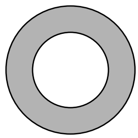
Úloha 1 J. Ak hranu kocky zväčšíme o 100%, tak o koľko percent sa zväčší jej objem?

Výsledok. 700%

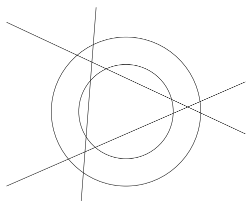
Návod. Zväčšiť hranu a o 100% je to isté ako ju zdvojnásobiť na $2a$. Objem pôvodnej kocky bol a^3, po zväčšení bude $(2a)^3 = 8a^3$. Zväčšil sa o $7a^3$, čo je 700%.

Úloha 2 J. Najviac na koľko častí sa dá tromi priamkami rozdeliť medzikružie?



Výsledok. 9

Návod. Chceme, aby všetky priesečníky priamok boli rôzne, ležali vo vnútri medzikružia a aby každá priamka bola sečnicou vnútorného kruhu. To sa nám podarí, ak vnútorná kružnica bude niečo medzi vpísanou a opísanou kružnicou trojuholníka, ktorý ohraničujú tri priamky.



Úloha 3 J. Ak $a679b$ je päťciferné číslo deliteľné 72, zistite hodnotu súčinu $a \cdot b$.

Výsledok. $3 \times 2 = 6$

Návod. Číslo $a679b$ musí byť deliteľné 8 a 9 $(72 = 7 \cdot 9)$. Z kritéria deliteľnosti 8 máme, že $b = 2$, z deliteľnosti 9 platí: $9 \mid a + 6 + 7 + 9 + 2$, preto $a = 3$.

Úloha 4 J. Učiteľ matematiky sa rozhodol usporiadať dve kolá minináboja päťčlenných družstiev vo svojej triede. V prvom kole sa žiaci rozdelili do družstiev ako chceli a v druhom kole ich učiteľ rozdelil tak, aby nikto nebol v družstve s nikým, s kým bol v družstve v prvom kole. Aký je najmenší počet žiakov, pre ktorý sa to učiteľovi vždy podarí?

Výsledok. 25

Návod. Počet žiakov musí byť deliteľný 5. Ak by ich bolo 20 alebo menej, tak z Dirichletovho princípu aspoň dvaja žiaci, ktorí boli spolu v prvom kole, musia byť spolu aj v druhom. Našťastie 25 žiakov už stačí, lebo môžeme do každého nového družstva zobrať jedného z každého tímu.

Úloha 5 J. Vanilkový koláč tvaru kvádra s rozmermi $10 \times 10 \times 5$ je na celom povrchu pokrytý tenkou vrstvou čokolády. Koláč rozrežeme na kocky $1 \times 1 \times 1$. Koľko percent kúskov nemá na sebe žiadnu čokoládu?

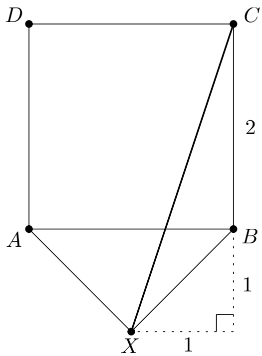
Výsledok. $38.4\% = (48/125)$

Návod. Po zjedení všetkých kúskov s čokoládou nám zostane kváder $8 \times 8 \times 3$ zložený zo všetkých kúskov bez čokolády, takže ich musí byť 192. Z celkového počtu $10 \times 10 \times 5 = 500$ kúskov už ľahko zrátame percentá: $100 \cdot (192/500)\%$.

Úloha 6 J. Majme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 2 a bod X ležiaci mimo neho tak, že platí $|AX| = |XB| = \sqrt{2}$. Akú dĺžku má najdlhšia uhlopriečka päťuholníka $AXBCD$?

Výsledok. $\sqrt{10}$

Návod. Najdlhšia je zrejme uhlopriečka $|CX| = |DX|$. Nech M je stred strany CD. Chceme získať dĺžku MX. Trojuholník AXB je pravouhlý rovnoramenný (z Pytagorovej vety), takže X je stred pomyselného štvorca $ABC`D`$ ($C`$ a $D`$ získame preklopením C, D cez AB). Takže $|MX| = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$. Dĺžku CX už zrátame jednoducho z Pytagorovej vety: $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.



Úloha 7 J. V súčine $5 \cdot 414 = 1121$ každú cifru zväčšite alebo zmenšite o 1 tak, aby bol výsledok správny. Aký bude výsledok?

Výsledok. 2012

Návod. Stačí nám vyskúšať všetky možné zmeny na ľavej strane (je ich 16) a zisťovať, či sa dá pravá strana podľa toho zmeniť.

Úloha 8 J. Pre celé čísla x a y platí, že ich súčet je nanajvýš 200 a ich rozdiel je menší ako 100. Nájdite maximálnu hodnotu, ktorú môže nadobúdať výraz $2 \cdot min(x, y) + max(x, y)$. Výraz $min(x, y)$ má hodnotu najmenšieho čísla z dvojice (x, y), podobne $max(x, y)$ má hodnotu najväčšieho čísla z dvojice (x, y).

Výsledok. 300

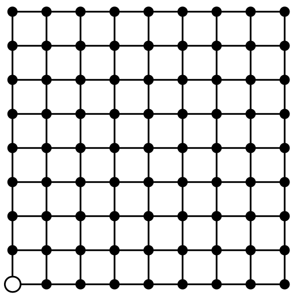
Návod. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $x \geq y$. Potom $2 \cdot min(x, y) + max(x, y) = 2y + x = y + (x + y) \leq y + 200 \leq x + y/over2 + 200 = 300$. Túto hodnotu vieme dosiahnuť pre $x = y = 100$.

Úloha 9 J. Pre reálne čísla x, y a z platí, že aritmetický priemer čísel x a $2y$ je rovný 7 a aritmetický priemer čísel x a $2z$ je rovný 8. Aký je aritmetický priemer čísel x, y a z?

Výsledok. 5

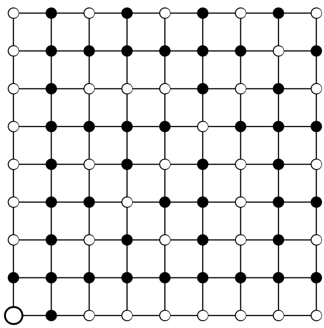
Návod. Sčítaním prvých dvoch rovností pre aritmetický priemer $\frac{x+2y}{2}+\frac{x+2z}{2}=x+y+z=15$. Správny výsledok dostaneme predelením tejto rovnosti troma.

Úloha 10 J. V mrežových bodoch štvorcovej mriežky 8×8 stojí 81 stromov. Záhradník vyrezal jeden z rohových stromov a teraz sa z jeho miesta pozerá na ostatné stromy. Niektoré však nevidí, pretože ich zakrývajú iné a to práve takto: strom S je zakrytý práve vtedy ak na úsečke medzi stromom S a záhradníkom leží iný strom, t.j. mrežový bod. Koľko stromov vidí záhradník?



Výsledok. 45

Návod. Nakreslíme si obrázok a postupne skontrolujeme stromy od tých, čo sú najbližšie k záhradníkovi, až po tie úplne najďalej. Kontrolovaný strom vždy označíme za viditeľný, ak ešte nebol vyškrtnutý a spolu s ním vyškrtneme všetky ďalšie stromy, ktoré tento strom zakrýva (ležia spolu s ním a záhradníkom na jednej priamke). Nakoniec spočítame všetky stromy, ktoré sme označili za viditeľné.



Úloha 11 J / 1 S. Koľkými spôsobmi vieme ofarbiť steny kocky čiernou a bielou farbou? Dve ofarbenia považujeme za rovnaké, ak dokážeme otočením jedného z nich dostať druhé.

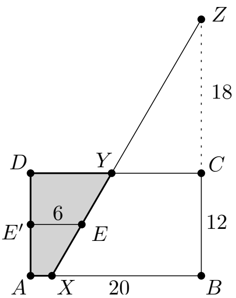
Výsledok. $1+1+2+2+2+1+1=10$

Návod. Rozdeľme možnosti podľa toho, koľko stien zafarbíme bielou farbou. Pre nula stien máme jednu možnosť, rovnako ako pre jednu stenu. Pre dve steny existujú dve možnosti: zafarbené steny buď susedia jednou hranou, alebo sú protiľahlé. Pre tri steny sú tiež dve možnosti: Steny majú spoločný vrchol alebo dve sú protiľahlé a tretia susedí s obidvomi hranou. Pre štyri je rovnako veľa možností ako pre dve. Tak isto aj pre päť a šesť je toľko možností ako pre jednu a nula. Spolu všetkých možností je potom $1+1+2+2+2+1+1=10$.

Úloha 12 J / 2 S. Majme obdĺžnik $ABCD$ so stranami $|AB|=20$ a $|BC|=12$. Na polpriamke $\overrightarrow{BC}$ leží bod Z taký, že $|CZ|=18$. Bod E leží vo vnútri $ABCD$, pričom platí, že vzdialenosť E od AB aj AD je 6. Priamka EZ pretína strany AB a CD postupne v bodoch X a Y. Zistite obsah štvoruholníka $AXYD$.

Výsledok. 72

Návod. Dokreslíme si rovnobežku s AD cez bod E, označme F, G jej priesečníky s AB a CD v tomto poradí. Je vidno, že trojuholníky XFE a YGE sú zhodné, takže obsah $AXYD$ sa rovná obsahu $AFGD$, čo je obdĺžnik s obsahom $12\cdot 6=72$.



Úloha 13 J / 3 S. Pre koľko prirodzených čísel a, $1\le a\le 2012$, je číslo a^a druhou mocninou prirodzeného čísla?

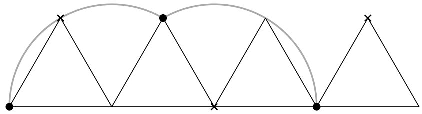
Výsledok. 1028

Návod. Pre všetky párne čísla $a=2k$ je číslo $a^a=(a^k)^2$ určite druhou mocninou. Pre nepárne čísla a je a^a druhou mocninou práve vtedy, keď a je druhou mocninou nepárneho čísla. Párnych čísel do 2012 je 1006. Najväčšia druhá mocnina, ktorá je nanajvýš 2012 je 44. Vyhovujú teda aj druhé mocniny nepárnych čísel do 44, ktorých je 22. Spolu máme $1006+22=1028$.

Úloha 14 J / 4 S. Majme rovnostranný trojuholník so stranou 1 položený na podlahe. Jeden z jeho bodov zafarbíme na červeno. Trojuholník kotúľame po podlahe a trikrát ho preklopíme. Akú dlhú dráhu prejde červený bod?

Výsledok. $\frac{2}{3}\cdot 2\pi=\frac{4}{3}\pi$

Návod. Uvedomíme si, že červený bod sa pohybuje po výsekoch kružnice (jeden bod vždy zostáva na mieste a vzdialenosť červeného bodu je od neho konštantná). Dvakrát prejde $\frac{1}{3}$ z obvodu kružnice a raz zostane na mieste. Dokopy prejde dráhu dĺžky $(1/3+1/3)\cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{4}{3}\pi$.



Úloha 15 J / 5 S. Aké je najmenšie kladné číslo zložené iba z núl a jednotiek, ktoré je deliteľné 225?

Výsledok. 11111111100

Návod. Číslo musí byť deliteľné 9 a 25 (lebo $225 = 9 \cdot 25$). Keďže je kladné, nie je zložené len zo samých núl, teda obsahuje aspoň jednu jednotku. Z deliteľnosti 9 máme, že ich súčet je deliteľný 9, takže ich je aspoň 9. Z deliteľnosti 25 vieme, že číslo končí jedným z dvojčísiel $\{00, 25, 50, 75\}$. Vyhovuje len 00. Takže číslo je aspoň 11111111100.

Úloha 16 J / 6 S. Bill je dosť starý na to, aby volil, ale nie dosť na to, aby mohol využívať dôchodcovskú zľavu (jeho vek je medzi 18 a 70). Je o ňom známe, že pred x rokmi bol jeho vek odmocninou z jeho veku o x rokov. Billov vek je druhou mocninou prirodzeného čísla. Nájdite prirodzené číslo x.

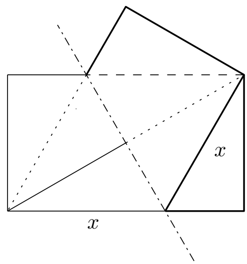
Výsledok. 28

Návod. Billov vek, označme ho v, je druhá mocnina prirodzeného čísla v rozpätí od 18 do 70. Ďalej vieme, že $v + x$ je taktiež druhou mocninou. Stačí vyskúšať niekoľko možností.

Úloha 17 J / 7 S. Priložme ľavý dolný roh obdĺžnikového papiera k pravému hornému rohu. Vznikne tak útvar rozdelený na tri trojuholníky, ktorých strany tvoria okraje papiera, a čiara zohnutia. Pre aký pomer dĺžok strán papiera je pomer obsahov týchto troch trojuholníkov $1 : 2 : 1$?

Výsledok. $\sqrt{3} : 3 = 1 : \sqrt{3}$ pripadne v opacnom poradi.

Návod. Predpokladajme, že sme našli vhodný papier. Označíme jeho kratšiu stranu a a dlhšiu b. Preložíme papier podľa pokynov v zadaní. Útvar je symetrický, preto stredný, najširší trojuholník je rovnoramenný. Uhlopriečka spájajúca dva vrcholy, ktoré boli pri sebe, je ťažnicou, respektíve výškou najväčšieho trojuholníka, preto delí uhol oproti základni na dva rovnaké. Uhol najmenšieho trojuholníka pri tom istom vrchole je však taký istý, keďže majú totožnú stranu, pravý uhol a obsah. Preto má každý z troch uhlov $\frac{90°}{3} = 30°$. Menší trojuholník má teda strany $\sqrt{3} : 1$. Z pomeru strán rovnostranného trojuholníka ďalej dostávame poomer strán kratšia ku dlhšej $=\sqrt{3} : 2 + 1 = \sqrt{3} : 3$

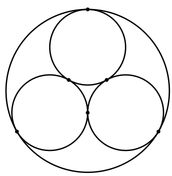


Úloha 18 J / 8 S. Koľko je trojciferných čísel deliteľných šiestimi, v ktorých je každá cifra väčšia ako 4?

Výsledok. 16

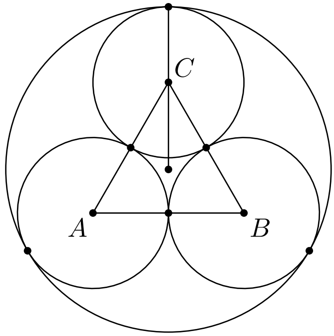
Návod. Číslo má byť deliteľné 2, a preto sa musí končiť cifrou 8 alebo 6. Rovnako je číslo deliteľné aj tromi, a preto jeho ciferný súčet je deliteľný tromi, čiže súčet prvých dvoch cifier musí dávať po delení 3 zvyšok 1 (ak je posledná cifra 8) alebo 0 (ak je posledná 6). Zvyšok 1 vieme dostať ako súčet čísiel so zvyškami $2 + 2$, $3 + 1$ (záleží aj na poradí cifier, takže máme $4 + 4 = 8$ možností.). Podobne zvyšok 0 vieme dostať len ako $0 + 0$, $2 + 1$ (znovu máme $4 + 4 = 8$ možností) .

Úloha 19 J / 9 S. Dané sú tri kružnice s polomerom 1, pričom každé dve z nich sa navzájom zvonka dotýkajú. Týmto kružniciam opíšeme kružnicu k tak, aby sa jej zvnútra dotýkali všetky 3 kružnice. Vypočítajte polomer kružnice k.



Výsledok. $1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Návod. Označme A, B a C stredy troch menších kružníc. Trojuholník nimi tvorený je rovnoramenný so stranou dĺžky 2. Jeho výška má dĺžku $\sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$. Výšky trojuholníka ABC sa pretínajú v strede kružnice k, označme ho S. Výšky sú zároveň aj ťažnicami v rovnostrannom trojuholníku, a preto $|AS| = 2/3 \cdot \sqrt{3}$. Polomer k je potom len o polomer menšej kružnice dlhší od $|AS|$.



Úloha 20 J / 10 S. Nech n je prirodzené číslo. Ak n^2 má cifru na mieste desiatok 7, akú cifru môže mať na mieste jednotiek?

Výsledok. 6

Návod. Nech $n = 10x + y$, pre nejaké prirodzené číslo x a cifru y. Potom $n^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$. Cifra na mieste desiatok bude nepárna vtedy, keď je nepárna desiatková cifra y^2. Preto y^2 je 16 alebo 36. Posledná cifra je v oboch prípadoch 6.

Úloha 21 J / 11 S. Ak napíšeme čísla $1, 2, \ldots, n$ v nejakom poradí, získame tak n-reťazec. Napríklad, jeden z možných n-reťazcov dĺžky 11 je:

$$3764581121910$$

Aké je najmenšie $n > 1$ také, že existuje n-reťazec, ktorý je palindrómom (číta sa odpredu rovnako ako odzadu)?

Výsledok. 19

Návod. Nasledujúci reťazec je takým 19-reťazcom:

$$9|18|7|16|5|14|3|12|1|10|11|2|13|4|15|6|17|8|19.$$

Ukážeme si, že 19 je najmenším takým číslom. Uvedomíme si, že iba jedno číslo sa môže vyskytnúť nepárny počet krát v palindromickom n-reťazci (konkrétne stredná cifra). Ak $n \leq 9$, tak zrejme táto podmienka nie je splnená. Podobne, pre $10 \leq n \leq 18$ sa cifry 0 a 9 vyskytujú v reťazci práve raz, takže zase nemôže byť n-reťazec palindrómom.

Úloha 22 J / 12 S. Nájdite všetky trojice (x, y, z) kladných reálnych čísel x, y a z, pre ktoré platí $(x + y)(x + y + z) = 120$, $(y + z)(x + y + z) = 96$ a $(z + x)(x + y + z) = 72$.

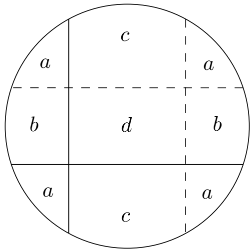
Výsledok. $[4, 6, 2]$

Návod. Sčítaním rovníc dostaneme $(x + y + z)(z + y + x + z + x + y) = 288$. Po vydelení rovnice 2 získame vzťah $(x+y+z)(x+y+z) = 144$, a teda $x+y+z = \pm 12$, ale keďže hľadáme kladné, tak $x + y + z = 12$. Spätným dosadením do pôvodných rovníc máme $(12 - z) = 10$, $(12 - x) = 8$, $(12 - y) = 6$, z čoho ľahko získame riešenie $[4, 6, 2]$.

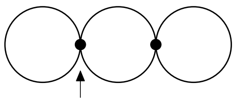
Úloha 23 J / 13 S. Majme kruh s polomerom 1 a v ňom dve kolmé tetivy, ktoré delia kruh na 4 časti. Ofarbíme časť s najväčším a časť s najmenším obsahom čiernou, zvyšné necháme biele. Vieme, že obsah bielych častí bude taký ako obsah čiernych častí. Aká je maximálna možná vzdialenosť dlhšej tetivy od stredu kružnice?

Výsledok. 0

Návod. Stačí hľadať rovnaké obsahy. Napríklad ak rozrežeme kruh ešte dvoma tetivami, ktoré sú bodovo súmerné so stredom kružnice k pôvodným dvom tetivám, tak získame 9 častí, pričom stredná bude navyše. Preto musí aspoň jedna z priamok prechádzať stredom kružnice.



Úloha 24 J / 14 S. Strážnik má za úlohu strážiť tri objekty. Má obchôdzkové trasy ako na obrázku. Jedna obchôdzka začína v bode A, prejde cez každý úsek práve raz a vráti sa na začiatok. Ak záleží na smere obchádzania budovy, tak koľko rôznych obchôdzok existuje?



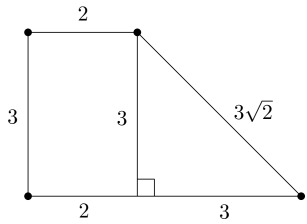
Výsledok. 16

Návod. Z bodu A má 4 možnosti kam sa vydať. Na najbližšej križovatke, kam sa dostane, má už len 2 možnosti (nemôže ísť naspäť ani dokončiť kolečko okolo prvej budovy). Na nasledujúcej križovatke má zas na výber 2 možnosti. Ďalej je už jeho cesta jednoznačne určená. Vyberal si zo $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ možných ciest.

Úloha 25 J / 15 S. Lichobežník má strany dĺžky 5, $3\sqrt{2}$, 2 a 3 v tomto poradí, pričom rovnobežné sú strany dlhé 5 a 2. Aký má obsah?

Výsledok. $\frac{21}{2}$

Návod. Rovnobežka s kratším ramenom rozdelí lichoběžník na rovnobežník a trojúholník so stranami 3, $5 - 2 = 3$, $3\sqrt{2}$, ktorý je zjavne rovnoramenný pravouhlý. Rovnobežník je preto obdĺžnik. Obsah už jednoducho spočítame ako $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = \frac{21}{2}$.



Úloha 26 J / 16 S. V rade za sebou stojí 42 ľudí a chcú sa zoradiť podľa výšky tak, aby vpredu stál najvyšší. V jednom ťahu si môžu vymeniť miesto dvaja za sebou. Koľko najmenej ťahov potrebujú na to, aby sa týmto spôsobom zoradili, keď stoja na začiatku ľubovoľne?

Výsledok. $\frac{n(n-1)}{2} = 21 \cdot 41 = 861$

Návod. Každému poradiu ľudí priraďme hodnotu H, ktorá označuje počet dvojíc (nielen susediacich) ľudí takých, že nižší stojí pred vyšším. V jednom ťahu je možné znížiť H maximálne o 1, pričom ak $H > 0$, tak existuje ťah, ktorým sa H zníži. Na začiatku je H najviac $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, ak stoja všetci v opačnom poradí. Na zoradenie treba aspoň (a jednoducho sa presvedčíme, že aj stačí) $\frac{42}{2} \cdot 41 = 861$ ťahov.

Úloha 27 J / 17 S. Petržlen žije v zeleninovom štáte, kde sa platí iba mincami v hodnote 7 alebo 11. Ak by mal Petržlen z oboch druhov mincí ľubovoľný počet, aká je najvyššia cena, ktorú nimi nevie zaplatiť?

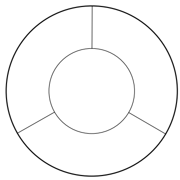
Výsledok. 59

Návod. Akonáhle vieme zaplatiť hodnotu s nejakým zvyškom po delení 7, tak vieme už zaplatiť ľubovoľnú vyššiu hodnotu s rovnakým zvyškom. Pre každý zvyšok postupne zistíme, kedy sa prvýkrát dosiahne. Zvyšok po delení 7 sa zmení, len ak použijeme 11. Takže 0 dáva zvyšok 0, 11 dáva 4, 22 dáva 8, 33 dáva 5, 44 dáva 2, 55 dáva 6 a 66 dáva zvyšok 3 po delení 7. Máme všetky zvyšky, a od 66 sú už všetky hodnoty určite dosiahnuteľné. Posledná nedosiahnuteľná hodnota má zvyšok 3 a najvyššou takou je $66 - 7 = 59$.

Úloha 28 J / 18 S. Rozdelíme kruh s polomerom 1 ľubovoľným spôsobom na štyri súvislé časti. Aký najmenší obvod môže mať časť s najväčším obsahom? Ak má viacero častí najväčší obsah, tak berieme tú s najmenším obvodom.

Výsledok. π

Návod. Najmenší možný obsah najväčšej časti je štvrtina obsahu kruhu. Súvislá časť s daným obsahom má najmenší obvod, ak má tvar kruhu. Takže ak rozsekneme pôvodný kruh tak, že všetky časti budú mať obsah práve štvrtinu obsahu pôvodného kruhu a jedna z tých častí bude mať kruhový tvar, tak sme hotoví. To sa dá napríklad vyseknutím sústrednej kružnice s pôvodným kruhom a polovičným polomerom a zvyšok rozrežeme na tri rovnaké časti ako na obrázku. Malá kružnica má obvod $2\pi\frac{1}{2} = \pi$.



Úloha 29 J / 19 S. Nájdite súčet všetkých reálnych čísel a, pre ktoré majú rovnice $x^2 + ax + 1 = 0$ a $x^2 + x + a = 0$ aspoň jeden spoločný reálny koreň.

Výsledok. -2

Návod. Nech x je ich spoločným riešením. Odčítaním rovníc máme $(a-1)(x-1) = 0$. Takže buď $x = 1$ alebo $a = 1$. V prvom prípade je ich spoločný koreň $x = 1$, dosadením do niektorej z rovníc dorátame $a = -2$. V druhom prípade $a = 1$ sú rovnice síce identické, no ich korene nie sú reálne.

Úloha 30 J / 20 S. Koľko je takých osemciferných prirodzených čísel, že po škrtnutí ich prvej cifry zostane číslo 35-krát menšie ako pôvodné?

Výsledok. 0

Návod. Nech m je číslo, ktoré nám zostane po škrtnutí prvej cifry. Pôvodné číslo potom musí vyzerať $c \cdot 10^7 + m$, kde c je škrtnutá cifra. Má platiť $m = (1/35) \cdot (c \cdot 10^7 + m)$, čo sa dá upraviť na $17 \cdot m = c \cdot 2^6 \cdot 5^7$. Ľavá strana je nenulová a deliteľná 17, ale pravá strana nie je deliteľná 17 pre žiadne $c \leq 9$.

Úloha 31 J / 21 S. Máme pravouhlý trojuholník, ktorého všetky strany majú celočíselnú dĺžku. Ak má jedna z jeho strán dĺžku 2012, aký môže mať najväčší obsah?

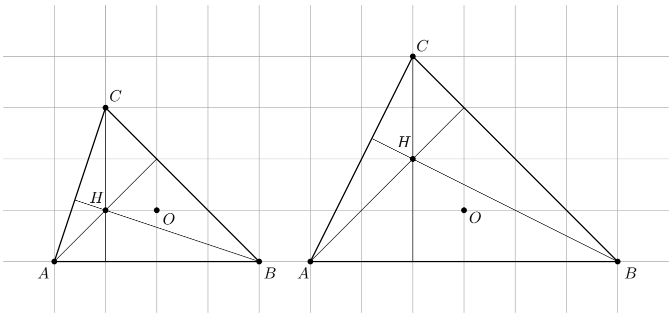
Výsledok. $1006 \cdot (1006^2 - 1) = 1018107210$

Návod. Ak má jedna strana danú dĺžku 2012, tak sa nám oplatí zobrať ju ako odvesnu. Musí platiť Pytagorova veta: $b^2 + 2012^2 = c^2$. Keďže obsah pravouhlého trojuholníka je $\frac{2012 \cdot b}{2}$, tak chceme maximalizovať b. A to je rovnaká úloha, ako minimalizovať rozdiel dĺžky prepony a tejto odvesny. Ak $c = b + 1$, tak nesedí parita v Pytagorovej vete. Dosadením $c = b + 2$ do Pytagorovej vety dostaneme jednoduchú rovnicu pre b.

Úloha 32 J / 22 S. Nech ABC je trojuholník so stredom kružnice opísanej O a priesečníkom výšok H, pričom body A, B, C, O a H majú celočíselné súradnice a žiadne dva nesplývajú. Aký je druhý najmenší možný polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC?

Výsledok. $\sqrt{10}$

Návod. Nájdeme si štvorčekový papier alebo si nakreslíme štvorčekovú plochu. Ešte raz si prečítame zadanie, že všetky body majú byť rôzne. Do stredu si vyznačíme stred opísanej kružnice a postupne skúšame možné polomery: $1, \sqrt{2}, 2. \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, \sqrt{10}, \ldots$. Pre polomery $1, \sqrt{2}, 2$ a $2\sqrt{2}$ vidíme, že vždy je jeden z vrcholov trojuholníka priesečníkom výšok. Pre $\sqrt{5}$ a $\sqrt{10}$ sme schopní skonštruovať trojuholníky, napríklad ako na obrázku, pre ktoré sú splnené podmienky zadania.



Úloha 33 J / 23 S. Nájdite najväčšie prirodzené číslo n také, že číslo $7^{2048}-1$ je deliteľné 2^n.

Výsledok. 14

Návod. Viacnásobným použitím vzorca $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ dostávame:

$$7^{2048} - 1 = (7-1)(7+1)(7^2+1)(7^4+1)\cdots(7^{1024}+1).$$

V rozvoji je každý z členov okrem $7+1$ deliteľný 2 práve raz, čo sa dá jednoducho overiť skúmaním zvyškov $7^{(2^k)}$ po delení 4.

Úloha 34 J / 24 S. Ak počítame súčin cifier daného čísla, potom súčin cifier tohto súčinu, potom znova súčin cifier nového súčinu atď., nutne po nejakom počte krokov dospejeme k jednocifernému číslu. Tento počet krokov nazývame *vytrvalosťou* čísla. Napr. číslo 723 má vytrvalosť 2, lebo $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok). Nájdite najväčšie párne číslo s navzájom rôznymi nenulovými ciframi a vytrvalosťou 3.

Výsledok. 98764312

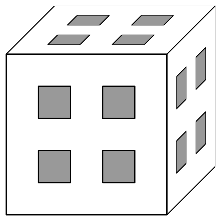
Návod. Vyskúšajme najprv najväčšie číslo, ktoré spĺňa podmienku rôznych nenulových cifier. Tým je 987654321, ale má len vytrvalosť 2, pretože $9 \cdot 8 \cdots 1 = 362880$, a potom kvôli nule na konci získame v druhom kroku 0. Uvedomíme si, že 0 na konci dostaneme vždy, keď tam bude nejaké párne číslo aj 5 zároveň. Preto skúsime najprv vyhodiť päťku. Vytrvalosť čísla 98764321 je 3, lebo $98764321 \to 72576 \to 2940 \to 0$. Ešte splníme podmienku párnosti prehodením posledných dvoch cifier 98764312 a máme výsledok.

Úloha 35 J / 25 S. Ak strany AD a BC konvexného štvoruholníka $ABCD$ predĺžime, tak sa pretnú v bode E. Označme H a G postupne stredy BD a AC. Nájdite pomer obsahu trojuholníka EHG a obsahu štvoruholníka $ABCD$. Prezradíme vám, že tento pomer je rovnaký pre každý konvexný štvoruholník $ABCD$, ktorého strany AD a BC nie sú rovnobežné.

Výsledok. $1:4$

Návod. Pre prípad, že $ADBC$ je rovnoramenný lichobežník so stranami 1,1,1 a $BA = 2$, to vychádza ľahko aj bez väčšieho počítania, keďže je tam veľa rovnostranných trojuholníkov. V riešení pre všeobecný prípad budeme (ABC) označovať obsah ABC. Dokreslime si úsečky CH, GD, GB. Keďže G je stred AC, tak $(GDE) = 1/2(DEC)$. Podobne $(CHE) = 1/2(DEC)$. Teda $(CHE) + (GDE) = (DEC)$. Z toho vieme usúdiť, že $(CHGD) = (GHE)$. Keďže $(CHD) = 1/2(CBD)$ a $(GHD) = 1/2(GBD)$, tak $(CHGD) = 1/2(\ (CBD) + (GBD)\ ) = 1/2(BCDG)$. Ale $(BCDG) = 1/2(ABCD)$, lebo $(BCG) = 1/2(ABC)$ a $(GCD) = 1/2(ACD)$. Potom $(GHE) = (CHGD) = 1/4(ABCD)$.

Úloha 36 J / 26 S. Kockaté termity vyvŕtali cez kocku so stranou 5 v každom smere štyri rovné chodbičky ako na obrázku a opustili ju. To, čo z kocky zostalo, chceme ofarbiť antitermitovou farbou. Koľko centimetrov štvorcových musíme ofarbiť?



Výsledok. 270

Návod. Pozrieme sa na deravú kocku zhora a zrátame obsah všetkých plôšok, ktoré sa na nás "pozerajú" - sú orientované smerom nahor. V hĺbke 0cm, stene kocky, je ich $25-4 = 21$. V hĺbke 2cm je ich toľko, čo vyvŕtaných chodieb z boku mínus vyvŕtaných chodieb zhora: $16-4 = 12$. Hĺbka 4cm je rovnaký prípad ako hĺbka 2cm. Z každej strany kocky je situácia rovnaká, takže máme dokopy $(21 + 12 + 12) \cdot 6 = 270$ plôšok.

Úloha 37 J / 27 S. Máme kruh s polomerom 1 a stojíme na najľavejšom bode jeho obvodu. Môžeme sa hýbať len doprava a hore. Akú dĺžku má najdlhšia trasa, ktorú môžeme prejsť, ak nechceme z kruhu vyjsť?

Výsledok. $1 + \sqrt{2}$

Návod. Najprv si uvedomíme, že pre ľubovoľnú cestu existuje cesta rovnakej dĺžky, ktorá ide najprv iba doprava, a potom už len hore. Odteraz uvažujeme už len takéto cesty. Najdlhšia cesta musí prechádzať stredom kruhu. Označme a vzdialenosť, ktorú prejde cesta doprava od stredu kruhu a b vzdialenosť ktorú prejde hore od stredu. Keďže najdlhšia cesta skončí na obvode kružnice, tak platí $a^2 + b^2 = 1$ a chceme maximalizovať $a + b$. To je rovnaká úloha ako maximalizovať $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 1+2ab$. Z triviálnej nerovnosti $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ máme $2ab \leq a^2 + b^2 = 1$. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď máme rovnosť pri $0 \leq (a-b)^2$, takže $a = b = \sqrt{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nezabudneme na začiatok cesty a máme výsledok $1 + \sqrt{2}$.

Úloha 38 J / 28 S. Aký je najväčší deliteľ čísla $15! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 15$ taký, že po vydelení 6 dáva zvyšok 5?

Výsledok. $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 175175$

Návod. Zvyšok súčinu je rovnaký ako súčin zvyškov jednotlivých činiteľov, napr. zvyšok $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. Aby konečný zvyšok bol 5, tak číslo nesmie byť deliteľné 2 ani 3, takže z 15! musíme vyhodiť všetky dvojky a trojky. Zostane nám číslo $5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ a dáva zvyšok 1. Keďže $5 \cdot 5$ dáva zvyšok 1, tak nám stačí vyhodiť jedno číslo so zvyškom 5 a najmenším takým je samozrejme 5.

Úloha 39 J / 29 S. Máme kocku a v nej nasledovných 27 bodov: vrcholy kocky, stredy hrán, stredy stien a stred kocky. Koľko je priamok, ktoré prechádzajú práve cez tri body?

Výsledok. 49

Návod. Rozdelíme si všetky priamky do troch nezávislých kategórií. Tých, ktoré prechádzajú stredom kocky, je $9 + \frac{8}{2} = 13$. Tých, ktoré prechádzajú stredom steny a neprechádzajú stredom kocky, je pre každú stenu 4 a dokopy teda 24. Zvýšili nám už len priamky totožné s hranami kocky, ktorých je 12. Dokopy máme $13 + 24 + 12 = 49$ priamok.

Úloha 40 J / 30 S. Sútaže trvajúcej k dní sa zúčastnilo n účastníkov. Každý deň všetci účastníci získali skóre $1, 2, \ldots, n$ bodov, pričom žiadni dvaja nemali rovnaký počet bodov za daný deň. Na konci súťaže (k-ty deň večer po súťaži) mal každý účastník v súčte za všetky dni skóre 26 bodov. Nezávisle od k, nájdite súčet všetkých n, pre ktoré je to možné.

Výsledok. $1 + 3 + 12 + 25 = 41$

Návod. Je zrejmé, že $n < 26$. Spolu sa každý deň rozdalo $\frac{n(n+1)}{2}$ bodov, čo dáva celkový súčet $k \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ bodov. To je ale tiež rovné $26n$. Z toho dostávame $52 = k(n+1)$. Po chvíľke skúšania zistíme, že pre každé také k, ktoré delí 52 (okrem 1 a 52), vieme nájsť spôsob, akým účastníci mohli dostávať body počas súťaže. Potom súčet všetkých n je $(2-1)+(4-1)+(13-1)+(26-1)$.

Úloha 41 J / 31 S. Máme tortu, ktorú chceme rozrezať. Torta má tvar valca a každý rez má tvar roviny. Napríklad dvoma rezmi ju vieme rozrezať na štyri časti a troma rezmi na osem častí. Na koľko najviac častí ju vieme rozrezať piatimi rezmi?

Výsledok. 26

Návod. Pre jednoduchosť uvažujme nekonečný trojrozmerný priestor ktorý režeme nekonečnými rovinami. Ak už máme priestor nejako rozrezaný, tak ďalšia nová rovina nám pridá toľko nových častí, koľko existujúcich častí rozreže. Ak zoberieme priamky, ktoré sú priesečníkmi novej roviny so starými rovinami, tak počet nových častí je rovnaký ako počet oblastí na ktoré tieto priamky rozdelia novú rovinu. Takže $v_n = v_{n-1} + p_{n-1}$ kde v_n je výsledok pre n rezaní a p_n je počet nových častí = počet oblastí, na ktoré vieme rozdeliť rovinu n priamkovými rezmi. Kreslením na papier získame maximálne hodnoty pre p_1, p_2, p_3 a p_4 ako $2, 4, 7$ a 11, a keďže $v_1 = 2$, tak dostávame výsledok $2 + 2 + 4 + 7 + 11 = 26$.
Poznámka pre zvedavcov: zovšeobecnením úlohy pre n rezov dostaneme vzťah $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} = 1/6(n^3 + 5n + 6)$.

Úloha 42 J / 32 S. Osemramenná hviezda je teleso, ktoré vznikne prilepením pravidelných štvorstenov na všetky steny pravidelného osemstena. Hrany osemstena aj všetkých štvorstenov majú dĺžku 1. Aký objem má osemramenná hviezda?

Výsledok. $\sqrt{2}$

Návod. Máme dva typy telies. Pravidelný štvorsten so stranou 1 (je ich 8) a štvorboký ihlan (sú 2). Obe telesá majú všetky strany dĺžky 1. Štvorboký ihlan má obsah postavy 1 a výšku vyrátame z Pytagorovej vety (hrana, úsečka z vrchola do stredu podstavy a výška tvoria pravouhlý trojuholník) ako $\sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, takže má objem $\frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}}$. Podobne pravidelný štvorsten má obsah podstavy (rovnostranný trojuholník) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ a výšku $\sqrt{1^2 - (\frac{2\sqrt{3}}{6})^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, takže má objem $\frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 4}$. Keď to dáme dokopy, dostávame $2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \sqrt{2}$.

Úloha 43 J / 33 S. Stopár ide po ceste. Šanca, že v najbližších 20 minútach stretne auto je $\frac{609}{625}$. Ak je v každom okamihu rovnaká šanca, že stretne auto, tak aká je šanca, že stretne auto v najbližších piatich minútach?

Výsledok. 3/5

Návod. Skúsme radšej spočítať pravdepodobnosť, že stopár auto nestretne. Pre 20 minút to je $1 - \frac{609}{625} = \frac{16}{625}$. Ak pravdepodobnosť nestretnutia auta stopárom počas 5 minút je p, potom pre 20 minút to je p^4. Teda $p = \frac{2}{5}$. potom pravdepodobnosť stretnutia auta počas 5 minút je $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Úloha 44 J / 34 S. Vandal a moderátor upravujú článok na Wikipédii. Na začiatku bol článok bez chyby a každý deň vandal pridal jeden chybný údaj. Na konci každého dňa má moderátor 2/3 šancu na nájdenie každej jednotlivej chyby, ktorá ešte v článku je. Aká je šanca, že po troch dňoch bude článok bezchybný?

Výsledok. $2/3 \cdot 8/9 \cdot 26/27 = \frac{2^5 \cdot 13}{3^6}$

Návod. Pre každú chybu zrátame pravdepodobnosť, že nevydrží do konca. Pravdepodobnosť, že nejaká chyba vydrží k dní, je $(\frac{1}{3})^k$ a pravdepodobnosť, že nejaká chyba nevydrží k dní, je $1-(\frac{1}{3})^k$. Keďže "nevýdrž" jednotlivých chýb je nezávislá, tak tieto pravdepodobnosti jednoducho ponásobíme: $(1 - 2/3) \cdot (1 - 1/9) \cdot (1 - 1/27)$.

Úloha 45 J / 35 S. Máme k dispozícii neobmedzenú zásobu červených, modrých a žltých kariet. Za každú kartu sa dostávajú body, a to nasledovne:

- za každú červenú kartu je jeden bod
- za každú modrú kartu je toľko bodov, koľko je dvojnásobok počtu našich červených kariet
- za každú žltú kartu je toľko bodov, koľko je trojnásobok počtu našich modrých kariet

Koľko najviac bodov dokážeme získať pomocou pätnástich kariet?

Výsledok. 168

Návod. Nech C je počet červených kariet, M je počet modrých kariet a Z je počet žltých kariet. Obráťme vzťah červených a modrých kariet. Potom každá červená karta prispieva k celkovému skóre $1 + 2M$ (jeden bod za seba a dva za každú modrú kartu) a každá žltá karta prispieva $3M$. Ak $M > 1$, tak sa nám oplatí zmeniť všetky červené karty za žlté. Ak $M = 0$, tak maximálne skóre je 15. Ak $M = 1$, tak skóre je vždy 42. Ak $M > 1$, tak skóre je $3MZ$, navyše vieme $M + Z = 15$. Maximum nastáva pri $M = 7$ a $Z = 8$, čo dáva skóre 168.

Úloha 46 J / 36 S. Matúš má jednu 20-stennú hraciu kocku a CDčko má tri 6-stenné hracie kocky. Aká je šanca, že po hodení kockami bude hodnota na Matúšovej kocke väčšia, ako súčet hodnôt na CDčkových kockách?

Výsledok. $\frac{19}{40}$

Návod. Uvedomíme si, že oba hody majú symetrické rozdelenie. Tj. pravdepodobnosť, že padne x na dvadsaťstennej je rovnaká, ako že padne $21 - x$ (od 1 po 20). A podobne pravdepodobnosť, že padne y na troch šesťstenných, je rovnaká, ako že padne $21 - y$ (od 3 po 18). Podobnou úvahou zistíme, že pravdepodobnosť výhry Matúša je rovnaká, ako pravdepodobnosť výhry CDčka. Preto je výsledok $\frac{1-p}{2}$ kde p je pravdepodobnosť remízy. A tá je 1/20, keďže nech hodí CDčko troma kockami ľubovoľnú hodnotu, tak Matúš má vždy šancu 1/20, aby ju trafil.

Úloha 47 J / 37 S. Majme tabuľku 10×10. Riadky, resp. stĺpce očíslujeme postupne zľava doprava resp. zhora, dole číslami od 1 po 10. Do každého políčka vpíšeme súčin čísla riadku a čísla stĺpca, v ktorom sa nachádza. Stanka stojí na políčku v ľavom hornom rohu a chce sa dostať na políčko v pravom dolnom rohu. Stanka môže chodiť iba doprava a dole (šikmo nie). Stankine číslo je súčinom čísel na políčkach, na ktoré Stanka stúpila (vrátane prvého a posledného). Ak uvažujeme všetky možné Stankine čísla, aký je ich najväčší spoločný deliteľ?

Výsledok. $10 \times 10! \cdot 10! = 2^{17} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^2 =$

Návod. Treba si uvedomiť, čo musí Stanka vždy pozbierať a čomu sa naopak môže vyhnúť. Každá cesta nazbiera každé číslo aspoň dvakrát (raz sa stĺpec a raz za riadok). Pre každé číslo i okrem 1 a 10 existuje cesta, ktorá prechádza i-tym riadkom a i-tym stĺpcom práve raz (také veľké "L"-ko). A teda $2, 3, \ldots, 9$ budú vo výslednom súčine práve dvakrát. Keďže v pravom dolnom rohu (10×10) nazbiera Stanka hneď dve desiatky a ťah predtým si musela taktiež nazbierať jednu desiatku, tak 1000 delí výsledok. Je jednoduché sa presvedčiť, že viac ako tri desiatky nemusíme pozbierať.

Úloha 48 J / 38 S. Majme trojuholník s výškami dlhými 3, 4 a 6. Aký je jeho obvod?

Výsledok. $\frac{72}{\sqrt{15}} = \frac{24\sqrt{15}}{5}$

Návod. Z toho, že obsah trojuholníka je polovica zo súčinu jeho výšky a strany dostávame, že trojuholník bude podobný s trojuholníkom 2,3,4. Treba vyjadriť jednu z výšok zo strán trojuholníka. Môžeme napríklad použiť Herónov vzorec pre výpočet obsahu iným spôsobom pre strany $2a$, $3a$ a $4a$, a potom dať do rovnosti s obsahom $\frac{2a\cdot 6}{2}$. Takže $S = \frac{a^2}{4}\sqrt{135} = 6a$ z čoho dostaneme $a = \frac{24}{\sqrt{135}}$ a obvod je $9a$.
Poznámka: Herónov vzorec pre výpočet obsahu trojuholníka so stranami a, b, c je $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{a+b+c}{2}$ a S je obsah trojuholníka.

Úloha 49 J / 39 S. Nájdite najväčšie prirodzené číslo $n \leq 4,000,000$, pre ktoré je výraz $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}$ racionálny.

Výsledok. $1999 \cdot 2000 = 3998000$

Návod. Označme $s = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}$. Potom platí $s = \sqrt{n+s}$. Riešením kvadratickej rovnice pre s je $\frac{1\pm\sqrt{1+4n}}{2}$, a keďže s má byť racionálne, tak musí $1+4n = a^2$, kde a je racionálne číslo. Úpravou výrazu dostaneme $n = \frac{a^2-1}{4}$. Aby bolo n celé, musí byť aj a celé, pretože ak $a = \frac{p}{q}$ je vykrátený zlomok, tak $n = \frac{p^2-q^2}{4q^2}$ má byť celé číslo, a teda q by muselo deliť p, čo je spor s vykráteným zlomkom. Ďalšou úpravou máme $n = \frac{a-1}{2}\frac{a+1}{2}$, a teda a musí byť nepárne a aby $n \leq 4,000,000$, tak najväčšie a získame keď $\frac{a+1}{2} = 2000$, z čoho $n = 1999 \cdot 2000$.

Úloha 50 J / 40 S. Majme Maxištvorec 3×3 tvorený deviatimi štvorcovými kachličkami. Každá kachlička je rozdelená na štyri rovnaké štvorčeky, v ktorých sú vpísané čísla 1, 2, 3 a 4 (každé práve raz). Dve kachličky sa môžu dotýkať len rovnakými číslami (ako dominá). Koľko rôznych Maxištvorcov existuje?

4	3	3	4	4	2
1	2	2	1	1	3

• • •

Výsledok. $24 \cdot (2^4 - 9) = 168$

Návod. Kachličku vľavo si pevne zvolíme (1,2 a 3,4). Uvedomíme si, že celá situácia záleží len na štyroch *kľúčových* hodnotách. Nech ľavé horné políčko má súradnice $(1,1)$, tak kľúčové sú $a = (1,4)$, $c = (1,6)$, $b = (4,1)$ a $d = (4,6)$. Do každej z nich môžu byť vpísané len 2 čísla, takže máme maximálne 16 možností. Treba si uvedomiť, že nevyhovujú všetky, niekedy príde ku "kolíziám" vo vnútri. Takže buď ich všetky vyskúšame, alebo pracujeme s označenými hodnotami a,b,c a d a prídeme na nejaké vzťahy. Napríklad nesmie byť $a = 2 \wedge b = 3$ kvôli strednej kachličke, $c = d$ kvôli pravej dolnej, $a = 1 \wedge b = 3 \wedge d = 4$ kvôli pravej strednej a $a = 2 \wedge b = 1 \wedge c = 4$ kvôli strednej dolnej. To nám dokopy vylúči 9 možností (jednu sme zarátali dvakrát). Nezabudnime výsledok vynásobiť 24 – toľko je možností ako môže vyzerať prvá kachlička.

Úloha 51 J / 41 S. Ondro svoje obľúbené číslo (zapísané v desiatkovej sústave a bez nuly na začiatku) nazýva balónik. Pre balónik platí:

- Číslo o 1 väčšie ako balónik je deliteľné 210.
- Ciferný súčet balónika je dvojnásobok počtu jeho cifier.
- Balónik nemá viac ako 12 cifier.
- Cifry balónika sú na striedačku párne a nepárne (balónik nemusí začínať párnou cifrou).

Určite hodnotu Ondrovho balónika.

Výsledok. 1010309

Návod. Zameriame sa na podmienku, že číslo o 1 väčšie je deliteľné $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Z toho je hneď zrejmé, že posledná cifra musí byť 9. Kvôli deliteľnosti trojkou je ciferný súčet tvaru $3k + 2$. Zo zadania ciferný súčet balónika je dvojnásobok počtu jeho cifier. Ciferné súčty, keďže sú párne, tvaru $3k + 2$ a väčšie ako 9, prichádzajú do úvahy 14 a 20. Im zodpovedajú počty cifier 7, resp. 10. Keďže sa striedajú párne a nepárne cifry, tak najmenšie čísla spĺňajúce všetko okrem deliteľnosti 7 sú 1010109 a 2101010109, ktoré majú ciferné súčty 12 a 15. Druhé číslo má nepárny ciferný súčet, a teda nevieme dosiahnúť súčet 20. V prvom prípade nám stačí zväčšiť ciferný súčet o 2, teda zväčšiť jednu z cifier o 2. Ľahko môžme zistiť, že jediná možnosť, kvôli deliteľnosti 7, je číslo 1010309.

Úloha 52 J / 42 S. Štvorciferné číslo n je také, že posledné 4 cifry z n^2 je číslo n samo. Nájdite n.

Výsledok. 9376

Návod. Preformulovaním zadania máme $n^2 - n = n(n-1) = 10000k$ pre nejaké prirodzené k. Číslo 5^4 delí pravú stranu, a preto $5^4 = 625$ delí buď n alebo $n - 1$. Podobne $2^4 = 16$ delí buď n alebo $n - 1$. Z prvej deliteľnosti musí byť n tvaru $n = 625k + b$ kde $k \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ a $b \in \{0, 1\}$. Keďže 625 dáva zvyšok 1 po delení 16, tak n dáva zvyšok $k + b$ po delení 16. Z druhej deliteľnosti musí byť teda $k + b \in \{0, 1, 16\}$ a štvorciferný výsledok dostaneme jedine pre $(k, b) = (15, 1)$, čomu zodpovedá $n = 9376$. Keďže $9376 \times 9376 = 87909376$, tak 9376 je jediným možným a naozaj vyhovujúcim výsledkom.

Úloha 53 J / 43 S. Zistite súčet všetkých päťciferných palindrómov. Palindróm je číslo, ktoré vyzerá rovnako spredu aj zozadu. Napr. 12321 je palindróm.

Výsledok. $900 \cdot 55000 = 49500000$.

Návod. Všetkých päťciferných palindrómov je rovnako ako všetkých trojciferných čísel a dokonca existuje jednoduché priradenie medzi nimi. K číslu abc vieme priradiť palindróm $abcba$ pre $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ a $b, c \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Celkový súčet si rozbijeme na súčty po cifrách. Každé a prispeje $a \cdot 10001$, každé b prispeje $b \cdot 1010$ a každé c prispeje $c \cdot 100$ k celkovému súčtu. Každá z možností pre a sa objaví v súčte 100 krát a každá z možností pre b a c sa objaví v súčte 90 krát. Preto je celkový výsledok $(1 + 2 + \cdots + 9)(100)(10001) + (0 + 1 + \cdots + 9)(90)(1110) = 45004500 + 4495500 = 49500000$.

Úloha 54 J / 44 S. Majme štyri nepárne prirodzené čísla a, b, c a d, ktoré spĺňajú $a + b + c + d = 98$. Koľkými rôznymi spôsobmi môžeme tieto čísla vybrať?

Výsledok. $\binom{50}{3} = 19600$

Návod. Najprv si úlohu zmeníme na jednoduchšiu tak, aby zostal výsledok rovnaký. Označíme si $A = \frac{a-1}{2}$ a rovnako označíme aj B, C a D pre b, c a d. Potom platí $A + B + C + D = \frac{a+b+c+d-4}{2} = 47$ pre kladné celé A, B, C a D. Je vidno, že pre každú štvoricu a, b, c a d zo zadania existuje vyhovujúca štvorica A, B, C a D, a naopak. Toto už je štandardná úloha. Riešime ju tak, že si zoberieme 47 bielych guľôčok a 3 čierne. Rozostavíme ich do radu a čierne guľôčky rozdelia biele guľôčky na štyri úseky (potenciálne prázdne), ktoré označujú A,B,C a D. Napríklad, ak sú čierne na pozíciách 5,6 a 25, tak úseky bielych sú 1-4, prázdny, 7-24 a 26-50 a $A = 4$, $B = 0$, $C = 18$ a $D = 26$. Zase je vidno, že pre každé A,B,C a D existuje práve jedna pozícia čiernych guľôčok, a naopak.Takže riešením je počet rozostavení 3 čiernych guľôčok na 50 pozíciách, ktorých je $\binom{50}{3}$.

Úloha 55 J / 45 S. Nájdite jediné jedenásťciferné prirodzené číslo začínajúce jednotkou také, že keď ho napíšeme dvakrát za sebou, tak dostaneme druhú mocninu nejakého prirodzeného čísla.

Výsledok. $(10^{11} + 1) \cdot 16/121 = 16 \cdot 826446281 = 13223140496$

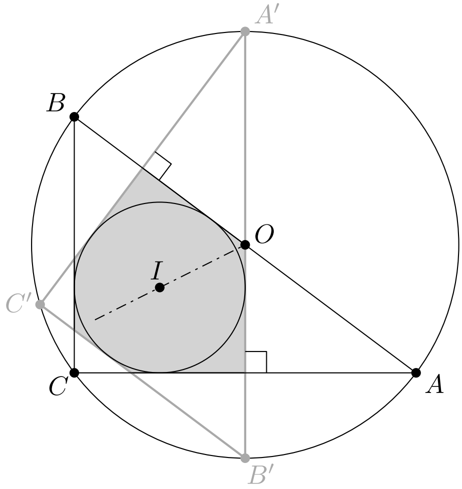
Návod. Číslo N vzniknuté zapísaním pôvodného čísla n dvakrát za sebou je n násobkom čísla $10^{11} + 1 = 11^2 \cdot D$. Preto ak zvolíme $n = t^2 \cdot D$, tak $N = 11^2 \cdot D \cdot t^2 \cdot D = (11 \cdot t \cdot D)^2$. Musíme ešte zvoliť t tak, aby n bolo jedenásťciferné a začínalo jednotkou. Poslúži nám $t = 4$ a zo zadania vieme, že je jediné také.

Úloha 56 J / 46 S. Dva rôzne trojuholníky so stranami dĺžok 18,24 a 30 majú spoločnú vpísanú aj opísanú kružnicu. Aký obsah má ich spoločná plocha?

Výsledok. 132

Návod. Označme jeden z trojuholníkov ABC ($AC = 24$, $BC = 18$). Keďže $(18, 24, 30) = 6 \cdot (3, 4, 5)$, tak $\triangle ABC$ je pravouhlý a pre polomery vpísanej a opísanej kružnice platí $r = \frac{1}{2}(18 + 24 - 30) = 6$ a $R = 15 = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$. Existuje jediný priemer $A'B'$ opísanej kružnice rôzny od AB, ktorý sa dotýka kružnice vpísanej – ten je symetrický s AB podľa priamky OI. Zhodou okolností leží $A'B'$ na osi strany AC. Tá totiž prechádza bodom O, a keďže má od BC vzdialenosť 12, má od I vzdialenosť 6. Druhý trojuholník $A'B'C'$ bude preto symetrický s ABC podľa OI a zároveň bude $A'B' \perp AC$ a $A'C' \perp AB$. Zostáva si rozmyslieť, že prienik dvoch trojuholníkov získame z $\triangle ABC$ odčítaním obsahov troch malých pravouhlých trojuholníkov podobných s $\triangle ABC$, ktorých rozmery postupne určíme ako $9 - 12 - 15$ (u A), $6 - 8 - 10$ (u B) a $3 - 4 - 5$ (u C). Konečný obsah spoločnej časti je

$$\frac{1}{2}(18 \cdot 24 - 9 \cdot 12 - 6 \cdot 8 - 3 \cdot 4) = 132.$$



Úloha 57 J / 47 S. Majme mriežku 5×5. Každý štvorček chceme zafarbiť bielou alebo čiernou farbou, aby platilo, že v každom riadku aj stĺpci sú práve dva čierne štvorčeky. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť?

Výsledok. 2040

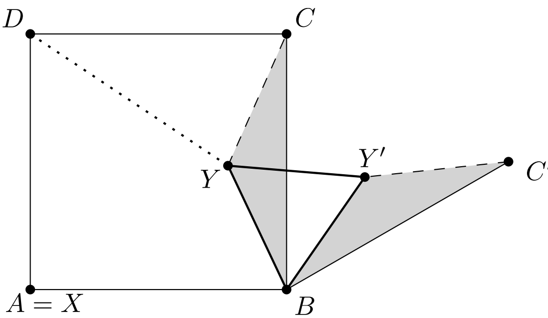
Návod. Políčka označíme $A1$ až $E5$ (čísla sú riadky). Postupne ofarbíme desať políčok načierno. Bez ujmy na všeobecnosti (bunv), nech sú ofarbené $A1$, $B1$ (výsledok potom stačí zo symetrie vynásobiť $\binom{5}{2} = 10$) a $B2$ (a štyrmi). Ďalej, ak je v druhom riadku ofarbené políčko $A2$, tak stačí určiť počet ofarbení tabuľky 3×3, ktorých je 6. Ak je v druhom riadku ofarbené iné políčko, tak nech je to bunv $C2$ (násobíme troma) a v treťom stĺpci ešte $C3$ (opäť troma). Ak je ofarbené políčko $A3$, tak je jediná možnosť ako ofarbenie dokončiť. V opačnom prípade sú štyri možnosti. Celkový počet ofarbení je preto

$$10 \cdot 4 \cdot \big(6 + 3 \cdot 3 \cdot (1 + 2 \cdot 2)\big) = 40 \cdot 51 = 2040.$$

Úloha 58 J / 48 S. Body X a Y sú vo vnútri štvorca so stranou 1. *Diaľkou* vrchola štvorca označme jeho vzdialenosť k bližšiemu z bodov X a Y. Aký je najmenší možný súčet *diaľok* vrcholov štvorca?

Výsledok. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

Návod. Prvý odhad získame, keď X a Y zvolíme ako rôzne vrcholy štvorca, potom je súčet diaľok 2. Pomocou trojuholníkových nerovností vieme zistiť, že ak je X alebo Y najbližšie k práve 0,2 alebo 4 vrcholom, tak súčet menší ako 2 nedosiahneme. Preto nech Y je bližšie k práve trom vrcholom (B, C a D) ako X. Chceme minimalizovať $AX + BY + CY + DY$, ale AX môže byť nula, ak $X = A$. Je známe, že súčet tých troch vzdialeností v trojuholníku BCD je najmenší, keď úsečky BY,CY a DY zvierajú 120 stupňov. (Túto skutočnosť môžeme overiť otočením trojuholníka BCY podľa bodu B o 60 stupňov na $BC'Y'$ a minimalizáciou dĺžky lomenej čiary $DYY'C'$, čím bude úsečka $C'D$, ktorej dĺžku jednoducho vyjadríme.)



Úloha 59 J / 49 S. Parkovisko pozostáva z 2012 parkovacích miest pravidelne rozložených v jednom rade označených číslami 1 až 2012. Postupne tam po jednom zaparkuje 2012 áut, pričom postupujú nasledovne:

- Prvé auto si náhodne vyberie jedno z 2012 miest.
- Každé ďalšie auto si vyberá s rovnakou pravdepodobnosťou zo všetkých miest, ktorých vzdialenosť od najbližšieho obsadeného miesta je v danej chvíli najväčšia.

Aká je pravdepodobnosť, že posledné auto zaparkuje na mieste s číslom 1?

Výsledok. $1/2012 \cdot 1/1025 = 1/2062300$

Návod. Aby mohlo byť miesto číslo 1 obsadené ako posledné, musí byť miesto číslo 2 obsadené ako prvé (so šancou $\frac{1}{2012}$), a hneď po ňom sa obsadí pozícia n. Potom sa zaplnia niektoré miesta od 3 po $n-1$, až kým zostanú iba medzery veľkosti 1 a 2. V takom prípade je pravdepodobnosť, že 1. miesto bude obsadené ako posledné, rovná prevrátenej hodnote počtu voľných miest, keďže každé miesto má rovnakú šancu byť posledné. Uvedomíme si, že ak sa budeme pozerať iba na veľkosti medzier a postupne obsadzovať najväčšie, tak vždy nám zostane rovnaký počet medzier veľkosti 1 aj 2. A preto si vieme ich počet jednoznačne vypočítať. Nech $f(n)$ je počet miest, ktoré zostanú voľné, ak autá môžu parkovať na $n+2$ miestach za sebou, pričom prvé a posledné je obsadené. Prvé auto sa postaví do stredu a zostanú prípady $f(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)$ a $f(\lceil \frac{n-1}{2} \rceil)$. A preto máme rekurentné vyjadrenie $f(n) =$

$f(\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor)+f(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil)$ s bázou $f(1)=1$ a $f(2)=2$. Ak sa s tým pohráme a zrátame pre malé hodnoty, tak sa dostaneme k explicitnému vyjadreniu:

$$f(x)=\begin{cases} x-2^{n-1}+1, & 2^n\le x\le\frac{3}{2}\cdot 2^n-2\\ 2^n, & \frac{3}{2}\cdot 2^n-1\le x\le 2\cdot 2^n-1.\end{cases}$$

Preto $f(2009)=1024$ a celková pravdepodobnosť je $\frac{1}{2012}\cdot\frac{1}{1024+1}=\frac{1}{2062300}$.

Úloha 60 J / 50 S. Nájdite všetky reálne čísla x spĺňajúce $(x^2+3x+2)(x^2-2x-1)(x^2-7x+12)+24=0$.

Výsledok. $0, 2, 1\pm\sqrt{6}, 1\pm\sqrt{8}$

Návod. Keďže

$$(x^2+3x+2)(x^2-7x+12)=(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8),$$

riešime po substitúcií $x^2-2x=z$ rovnicu

$$0=(z-3)(z-8)(z-1)+24=z^3-12z^2+35z=z(z-5)(z-7).$$

Pre každé $z\in\{0,5,7\}$ jednoducho zistíme zodpovedajúce x.

Zdroje

- Harvard MIT Mathematical Tournament
- Canadian Mathematical Olympiad
- Slovenská Matematická olympiáda
- artofproblemsolving.com
- ucmeradi.sk
- numbergossip.com
- Vlastná tvorba
- Iné

Na príkladoch a vzorových riešeniach pracovali

- Peter Csiba
- Matúš Stehlík
- Stanislava Sojáková
- Ondrej Kováč
- Dominik Csiba
- Katarína Juríková
- Marek Kukan
- Josef Tkadlec
- Alexander Slávik
- Michal Rolínek
- Filip Hlásek
- Samuel Říha
- Hana Bendová
- Miroslav Olšák

STROM

Korešpondenčný matematický seminár

AGENTÚRA
NA PODPORU
VÝSKUMU A VÝVOJA