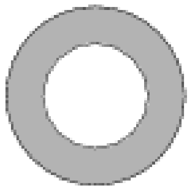
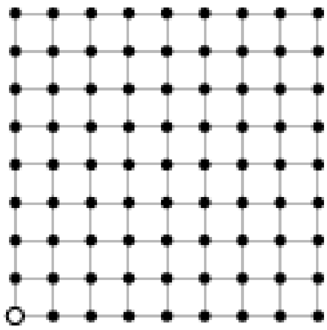
1. Náboj 2012

1. Ha egy kocka minden élének a hosszát 100%-kal megnöveljük, akkor hány százalékkal növekszik a térfogata?
2. Legfeljebb hány részre vágható szét egy körgyűrű 3 egyenes segítségével?



3. Az $\overline{a679b}$ ötjegyű szám osztható 72-vel. Mennyi $a \cdot b$?
4. Egy matematikatanár kétfordulós matekversenyt szervez. Minden csapat 5 főből áll. Az első fordulóban a diákok saját maguk dönthetik el a csapatbeosztást. A második fordulóban a tanár osztja be a csapatokat úgy, hogy senki nincs egy csapatban olyannal, aki az első fordulóban csapattársa volt. Határozd meg a legkisebb létszámot, ahány diák számára meg lehet így szervezni a versenyt.
5. Egy négyzetes hasáb alakú vaníliás sütemény teljes felületét vékony csokiréteggel vonták be. A hasáb oldalai 10, 10 és 5 hosszúságúak. Felvágjuk a süteményt 1 egység térfogatú kockákra. Hány százaléka a kockáknak olyan, amin nincs egyáltalán csokoládé?
6. Adott a 2 oldalhosszúságú $ABCD$ négyzet és az X pont a négyzeten kívül úgy, hogy $|AX| = |BX| = \sqrt{2}$. Milyen hosszú az $AXBCD$ ötszög leghosszabb átlója?
7. Jacob felírta a táblára az $5 \cdot 414 = 1121$ szorzást. Most azon gondolkozik, hogy hogyan lehetne minden számjegyet eggyel növelni vagy csökkenteni úgy, hogy a szorzás helyes legyen. Ha sikerül ezt megtenni, akkor mi áll az egyenlőség jobb oldalán?
8. Az x és y egész számok összege legfeljebb 200, különbségük pedig kisebb 100-nál. Mi a maximuma a $2 \cdot \min(x, y) + \max(x, y)$ kifejezésnek?
9. Három valós szám, x, y és z olyanok, hogy x és $2y$ számtani közepe 7, míg x és $2z$ számtani közepe 8. Mennyi a 3 valós szám, x, y és z számtani közepe?

10. 81 fa található az ábrán látható 9×9-es rácsban. A kertész kivágta a bal alsót és most éppen annak a helyén áll a fák felé fordulva. Sajnos nem látja az összes fát, mert vannak olyan fák, amelyeket eltakar egy másik fa. (Egy fát eltakar egy másik, ha a kertész és a fa által meghatározott szakaszon van másik fa.) Hány fát lát a kertész?



11. Hányféleképpen lehet egy kocka lapjait két színnel kiszínezni? Két színezést egyformának tekintünk, ha egymásba forgathatók.

12. Az $ABCD$ téglalapban $AB = 20$ és $BC = 12$. Z a BC félegyenes olyan pontja, amire igaz, hogy $CZ = 18$. Az E pont a téglalapnak olyan belső pontja, ami az AB és az AD oldalegyenesektől egyaránt 6 egység távolságra van. Legyen X az EZ és az AB, míg Y az EZ és a CD metszéspontja. Mekkora az $AXYD$ négyszög területe?

13. Hány olyan a egész szám van ($1 \le a \le 2012$), amire a^a négyzetszám?

14. Egy 1 oldalú szabályos háromszög a padlón áll, az egyik magassága merőleges a padló síkjára. Az egyik csúcsot pirosra színezzük, és a háromszög síkjában ,,gurítjuk" a háromszöget úgy, hogy az megtesz egy teljes fordulatot. Milyen hosszú utat jár be eközben a piros csúcs?

15. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek csak 0 és 1 számjegyei vannak (10-es számrendszerben) és osztható 225-tel?

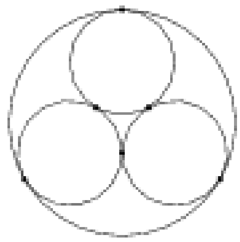
16. Bill már szavazhat, de még nem érte el a 70 éves kort. (Vagyis a kora 18 és 70 év között van.) Tudjuk, hogy x évvel ezelőtt az életkora négyzete éppen x-szel volt nagyobb a jelenlegi életkoránál. Ráadásul Bill életkora jelenleg épp egy négyzetszám. Mennyi x értéke?

17. Egy téglalap alakú papírt egy egyenes hajtásél mentén behajtottunk úgy, hogy a bal alsó sarok illeszkedik a jobb felsőre. A keletkező alakzat

három háromszögből áll, melyeknek az oldalait a téglalap oldalai, illetve a hajtásél adják. Mi az eredeti téglalap oldalainak az aránya, ha a keletkező 3 háromszög területeinek aránya 1 : 2 : 1?

18. Hány olyan 6-tal osztható háromjegyű szám van, amelynek minden számjegye nagyobb, mint 4?

19. Adott 3 egységsugarú kör, melyek egymást páronként kívülről érintik. Mekkora a sugara annak a körnek, amit belülről érint mindhárom eredeti kör?



20. Az n pozitív egész szám olyan, hogy n^2-ben a tízes helyiértéken 7-es számjegy áll. Mi állhat ekkor az n^2 egyes helyiértékén?

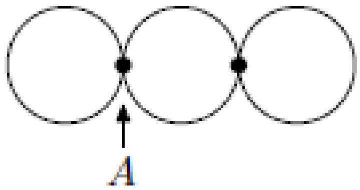
21. Ha az $1, 2, 3, \ldots, n$ számokat valamilyen sorrendben egymás mögé írjuk, akkor egy n-*lánc*ot kapunk. A 3764581121910 egy lehetséges 11-lánc. Melyik az a legkisebb 1-nél nagyobb n, amire létezik olyan n-lánc, amely palindrom? (Egy szám palindrom, ha a jegyek sorrendjét megfordítva pontosan ugyanazt a számot kapjuk.)

22. Add meg az összes olyan (x, y, z) pozitív valós számokból álló számhármast, amelyre teljesül, hogy

$$(x+y)(x+y+z) = 120, \quad (y+z)(x+y+z) = 96, \quad (z+x)(x+y+z) = 72.$$

23. Adott egy egységsugarú kör és két egymásra merőleges húr, melyek a kört 4 részre osztják. A négy rész közül a legnagyobbat és a legkisebbet beszíneztük feketére, a többit fehéren hagytuk. Tudjuk, hogy a fekete és a fehér részek területe megegyezik. Mi a hosszabbik húr és a középpont lehetséges legnagyobb távolsága?

24. Egy tiszt feladata az ábrán látható 3 kör bejárása. Az A pontból kell indulnia, oda is kell visszaérkeznie és mind a 3 teljes kört be kell járnia úgy, hogy egyetlen pontban sem jár kétszer, kivéve az ábrán jelölt két metszéspontot. Hány különböző módon teheti ezt meg?



25. Egy trapéz alapjainak hossza 2 és 5, szárainak hossza pedig $3\sqrt{2}$ és 3. Mekkora a trapéz területe?

26. 42 ember áll egy sorban. Szeretnének nagyságsorrendben állni úgy, hogy a legmagasabb álljon legelöl. Minden lépésben 2 szomszédos ember a sorban helyet cserélhet. Legfeljebb hány lépés szükséges ahhoz, hogy a kivánt sorrendet elérjék?

27. Petrezselyem Zöldségországban él, ahol csak 7 és 11 egységes érmékkel lehet fizetni. Ha Petrezselyemnek mindkét típusú érméből korlátlan mennyiség áll rendelkezésére, akkor melyik az a legnagyobb egész értékű ár, amit Petrezselyem nem tud kifizetni? (Visszaadásra nincs lehetőség.)

28. Egy egységsugarú kört 4 részre osztottunk. Mi a legnagyobb területű rész kerületének minimális értéke? (Ha legnagyobb területű részből több is van, akkor közülük a legkisebb kerületűt vesszük figyelembe.)

29. Mennyi az összege azoknak az a számoknak, amelyekre az $x^2+ax+1=0$ és az $x^2+x+a=0$ egyenleteknek legalább egy közös gyökük van?

30. Hány olyan 8-jegyű szám van, amelynek ha töröljük az első számjegyét, akkor az így kapott 7-jegyű számnak éppen a 35-szöröse az eredeti 8-jegyű szám?

31. Egy derékszögű háromszög minden oldala egész szám és az egyik oldal hossza éppen 2012. Mi az ilyen háromszögek területének a maximuma?

32. Az ABC háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja M. Tudjuk, hogy az 5 pont (Ab, B, C, O, M) közül semelyik kettő sem esik egybe, és mind az 5 pont koordinátái egész számok. Mi a második lehető legkisebb hossz, ami lehet egy ilyen háromszög körülírt körének sugara?

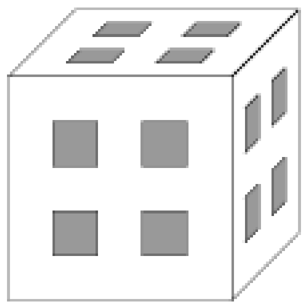
33. Mi a legnagyobb n, amire $7^{2048}-1$ osztható 2^n-nel?

34. Ha kiszámítjuk egy szám számjegyeinek a szorzatát, majd az így kapott szám számjegyeinek a szorzatát stb. akkor véges sok lépésben eljutunk

egy egyjegyű számhoz. A lépések számát, ami alatt eljutunk az egyjegyű számhoz, a szám *kitartás*ának nevezzük. Például a 723 kitartása 2, mivel $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ és $4 \cdot 2 = 8$. Melyik a legnagyobb páros szám, ami csupa különböző számjegyből áll és a kitartása 3?

35. Egy konvex négyszög AD és BC oldalát meghosszabítva a két oldal az E pontban metszi egymást. Legyen H a BD, G pedig az AC szakasz felezőpontja. Mekkora az EGH háromszög és az $ABCD$ négyszög területének aránya? (Felhasználható, hogy ez az arány minden olyan konvex négyszög esetén ugyanaz, amelynek nincsenek párhuzamos oldalai.)

36. Kockatermeszek alagutakat fúrtak egy 5 cm élhosszúságú kockába. Az ábrán látható módon, minden irányban 4 darab négyzet keresztmetszetű járatot fúrtak, ahol a négyzet oldala 1 cm. Hány cm^2 festékre van szükségünk a megmaradó test felületének lefestéséhez?



37. Adott egy egységsugarú körlap, aminek a legbaloldalibb pontjában állunk. Mekkora a legnagyobb megtehető út a körlapon, ha csak jobbra és felfelé mehetünk?

38. Mi a legnagyobb osztója a 15!-nak ($15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 15$), ami 6-tal osztva 5 maradékot ad?

39. Egy kocka 27 pontját megjelöltük: a csúcsokat, az élek felezőpontjait, a lapok középpontjait és a kocka középpontját. Hány olyan egyenes van, amely pontosan 3 pontra illeszkedik a megjelölt pontok közül?

40. Egy k-napos versenyen n versenyző vesz részt. Minden nap minden versenyző legalább 1 és legfeljebb n pontot szerez és minden pontszám egész. Egyetlen napon sem volt két olyan versenyző, aki aznap ugyanannyi pontot szerzett. A verseny végén minden versenyzőnek pontosan

26 pontja volt (ami a k nap alatt szerzett pontszámok összege). Mennyi azoknak az n értékeknek az összege, amikre ez lehetséges?

41. Egy hengeralakú tortát 5 egyenes vágással felvágunk. Mi a keletkező részek számának maximuma? 3 vágás esetén 8 rész az elérhető maximum.

42. Csillagtestnek (Stella octangula) nevezzük azt a testet, melyet úgy kapunk, hogy egy oktaéder minden lapjára ráragasztunk egy szabályos tetraédert. A tetraéderek és az oktaéder minden éle 1 hosszúságú. Mekkora a csillagtest térfogata?

43. Egy stoppos sétál az út mentén. Annak a valószínűsége, hogy a következő 20 percben felveszi egy autós: $\frac{609}{625}$. Mekkora a valószínűsége, hogy a következő 5 percben felveszi egy autós? (Feltételezzük, hogy annak a valószínűsége, hogy egy adott időintervallumban felveszi egy autó arányos az intervallum hosszával.)

44. Egy vandál és egy moderátor szerkeszt egy wikipédia szócikket. A vandál minden nap elrejt egy hibát a cikkben, a moderátor minden nap végén minden egyes hibát $\frac{2}{3}$ valószínűséggel megtalál és kijavít. Mi a valószínűsége, hogy 3 nap elteltével nincs hiba a szócikkben?

45. Van 3 nagy kupac kártyánk, pirosak, kékek és sárgák. A kártyákkal pontokat lehet szerezni a következők szerint:

    - minden piros kártya 1 pontot ér;
    - minden kék kártyáért kétszer annyi pont jár, mint ahány piros kártya van;
    - minden sárga kártyáért háromszor annyi pont jár, mint ahány kék kártya van.

    Mi a maximális pontszám, ami 15 kártyával elérhető?

46. Matthew-nak van egy 20-oldalú szabályos „dobókockája", barátjának CD-nek pedig 3 darab hagyományos 6-oldalú. Mi a valószínűsége, hogy a Matthew által dobott szám nagyobb, mint a CD által dobott 3 szám összege?

47. Egy 10×10-es négyzet sorai és oszlopai meg vannak számozva az $1, 2, \ldots, 10$ számokkal balról jobbra, illetve fentről lefelé. Minden mezőbe beírjuk a sorszámának és az oszlopszámának a szorzatát. Egy utazó a bal felső mezőn áll és el akar jutni a jobb alsóba úgy, hogy közben csak

lefelé vagy jobbra léphet (átlósan nem). Az *utazó száma* az a szám, amit úgy kapunk, hogy összeszorozzuk azoknak a mezőknek a számát, amiket útja során érintett (beleértve az első és az utolsó mezőt is). Mi a legnagyobb közös osztója az összes lehetséges utazó számnak?

48. Egy háromszög magasságai rendre 3, 4 és 6. Mekkora a kerülete?

49. Melyik az a legnagyobb $n \leq 4000000$ egész, amire a $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}$ szám racionális?

50. A Maxi-négyzet egy olyan 3×3-as négyzet, aminek minden mezőjében egy 2×2-es kis négyzet van. A kisebb négyzetek minden mezőjében az $1, 2, 3$ és 4 számok valamelyike áll és mind pontosan egyszer szerepel. Két szomszédos 2×2 négyzet határán a megfelelő számoknak meg kell egyezniük (ld. ábra). Hány különböző Maxi-négyzet van?

4	3	3	4	4	2
1	2	2	1	1	3

• • •

51. Andrew a kedvenc számát *léggömb*nek nevezi. A léggömbre az alábbiak igazak:

   - a számjegyek összege kétszerese a számjegyek számának,
   - legfeljebb 12 számjegye van,
   - a számjegyei felváltva párosak, illetve páratlanok (nem feltétlenül párossal kezdve),
   - az eggyel nagyobb szám osztható 210-zel.

   Melyik ez a szám?

52. Add meg az összes olyan négyjegyű n számot, amelyre igaz, hogy n^2 utolsó 4 jegye éppen n.

53. Add meg az ötjegyű palindrom számok összegét.

54. Hány olyan (a, b, c, d) rendezett számnégyes van, ahol minden szám egy pozitív páratlan szám és $a + b + c + d = 98$?

55. Add meg az egyetlen olyan 11-jegyű számot, amely 1-es számjeggyel kezdődik, és ha a számot kétszer egymás után leírjuk, akkor négyzetszámot kapunk.

56. Adott két különböző háromszög, amelyeknek az oldalai $18, 24$ és 30, és a körülírt köreik és a beírt köreik is egybeesnek. Mekkora a két háromszög közös részét alkotó sokszög területe?

57. Hányféleképpen lehet egy 5×5-ös négyzet mezőit feketével és fehérrel kiszínezni úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan 2 fekete mező legyen?

58. Egy egységoldalú négyzet két különböző belső pontja X és Y. Egy csúcs *távoliság*án az X és Y pontoktól vett távolságai közül a kisebbiket értjük. Tekintsük a négy csúcs távoliságának az összegét. Mi ennek az összegnek a lehető legkisebb értéke?

59. Egy parkolóban 2012 parkolóhely van sorban egymás mellett, megszámozva 1-től 2012-ig. 2012 autó a következő szabály szerint parkol be a parkolóhelyekre:

    - az első autó egyforma valószínűséggel választ egyet a 2012 hely közül;
    - a soron következő autó mindig egyforma valószínűséggel választ azok közül a helyek közül, amiknek a legközelebbi autótól vett távolsága a lehető legnagyobb.

    Mi a valószínűsége, hogy az utolsó autó az 1-es számú helyre parkol?

60. Add meg az összes x valós számot, amelyre igaz, hogy

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 7x + 12) + 24 = 0.$$