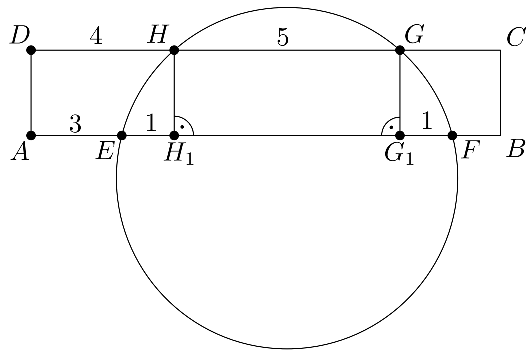
aufgestellt werden kann. Das kann zu $4a < 2011$ umgeformt werden, woraus folgt, dass der größtmögliche Wert für $a = 502$ ist, so dass der kleinstmögliche Wert für $b = 1509$ ist, was die Lösung $\frac{502}{1509}$ ergibt.

Aufgabe 2J. Das Rechteck $ABCD$ schneidet einen Kreis, wie in der Zeichnung dargestellt, in den Punkten E, F, G und H. Wenn $\overline{AE} = 3$, $\overline{DH} = 4$ und $\overline{GH} = 5$ ist, finde $\overline{EF}$.



Ergebnis: 7

Lösungsweg: Seien G_1 und H_1 die Projektionen von G und H auf die Strecke AB. Dann erhält man $\overline{H_1G_1} = \overline{HG} = 5$. Ebenfalls ergibt sich $\overline{EH_1} = \overline{G_1F}$ und $\overline{EH_1} = \overline{DH} - \overline{AE} = 1$, woraus $\overline{EF} = \overline{EH_1} + \overline{H_1G_1} + \overline{G_1F} = 7$ folgt.



Aufgabe 3J. Finde die Quersumme der Zahl $1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \cdots + 1\underbrace{0\ldots0}_{50}1$.

Ergebnis: 58

Lösungsweg: Die gegebene Zahl ist gleich

$$\begin{aligned}
&1 + 11 + 101 + 1001 + 10001 + \cdots + 1\underbrace{0\ldots0}_{50}1 = \\
&\qquad = 1 + (10 + 1) + (100 + 1) + (1000 + 1) + \cdots + (1\underbrace{0\ldots0}_{51} + 1) = \underbrace{11\ldots11}_{51}0 + 52 = \underbrace{11\ldots11}_{50}62.
\end{aligned}$$

Daraus erkennt man, dass die Quersumme der Zahl 58 ist.

Aufgabe 4J. T-Shirts werden in drei Farben hergestellt, rot, grau und blau. Die Anzahl der roten T-Shirts ist um sechs kleiner als die Anzahl der blauen und grauen T-Shirts zusammen. Zusätzlich ist die Anzahl der grauen T-Shirts um zehn kleiner als die Anzahl der roten und blauen T-Shirts zusammen. Wie viele blaue T-Shirts wurden hergestellt?

Ergebnis: 8

Lösungsweg: Seien r, g, b die Anzahlen der roten, grauen und blauen T-Shirts. Dann erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} r &= g + b - 6, \\ g &= r + b - 10. \end{aligned}$$

Durch Addieren dieser beiden Gleichungen ergibt sich $b = 8$.

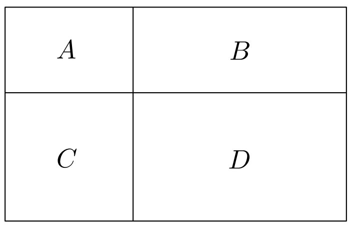
Aufgabe 5J. Es liegen 33 Walnüsse auf dem Tisch in mindestens zwei Haufen. Jeder Haufen besteht aus mindestens zwei Walnüssen. Nachdem von jedem Haufen eine Walnuss auf den ersten Haufen gelegt wurde, sind auf allen Haufen gleich viele Walnüsse. Wie groß ist die Anzahl der Haufen? Finde alle Möglichkeiten.

Ergebnis: 3

Lösungsweg: Es seien k Haufen ($k \geq 2$). Für $i = 1, \ldots, k$ sei $n_i \geq 2$ die Anzahl der Nüsse des i-ten Haufens. Da nach Umverteilung der Nüsse auf allen Haufen gleich viele Nüsse liegen, muss vorher $n_2 = n_3 = \ldots = n_k$ gewesen sein. Außerdem hat man $n_1 + (k-1)n_2 = 33$ und $n_1 + (k-1) = n_2 - 1$. Zieht man von der ersten Gleichung die zweite ab, so ergibt sich $(k-1)(n_2 - 1) = 33 - (n_2 - 1)$. Dies lässt sich umformen zu $k \cdot (n_2 - 1) = 33$. Offensichtlich kann k nicht 33 sein. Wäre $k = 11$, dann wäre $n_2 = 4$, womit $n_1 + (k-1) = n_2 - 1$ nicht erfüllbar wäre. Wegen $k \geq 2$ bleibt nur noch die Möglichkeit $k = 3$ übrig. In diesem Fall ist $n_2 = 12$ und alle gestellten Bedingungen sind erfüllt.

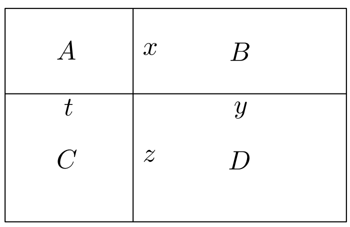
Es gibt also nur die eine Möglichkeit, dass es 3 Haufen sind.

Aufgabe 6J. Ein Rechteck wird von zwei zu den Seiten parallelen Geraden in vier kleinere Rechtecke geteilt. Diese werden wie in der Zeichnung mit A, B, C und D bezeichnet. Die Umfangslängen von A, B und C seien 2, 4 und 7. Finde alle möglichen Umfangslängen für D.



Ergebnis: 9

Lösungsweg: Seien x, y, z und t die Längen der Seiten der vier Rechtecke, wie in der Zeichnung, und seien u_A, u_B, u_C, u_D die Umfangslängen der vier Rechtecke. Dann gilt $u_A + u_D = 2(t + x) + 2(y + z) = 2(x + y) + 2(t + z) = u_B + u_C$, woraus sich $u_D = 4 + 7 - 2 = 9$ ergibt.



Aufgabe 7J. Finde paarweise verschiedene Ziffern A, B und C, die folgendes Kryptogramm lösen:

$$\begin{array}{r} A \\ AB \\ +\,ABC \\ \hline =BCB \end{array}$$

Ergebnis: $A = 6$, $B = 7$, $C = 4$

Lösungsweg: Aus $A + 10A + B + 100A + 10B + C = 100B + 10C + B$ folgt $111A = 90B + 9C$. Deshalb gilt $9 \mid 111A$, woraus $3 \mid A$ folgt.

Aus $A = 3$ würde $B = 3$ und $C = 7$ folgen, dann wären aber A, B, C nicht paarweise verschieden.

Aus $A = 6$ folgt $B = 7$ und $C = 4$.

Aus $A = 9$ würde $111 = 10B + C$ folgen, was die Voraussetzung, dass B und C Ziffern sind, nicht erfüllt.

Deshalb ist die einzige Lösung $A = 6$, $B = 7$, $C = 4$.

Aufgabe 8J. Finde den Flächeninhalt eines Rechtecks mit Umfang 10 cm und einer Diagonalenlänge von $\sqrt{15}$ cm.

Ergebnis: $5\,\mathrm{cm}^2$

Lösungsweg: Seien a und b die Seiten des Rechtecks. Dann erhält man $2(a + b) = 10$ und $a^2 + b^2 = 15$, so dass $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 5^2 - 15 = 10$ folgt. Daraus ergibt sich der Flächeninhalt zu $5\,\mathrm{cm}^2$.

Aufgabe 9J. Andrei nahm N^3 gleich große weiße Würfel und baute aus diesen einen großen $N \times N \times N$-Würfel. Anschließend färbte er dessen Oberfläche rot. Finde N unter der Bedingung, dass nun ein Zehntel der Oberfläche aller Würfel gefärbt ist.

Ergebnis: 10

Lösungsweg: Sei S die Fläche einer Seite eines kleinen Würfels. Dann ist die Summe der Oberflächeninhalte aller Würfel $6 \cdot S \cdot N^3$ und die Oberfläche des großen Würfels $6 \cdot S \cdot N^2$. Laut Aufgabenstellung gilt nun $6 \cdot S \cdot N^2 = \frac{1}{10} \cdot 6 \cdot S \cdot N^3$, woraus $N = 10$ folgt.

Aufgabe 10J. Was ist die kleinstmögliche Mitgliederzahl eines Mathezirkels, in dem der Anteil der Mädchen größer als 48,5% und kleiner als 50% ist.

Ergebnis: 35

Lösungsweg: Sei m die Anzahl der Mädchen im Mathezirkel und sei N die Gesamtzahl der Mitglieder. Laut Aufgabenstellung gilt nun $\frac{48{,}5}{100} \cdot N < m < \frac{N}{2}$, so dass man $N = 2m + a$ mit einer ganzen Zahl $a > 0$ und $97N = 200m - b$ mit einer ganzen Zahl $b > 0$ schreiben kann. Die letzte Gleichung kann zu $97(2m + a) = 200m - b$ bzw. dazu äquivalent zu $97a + b = 6m$ umgeformt werden.

Wenn $a = 1$ ist, dann ist 5 der kleinste Wert für b, der die Gleichung erfüllt, was zu $m = 17$ und $N = 35$ führt.

Wenn $a \geq 2$ ist, dann gilt $6m > 194$ und $m \geq 33$, was $N \geq 67$ bedeutet. Deshalb führt $a = 1$ zum kleinsten Wert für N, nämlich $N = 35$.

Aufgabe 11J / 1S. Wenn man die Nummer dieser Aufgabe (nämlich 11) um n erhöht, erhält man die Nummer der schwierigsten Aufgabe. Wenn man aber die Nummer dieser Aufgabe um eine zweistellige Zahl k erhöht, erhält man die Nummer der leichtesten Aufgabe. Desweiteren ist $n^3 = k^2$ gegeben. Finde n und k unter der Voraussetzung, dass noch 44 Aufgaben einschließlich dieser übrig sind.

Ergebnis: $n = 9$, $k = 27$

Lösungsweg: Damit k^2 eine Kubikzahl ist, muss k selbst auch eine Kubikzahl sein. Die einzige zweistellige Kubikzahl unter 44 ist 27, was die Lösung $n = 9$ und $k = 27$ ergibt.

Aufgabe 12J / 2S. Finde die positive ganze Zahl n, die $6666^2 + 8888^2 = n^2$ erfüllt.

Ergebnis: 11110

Lösungsweg: Umformung der Gleichung ergibt

$$n = \sqrt{1111^2 \cdot 6^2 + 1111^2 \cdot 8^2} = 1111\sqrt{36 + 64} = 11110.$$

Aufgabe 13J / 3S. Finde die kleinste positive ganze Zahl, die auf 17 endet, die durch 17 teilbar ist und deren Quersumme 17 ist.

Ergebnis: 15317

Lösungsweg: Die Zahl kann als $100 \cdot a + 17$ für ein $a \in \mathbb{N}_0$ geschrieben werden. Da 17 teilerfremd zu 100 ist, muss a durch 17 teilbar sein und Quersumme $17 - 8 = 9$ haben. Deshalb ist a auch ein Vielfaches von 9. Das kleinste a, das beide Bedingungen erfüllt, ist 153. Also ist 15317 die Lösung.

Aufgabe 14J / 4S. Jedes Paar aufeinander folgender Ziffern einer 2011-stelligen Zahl ist entweder ein Vielfaches von 17 oder 23. Die letzte Ziffer der Zahl ist 1. Finde die erste Ziffer.

Ergebnis: 3

Lösungsweg: Wenn man alle zweistelligen Vielfachen von 17 und 23 aufschreibt, erkennt man, dass jede einzelne Ziffer genau einmal als Endziffer vorkommt. So kann man die Zahl aus ihrem Ende ...92346 92346 851 rekonstruieren. Durch Ausnutzen der Periode kann man nun feststellen, dass die erste Ziffer 3 ist.

Aufgabe 15J / 5S. Eine positive ganze Zahl wird *fantastisch* genannt, wenn jede andere positive Zahl mit der gleichen Quersumme größer ist. Wie viele dreistellige fantastische Zahlen gibt es?

Ergebnis: 9

Lösungsweg: Zuerst erkennt man, dass es für jede Quersumme $k \in \mathbb{N}$ genau eine kleinste positive Zahl mit dieser Quersumme gibt, d.h. eine fantastische Zahl. Diese bezeichnen wir mit a_k. Die Zahlen $a_1, \ldots, a_{18}$ sind höchstens zweistellige Zahlen, während $a_{28}, a_{29}, \ldots$ mehr als drei Stellen haben. Weil die Quersummen dreistelliger Zahlen alle Zahlen zwischen 19 und 27 abdecken, haben $a_{19}, \ldots, a_{27}$ sicherlich drei Stellen. Deshalb gibt es 9 fantastische Zahlen.

Aufgabe 16J / 6S. Tim hat reelle Zahlen x, y und z gefunden, die $\frac{x-y}{z-y} = -10$ erfüllen. Was sind die möglichen Werte von $\frac{x-z}{y-z}$?

Ergebnis: 11

Lösungsweg:

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{(x-y)+(y-z)}{y-z} = \frac{x-y}{y-z} + \frac{y-z}{y-z} = 10 + 1 = 11.$$

Aufgabe 17J / 7S. Die Ziffern $1, 2, \ldots, 9$ werden irgendwie in einer Reihe angeordnet, um eine neunstellige Zahl zu bilden. Bilde alle Tripel von aufeinander folgenden Ziffern und summiere die entsprechenden sieben dreistelligen Zahlen. Was ist das größte Ergebnis, das erreicht werden kann?

Ergebnis: 4648

Lösungsweg: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_9$ die Ziffern. Dann lauten die Tripel

$$100a_1 + 10a_2 + a_3,\ 100a_2 + 10a_3 + a_4,\ 100a_3 + 10a_4 + a_5,\ \ldots,\ 100a_7 + 10a_8 + a_9,$$

so dass ihre Summe

$$100a_1 + 110a_2 + 111a_3 + \cdots + 111a_7 + 11a_8 + a_9$$

lautet.

Um das Ergebnis zu maximieren, muss man a_3 bis a_7 mit den höchsten Ziffern besetzen und $a_2 = 4$, $a_1 = 3$, $a_8 = 2$ und $a_9 = 1$ wählen.

Dann erhält man

$$111 \cdot (5 + \cdots + 9) + 4 \cdot 110 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 11 + 1 \cdot 1 = 4648.$$

Aufgabe 18J / 8S. In jede Zelle eines 10×10-Quadrats wird eine reelle Zahl geschrieben. Emily schrieb alle Produkte zweier Zahlen in verschiedenen Zellen auf und stellte fest, dass genau 1000 dieser Produkte negativ waren. Wie oft war die Zahl 0 in dem Quadrat vorhanden? Finde alle Möglichkeiten.

Ergebnis: 30, 35

Lösungsweg: Seien p und n die Anzahlen der positiven und negativen Zahlen im Quadrat. Laut Angabe muss $p + n \leq 100$ und $p \cdot n = 1000$ gelten, was zu den vier Lösungen

$$(p, n) \in \{(20, 50), (25, 40), (40, 25), (50, 20)\}$$

führt. Also kann die Zahl 0 entweder 30- oder 35-mal vorkommen.

Aufgabe 19J / 9S. Das Mathekönigreich begann neue Münzen zu prägen. Am ersten Tag stellten sie Münzen mit dem Wert 1 MD (Mathedollar) her. An jedem weiteren Tag produzierten sie Münzen mit dem kleinsten Wert, der nicht mit höchstens zehn aktuellen Münzen gezahlt werden konnte. Welche Münzen haben sie am 2011. Tag geprägt?

Ergebnis: 20101

Lösungsweg: Man beweist durch Induktion, dass das Königreich am k-ten Tag Münzen mit dem Wert von $10(k-1)+1$ prägt. Das Ergebnis 20101 erhält man durch Einsetzen von $k = 2011$.

$k = 1$ ist klar. $k = 2$: Der kleinste Wert, der mit zehn 1 MD-Münzen nicht gezahlt werden kann, ist $11 = 10(k-1)+1$.

Nach Induktionsvoraussetzung werden am k-ten Tag Münzen mit dem Wert $10(k-1)+1$ geprägt, da $10(k-1)+1$ der kleinste Wert ist, der nicht mit höchstens 10 Münzen der Sorten $10(i-1)+1$ für $1 \leq i \leq k-1$ gezahlt werden kann.

Am $(k+1)$-ten Tag können dann alle Werte bis $10 \cdot k$ mit höchstens 10 Münzen gezahlt werden, entweder nach Induktionsvoraussetzung oder durch $(10(k-1)+1)+j$ für $1 \leq j \leq 9$. Andererseits kann der Wert $(10(k-1)+1)+10$ aber nicht mit höchstens 10 Münzen bezahlt werden, da sowohl $10k+1$ als auch alle anderen Münzen beim Teilen durch 10 Rest 1 lassen. Also werden nun Münzen mit dem Wert $10k+1$ geprägt.

Aufgabe 20J / 10S. Sei p die Lösung dieser Aufgabe. Finde die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Punkt in einem Einheitsquadrat mindestens p Einheiten von allen Seiten entfernt ist.

Ergebnis: $\frac{1}{4}$

Lösungsweg: Ein Punkt ist nicht näher als p an irgendeiner Seite genau dann, wenn er in einem kleinen Quadrat mit Seitenlänge $1 - 2p$ liegt. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit als Flächenanteil

$$\frac{(1-2p)^2}{1^2} = p.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich $p = \frac{1}{4}$, welche die Bedingungen erfüllt, und $p = 1$, was nicht möglich ist.

Aufgabe 21J / 11S. Ein 3×3-Quadrat wird mit ganzen Zahlen so ausgefüllt, dass die Zeilensummen von oben nach unten um jeweils zwei wachsen, während sich die Spaltensummen von links nach rechts jeweils verdoppeln. Weiter ist bekannt, dass die Summe in einer der Zeilen 2011 beträgt. Finde die Spaltensumme der linken Spalte.

Ergebnis: 861

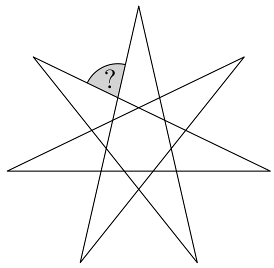
Lösungsweg: Sei a die Summe der Zahlen in der ersten Zeile und sei b die Summe der Zahlen in der Spalte, die am weitesten links liegt. Dann kann man die Summe der Zahlen im Quadrat auf zwei Arten berechnen und erhält $a + (a+2) + (a+4) = 3a + 6 = 7b = b + 2b + 4b$. Durch Ausprobieren der drei Fälle, in welcher Zeile die Summe 2011 steht, erhalten wir als einzige Lösung $b = 861$.

Aufgabe 22J / 12S. Auf jeder Seite des Flusses liegt ein Boot. Beide segeln mit konstanter Geschwindigkeit (nicht unbedingt mit der gleichen) aufeinander zu. Wenn sie sich das erste Mal treffen, sind sie vom einen Ufer 100 m entfernt. Nachdem sie am Ufer des Flusses angekommen sind, wenden sie und fahren wieder aufeinander zu. Dieses Mal treffen sie sich 70 m vom anderen Ufer entfernt. Wie breit ist der Fluss?

Ergebnis: 230 m

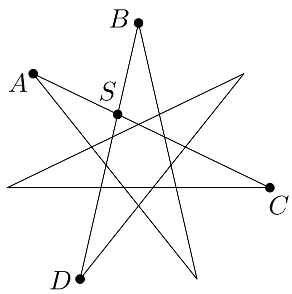
Lösungsweg: Sei b die Breite des Flusses in Metern. Als sich die Boote zum ersten Mal trafen, waren sie zusammen b Meter gefahren. Bis zum zweiten Treffen waren sie $3b$ Meter gefahren. Für das Boot, das vor dem ersten Treffen 100 m gefahren ist, kann man aufgrund der konstanten Geschwindigkeit die Gleichung $3 \cdot 100 = b + 70$ aufstellen, was zu $b = 230$ führt. Also ist der Fluss 230 m breit.

Aufgabe 23J / 13S. Die Ecken eines Sternes formen ein regelmäßiges Siebeneck. Wie groß ist der markierte Winkel?



Ergebnis: $\frac{3\pi}{7} = 77^\circ + \frac{1^\circ}{7}$

Lösungsweg: Die Punkte A, B, C und D werden wie in der Zeichnung bezeichnet. Dreht man nun die Strecke AC um den Mittelpunkt der Figur gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel $2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{7}$, so erhält man die Strecke DB. Deshalb beträgt $\angle ASD = \frac{4\pi}{7}$ und, da $\angle BSA$ Nebenwinkel ist, gilt $\angle BSA = \frac{3\pi}{7}$, was $\frac{540^\circ}{7} = 77^\circ + \frac{1^\circ}{7}$ entspricht.



Aufgabe 24J / 14S. Finde dasjenige x, das die Gleichung

$$2^{2^{3^{2^2}}} = 4^{4^x}$$

erfüllt.

Ergebnis: 40

Lösungsweg: Schreibt man die rechte Seite um zu

$$4^{4^x} = (2^2)^{(2^2)^x} = 2^{2 \cdot 2^{2x}} = 2^{2^{2x+1}},$$

so muss $2x + 1 = 3^{2^2} = 81$ gelten. Also ist $x = 40$.

Aufgabe 25J / 15S. Wie viele Tripel positiver ganzer Zahlen (a, b, c) gibt es, die gleichzeitig die Gleichung

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11$$

und die Ungleichung $a + b + c \leq 30$ erfüllen?

Ergebnis: 24

Lösungsweg: Schreibt man $1 = \frac{a}{a}$ im Zähler und $1 = \frac{b}{b}$ im Nenner, so erhält man

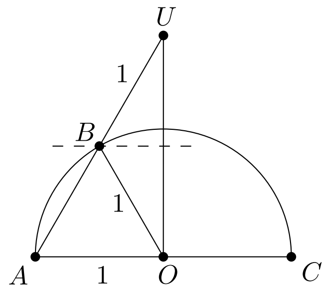
$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = \frac{a\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)}{b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{a}{b} = 11.$$

Wenn $b = 1$ und $a = 11$ gilt, so sind für c die Werte $1, 2, \ldots, 18$ möglich. Im Fall $b = 2$ und $a = 22$ kommen für c die Werte $1, 2, \ldots, 6$ in Frage. Für $b \geq 3$ erhält man $a \geq 33$, so dass die verlangte Ungleichung $a + b + c \leq 30$ nicht mehr erfüllbar ist. Es kommen daher keine weiteren Lösungen hinzu. Insgesamt ergeben sich also 24 Tripel.

Aufgabe 26J / 16S. In der Ebene liegt ein Kreis k mit Radius 1, Mittelpunkt O und Durchmesser AC. Man zeichnet eine Gerade g durch den Punkt O, so dass sie senkrecht auf AC steht. Der Punkt U auf g wird so gewählt, dass U außerhalb von k liegt. Ferner bezeichnet man den zweiten Schnittpunkt von AU und k mit B und setzt voraus, dass $\overline{BU} = 1$ ist. Finde die Länge von OU.

Ergebnis: $\sqrt{3}$

Lösungsweg: Da $\overline{OB} = 1 = \overline{BU}$ ist, ist das Dreieck $\triangle BOU$ gleichschenklig. Deshalb liegt B auf einer Mittelsenkrechten von $\triangle BOU$ und auch auf der Hypotenuse von $\triangle AOU$, so dass B nach dem Strahlensatz auch der Mittelpunkt der Hypotenuse ist. Deshalb ist $\overline{AB} = 1$ und mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich die Lösung $\overline{OU} = \sqrt{3}$.



Aufgabe 27J / 17S. Zwei Nationen A und B kämpfen gegeneinander mit insgesamt 1000 beteiligten Soldaten. Die Armeen wechseln sich mit dem Angreifen ab. Bei jedem Angriff schießt jeder Soldat der angreifenden Armee einen Soldaten der feindlichen Armee nieder. Die Schlacht endet (nicht unbedingt durch die Vernichtung einer der Seiten) nach drei Angriffen (zuerst schießt A, dann B und schließlich wieder A). Welche ist die kleinste garantierte Anzahl an Überlebenden?

Ergebnis: 200

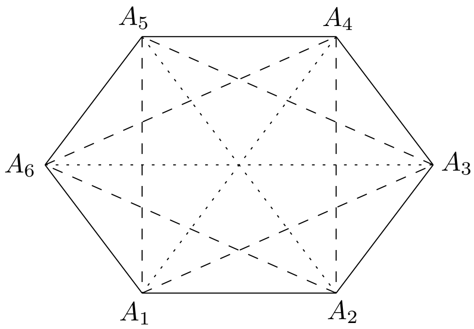
Lösungsweg: Angenommen n Soldaten überleben, es gehören a von ihnen $(a \leq n)$ zu A und $n - a$ zu B. Die Anzahl der Soldaten in B vor dem dritten Angriff war dann $(n - a) + a = n$, und die Anzahl der Soldaten in A war a. In B waren vor dem zweiten Angriff n Soldaten und in A genau $a + n$. Schließlich waren anfangs $2n + a$ Soldaten in B und $a + n$ in A. Da es am Anfang 1000 Beteiligte waren, erhält man die Gleichung $3n + 2a = 1000$. Will man nun das kleinste n finden, so muss a möglichst groß sein. Wegen $a \leq n$ ist dies bei $a = n$ der Fall, also für $5n = 1000$. Es folgt $n = 200$.

Außerdem sieht man, dass in der Tat 200 überlebende möglich sind, wenn 400 Soldaten für A kämpfen und 600 für B.

Aufgabe 28J / 18S. Alle sechs Seiten eines konvexen Sechsecks $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ sind rot gefärbt. Jede der Diagonalen ist entweder rot oder blau gefärbt. Finde die Anzahl aller Färbungen, bei denen jedes Dreieck $\triangle A_iA_jA_k (i \neq j \neq k \neq i)$ mindestens eine rote Seite hat.

Ergebnis: $392 = 7 \cdot 7 \cdot 8$

Lösungsweg: Außer $\triangle A_1A_3A_5$ und $\triangle A_2A_4A_6$ (gestrichelt in der Zeichnung) haben alle anderen Dreiecke mindestens eine rote Kante. Jedes gestrichelte Dreieck kann auf $2^3 - 1 = 7$ verschiedene Arten mit mindestens einer roten Kante gefärbt werden. Schließlich gibt es 2^3 Möglichkeiten, die gepunkteten Diagonalen A_1A_4, A_2A_5 und A_3A_6 zu färben. Insgesamt hat man also $7 \cdot 7 \cdot 8 = 392$ mögliche Färbungen.



Aufgabe 29J / 19S. Malcom sagte sowohl Michal als auch Shri eine positive ganze Zahl. Außerdem sagte er ihnen, dass ihre Zahlen unterschiedlich sind und dass ihre Summe zweistellig ist. Dann fand die folgende Konversation statt:

- Michal: „Ich kann nicht feststellen, wer von uns die größere Zahl hat.“
- Shri: „Ich kann das ebenfalls nicht feststellen, aber ich sage dir, dass meine Zahl durch 17 teilbar ist.“
- Michal: „Wow! Nun kann ich die Summe unserer Zahlen bestimmen.“

Finde den Wert der Summe, unter der Voraussetzung, dass die Logik von Michal und Shri fehlerlos war.

Ergebnis: 51

Lösungsweg: Da keiner von beiden bestimmen kann, wessen Zahl größer ist, hat niemand eine Zahl größer oder gleich 50. Darüber hinaus kann Shris Zahl nur entweder 17 oder 34 sein, da sie durch 17 teilbar ist. Damit Michal die Summe der Zahlen bestimmen kann, muss er die andere haben (die Zahlen sind unterschiedlich!). Daher ist die Summe 51.

Aufgabe 30J / 20S. In einem Café sitzen 55 Gäste, Türken und Inder. Jeder von ihnen trinkt entweder Tee oder Kaffee. Ein Inder sagt die Wahrheit, wenn er Tee trinkt, und er lügt, wenn er Kaffee trinkt, während es bei den Türken genau andersherum ist. Auf die Fragen „Trinkst du Kaffee?“, “Bist du ein Türke?“ und „Regnet es draußen?“ gibt es 44, 33 und 22 positive Antworten. Wie viele Inder trinken Tee? Finde alle Möglichkeiten.

Ergebnis: 0

Lösungsweg: Stellt man Gleichungen auf, so findet man zwei Lösungen (abhängig davon, ob es draußen regnet oder nicht), von denen eine nicht funktioniert, da $\frac{11}{2}$ Inder Tee trinken würden, was unmöglich ist. Die andere Lösung funktioniert und deshalb trinken 0 Inder Tee:

Bezeichnet man die Anzahl der Türken, die Kaffee trinken, mit T_k, die Anzahl der Türken, die Tee trinken, mit T_t, die Anzahl der Inder, die Kaffee trinken, mit I_k, und die Anzahl der Inder, die Tee trinken, mit I_t, so kann man unter der Annahme, dass es draußen regnet, folgende Gleichungen finden:

$$\begin{aligned} I_t + T_k &= 22 \\ T_k + T_t &= 44 \\ I_k + T_k &= 33 \\ T_k + T_t + I_k + I_t &= 55. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die letzte Gleichung von der Summe der drei ersten, so erhält man $2\ T_k = 44$ und hieraus die Lösungen $T_k = 22,\ T_t = 22,\ I_k = 11$ und $I_t = 0$. Analoge Überlegungen führen unter der Annahme, dass es draußen nicht regnet, auf den Widerspruch $2I_t = 11$.

Aufgabe 31J / 21S. Drei Ziffern werden an das Ende einer positiven ganzen Zahl A geschrieben. Die daraus resultierende Zahl ist gleich der Summe der Zahlen von 1 bis A. Finde alle möglichen Werte für A.

Ergebnis: 1999

Lösungsweg: Sei B die dreistellige Zahl, die ans Ende von A geschrieben wird. Da $1 + 2 + \cdots + A = \frac{1}{2} \cdot A(A + 1)$ ist, kann man

$$1000A + B = \frac{1}{2} \cdot A(A + 1)$$

schreiben, was zu $2B = A(A - 1999)$ umformt werden kann. Die linke Seite kann Werte von 0 bis $2 \cdot 999$ annehmen, während die rechte Seite für $A \leq 1998$ negativ und für $A \geq 2000$ größer als $2000 \cdot 1$ ist. Somit bleibt nur noch $A = 1999$ übrig, was dieses Problem mit $B = 000$ löst.

Aufgabe 32J / 22S. Alice, Betty, Claudia, Daniel und Eli spielten ein Tischtennis-Doppeltunier. Jedes Paar spielte gegen jedes andere Paar genau ein Mal. Alice gewann 12 Spiele und Betty 6 Spiele. Wie viele Spiele konnte Claudia gewinnen? Finde alle Möglichkeiten.

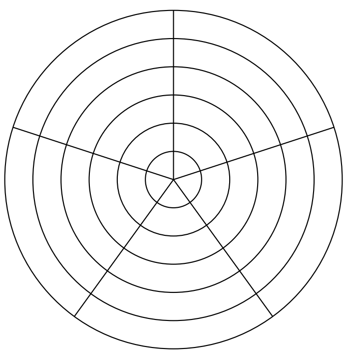
Ergebnis: 4

Lösungsweg: Jeder Spieler hat 12 Spiele gespielt (es gibt 4 Möglichkeiten für den Doppelpartner und 3 Möglichkeiten für die Wahl der Gegner). Also hat Alice alle ihre Spiele gewonnen und Betty alle Spiele bis auf die gegen Alice, da sie sechsmal zusammen mit Alice gespielt (und gewonnen) hat. Das stellt sicher, dass alle Spielausgänge bekannt sind: Entweder hat das Doppel, in dem Alice war, gewonnen oder dasjenige, in dem Betty war, falls Alice nicht mitgespielt hat. Claudia hat drei Spiele mit Alice und eines mit Betty gewonnen, insgesamt also 4 Spiele.

Aufgabe 33J / 23S. Auf dem gegebenen Spielplan mit 30 Feldern führen zwei Spieler ein Spiel nach folgenden Regeln durch:

- Sie ziehen abwechselnd.
- In einem Zug färbt ein Spieler genau ein Feld.
- Im ersten Zug kann nur ein Feld im äußeren Ring gefärbt werden. In jedem weiteren Zug darf nur ein benachbartes Feld, das noch nicht gefärbt ist und nicht weiter als dieses vom Zentrum entfernt ist, gefärbt werden.
- Falls ein Feld gefärbt ist, darf es nicht noch einmal gefärbt werden.
- Der Spieler, der keinen Zug mehr ausführen kann, verliert.

Wie viele Felder sind am Ende des Spiels gefärbt, wenn beide Spieler perfekt spielen und derjenige Spieler, der nicht gewinnen kann, versucht, das Spiel so lange wie möglich zu machen?



Ergebnis: 18

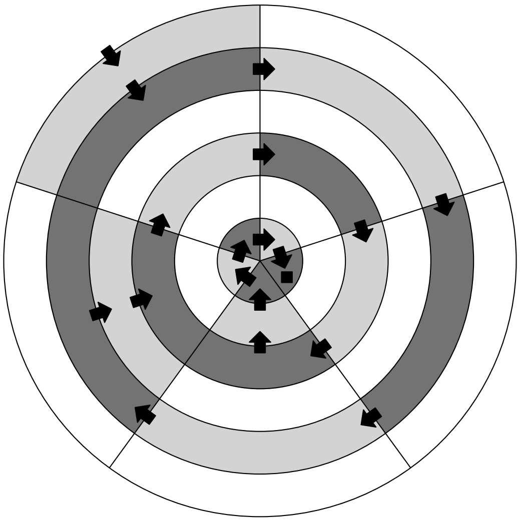
Lösungsweg: Die 30 Felder bilden sechs Ringe, die von 1 bis 6 durchnummeriert werden, wobei mit 1 der äußerste Ring bezeichnet wird. Der aktuelle Ring sei derjenige, der das zuletzt gefärbte Feld enthält.

Der zweite Spieler hat folgende Gewinnstrategie:

- Wenn die Nummer des aktuellen Rings ungerade ist, so färbt er ein Feld im nächsten Ring.
- Andernfalls enthält der aktuelle Ring eine ungerade Anzahl an freien Feldern. Er färbt dann ein Feld in diesem Ring, nämlich das benachbarte zum zuletzt gefärbten.

Diese Strategie zwingt den ersten Spieler in Positionen, in denen sowohl die Nummer des Ringes gerade ist als auch die Anzahl der freien Felder in ihm. Da jeder Zug aus einer solchen Position darin resultiert, dass entweder die Nummer des Ringes oder die Anzahl der freien Felder im aktuellen Ring ungerade ist, hat der zweite Spieler immer die Möglichkeit zu ziehen und der erste wird irgendwann am Zug sein, wenn der aktuelle Ring 6 ist und keine Felder mehr frei sind, d.h. wenn kein Zug mehr möglich ist.

Wenn nun der zweite Spieler die Gewinnstrategie verfolgt (was er tun muss, da ansonsten der andere Spieler sie anwenden könnte), so kann der erste Spieler seinen unausweichlichen Verlust dadurch so lang wie möglich hinauszögern, dass er möglichst lange im gleichen Ring zieht. Der Spielverlauf sieht dann etwa so aus:

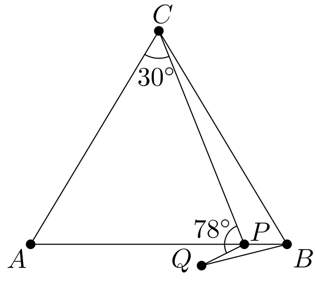


Bei perfektem Spiel beider Spieler sind am Ende 18 Felder gefärbt.

Aufgabe 34J / 24S. Im Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, sei P ($P \neq B$) ein Punkt auf der Seite AB mit $\overline{PB} < \overline{PA}$ und $\angle ACP = 30°$. Außerdem sei Q ein Punkt mit $\angle CPQ = 78°$, wobei C und Q auf unterschiedlichen Seiten von AB liegen. Bestimme alle möglichen Werte des Winkels $\angle BQP$, wenn alle Innenwinkel in den Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle BQP$ ganzzahlige Werte (in Grad) besitzen.

Ergebnis: 1°

Lösungsweg:



Wegen $\angle PAC = \angle CBA < \angle CPA$ und $\angle PAC + \angle CPA = 180° - 30° = 150°$ gilt $\angle PAC < 75°$. Da die Winkel ganzzahlig sein müssen, erhält man sogar $\angle PAC \leq 74°$ und $\angle CPA \geq 76°$.

Andererseits ist $\angle APQ = \angle PBQ + \angle BQP \geq 1° + 1° = 2°$, also

$$78° = \angle CPQ = \angle CPA + \angle APQ \geq 76° + 2° = 78°.$$

Deshalb muss überall Gleichheit gelten, so dass $\angle BQP = 1°$ sein muss.

Aufgabe 35J / 25S. Zehn Personen sitzen in einem Theater nebeneinander in einer Reihe. Nach einer Pause sitzen sie in einer neuen Reihenfolge und zwar so, dass zwei Personen wieder an ihrem vorherigen Platz sitzen und die übrigen acht neben ihrem vorherigen Platz. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?

Ergebnis: 15

Lösungsweg: Die Person am linken Ende der Reihe hat entweder ihren Platz behalten oder mit dem Nachbarn getauscht. Das gleiche Argument gilt für die nächste Person, deren Platz noch nicht feststeht. Jede Person hat also entweder ihren Platz behalten oder mit einem ihrer Nachbarn den Platz getauscht. Also kann jede neue Sitzordnung wie folgt durch ein Tupel von sechs Buchstaben dargestellt werden: Zwei der Buchstaben sind ein S, wobei jedes S eine Person bezeichnet, die ihren Sitz behalten hat. Vier der Buchstaben sind ein P, wobei jedes P für ein Paar nebeneinander sitzender Personen steht, die ihren Platz getauscht haben. Also gibt es insgesamt $\binom{6}{2} = 15$ Möglichkeiten.

Aufgabe 36J / 26S. Auf jede Seitenfläche eines Würfels wird eine natürliche Zahl geschrieben. Jeder Ecke wird das Produkt der Zahlen auf den drei Flächen zugewiesen, die an dieser Ecke zusammentreffen (Eckenprodukt). Die Summe der Eckenprodukte sei 165. Welche Werte kann die Summe der Zahlen auf den Seitenflächen annehmen?

Ergebnis: 19

Lösungsweg: Man bezeichne die Zahlen auf den Seitenflächen mit a, b, c, d, e und f so, dass sich die Paare a und f, b und e bzw. c und d auf sich gegenüber liegenden Seiten des Würfels befinden. Dann ist

$$3 \cdot 5 \cdot 11 = 165 = (a+f)(b+e)(c+d),$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen durch Ausmultiplizieren direkt bestätigt wird. Da alle Zahlen von a bis f natürliche Zahlen sind, ist die rechte Seite das Produkt dreier natürlicher Zahlen, die alle größer oder gleich 2 sind. Also müssen sie (in irgendeiner Reihenfolge) 3, 5 und 11 sein, so dass als einzige Möglichkeit für die gesuchte Summe $3 + 5 + 11 = 19$ verbleibt. Andererseits kann eine solche Belegung leicht gefunden werden.

Aufgabe 37J / 27S. Zwei Fahrradfahrer fahren mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Strecke ein Rennen gegeneinander. Sie starten auf der gleichen Seite und immer, wenn sie an das Ende der Strecke gelangen, drehen sie um und fahren in die Gegenrichtung weiter. Irgendwann kommen sie gleichzeitig an einem der Endpunkte an. Zuvor hatte der langsamere Fahrer die Strecke insgesamt 35 Mal und der schnellere 47 Mal zurückgelegt. Wie oft haben sie sich entgegenkommend getroffen?

Ergebnis: 40

Lösungsweg: Das erste Mal treffen die beiden Radfahrer sich entgegenkommend, nachdem der schnellere von beiden seinen ersten Richtungswechsel gemacht hat. Anschließend erfordert ein Zusammentreffen, bei dem sich die Radfahrer entgegenkommen, jeweils zwei weitere Richtungswechsel. Dabei ist es egal, ob ein Radfahrer zwei Richtungswechsel macht oder ob beide jeweils einen machen. Insgesamt gibt es $34 + 46 = 80$ Richtungswechsel, so dass sie sich also 40 Mal entgegenkommend getroffen haben.

Aufgabe 38J / 28S. Bestimme die größte natürliche Zahl, bei der alle Ziffern (außer der ersten und der letzten) kleiner sind als das arithmetische Mittel der beiden benachbarten Ziffern.

Ergebnis: 96433469

Lösungsweg: Mit $a_1, \ldots, a_k$ seien die Ziffern der Zahl bezeichnet. Die Bedingung $a_i < \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_{i+1})$ für $2 \leq i \leq k-1$ kann zu $a_i - a_{i-1} < a_{i+1} - a_i$ umgeformt werden, was bedeutet, dass die Folge der Differenzen $a_i - a_{i-1}$ streng monoton wachsend sein muss $(2 \leq i \leq k)$.

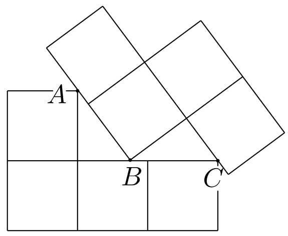
Falls für ein Index i die Differenz $a_i - a_{i-1}$ positiv ist, so können nach den beiden Ziffern $a_{i-1}a_i$ höchstens noch zwei weitere Ziffern stehen, denn falls es mehr als vier Ziffern in einer ansteigenden Folge geben würde, dann wäre die Differenz zwischen der ersten und der letzten Ziffer der Folge mindestens $1+2+3+4=10$, was zu einem Widerspruch führt.

Analoges gilt für den Fall, wenn für ein Index i die Differenz $a_i - a_{i-1}$ negativ ist.

Insgesamt können wir also maximal eine achtstellige Zahl bilden, die aus einer fallenden Folge von vier Ziffern gefolgt von einer steigenden Folge von vier Ziffern mit $a_4 = a_5$ besteht.

Um die Zahl nun möglichst groß zu machen, muss die erste Ziffer möglichst groß sein. Die erste Differenz $a_1 - a_2$ muss dann 3 sein, so dass man die Zahl 96433469 als Lösung erhält.

Aufgabe 39J / 29S. Zwei Tetrominos, die aus 1×1-Quadraten bestehen, berühren sich in den Punkten A, B und C wie in der Skizze abgebildet. Bestimme den Abstand $\overline{AB}$.



Ergebnis: $\frac{5}{4}$

Lösungsweg: Die rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypotenusen AB und BC sind aufgrund des WSW-Satzes kongruent. Sei x die kürzere Kathete. Dann ist $2 = x + \overline{BC} = x + \overline{AB}$ und mit dem Satz von Pythagoras folgt auch $x^2 + 1 = \overline{AB}^2$. Einsetzen von $x = 2 - \overline{AB}$ in diese Gleichung ergibt $\overline{AB} = \frac{5}{4}$.

Aufgabe 40J / 30S. Gegeben seien 100 Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in der Ebene. Jedes Paar wird durch eine Strecke verbunden. Bestimme die Mindestanzahl an Strecken, die einen Mittelpunkt mit ebenfalls ganzzahligen Koordinaten besitzen.

Ergebnis: $1200 = 4 \cdot \binom{25}{2}$

Lösungsweg: Der Mittelpunkt einer Strecke hat genau dann ganzzahlige Koordinaten, wenn sowohl die x-Koordinaten der Endpunkte als auch die y-Koordinaten der Endpunkte gleiche Parität haben . Also muss man die Punkte in vier Teilmengen T_1, T_2, T_3, T_4 gemäß der Parität ihrer x- und y-Koordinaten aufteilen. In T_i seien t_i Punkte $(1 \le i \le 4)$. Da es insgesamt 100 Punkte sind, gilt $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 100$. Die Anzahl A der Strecken, bei denen die Mittelpunkte ganzzahlige Koordinaten besitzen, berechnet sich demnach zu

$$A = \sum_{i=1}^{4} \binom{t_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} (t_i^2 - t_i) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{4} t_i^2 \right) - 50.$$

Aus der Mittelungleichung zwischen dem quadratischen und dem arithmetischen Mittel angewendet auf t_1, t_2, t_3 und t_4 folgt

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)} \ge \tfrac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) = 25$$

und nach Quadrieren

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 \ge 2500.$$

Benutzt man diese Ungleichung für eine Abschätzung von A, so erhält man

$$A \ge \tfrac{1}{2} \cdot 2500 - 50 = 1200.$$

Dabei steht hier genau dann das Gleichheitszeichen, wenn in der verwendeten Mittelungleichung der Gleichheitsfall eintritt. In diesem Fall ist $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 25$. Folglich ist 1200 die Mindestanzahl an Strecken, die einen Mittelpunkt mit ebenfalls ganzzahligen Koordinaten besitzen.

Aufgabe 41J / 31S. Eine fünfstellige Zahl wird *unzerbrechlich* genannt, wenn sie nicht als Produkt zweier dreistelliger Zahlen geschrieben werden kann. Bestimme die größtmögliche Anzahl aufeinander folgender unzerbrechlicher Zahlen.

Ergebnis: 99

Lösungsweg: Die zwei kleinsten zerbrechlichen Zahlen sind $100 \cdot 100 = 10000$ und $100 \cdot 101 = 10100$. Also sind die Zahlen $10001, 10002, \ldots, 10099$ genau 99 aufeinander folgende unzerbrechliche Zahlen. Andererseits enthält jede Folge von 100 aufeinander folgenden fünfstelligen Zahlen eine durch 100 teilbare Zahl, die offensichtlich zerbrechlich ist. Also ist die gesuchte Lösung 99.

Aufgabe 42J / 32S. Die reellen Zahlen x und y mögen $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$ erfüllen. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von $x^2 + y^2$.

Ergebnis: 1

Lösungsweg: Das Problem lässt sich geometrisch interpretieren. In einem ebenen Koordinatensystem mit Ursprung O stellt die Gleichung $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$ einen Kreis k mit Mittelpunkt $M\,(-5 \mid 12)$ und Radius 14 dar und der Punkt O liegt innerhalb dieses Kreises. Der Term $x^2 + y^2$ ist das Quadrat des euklidischen Abstands eines Punktes $(x \mid y)$ vom Ursprung, d.h. wir müssen einen Punkt auf k finden, dessen Abstand zum Ursprung am geringsten ist. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt P des Kreises k und der Geraden MO und hat den Abstand $\overline{MP} - \overline{MO} = 14 - \sqrt{5^2 + 12^2} = 14 - 13 = 1$.

Aufgabe 43J / 33S. Eine Folge sei definiert durch $a_1 = 20$, $a_2 = 11$ und für $n \geq 1$ durch

$$a_{n+2} = a_n - \frac{1}{a_{n+1}},$$

solange die rechte Seite wohldefiniert ist. Bestimme das kleinste t mit $a_t = 0$.

Ergebnis: 222

Lösungsweg: Solange die rechte Seite wohldefiniert ist, kann man die gegebene Gleichung mit a_{n+1} multiplizieren und erhält

$$a_{n+2}a_{n+1} = a_{n+1}a_n - 1.$$

Nun sieht man leicht, dass $a_1a_2 = 220$, $a_2a_3 = 219$, $\ldots$, $a_{220}a_{221} = 1$, $a_{221}a_{222} = 0$ gilt. Also ist $t = 222$.

Aufgabe 44J / 34S. Sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck mit den Höhen AA', BB' und CC' mit Höhenschnittpunkt H. Wenn $\overline{AH} : \overline{HA'} = 1$ und $\overline{BH} : \overline{HB'} = 2$ ist, so bestimme $\overline{CH} : \overline{HC'}$.

Ergebnis: 5

Lösungsweg: Für die Flächen gilt offensichtlich $F_{\triangle ABC} = F_{\triangle ABH} + F_{\triangle AHC} + F_{\triangle BCH}$. Da die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABH$ die Seite AB gemeinsam haben, ist das Verhältnis ihrer Flächen gleich dem Verhältnis ihrer Höhen auf die Seite AB. Analoges gilt für die Dreiecke $\triangle AHC$ und $\triangle BCH$. Man erhält

$$1 = \frac{F_{\triangle ABH} + F_{\triangle AHC} + F_{\triangle BCH}}{F_{\triangle ABC}} = \\ = \frac{\overline{C'H}}{\overline{C'H} + \overline{CH}} + \frac{\overline{B'H}}{\overline{B'H} + \overline{BH}} + \frac{\overline{A'H}}{\overline{A'H} + \overline{AH}} = \frac{\overline{C'H}}{\overline{C'H} + \overline{CH}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2},$$

woraus $\overline{C'H} : (\overline{C'H} + \overline{CH}) = \frac{1}{6}$ und $\overline{CH} : \overline{HC'} = (\overline{C'H} + \overline{CH}) : \overline{C'H} - 1 = 5$ folgt.

Aufgabe 45J / 35S. Jeder Gast einer Party (einschließlich des Gastgebers Tim) hat dort siebzehn Freunde, nämlich sieben Jungen und zehn Mädchen. Dabei ist Freundschaft symmetrisch und keiner ist sein eigener Freund. Bestimme die kleinste mögliche Anzahl an Personen auf dieser Party.

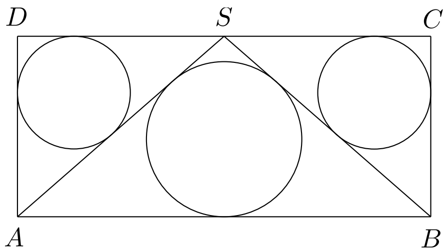
Ergebnis: 34

Lösungsweg: Mit j und m wird die Anzahl der Jungen bzw. Mädchen bezeichnet. Da die Freundschaft zwischen den Jungen und den Mädchen symmetrisch ist und da jeder der j Jungen 10 Freundinnen hat und ebenso jedes der m Mädchen 7 Freunde hat, gilt $10j = 7m$. Also ist die Anzahl der Jungen direkt proportional zur Anzahl der Mädchen. Es genügt deshalb, die Anzahl der Mädchen zu minimieren. Außerdem ist die Anzahl der Mädchen durch 10 teilbar. Da jedes Mädchen genau mit 10 anderen Mädchen befreundet ist, müssen es mindestens 11 sein. Also ist die kleinstmögliche Anzahl an Mädchen 20 und somit die kleinstmögliche Anzahl an Jungen 14.

Eine entsprechende Freundschaftsbeziehung für 34 Personen kann beispielsweise wie folgt konstruiert werden:

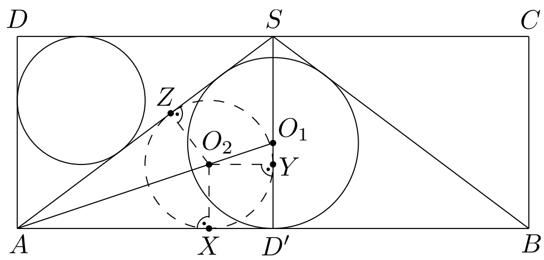
- Man teilt die Personen in zwei Gruppen von jeweils 10 Mädchen und 7 Jungen auf. In jeder Gruppe sei jeder Junge mit jedem Mädchen befreundet und umgekehrt. Dann hat jedes Mädchen 7 Freunde und jeder Junge 10 Freundinnen.
- Dann stellt man die Mädchen in einem Kreis auf. Jedes Mädchen sei nun mit den 10 Mädchen befreundet, die am nächsten bei ihm stehen.
- Dann stellt man die Jungen in einem Kreis auf. Jeder Junge sei nun mit den 6 Jungen befreundet, die am nächsten bei ihm stehen, und mit demjenigen, der ihm gegenüber steht.

Aufgabe 46J / 36S. Sei S der Mittelpunkt der Seite CD des Rechtecks $ABCD$. Die Inkreise der Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle BSC$ haben beide Radius 3 und der Inkreis des $\triangle ASB$ sei 4. Bestimme die Seitenlängen des Rechtecks.



Ergebnis: 9, 24

Lösungsweg: Mit D', O_1, O_2, X, Y und Z seien die Punkte wie in der Abbildung bezeichnet und ferner seien $\overline{AD} = a$ und $\overline{DS} = b$.



Da $\triangle ASD \cong \triangle AD'S$ ist, beträgt der Inkreisradius von $\triangle AD'S$ ebenfalls 3. Da Inkreismittelpunkte auf der Winkelhalbierenden liegen, liegt der Mittelpunkt O_2 des kleineren Inkreises auf der Geraden AO_1. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle AD'O_1$ und $\triangle AXO_2$ folgt $4/b = \overline{O_1D'} : \overline{D'A} = \overline{O_2X} : \overline{XA} = 3/(b-3)$, d.h. $b = 12$.

Da Tangentenabschnitte gleich lang sind, gilt $\overline{SZ} = \overline{SY} = a - 3$ und $\overline{AZ} = \overline{AX} = 12 - 3 = 9$. Der Satz des Pythagoras im Dreieck $\triangle AD'S$ ergibt dann die Gleichung $(a + 6)^2 = \overline{AS}^2 = a^2 + 12^2$, woraus $a = 9$ folgt, so dass die Seiten des Rechtecks 9 und 24 sind.

Aufgabe 47J / 37S. Alle echten Teiler einer positiven natürlichen Zahl n werden beginnend mit dem größten absteigend bis zum kleinsten aufgeschrieben. Wenn die erste Zahl die Summe der zweiten und der dritten ist, dann werde n *additiv* genannt. Wie viele additive Zahlen gibt es, die kleiner als 15000 sind?

Ergebnis: 1000

Lösungsweg: Angenommen n ist additiv. Falls n ungerade wäre, dann wären alle Teiler ebenfalls ungerade und damit die geforderte Bedingung nicht erfüllbar. Also muss n gerade sein, was zur Folge hat, dass der größte echte Teiler $\frac{n}{2}$ ist. Also müssen die beiden nächsten echten Teiler zusammen ebenfalls $\frac{n}{2}$ ergeben, was aufgrund unterschiedlicher Teiler nur möglich ist für $\frac{n}{3}$ und $\frac{n}{6}$.

Also ist n nur dann additiv, wenn seine ersten drei echten Teiler in absteigender Reihenfolge genau $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ und $\frac{n}{6}$ sind. Anders ausgedrückt sind die kleinsten Teiler von n dann 1, 2, 3 und 6 ist, aber nicht 4 oder 5. Von den Zahlen von 1 bis 15000 sind ein Sechstel, also 2500, durch 6 teilbar. Die Hälfte davon ist nicht durch 4 teilbar, so dass wir 1250 Zahlen haben, die $6 \mid n$ und $4 \nmid n$ erfüllen. Ein Fünftel davon ist durch 5 teilbar, so dass es insgesamt also 1000 additive Zahlen kleiner als 15000 gibt.

Aufgabe 48J / 38S. Bestimme alle reellen Zahlen x mit

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{50}{x-49} + \frac{49}{x-50}.$$

Ergebnis: 99, 0, $\frac{4901}{99} = 49\frac{50}{99}$

Lösungsweg: Setze $a = \frac{x-49}{50}$ und $b = \frac{x-50}{49}$. Dann kann die gegebene Gleichung als $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ geschrieben werden. Multiplikation mit ab ergibt nach Umformung $(a+b)(ab-1) = 0$. Dies führt zu zwei einfachen Fällen: Die Gleichung $a = -b$ ist linear in x mit der Lösung $x = \frac{4901}{99} = 49 + \frac{50}{99}$. Die Gleichung $ab = 1$ führt zu einer quadratischen Gleichung in x mit den Lösungen $x = 0$ und $x = 99$.

Aufgabe 49J / 39S. Eine Stellung des Minutenzeigers und des Stundenzeigers einer Uhr soll *zulässig* genannt werden, wenn sie innerhalb eines 12-Stunden-Zyklus vorkommt. Bestimme die Anzahl zulässiger Zeigerstellungen, die zulässig bleiben, wenn man den Minuten- und den Stundenzeiger vertauscht.

Ergebnis: 143

Lösungsweg: Mit h bzw. m werden die Winkel (gemessen in Grad, $0 \le h, m < 360$) zwischen dem Stundenzeiger bzw. dem Minutenzeiger und der Geraden durch den Mittelpunkt und 12 Uhr bezeichnet. Eine Zeigerstellung ist genau dann zulässig, wenn es eine nichtnegative ganze Zahl a gibt mit

$$m = 12h - 360a.$$

Da die Stellung auch nach dem Vertauschen der Zeiger gültig sein soll, muss es auch eine nichtnegative ganze Zahl b geben mit

$$h = 12m - 360b.$$

Substituiert man die erste Gleichung in die zweite, so erhält man

$$h = 144h - 360(12a + b)$$

und nach einer einfachen Umformung

$$h = \frac{b'}{143} \cdot 360,$$

wobei $b' = 12a + b$ ebenfalls eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Wegen $0 \le h < 360$ kann man schließen, dass die Gleichung genau 143 Lösungen hat, die zu $b' = 0, 1, \ldots, 142$ gehören.

Andererseits erhält man zu jedem h genau ein m mit $0 \le m < 360$ aufgrund der ersten Gleichung. Dies bedeutet, dass man genau 143 Paare (h, m) hat.

Aufgabe 50J / 40S. Seien a, b und c von null verschiedene reelle Zahlen, so dass die quadratischen Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ und $bx^2 + cx + a = 0$ eine gemeinsame Lösung haben. Bestimme alle möglichen reellen Werte dieser Lösung.

Ergebnis: 1

Lösungsweg: Sei t eine gemeinsame Lösung. Dann gilt $0 = at^2 + bt + c$ und $0 = bt^2 + ct + a$, woraus $0 = t \cdot (at^2 + bt + c) - (bt^2 + ct + a) = a(t^3 - 1)$ folgt. Wegen $a \neq 0$ verbleibt als einzige mögliche Lösung $t = 1$. Andererseits ist $t = 1$ auch eine gemeinsame Lösung, wenn man $a = -2$, $b = 1$, $c = 1$ wählt.

Aufgabe 51J / 41S. Bestimme alle nichtnegativen ganzen Zahlen n, für die sowohl $16n + 9$ als auch $9n + 16$ eine Quadratzahl ist.

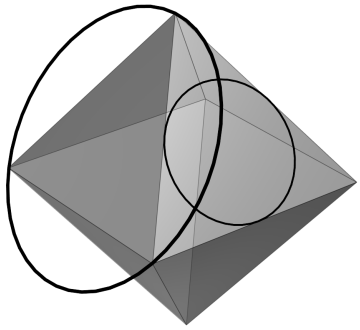
Ergebnis: 0, 1, 52

Lösungsweg: Falls n die gewünschte Eigenschaft hat, dann sind auch die Zahlen

$$9 \cdot (16n + 9) \qquad \text{und} \qquad 16 \cdot (9n + 16)$$

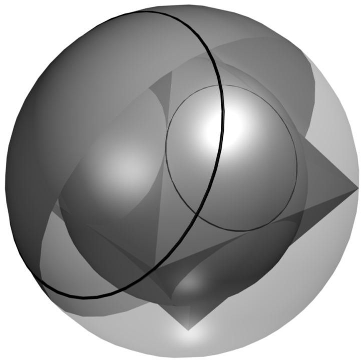
Quadratzahlen. Diese beiden Quadratzahlen unterscheiden sich um $16 \cdot 16 - 9 \cdot 9 = 175$, so dass man also Paare von Quadratzahlen bestimmen muss, die sich um 175 unterscheiden. Es ist also die Gleichung $k^2 - l^2 = (k - l)(k + l) = 175 = 5^2 \cdot 7$ für positive Zahlen $k > l$ zu lösen. Für die verschiedenen Zerlegungen von 175 in zwei Faktoren erhält man für (k, l) die Lösungen $(88, 87)$, $(20, 15)$ und $(16, 9)$. Hieraus ergeben sich die verschiedenen Werte für n, nämlich 52, 1 und 0.

Aufgabe 52J / 42S. Gegeben sei ein regelmäßiges Oktaeder mit Seitenlänge 2. Einer Seitenfläche sei ein Kreis einbeschrieben und einer benachbarten Seitenfläche ein Kreis umbeschrieben. Bestimme den minimalen Abstand zwischen den beiden Kreisen.



Ergebnis: $\sqrt{2} - 1 = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

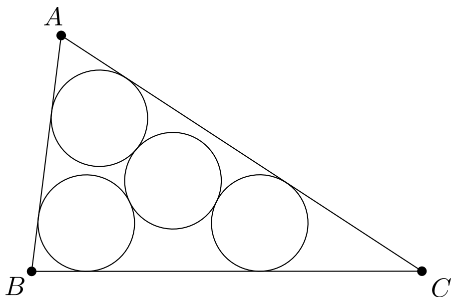
Lösungsweg: Wir zeichnen zwei Kugeln in die Figur. Die erste sei die Umkugel des Oktaeders, die andere sei so gewählt, dass sie alle Kanten des Oktaeders berührt (Kantenkugel). Dann liegt der Umkreis der Seitenfläche vollständig in der Umkugel des Oktaeders und der Inkreis der benachbarten Fläche vollständig in der Kantenkugel.



Der kleinste Abstand der beiden Kreise kann nicht kleiner sein als der Abstand der Kugeln. Da diese konzentrisch sind, ist ihr Abstand einfach die Differenz ihrer Radien, also $\sqrt{2}-1$, da der Umkugelradius eines Oktaeders mit Kantenlänge a durch $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ gegeben ist und der der Kantenkugel durch $\frac{a}{2}$.

Nun muss man nur noch erkennen, dass so ein Abstand tatsächlich existiert, d.h. dass es einen Strahl vom Mittelpunkt des Oktaeders aus gibt, der beide Kreise schneidet. Man kann nun leicht einen Strahl finden, der durch die Kreislinie des gegebenen Inkreises der Seitenfläche verläuft und der die Kreisfläche des Umkreises schneidet. Ebenso kann man einen weiteren Strahl finden, der durch die Kreislinie des gegebenen Inkreises der Seitenfläche verläuft und der die Kreisfläche des Umkreises nicht schneidet. Also muss es auch einen Strahl geben, der beide Kreise schneidet.

Aufgabe 53J / 43S. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Umkreisradius 5 und Inkreisradius 2. Drei Kreise mit Radius r seien so in die Winkel $\angle BAC$, $\angle CBA$ und $\angle ACB$ einbeschrieben, dass die Kreise im Inneren des Dreiecks liegen und die jeweiligen Dreiecksseiten berühren. Ferner existiere ein weiterer Kreis mit Radius r, der alle drei Kreise von außen berührt. Bestimme r.



Ergebnis: $\frac{10}{9}$

Lösungsweg: Seien A', B' und C' die Mittelpunkte der Kreise, die den drei Winkeln $\angle BAC$, $\angle CBA$ und $\angle ACB$ einbeschrieben wurden. Ferner seien O der Mittelpunkt des vierten Kreises und I der Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$. In den Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind entsprechende Seiten parallel, also sind diese Dreiecke ähnlich. Nun berechnet man den Inkreisradius und den Umkreisradius von $\triangle A'B'C'$ in Abhängigkeit von r.

Da alle drei Paare sich entsprechender Seiten der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ parallel sind und Abstand r haben, hat der Punkt I den gleichen Abstand $2-r$ von allen Seiten des Dreiecks $\triangle A'B'C'$. Also ist er auch dessen Inkreismittelpunkt und der Inkreisradius von $\triangle A'B'C'$ beträgt $2-r$.

Außerdem folgt aus der Berühreigenschaft der Kreise, dass der Punkt O von allen Ecken des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ den Abstand $r+r=2r$ besitzt. Also ist der Umkreisradius des $\triangle A'B'C'$ genau $2r$. Nutzt man die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ aus, so erhält man die Gleichung

$$\frac{2-r}{2r} = \frac{2}{5},$$

was schließlich $r = \frac{10}{9}$ ergibt.

Aufgabe 54J / 44S. Die reellen Zahlen a, b, x, y mögen die Gleichungen

$$\begin{aligned} ax + by &= 3, \\ ax^2 + by^2 &= 7, \\ ax^3 + by^3 &= 16, \\ ax^4 + by^4 &= 42 \end{aligned}$$

erfüllen. Bestimme $ax^5 + by^5$.

Ergebnis: 20

Lösungsweg: Für natürliche Zahlen n gilt die Gleichung

$$\bigl(ax^n + by^n\bigr)(x+y) = \bigl(ax^{n+1} + by^{n+1}\bigr) + xy\bigl(ax^{n-1} + by^{n-1}\bigr).$$

Setzt man $t = x + y$ und $s = xy$ und substituiert dies in den beiden Gleichungen mit $n = 2$ und $n = 3$, so erhält man folgende lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} 7t &= 16 + 3s, \\ 16t &= 42 + 7s. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind $t = -14$, $s = -38$. Setzt man diese Werte in die Formel für $n = 4$, so erhält man $42 \cdot (-14) = ax^5 + by^5 - 38 \cdot 16$. Also ist $ax^5 + by^5 = 20$.