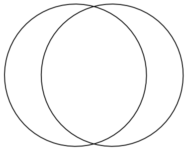
Vzorová řešení

Úloha 1J. Je známo, že číslo 2013 se dá právě jedním způsobem zapsat jako součet dvou prvočísel. Čemu je roven jejich součin?

Výsledek. 4022

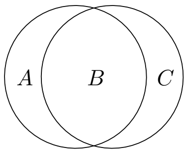
Řešení. Aby byl součet dvou přirozených čísel lichý, musí být jedno z nich liché a jedno sudé. Jediným sudým prvočíslem je dvojka, takže v úvahu připadá jen zápis $2013 = 2011 + 2$. Zadání říká, že 2013 jako součet dvou prvočísel zapsat lze, takže 2011 je prvočíslo a odpověď je $2011 \cdot 2 = 4022$.

Úloha 2J. Dvě kružnice o poloměru 1 se protínají tak, že obsah prostřední části je roven součtu obsahů krajních dvou. Čemu je roven obsah prostřední části?



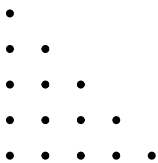
Výsledek. $\frac{2}{3}\pi$

Řešení. Označme obsahy tří částí jako na obrázku.



Ze symetrie víme, že $A = C$, takže ze zadaného $B = A + C$ plyne $B = 2A$. Obsah prostřední části je tak roven dvěma třetinám obsahu levého kruhu, tedy $\frac{2}{3}\pi$.

Úloha 3J. Máme pět žlutých kolíků, čtyři červené, tři zelené, dva modré a jeden oranžový. Kolika způsoby je můžeme rozmístit do trojúhelníkové sítě (viz obrázek) tak, aby v žádném řádku ani sloupci nebyly dva kolíky stejné barvy? Stejně barevné kolíky považujeme za nerozlišitelné.



Výsledek. 1

Řešení. Začneme rozmísťováním žlutých kolíků. Máme jedinou možnost, jak je rozmístit tak, aby v každém řádku i sloupci byl nejvýše jeden, a sice dát je na přeponu trojúhelníku. Podobně máme pouze jeden způsob, jak rozmístit postupně červené, zelené, modré a oranžové kolíky – vždy na přeponu trojúhelníku tvořeného dosud neobsazenými místy v trojúhelníkové síti. Proto existuje pouze jedno rozmístění všech kolíků vyhovující zadání.

Úloha 4J. Najděte nejmenší přirozené číslo, jehož součin cifer je roven 600.

Výsledek. 3558

Řešení. Protože $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, můžeme na sestavení tohoto čísla použít pouze číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Přitom jedničky k součinu nijak nepřispějí, pouze zvětší počet cifer. Zřejmě musí číslo obsahovat dvě pětky, neboť 5^2 nelze získat jinou kombinací cifer. Zbývající cifry musí mít součin 24, tedy musí být alespoň dvě. Číslo 24 lze rozložit jako $3 \cdot 8$ nebo $4 \cdot 6$, a protože první možnost obsahuje menší číslici, zvolíme ji a sestavíme hledané číslo 3558.

Úloha 5J. Kladná reálná čísla a, b splňují

$$a + \frac{1}{b} = 7 \quad \text{a} \quad b + \frac{1}{a} = 5.$$

Čemu je rovna hodnota výrazu $ab + \frac{1}{ab}$?

Výsledek. 33

Řešení. Obě rovnosti mezi sebou vynásobíme a dostaneme

$$\begin{aligned} ab + \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{1}{ab} &= 35, \\ ab + \frac{1}{ab} &= 33. \end{aligned}$$

Úloha 6J. Míša objevila šesticiferné přirozené číslo splňující následující podmínky:

1. Číslo se čte stejně zleva doprava i zprava doleva.
2. Je dělitelné devíti.
3. Po škrtnutí první a poslední cifry je jediným prvočíselným dělitelem nového čísla číslo 11.

Které číslo Míša objevila?

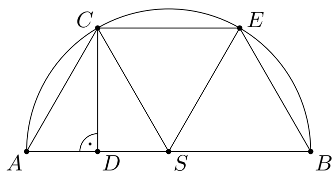
Výsledek. 513315

Řešení. Začneme poslední podmínkou. Jediným čtyřciferným číslem, které je mocninou 11, je $11^3 = 1331$. Námi hledané číslo je tedy tvaru $\overline{a1331a}$, a protože je dělitelné devíti, musí být i jeho ciferný součet $2a + 8$ dělitelný devíti. Tento výraz je sudý a menší nebo roven 26, tedy musí být roven 18. Proto $a = 5$ a námi hledáné číslo je 513315.

Úloha 7J. Na průměru AB půlkružnice k je dán bod D. Kolmice k AB vedená bodem D protne půlkružnici k v bodě C. Jsou-li délky oblouků AC a CB půlkružnice k v poměru $1:2$, určete hodnotu poměru $|AD|:|DB|$.

Výsledek. $1:3$

Řešení. Protože bod C dělí půlkružnici v poměru $1:2$, můžeme dokreslit ještě bod E tak, aby body A, C, E, B (v tomto pořadí) tvořily čtyři po sobě jdoucí vrcholy pravidelného šestiúhelníku.



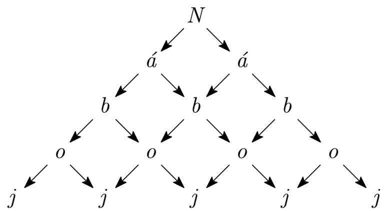
Označme S střed půlkružnice k. Body A, C, S pak tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku a bod D je středem strany SA, neboť výška a těžnice v rovnostranném trojúhelníku splývají. Odtud už snadno dopočítáme poměr $|AD| : |DB| = 1 : 3$.

Úloha 8J. Dva rozmazlení bratříčci Viktor a Mišo dostali pytel bonbonů, který si půl na půl rozdělili. Každý z nich sní během dne dva až tři bonbony. Malému Vikouškovi bonbony vydržely na čtrnáct dní, staršímu Mišovi přesně na tři týdny. Kolik bonbonů bylo původně v pytli?

Výsledek. 84

Řešení. Všimneme si, že malý Vikoušek mohl sníst maximálně $3 \cdot 14 = 42$ bonbonů, zatímco Mišo jich snědl minimálně $2 \cdot 21 = 42$. Protože však oba měli stejné množství, musel každý z nich mít 42 bonbonů. V pytli jich tedy původně bylo 84.

Úloha 9J. Kolika způsoby lze ve schématu na obrázku přečíst slovo *Náboj*?



Výsledek. 16

Řešení. Z každého z písmen *N*, *á*, *b*, *o* můžeme dále pokračovat ve čtení dvěma způsoby. Proto lze slovo *Náboj* přečíst celkem $2^4 = 16$ způsoby.

Úloha 10J. Na ostrově žijí obyvatelé dvou typů: pravdomluvní vždy říkají pravdu, lháři zásadně lžou. Dvanáct obyvatel ostrova se posadilo do kruhu. Všichni svorně tvrdí, že jsou pravdomluvní. Také tvrdí, že po jejich pravé ruce sedí lhář. Kolik nejvíce lhářů může být mezi těmito dvanácti lidmi?

Výsledek. 6

Řešení. Předpokládejme, že by vedle sebe seděli dva pravdomluvní či dva lháři. Pak by ten, který sedí v takové dvojici nalevo, prohlásil o člověku po své pravici, že je pravdomluvný. To je ale v rozporu se zadáním – pravdomluvní a lháři se tedy musí střídat. Lhářů je proto v kruhu právě šest.

Úloha 11J / 1S. Helča má jedenáct shodných čtvercových dlaždiček – šest červených, tři modré a dvě zelené. Kolika způsoby může z některých devíti z nich sestavit tabulku 3×3, musí-li obarvení tabulky zůstat zachováno, otočíme-li ji o $90°$ po směru hodinových ručiček? Stejně barevné dlaždičky považujeme za nerozlišitelné.

Výsledek. 0

Řešení. Aby zůstalo obarvení při otočení o $90°$ zachováno, musí mít všechny rohové dlaždičky stejnou barvu. Stejně tak musí mít stejnou barvu čtyři dlaždičky ve středech krajních sloupců a řádků. Potřebujeme proto buď alespoň 8 dlaždiček jedné barvy, nebo po čtyřech dlaždičkách dvou různých barev. Takové dlaždičky ale k dispozici nemáme, a tak žádné vyhovující obarvení neexistuje.

Úloha 12J / 2S. Na ostrově jsou ženaté dvě pětiny mužů a vdané tři pětiny žen. Kolik procent obyvatelstva ostrova žije v manželství?

Výsledek. $48\% = \frac{12}{25}$

Řešení. Označme D celkový počet sezdaných párů na ostrově. Celkový počet mužů, resp. žen pak lze vyjádřit jako $\frac{5}{2}D$, resp. $\frac{5}{3}D$. Na ostrově tedy žije celkem $\frac{5}{2}D + \frac{5}{3}D = \frac{25}{6}D$ lidí, z toho $2D$ je sezdaných. Podíl ostrovanů žijících v manželství je tedy

$$\frac{2D}{\frac{25}{6}D} = \frac{12}{25} = 48\%.$$

Úloha 13J / 3S. Jaká je délka strany největšího rovnostranného trojúhelníku, který lze vystřihnout z obdélníkového papíru o rozměrech $21 \times 29{,}7\,\mathrm{cm}$?

Výsledek. $14\sqrt{3} = \frac{42}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}$

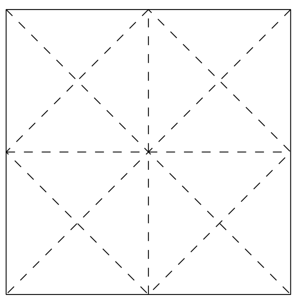
Řešení. Máme-li libovolný rovnostranný trojúhelník uvnitř pásu ohraničeného dvěma rovnoběžnými přímkami, můžeme jej vhodně zvětšit tak, aby dva z jeho vrcholů ležely na protějších hraničních přímkách. Ze všech takových rovnostranných trojúhelníků má největší délku strany ten, jehož jedna strana leží celá na hranici.

Pokud tedy máme pás o šířce 21 cm, pak největší rovnostranný trojúhelník, který se vejde do tohoto pásu, má výšku 21 cm. Délka jeho strany je $21\,\mathrm{cm}/\sin 60^\circ = 14\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Protože $14\sqrt{3} < 14 \cdot 2 < 29{,}7$, vejde se tento trojúhelník i do zadaného obdélníku.

Úloha 14J / 4S. Dáška si vzala čtvercový kus papíru a složila ho čtyřikrát na polovinu bez zpětného rozkládání tak, že každým složením vytvořila rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník. Kolik čtverců je vidět po rozložení papíru?

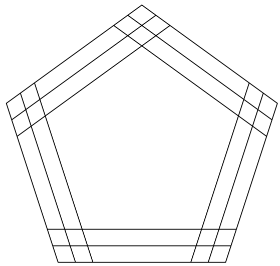
Výsledek. 10

Řešení. Na následujícím obrázku jsou znázorněny přehyby, které uvidíme po rozložení papíru.



Bude tedy vidět celkem deset čtverců – celý papír, čtverec spojující středy jeho stran, a v každém z těchto čtverců navíc čtyři menší.

Úloha 15J / 5S. Kolik pětiúhelníků se nachází na obrázku?



Výsledek. $3^5 = 243$

Řešení. Všimneme si, že každý pětiúhelník musí mít ve svém vnitřku střed obrázku. Pro každou z pěti stran máme na výběr ze tří možností (vnější, prostřední, či vnitřní čára), takže pětiúhelníků je v obrázku $3^5 = 243$.

Úloha 16J / 6S. Při sčítání dvou přirozených čísel Kája omylem za jedno z nich připsala nulu, a tak jí vyšlo 3858 místo 2013. Čemu je rovno větší z čísel, která měla Kája sečíst?

Výsledek. 1808

Řešení. Označme a, b čísla, která měla Kája sečíst. Jelikož připsání nuly odpovídá vynásobení deseti, můžeme sestavit rovnice

$$\begin{aligned} a + b &= 2013, \\ 10a + b &= 3858. \end{aligned}$$

Jejich odečtením získáme $a = 205$, takže $b = 1808$, což je hledaný větší sčítanec.

Úloha 17J / 7S. Jaký poloměr má nejmenší kruh, jímž lze zakrýt trojúhelník se stranami délek 3, 5 a 7?

Výsledek. 3,5

Řešení. Jelikož $3^2 + 5^2 < 7^2$, je úhel naproti straně délky 7 tupý a celý trojúhelník lze zakrýt kruhem majícím tuto stranu za průměr. Naopak každý kruh zakrývající celý trojúhelník musí zakrývat i jeho stranu délky 7 a jako takový musí mít poloměr alespoň 3,5.

Úloha 18J / 8S. Kuba, Mirek, πtr a Vejtek mají dohromady 100 lízátek. Přitom každí dva z nich mají dohromady lízátek alespoň 41. Kolik nejméně lízátek může mít πtr?

Výsledek. 12

Řešení. Označíme-li počty lízátek jednotlivých chlapců postupně K, M, P a V, musí ze zadání mimo jiné platit $K + P \geq 41$, $M + P \geq 41$ a $V + P \geq 41$. Sečtením těchto nerovností získáme $2P + (K + M + P + V) \geq 123$. Jelikož $K + M + P + V = 100$, dostáváme $2P \geq 23$, neboli $P \geq 12$ (P je přirozené číslo). Naopak hodnoty $K = M = 29$, $P = 12$, $V = 30$ všem podmínkám úlohy vyhovují.

Úloha 19J / 9S. Šavlík si nakreslil obdélník $ABCD$ s obsahem 80 a s délkou úhlopříčky 16. Čemu je roven sinus ostrého úhlu svíraného úhlopříčkami obdélníku?

Výsledek. $\frac{5}{8} = 0{,}625$

Řešení. Označme S průsečík úhlopříček obdélníka $ABCD$ a dále v délku výšky na stranu AC v trojúhelníku ABC. Obsah obdélníka $ABCD$ můžeme vyjádřit jako $|AC| \cdot v$, což dává $v = 80/16 = 5$. Nakonec spočteme hledanou hodnotu $\sin |\sphericalangle ASB| = \sin |\sphericalangle CSB| = \frac{v}{|BS|} = \frac{5}{8}$.

Úloha 20J / 10S. Jakou největší hodnotu může mít výraz $a^b + c^d$, jsou-li a, b, c, d navzájem různá čísla z množiny $\{-7, -5, -4, -3, -2, -1\}$?

Výsledek. $(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = \frac{10}{9}$

Řešení. Všimneme si, že abychom dostali kladné číslo, musíme mocnit na sudý exponent. Jelikož $(-2)^{-4} = (-4)^{-2} < (-1)^{-2}$, budeme za exponenty brát -2 a -4. Protože navíc umocněním na záporný exponent všem číslům kromě -1 zmenšíme absolutní hodnotu, budeme za základy mocnin brát -1 a -3. Ze zbývajících dvou možností má větší hodnotu $(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = \frac{10}{9}$.

Úloha 21J / 11S. Do roviny s kartézskou soustavou souřadnic jsme náhodně umístili úhel o velikosti $110°$. Jaká je pravděpodobnost, že ramena tohoto úhlu tvoří graf funkce?

Výsledek. $\frac{11}{18}$

Řešení. Aby byl úhel grafem nějaké funkce, musí každému bodu na ose x přiřazovat maximálně jednu hodnotu na ose y. Záleží tedy jen na natočení úhlu a my můžeme bez újmy na obecnosti umístit jeho vrchol do počátku soustavy souřadnic.

Nechť nejprve jedno rameno úhlu splývá s kladnou částí osy y a druhé leží napravo od osy y. Nyní úhlem otáčejme po směru hodinových ručiček a zkoumejme, kdy je grafem funkce. Po otočení o $70°$ se poprvé stane to, že každému bodu na ose x bude přiřazena pouze jedna hodnota na ose y, a toto potrvá až do otočení o celkových $180°$. Otočení o $180°$ až $360°$ vyšetřovat nemusíme, neboť zde je situace symetrická. Pravděpodobnost, že jsou ramena našeho úhlu grafem nějaké funkce, je tedy $\frac{110}{180} = \frac{11}{18}$.

Úloha 22J / 12S. Pepa si v den konání loňského Náboje (23. března 2012) nakreslil pravidelný stoúhelník $A_1A_2 \ldots A_{100}$ (číslovaný po směru chodu hodinových ručiček) a na jeden náhodný vrchol položil žeton. Každé další ráno pak žeton posunul o tolik vrcholů po směru chodu hodinových ručiček, jaké bylo číslo vrcholu, na kterém žeton zrovna ležel (z vrcholu A_3 by se tedy například žeton přesunul na A_6, z vrcholu A_{96} na A_{92}). Teď leží žeton na vrcholu A_{100}. Jaká byla pravděpodobnost, že se něco takového stane?

Výsledek. $0{,}04 = \frac{1}{25}$

Řešení. Ptáme se vlastně na to, která čísla od 1 do 100 mají tu vlastnost, že když je opakovaně (přibližně 380krát) vynásobíme dvojkou, budou dělitelná stem. Každé takové číslo musí být jistě už od začátku násobkem čísla 25 a naopak všechna čtyři čísla 25, 50, 75, 100 zřejmě vyhovují (už jejich čtyřnásobky končí dvojčíslím 00). Odpověď je proto $\frac{4}{100} = 0{,}04 = \frac{1}{25}$.

Úloha 23J / 13S. Přirozeným číslům, která se dají zapsat jako rozdíl druhých mocnin dvou celých čísel, říkejme *rozdílová*. Kolik z čísel $1, 2, \ldots, 2013$ je rozdílových?

Výsledek. 1510

Řešení. Hledejme všechna přirozená čísla $n \leq 2013$, která se dají zapsat ve tvaru $n = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{Z}$. Každé liché číslo můžeme zřejmě zapsat jako $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$, každé číslo dělitelné čtyřmi jako $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$. Zbývá vyšetřit čísla tvaru $4k+2$, tedy čísla dělitelná dvěma, ale nikoliv čtyřmi. Ta ovšem rozdílová nejsou, protože $a+b$ a $a-b$ jsou buď obě lichá, nebo obě sudá (a jejich součin je tedy buď lichý, nebo dělitelný čtyřmi).

Čísel tvaru $4k+2$ je v daném intervalu 503. Rozdílových čísel je proto $2013 - 503 = 1510$.

Úloha 24J / 14S. Tři pravidelné nepřekrývající se mnohoúhelníky o stranách délek 1 se stýkají v bodě A tak, že tvoří (nekonvexní) mnohoúhelník M, jemuž je A vnitřním bodem. Je-li jeden z pravidelných mnohoúhelníků šestiúhelník a druhý čtverec, určete obvod mnohoúhelníku M.

Výsledek. 16

Řešení. Porovnáním velikostí vnitřních úhlů tří mnohoúhelníků u společného vrcholu A dostaneme, že velikost vnitřního úhlu ve třetím pravidelném mnohoúhelníku je rovna $360° - 90° - 120° = 150°$. Protože součet velikostí vnitřních úhlů v n-úhelníku je roven $180°(n-2)$, platí:

$$\begin{aligned} 180°(n-2) &= n \cdot 150°, \\ n \cdot 30° &= 360°, \\ n &= 12. \end{aligned}$$

Třetí mnohoúhelník je tedy dvanáctiúhelník, a protože každé dva mnohoúhelníky sdílejí jednu stranu, má mnohoúhelník M obvod rovný $4 + 6 + 12 - (3 \cdot 2) = 16$.

Úloha 25J / 15S. Martin napsal na papír čísla 1 až 100 v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že pro každé $i = 1, \ldots, 50$ je to $(2i-1)$-té menší než to $(2i)$-té?

Výsledek. 2^{-50}

Řešení. Představme si, že Martin psal čísla postupně po dvojicích – vždy si náhodně vybral dvě dosud nenapsaná čísla a připsal je na papír za již napsaná. Pravděpodobnost, že napsal dříve to menší, je $\frac{1}{2}$ (bez ohledu na to, která dvě čísla si vybral). Pro všech padesát dvojic tedy máme pravděpodobnost $\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = 2^{-50}$.

Úloha 26J / 16S. Růžová barva vznikne smícháním červené a bílé v poměru 1 : 1, azurová vznikne z modré a bílé v poměru 1 : 2. Anička si chce vymalovat pokoj barvou, která vznikne z růžové a azurové smíchané v poměru 2 : 1. Zatím smíchala tři plechovky modré a jednu plechovku červené barvy. Zbývají jí už jen plechovky s červenou a bílou barvou. Kolik celkem plechovek ještě musí přidat?

Výsledek. 23

Řešení. Vzhledem k tomu, že můžeme přidávat pouze červenou a bílou, musí být ve výsledné barvě přesně tři plechovky modré. Modrá není vůbec zastoupena v růžové barvě, takže z poměru 1 : 2 v azurové barvě víme, že azurové barvy musí být celkem 9 plechovek (3 modré a 6 bílých). Nakonec z poměru 2 : 1 ve výsledné barvě víme, že celkem v ní musí být 27 plechovek (z toho 9 se smíchá na azurovou a 18 na růžovou). Čtyři plechovky již smíchané máme, tedy musíme přidat $27 - 4 = 23$ plechovek.

Úloha 27J / 17S. V klobouku je několik bílých, šedých a černých králíků. Je známo, že když kouzelník začne králíky postupně náhodně vytahovat (aniž by je vracel), je pravděpodobnost, že vytáhne dřív bílého králíka než šedého, rovna $\frac{3}{4}$. Podobně je pravděpodobnost, že vytáhne dřív šedého králíka než černého, rovna $\frac{3}{4}$. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhne dřív bílého králíka než černého?

Výsledek. $\frac{9}{10}$

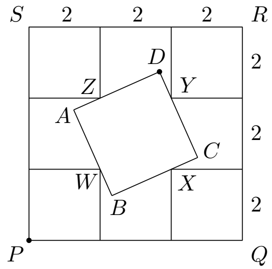
Řešení. Pravděpodobnost, že kouzelník vytáhne dříve bílého králíka než šedého, je rovna $\frac{3}{4}$, takže v klobouku je třikrát více bílých králíků než šedých. Podobně je v klobouku třikrát více šedých králíků než černých. Z toho plyne, že bílých králíků je devětkrát více než černých, a hledaná pravděpodobnost je tak rovna $\frac{9}{10}$.

Úloha 28J / 18S. Pro přirozená čísla a, b platí $49a + 99b = 2013$. Určete hodnotu součtu $a + b$.

Výsledek. 37

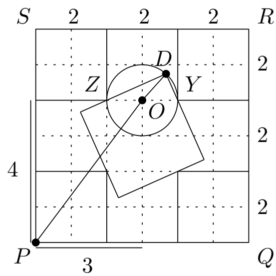
Řešení. Přičtením $a + b$ k oběma stranám rovnosti dostáváme $50(a + 2b) = 2013 + (a + b)$. Jelikož je levá strana rovnosti dělitelná padesáti, musí být i pravá, takže $a+b$ je tvaru $50k-13$, $k \in \mathbb{N}$. Kdyby ovšem bylo $a + b \geq 87$, měli bychom $49a + 99b > 49a + 49b \geq 49 \cdot 87 > 2013$, což není možné. Proto $a + b = 37$.

Úloha 29J / 19S. V rozích čtverce $PQRS$ o straně délky 6 cm jsou umístěny čtyři menší čtverce o stranách délek 2 cm. Označme jejich vrcholy W, X, Y, Z jako na obrázku. Čtverec $ABCD$ je sestrojený tak, že body W, X, Y, Z leží uvnitř jeho stran AB, BC, CD, DA. Určete největší možnou vzdálenost bodů P a D.



Výsledek. 6

Řešení. Bod D se nachází na Thaletově kružnici nad průměrem ZY, její střed označme O. Tato kružnice má poloměr 1 a z Pythagorovy věty spočteme $|PO| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, tedy z trojúhelníkové nerovnosti $|PD| \leq |PO| + |OD| = 6$. Rovnost nastává, pokud body P, O, D leží v přímce, této vzdálenosti tedy lze nabýt.



Úloha 30J / 20S. Ve dvaceti krabicích je dohromady 129 jablek. Přitom v několika krabicích je přesně po čtyřech jablkách a ve zbylých po x jablkách. Nalezněte všechny možné hodnoty x.

Výsledek. 11, 53

Řešení. Označme K počet krabic, které obsahují x jablek ($K \leq 20$). Zbylých $20 - K$ krabic pak obsahuje po čtyřech jablkách a my můžeme psát

$$K \cdot x + (20 - K) \cdot 4 = 129, \quad \text{tedy} \quad K(x - 4) = 49.$$

Jelikož $K \leq 20$, v úvahu připadají jen možnosti $K = 1$, $K = 7$ odpovídající po řadě výsledkům $x = 53$, $x = 11$.

Úloha 31J / 21S. Kladná reálná čísla a, b splňují $a > b$ a současně

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2013.$$

Čemu se rovná hodnota výrazu $\frac{a+b}{a-b}$?

Výsledek. $\sqrt{\frac{2015}{2011}}$

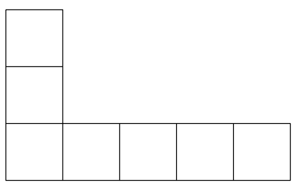
Řešení. Podmínku ze zadání si přepíšeme na $a^2 + b^2 = 2013ab$. Jejím užitím dostáváme následující vztahy:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2015ab,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 2011ab.$$

Jelikož je hledaný výraz kladný, můžeme jeho hodnotu spočíst pomocí výše uvedených rovností jako

$$\frac{a + b}{a - b} = \sqrt{\frac{(a + b)^2}{(a - b)^2}} = \sqrt{\frac{2015ab}{2011ab}} = \sqrt{\frac{2015}{2011}}.$$

Úloha 32J / 22S. Kolika způsoby lze do různých políček heptomina na obrázku vyplnit čísla 1 až 7 (každé musíme použít právě jednou), aby byl součet čísel ve spodním řádku stejný jako součet čísel v levém sloupci?



Výsledek. $144 = 3 \cdot 2 \cdot 4!$

Řešení. Označme si hodnoty v jednotlivých políčkách jako na obrázku.

A				
B				
C	D	E	F	G

Ze zadání víme, že $A+B+C+D+E+F+G = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$ a $A+B = D+E+F+G = \frac{1}{2}(28-C)$. Proto C je sudé číslo.

Pokud $C = 2$, pak $A+B = 13 = 6+7$, tedy máme dvě možnosti, jak doplnit políčka v levém sloupci. Pro každou z těchto možností můžeme zvolit jedno ze 4! uspořádání zbylých čísel ve spodním řádku. Pro $C = 4$ je $A+B = 12 = 5+7$ ($6+6$ nevyhovuje, neboť všechna čísla mají být navzájem různá) a pro $C = 6$ máme $A+B = 11 = 4+7$ ($5+6$ nevyhovuje, neboť už $C = 6$), což nám v obou případech dává opět $2 \cdot 4!$ možností doplnění tabulky. Celkem dostáváme $3 \cdot 2 \cdot 4! = 144$ možností.

Úloha 33J / 23S. Délky stran ostroúhlého trojúhelníku ABC splňují $|AB| = 4\pi$, $|BC| = 4\pi+3$, $|CA| = 4\pi+6$. Označme D patu výšky z vrcholu A. Určete $|CD|-|BD|$.

Výsledek. 12

Řešení. Pythagorova věta pro pravoúhlé trojúhelníky ADC a ADB dává $|CD|^2 = |AC|^2 - |AD|^2$ a $|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2$. Odečtením těchto vztahů dostaneme

$$|CD|^2 - |BD|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = (4\pi+6)^2 - (4\pi)^2 = 48\pi + 36.$$

Jelikož bod D leží uvnitř strany BC, máme současně

$$|CD|^2 - |BD|^2 = (|CD|-|BD|)\cdot(|CD|+|BD|) = (|CD|-|BD|)\cdot(4\pi+3),$$

takže $|CD|-|BD| = 12$.

Úloha 34J / 24S. Tramvaje mají celý den v obou směrech trasy stejné intervaly. Chodec, který šel podél dráhy tramvaje, pozoroval, že ho každých 12 minut jedna tramvaj předjede a zároveň ho každé 4 minuty mine tramvaj v protisměru. Jaký interval mají tramvaje?

Výsledek. 6 minut

Řešení. Označíme rychlost tramvaje t, rychlost chodce c a vzdálenost mezi tramvajemi d. Zadání dává

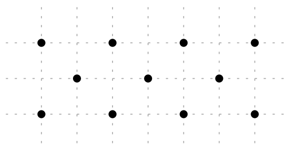
$$t - c = \frac{d}{12\,\mathrm{min}},$$
$$t + c = \frac{d}{4\,\mathrm{min}}.$$

Sečtením rovnic a vydělením dvěma dostáváme

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12\,\mathrm{min}} + \frac{1}{4\,\mathrm{min}}\right)\cdot d = \frac{d}{6\,\mathrm{min}},$$

takže tramvaj ujede vzdálenost d za 6 minut, což odpovídá intervalu tramvaje.

Úloha 35J / 25S. Kolik nedegenerovaných trojúhelníků může být vytvořeno spojením některých tří bodů na obrázku?



Poznámka: Body jsou zarovnány do naznačené mřížky.

Výsledek. $148 = \binom{11}{3} - 17$

Řešení. Počet způsobů, jak vybrat některé tři body z dotyčných jedenácti, je roven

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165.$$

Zbývá tedy spočítat, kolik trojic bodů leží v přímce, a toto číslo odečíst. Vodorovných trojic je celkem $4+1+4 = 9$, šikmých trojic pak $3+3+1+1 = 8$, takže celkový počet trojúhelníků je $165 - 17 = 148$.

Úloha 36J / 26S. Filip dostal bonboniéru se třiceti bonbóny uspořádanými ve třech řádcích po deseti. Aby si ji náležitě vychutnal, jí bonbóny po jednom, a to tak, aby se počty zbývajících bonbónů v každých dvou řádcích v každý okamžik lišily nejvýše o jedna. Kolika způsoby může bonboniéru sníst?

Výsledek. $6^{10} \cdot (10!)^3$

Řešení. Pořadí, v jakém Filip bonbóny sní, můžeme jednoznačně zadat následovně: pro každý řádek určíme, v jakém pořadí budou bonbóny v tomto řádku snězeny; současně určíme, v jakém pořadí bude Filip volit řádky.

V každém řádku můžeme bonbóny uspořádat 10! způsoby, ve všech třech řádcích dohromady tedy $(10!)^3$ způsoby.

Pro určení počtu možných pořadí řádků si uvědomme, že kdykoliv je v každém řádku stejný počet bonbónů, pak si Filip může zvolit libovolný z nich. Při dalším výběru si musí zvolit jeden ze zbývajících dvou (při volbě toho samého by v tomto již bylo o dva bonbóny méně) a v následném třetím výběru musí nutně zvolit ten poslední nevybraný. Po třech snězených bonbónech tedy bude ve všech řádcích opět stejný počet bonbónů. Stačí proto desetkrát zvolit pořadí tří řádků, což lze $(3!)^{10} = 6^{10}$ způsoby.

Možných způsobů snězení bonboniéry je $6^{10} \cdot (10!)^3$.

Úloha 37J / 27S. Řekneme, že šesticiferné přirozené číslo je *dvojité*, pokud se jeho první tři cifry (v tomto pořadí) shodují s jeho dalšími třemi ciframi (tedy například číslo 227227 je dvojité, zatímco číslo 135153 dvojité není). Kolik dvojitých čísel je beze zbytku dělitelných číslem 2013?

Poznámka: Přirozené číslo nemůže začínat nulou.

Výsledek. 5

Řešení. Každé dvojité šesticiferné přirozené číslo můžeme zapsat jako $1001 \cdot k$, kde k je trojciferné přirozené číslo, a naopak z každého trojciferného přirozeného čísla takto dostaneme šesticiferné dvojité. Protože je $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ a z těchto tří prvočísel je 1001 dělitelné pouze jedenácti, dostáváme, že dvojité šesticiferné číslo je násobkem 2013 právě tehdy, když jemu příslušné trojciferné číslo je násobkem $3 \cdot 61 = 183$. Trojciferných čísel dělitených 183 je právě pět, a tolik je tedy i šesticiferných dvojitých násobků 2013.

Úloha 38J / 28S. Na každé políčko hracího plánu 4×4 náhodně nakreslíme šipku doprava nebo dolů a na levé horní políčko postavíme robota. Robot se vždy posouvá na sousední políčko ve směru šipky. Jaká je pravděpodobnost, že robot opustí hrací plán krokem z pravého dolního políčka?

Výsledek. $\frac{5}{16} = \frac{\binom{6}{3}}{2^6}$

Řešení. Spočítejme, kolika různými cestami se robot může do pravého dolního políčka dostat a jaká je pravděpodobnost průchodu jedné takové cesty. dolního políčka přišel. Každá cesta se skládá ze tří kroků dolů a tří kroků doprava, což dává celkem $\binom{6}{3}$ možných cest. Pravděpodobnost, že se robot bude cesty držet, je pokaždé 2^{-6} – každý ze šesti kroků musí být ten správný. Celková pravděpodobnost je tedy $2^{-6} \cdot \binom{6}{3}$.

Úloha 39J / 29S. Vyjádřete

$$\frac{212121210}{112121211}$$

v základním tvaru (tj. jako zlomek $\frac{a}{b}$, kde a, b jsou nesoudělná přirozená čísla).

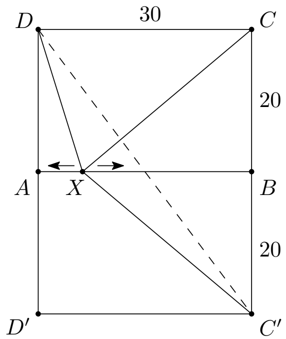
Výsledek. $\frac{70}{37}$

Řešení. Všimneme si (pomocí ciferného součtu), že zadaný čitatel i jmenovatel jsou dělitelné třemi, a následným vydělením zjistíme, že $212121210 = 3 \cdot 70707070$ a $112121211 = 3 \cdot 37373737$. Nyní si stačí uvědomit, že $70707070 = 70 \cdot 1010101$ a $37373737 = 37 \cdot 1010101$, tedy hledaný zlomek je $\frac{70}{37}$.

Úloha 40J / 30S. Je dán obdélník $ABCD$ s délkami stran $|AB| = 30$, $|BC| = 20$. Pro kolik bodů X na jeho straně AB platí, že trojúhelník CDX má celočíselný obvod?

Výsledek. 13

Řešení. Stačí zjistit, kdy je celým číslem $|DX| + |XC|$. Zobrazme zadaný obdélník $ABCD$ podle AB na $ABC'D'$. Pak je $|DX|+|XC| = |DX|+|XC'|$. Pravá strana je zřejmě nejmenší tehdy, když je X středem AB, a největší tehdy, když X splývá s jedním z bodů A, B.



Z Pythagorovy věty spočteme $|DC'| = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ a $|AC'| = \sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300}$, z čehož plyne $36 < |AC'| < 37$. Probíhá-li tedy bod X úsečku AB, klesá nejprve hodnota $|DX| + |XC|$ z čísla těsně převyšujícího $20 + 36 = 56$ ($X = A$) až k 50 (X je střed AB) a následně stoupá k číslu těsně převyšujícímu 56 ($X = B$). Celočíselnou hodnotu má tedy pro $6 + 1 + 6 = 13$ poloh bodu X.

Úloha 41J / 31S. V jakém pořadí je potřeba uspořádat řádky $r_1, \ldots, r_{11}$ vyobrazené tabulky, aby vznikla tabulka symetrická podle vyznačené úhlopříčky? Stačí nalézt jedno řešení.

r_1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
r_2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
r_3	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
r_4	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
r_5	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
r_6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
r_7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
r_8	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
r_9	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
r_{10}	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
r_{11}	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1

Výsledek. pozpátku s případnou cyklickou záměnou, tedy $r_{11}, r_{10}, r_9, \ldots, r_1$ nebo $r_{10}, r_9, \ldots, r_1, r_{11}$ atd. až $r_1, r_{11}, r_{10}, \ldots, r_2$

Řešení. Všimneme si, že tabulka je symetrická podle opačné úhlopříčky. K tomu, aby byla symetrická podle vyznačené úhlopříčky, ji stačí překlopit podle vodorovné osy.

Poznámka: Pro tuto tabulku jiné řešení než uvedených 11 neexistuje.

Úloha 42J / 32S. Pro každé přirozené číslo n položme

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}.$$

Nalezněte nejmenší přirozené číslo $k \geq 2$ takové, že $a_2 \cdot a_3 \cdots a_k > 4$.

Výsledek. 254

Řešení. Označme $A_n = a_n^3$ a ekvivalentně zkoumejme, pro které nejmenší přirozené číslo $k \geq 2$ je $A_2 \cdot A_3 \cdots A_k > 4^3 = 64$. Platí

$$A_n = \frac{n^3 + n^2 - n - 1}{n^3} = \frac{(n+1)\cdot(n+1)\cdot(n-1)}{n \cdot n \cdot n},$$

takže

$$A_2 \cdot A_3 \cdots A_k = \frac{3\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 4\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3}\cdots\frac{(k+1)\cdot(k+1)\cdot(k-1)}{k\cdot k\cdot k} = \frac{1\cdot(k+1)\cdot(k+1)}{2\cdot 2\cdot k} = \frac{(k+1)^2}{4k}.$$

Nyní už zbývá jen vyřešit v přirozených číslech nerovnici

$$(k+1)^2 > 256k,$$

která je po roznásobení levé strany a vydělení kladným k ekvivalentní s $k + \frac{1}{k} > 254$. Řešením je číslo 254.

Úloha 43J / 33S. Kikina připravila pizzu, rozkrájela ji na n stejných dílků a pak na ně připíchla lístky s čísly $1, 2, \ldots, n$ (každé číslo použila právě jednou) tak, že mezi dílky s po sobě jdoucími čísly byl vždy stejný počet jiných dílků. Poté přišel špekoun Lukáš a skoro celou pizzu snědl – zbyly jen tři sousední dílky s čísly 11, 4 a 17 (v tomto pořadí). Kolik dílků měla pizza původně?

Výsledek. 20

Řešení. Nechť mezi dílky s po sobě jdoucími čísly je právě $k-1$ jiných dílků, tedy „skokem" o k dílků se dostaneme z dílku 1 na dílek 2, z dílku 2 na dílek 3 atd. Tyto skoky musí být všechny ve stejném směru, protože prvním skokem v opačném směru bychom se dostali na předchozí dílek s nižším číslem. Z dílku n pak nutně skočíme na dílek 1, protože všechny ostatní mají ve vzdálenosti k dílek s o jedna menším a o jedna větším číslem.

Protože skákáním o k projdeme postupně všechny dílky pizzy, existuje takové s, že skočíme-li o k přesně s-krát, skončíme na sousedním dílku. Platí tedy

$$11 - 4 \equiv s \cdot k \equiv 4 - 17 \pmod{n},$$

odkud dostáváme, že $7-(-13) = 20$ musí být dělitelné n. Protože však existuje dílek s číslem 17, musí být $n \geq 17$, tedy $n = 20$.

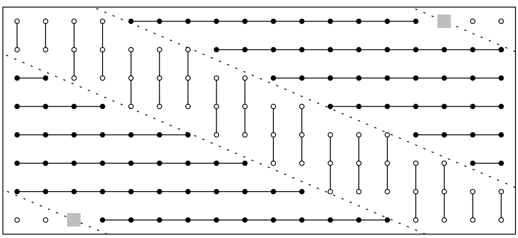
Úloha 44J / 34S. V jedné posluchárně na Matfyzu jsou místa k sezení uspořádaná do obdélníkové mřížky. Během jedné přednášky z analýzy sedělo v každé řadě přesně 11 chlapců, v každém sloupci seděla přesně 3 děvčata a ještě celkem dvě místa zůstala volná. Kolik nejméně míst může být v posluchárně?

Výsledek. 144

Řešení. Označme r a s počet řad a sloupců v posluchárně. Ze zadání plyne $rs = 11r+3s+2$, což upravíme na

$$(r-3)(s-11) = 35.$$

Buď jsou tedy závorky v nějakém pořadí rovny 5 a 7, nebo 1 a 35. Vyzkoušením čtyř možností zjistíme, že nejmenší hodnota součinu rs odpovídá případu $r-3=5$, $s-11=7$ a je rovna $rs = 8 \cdot 18 = 144$. Do takovéto posluchárny lze studenty opravdu rozmístit – například jako na obrázku.



Úloha 45J / 35S. Kružnice k o poloměru 3 a kružnice l o poloměru 4 mají vnitřní dotyk v bodě T. Jaký největší obsah může mít trojúhelník TKL, jehož vrcholy K, L leží po řadě na kružnicích k, l?

Výsledek. $9\sqrt{3} = \frac{27}{\sqrt{3}}$

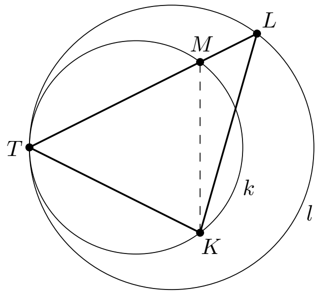
Řešení. Symbolem $[XYZ]$ budeme značit obsah trojúhelníku XYZ.

Označme M průsečík úsečky TL s kružnicí k různý od T. Jelikož T je středem stejnolehlosti s koeficientem $\frac{4}{3}$ zobrazující kružnici k na kružnici l, je bod L obrazem bodu M, a tedy $|TL| = \frac{4}{3}|TM|$ a $[TKL] = \frac{4}{3}[TKM]$ (trojúhelníky sdílejí výšku z vrcholu K). Stačí proto maximalizovat obsah trojúhelníku TKM vepsaného do kružnice k o poloměru 3. Ze všech takových trojúhelníků má největší obsah ten rovnostranný, a to

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 120^\circ\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

Obsah příslušného trojúhelníku TKL pak vyjde

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$



Úloha 46J / 36S. Roman a Majkl hrají hru. Na začátku mají množinu $\{0, 1, \ldots, 1024\}$ a střídají se v tazích. Nejdřív Roman odebere libovolných jejích 2^9 prvků, pak odebere Majkl libovolných 2^8 prvků, pak Roman 2^7 prvků a tak dále, až nakonec odebere Majkl jeden prvek, takže v množině přesně dvě čísla zbydou. Tím hra končí a Roman zaplatí Majklovi absolutní hodnotu rozdílu těchto čísel v korunách. Kolik korun Majkl vyhraje, pokud oba hráči hrají nejlépe, jak mohou?

Výsledek. 32

Řešení. Majkl může v každém svém tahu zdvojnásobit nejmenší vzdálenost mezi dvěma čísly v množině tím, že z ní odebere každý druhý prvek. Takto si zajistí výhru alespoň $2^5 = 32$ korun. Naopak Roman může každým svým tahem snížit rozdíl největšího a nejmenšího čísla o polovinu tím, že odebere spodní nebo horní část množiny, a tedy umí zajistit, že Majkl vyhraje nejvýše $1024/2^5 = 32$ korun. Při optimální hře obou hráčů tak Majkl vyhraje 32 korun.

Úloha 47J / 37S. Na Matfyzu vyhodili z analýzy několik studentů. Všichni tito studenti přestoupili na VŠN (vysokou školu nejmenovanou). To mělo následující důsledky:

1. Počet studentů na Matfyzu se snížil o šestinu.
2. Počet studentů na VŠN se zvýšil o třetinu.
3. Na obou školách vzrostlo průměrné IQ o 2%.

Kolikrát je nyní průměrné IQ na Matfyzu vyšší než na VŠN?

Výsledek. $\frac{6}{5} = 1{,}2$-krát

Řešení. Označme $100m$ původní průměrné IQ studentů Matfyzu a $100v$ původní průměrné IQ studentů VŠN. Nakonec označme p průměrné IQ studentů, kteří přestoupili.

Jelikož se průměrné IQ na Matfyzu zvýšilo o 2%, je průměrné IQ zbylých matfyzáků $102m$. Z poměru $5:1$ zbylých matfyzáků ku vyhozeným a z nového průměru $100m$ dostáváme rovnost $100m = \frac{5}{6} \cdot 102m + \frac{1}{6}p$, kterou upravíme na $p = 90m$.

Obdobně na VŠN bylo původní průměrné IQ $100v$, po zprůměrování s novými studenty $102v$, tedy z poměru $3:1$ původních studentů ku novým máme $p = 108v$.

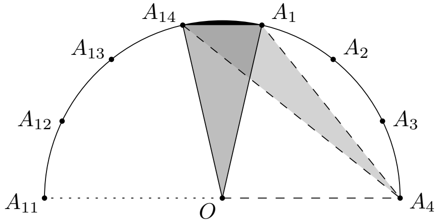
Celkem máme

$$90m = 108v, \quad \text{tedy} \quad \frac{102m}{102v} = \frac{108}{90} = \frac{6}{5}.$$

Úloha 48J / 38S. Do kružnice k o poloměru 1 je vepsán pravidelný čtrnáctiúhelník $A_1A_2 \dots A_{14}$. Jaká je plocha té části kruhu vymezeného kružnicí k, která leží uvnitř ostrého úhlu $A_1A_4A_{14}$?

Výsledek. $\frac{\pi}{14}$

Řešení. Zaměřme se kromě bodů A_1, A_4 a A_{14} ještě na bod A_{11}.



Jelikož $11 = 4 + 7$, je úsečka A_4A_{11} průměrem kružnice k. Současně je $4 - 1 = 3 = 14 - 11$, takže $A_1A_4A_{11}A_{14}$ je rovnoramenný lichoběžník a jeho základny A_4A_{11} a A_1A_{14} jsou rovnoběžné. Obsah trojúhelníku $A_1A_4A_{14}$ je proto stejný jako obsah trojúhelníku A_1OA_{14}, kde O je střed kružnice k. Hledaný obsah je tak roven obsahu kruhové výseče A_1OA_{14}, tedy jedné čtrnáctině obsahu celého kruhu.

Úloha 49J / 39S. Olin s Martinou uviděli 24-prvkovou množinu $\{1, 2, \dots, 24\}$. Olin si vypsal všechny její dvanáctiprvkové podmnožiny, které mají sudý součet prvků, zato Martina si vypsala všechny dvanáctiprvkové podmnožiny s lichým součtem prvků. Kdo si vypsal víc množin a o kolik?

Výsledek. Olin o $\binom{12}{6} = 924$

Řešení. Uvažujme libovolnou dvanáctiprvkovou podmnožinu M a předpokládejme, že existuje přirozené číslo i takové, že M obsahuje právě jedno z čísel $2i - 1$, $2i$. Vezměme nejmenší takové i a sestrojme dvanáctiprvkovou množinu $f(M)$, která bude obsahovat stejné prvky jako M až na to, že z dvojice $2i - 1$, $2i$ bude obsahovat ten druhý prvek.

Snadno si rozmyslíme, že když f provedeme na jednu množinu dvakrát po sobě, získáme opět původní množinu, a dále, že provedeme-li f na některou Olinovou podmnožinu, získáme Martininu podmnožinu a obráceně. Funkce f je tedy bijekcí mezi Olinovými a Martininými podmnožinami, ovšem pouze těmi, pro něž existuje i z předchozího odstavce. Zbývá si rozmyslet, jak vypadají „přebývající“ množiny, pro které takové i není možné najít.

V takových podmnožinách musí být právě šest lichých čísel a šest sudých čísel, která jsou následníky těch lichých. Součet čísel v takových podmnožinách je tak vždy sudý a jejich počet je $\binom{12}{6}$.

Úloha 50J / 40S. Petr si myslí tři navzájem různá přirozená čísla a, b, c taková, že součet některých dvou z nich je 800. Když si na papír napsal čísla a, b, c, $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$ a $a+b+c$, zjistil, že to jsou všechno prvočísla. Určete rozdíl největšího a nejmenšího čísla na Petrově papíře.

Výsledek. 1594

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $b+c=800$. Alespoň jedno z čísel a, $b+c-a=800-a$, $a+b+c=800+a$ je dělitelné třemi, takže aby bylo současně prvočíslem, musí se třem přímo rovnat. Jelikož $800+a>800$, nabízí se dvě možnosti: $a=3$ nebo $800-a=3$.

Pokud $a=3$, máme z Petrových prvočísel $3+(b-c)\geq 2$ a současně $3-(b-c)\geq 2$, tedy $|b-c|\leq 1$, což vzhledem k $b+c=800$ nepřipadá v úvahu.

Víme tedy, že $800-a=3$, čili $a=797$. Největší z Petrových čísel je $a+b+c=797+800=1597$. Vzhledem k předpokladu $b+c=800$ nemůže být žádné z Petrových prvočísel sudé, a proto je nejmenší číslo $800-a=3$. Rozdíl tak činí $1597-3=1594$.

Ještě poznamenejme, že čísla vyhovující zadání skutečně existují – například $a=797$, $b=223$, $c=577$.

Úloha 51J / 41S. Alča na dvě náhodná místa metrové tyčky nakreslila puntíky. Pak přišel Pepa a tyčku náhodně rozlámal na 2013 částí. Jaká je pravděpodobnost, že oba puntíky jsou teď na té samé části?

Výsledek. $\frac{1}{1007}$

Řešení. Představujme si tyčku vcelku. Alča na ni náhodně nanesla dva puntíky, zato Pepa na ni náhodně nanesl 2012 zlomů. Celkem je tak na tyčce 2014 značek, z toho dvě náhodné značky jsou puntík. Celkový počet možností, které značky mohou být puntíky, je $\binom{2014}{2}=1007\cdot 2013$. Puntíky jsou na jednom dílku přesně tehdy, když se jedná o sousední značky, na což máme 2013 možností. Výsledná pravděpodobnost je

$$\frac{2013}{1007\cdot 2013}=\frac{1}{1007}.$$

Úloha 52J / 42S. Kolik deseticiferných přirozených čísel obsahujících každou z cifer $0,1,\ldots,9$ právě jednou je násobkem čísla 11111?

Poznámka: Přirozené číslo nemůže začínat nulou.

Výsledek. $3456=2^5\cdot 5!-2^4\cdot 4!$

Řešení. Protože $0+1+\cdots+9=9\cdot 5$, musí být zkoumaná čísla dělitelná devíti, tedy dokonce číslem 99999. Označme A, resp. B, číslo složené z první, resp. druhé, pětice cifer zkoumaného čísla. Pak máme

$$99999 \mid 100000A+B, \quad \text{právě když} \quad 99999 \mid A+B.$$

Protože jsou A, B pěticiferná přirozená čísla menší než 99999, je

$$0<A+B<2\cdot 99999, \quad \text{tedy} \quad A+B=99999, \quad \text{neboli} \quad B=99999-A.$$

Z toho dostáváme nutnou a postačující podmínku na A, B pro dělitelnost příslušného deseticiferného čísla číslem 99999: Pro $i=1,\ldots,5$ je i-tá cifra čísla B doplňkem do devítky i-té cifry čísla A. Nabízené cifry proto spárujeme do pěti dvojic

$$(0,9),(1,8),(2,7),(3,6),(4,5).$$

Víme, že tyto dvojice musíme použít v jistém pořadí (5! možností), a současně si u každé dvojice můžeme vybrat, které číslo z dvojice dáme do A a které do B (2^5 možností). Musíme však odečíst možnosti obsahující nulu na začátku A, pro které nedostaneme deseticiferné číslo – to je 4! možností, jak uspořádat zbylé dvojice, a 2^4 možností, jak rozdělit jejich čísla mezi A a B. Celkový počet čísel splňujících zadání je tedy $5! \cdot 2^5 - 4! \cdot 2^4$.

Úloha 53J / 43S. Polynom $P(x)$ stupně 2013 s reálnými koeficienty splňuje pro $n = 0, 1, \ldots, 2013$ vztah $P(n) = 3^n$. Určete $P(2014)$.

Výsledek. $3^{2014} - 2^{2014}$

Řešení. Definujme polynom $Q(x) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{x}{k} 2^k$. Ten má stupeň 2013 a navíc pro libovolné $x \in \{0, \ldots, 2013\}$ splňuje dle binomické věty

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{x}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} 2^k = (1+2)^x = P(x).$$

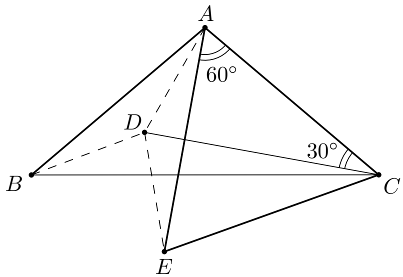
Polynom $P(x) - Q(x)$ je stupně 2013 a má 2014 kořenů, tedy je nulový. Tudíž $P(x) = Q(x)$. Zbývá spočítat

$$Q(2014) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{2014}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{2014} \binom{2014}{k} 2^k - \binom{2014}{2014} 2^{2014} =$$
$$= (1+2)^{2014} - 2^{2014} = 3^{2014} - 2^{2014}.$$

Úloha 54J / 44S. Uvnitř rovnoramenného trojúhelníku ABC splňujícího $|AB| = |AC|$ a $|\sphericalangle BAC| = 99{,}4°$ je dán bod D tak, že $|AD| = |DB|$ a $|\sphericalangle BAD| = 19{,}7°$. Určete $|\sphericalangle BDC|$.

Výsledek. 149,1°

Řešení. Označme E obraz bodu B v osové souměrnosti podle AD.



Pak $|AE| = |AB| = |AC|$ a $|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle BAC| - 2 \cdot |\sphericalangle BAD| = 60°$, takže trojúhelník AEC je rovnostranný a $|CE| = |CA|$. Díky osové souměrnosti však také $|DE| = |DB| = |DA|$, takže CD je osa úsečky AE a $|\sphericalangle ACD| = \frac{1}{2} |\sphericalangle ACE| = 30°$. Teď už z nekonvexního čtyřúhelníku $ABDC$ snadno dopočteme

$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DBA| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACD| = 19{,}7° + 99{,}4° + 30° = 149{,}1°.$$

Úloha 55J / 45S. Nalezněte největší přirozené číslo nekončící nulou takové, že škrtnutím některé jeho „vnitřní“ cifry získáme jeho dělitele.

Poznámka: „Vnitřní“ cifrou rozumíme každou cifru kromě první a poslední.

Výsledek. 180625

Řešení. Označme hledané číslo X. Nejdříve si rozmyslíme, že škrtat musíme jeho druhou cifru.

Pro spor předpokládejme, že první dvě cifry nebyly škrtnuty. Škrtnutím jsme dostali z n-ciferného čísla X číslo $(n-1)$-ciferné (nazvěme ho X'). Pak $10 \cdot X'$ je opět n-ciferné číslo, které se s X shoduje v prvních dvou cifrách, ale přitom se mu nerovná, protože původní číslo nekončilo nulou. To je ale spor, neboť dva násobky $(n-1)$-ciferného čísla se nemohou lišit o $(n-2)$-ciferné číslo.

Číslo X si teď zapišme ve tvaru $X = a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + c$, kde a a b jsou cifry ($a \neq 0$) a $c < 10^n$ číslo nekončící na nulu. Škrtnutím druhé cifry vznikne číslo $X' = a \cdot 10^n + c$. Pro vhodné $k \in \mathbb{N}$ tak musí platit

$$a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + c = k \cdot (a \cdot 10^n + c).$$

Uvědomme si, že $k < 20$. Skutečně, kdyby bylo $k \geq 20$, začínalo by X na větší cifru než X', což nelze. Upravme dále rovnost do tvaru

$$10^n(10a + b - k \cdot a) = (k-1)c.$$

Jelikož levá strana je dělitelná 2^n i 5^n, musí být obojím dělitelná i pravá strana. Číslo c ovšem nekončí na nulu, takže činitel $k-1$ musí být dělitelný alespoň jedním z prvočísel 2, 5 v jeho plné mocnině. Jelikož $k < 20$, usuzujeme, že $n \leq 4$ (je totiž $2^5 > 20$, a dokonce $5^2 > 20$), a tedy X je nejvýše šesticiferné. Naopak pro $n = 4$ musí být už nutně $k - 1 = 16$, což po dosazení dá

$$5^4(b - 7a) = c.$$

Aby vyšla pravá strana nezáporná, musí být $a = 1$ (a a b jsou cifry). Pro b máme možnosti $b = 8$, $b = 9$, z nichž druhou zavrhujeme, neboť c by končilo na nulu. Pro $b = 8$ dopočteme $c = 5^4 = 625$, zpětně dosadíme a ověříme, že číslo $X = 1 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 625 = 180625$ úlohu skutečně řeší.

Úloha 56J / 46S. Pro navzájem různá reálná čísla a, b, c platí

$$a = (b-2)c, \quad b = (c-2)a, \quad c = (a-2)b.$$

Čemu je roven součin abc?

Výsledek. 3

Řešení. Pokud je jedno z čísel a, b, c nulové, pak jsou nulová všechna, což je ve sporu s tím, že jsou navzájem různá. Podobně zjistíme, že čísla a, b, c jsou různá od tří.

Dosaďme za c ze třetího vztahu do prvních dvou a druhý vztah $b = (ab-2b-2)a$ upravme na $b(a^2 - 2a - 1) = 2a$. Jelikož pravá strana je nenulová, je nenulová i levá – můžeme tedy dělit výrazem $a^2 - 2a - 1$ a tím získat vyjádření b pomocí a. To dosadíme do prvního vztahu. Po úpravě vyjde

$$a(a-3)(a^3 + 3a^2 - 9a - 3) = 0,$$

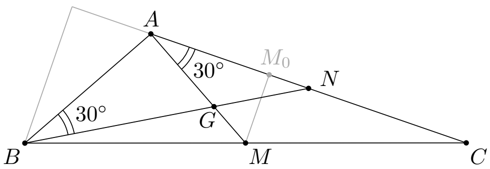
takže a je kořenem polynomu $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$. Analogicky odvodíme, že i b a c jsou kořeny tohoto polynomu. Jelikož jsou čísla a, b, c navzájem různá, znamená to, že $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Porovnáním koeficientů u absolutního členu získáváme hledané $abc = 3$.

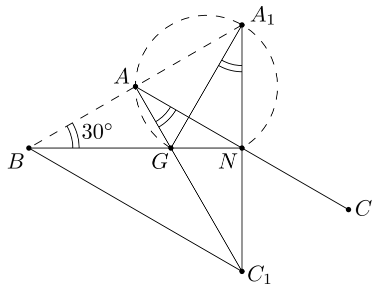
Úloha 57J / 47S. V různostranném trojúhelníku ABC má jedna výška stejnou délku jako jedna těžnice a jiná výška má stejnou délku jako jiná těžnice. V jakém poměru jsou délka třetí výšky a délka třetí těžnice?

Výsledek. $\frac{2}{7}$

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a > b > c$. Pak pro délky příslušných výšek a těžnic platí $v_a < v_b < v_c$ a $t_a < t_b < t_c$. Současně $v_a < t_a$, $v_b < t_b$ a $v_c < t_c$, takže musí být $v_b = t_a$ a $v_c = t_b$.

Označme M střed strany BC a M_0 patu kolmice z bodu M na stranu AC. V pravoúhlém trojúhelníku AMM_0 platí $|MM_0| = \frac{1}{2}v_b = \frac{1}{2}t_a = \frac{1}{2}|AM|$, takže $|\sphericalangle MAC| = 30°$. Označíme-li N střed strany AC, získáme podobně $|\sphericalangle NBA| = 30°$.





Nyní označme G těžiště trojúhelníku ABC a uvažme rovnostranný trojúhelník A_1BC_1 mající BN za těžnici. Bod A_1 splňuje $|\sphericalangle NBA_1| = 30°$ i $|\sphericalangle GA_1N| = 30°$, ale přitom se liší od bodu A (trojúhelník ABC musí být ze zadání různostranný). „Opravdový“ bod A je proto druhým průsečíkem polopřímky BA_1 a kružnicového oblouku GA_1N, tedy středem úsečky BA_1. Z toho plyne $|\sphericalangle BAC| = 120°$ a $|AC| : |AB| = 2$.

V trojúhelníku s úhlem $\alpha = 120°$ a délkami stran $|AB| = 1$, $|AC| = 2$ už snadno z kosinové věty dopočítáme délku strany $a = \sqrt{1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2} = \sqrt{7}$ a délku těžnice $t_c = \sqrt{1/4 + 1 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{21}$, dále obsah $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ a konečně délku výšky $v_a = 2S/a = 3/\sqrt{21}$. Celkem tak dostáváme

$$\frac{v_a}{t_c} = \frac{\frac{3}{\sqrt{21}}}{\frac{1}{2}\sqrt{21}} = \frac{2}{7}.$$