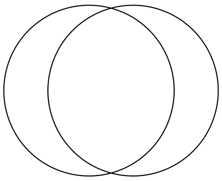
Úloha 1J. Je známe, že číslo 2013 sa dá práve jedným spôsobom zapísať ako súčet dvoch prvočísel. Čomu je rovný ich súčin?

Výsledok. 4022

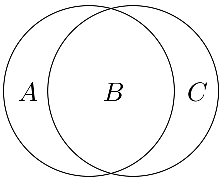
Riešenie. Aby bol súčet dvoch prirodzených čísel nepárny, musí byť jedno z nich nepárne a jedno párne. Jediným párnym prvočíslom je dvojka, takže v úvahu pripadá len zápis $2013 = 2011 + 2$. Zadanie hovorí, že je možné zapísať 2013 ako súčet dvoch prvočísel, takže 2011 je prvočíslo a odpoveď je $2011 \cdot 2 = 4022$.

Úloha 2J. Dve kružnice s polomerom 1 sa pretínajú tak, že obsah prostrednej časti je rovný súčtu obsahov krajných dvoch. Čomu je rovný obsah prostrednej časti?



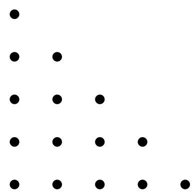
Výsledok. $\frac{2}{3}\pi$

Riešenie. Označme obsahy troch častí ako na obrázku.



Zo symetrie vieme, že $A = C$, takže zo zadaného $B = A + C$ plynie $B = 2A$. Obsah prostrednej časti je tak rovný dvom tretinám obsahu ľavého kruhu, teda $\frac{2}{3}\pi$.

Úloha 3J. Máme päť žltých kolíkov, štyri červené, tri zelené, dva modré a jeden oranžový. Koľkými spôsobmi ich môžeme rozmiestniť do trojuholníkovej siete (pozri obrázok) tak, aby v žiadnom riadku ani stĺpci neboli dva kolíky rovnakej farby? Rovnako farebné kolíky považujeme za nerozlíšiteľné.



Výsledok. 1

Riešenie. Začneme rozmiestňovaním žltých kolíkov. Máme jedinú možnosť, ako ich rozmiestniť tak, aby v každom riadku i stĺpci bol najviac jeden, a síce dať ho na preponu trojuholníka. Podobne máme iba jeden spôsob ako rozmiestniť postupne červené, zelené, modré a oranžové kolíky – vždy na preponu trojuholníka tvoreného doposiaľ neobsadenými miestami v trojuholníkovej sieti. Preto existuje iba jedno rozmiestnenie všetkých kolíkov vyhovujúce zadaniu.

Úloha 4J. Nájdite najmenšie prirodzené číslo, ktorého súčin cifier je rovný 600.

Výsledok. 3558

Riešenie. Pretože $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, môžeme na zostavenie tohto čísla použiť iba číslice 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. Pritom jednotky k súčinu nijak neprispejú, iba zväčšia počet cifier. Zrejme musí číslo obsahovať dve päťky, lebo 5^2 nemožno získať inou kombináciou cifier. Ostatné cifry musia mať súčin 24, teda musia byť aspoň dve. Číslo 24 môžeme rozložiť ako $3 \cdot 8$ alebo $4 \cdot 6$, a pretože prvá možnosť obsahuje menšiu číslicu, zvolíme ju a zostavíme hľadané číslo 3558.

Úloha 5J. Kladné reálne čísla a, b spĺňajú

$$a + \frac{1}{b} = 7 \quad \text{a} \quad b + \frac{1}{a} = 5.$$

Čomu je rovná hodnota výrazu $ab + \frac{1}{ab}$?

Výsledok. 33

Riešenie. Obe rovnosti medzi sebou vynásobíme a dostaneme

$$\begin{aligned} ab + \frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{1}{ab} &= 35, \\ ab + \frac{1}{ab} &= 33. \end{aligned}$$

Úloha 6J. Lukáš objavil šesťciferné prirodzené číslo spĺňajúce nasledujúce podmienky:

1. Číslo sa číta rovnako zľava doprava i sprava doľava.
2. Je deliteľné deviatimi.
3. Po škrtnutí prvej a poslednej cifry je jediným prvočíselným deliteľom nového čísla číslo 11.

Ktoré číslo Lukáš objavil?

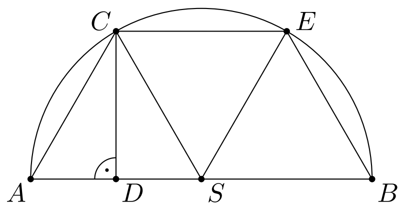
Výsledok. 513315

Riešenie. Začneme poslednou podmienkou. Jediným štvorciferným číslom, ktoré je mocninou 11, je $11^3 = 1331$. Nami hľadané číslo je teda tvaru $\overline{a1331a}$, a pretože je deliteľné deviatimi, musí byť i jeho ciferný súčet $2a + 8$ deliteľný deviatimi. Tento výraz je párny a menší ako 26, teda musí byť rovný 18. Preto $a = 5$ a nami hľadané číslo je 513315.

Úloha 7J. Na priemere AB polkružnice k je daný bod D. Kolmica k AB vedená bodom D pretne polkružnicu k v bode C. Ak sú dĺžky oblúkov AC a CB polkružnice k v pomere $1 : 2$, určte hodnotu pomeru $|AD| : |DB|$.

Výsledok. $1 : 3$

Riešenie. Pretože bod C delí polkružnicu v pomere $1 : 2$, môžeme dokresliť ešte bod E tak, aby body A, C, E, B (v tomto poradí) tvorili štyri po sebe idúce vrcholy pravidelného šesťuholníka.



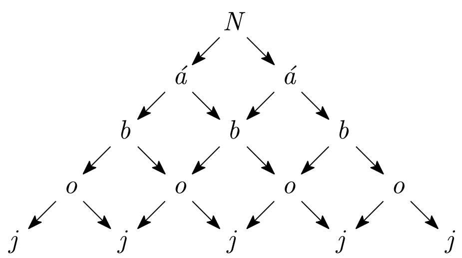
Označme S stred polkružnice k. Body A, C, S potom tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka a bod D je stredom strany SA, lebo výška a ťažnica v rovnostrannom trojuholníku splývajú. Odtiaľ už ľahko dopočítame pomer $|AD| : |DB| = 1 : 3$.

Úloha 8J. Dvaja rozmaznaní bratia Viktor a Mišo dostali balíček cukríkov, ktorý si pol na pol rozdelili. Každý z nich zje počas dňa dva až tri cukríky. Malému Viktorovi cukríky vydržali štrnásť dní, staršiemu Mišovi presne tri týždne. Koľko cukríkov bolo pôvodne v balíčku?

Výsledok. 84

Riešenie. Viktor mohol zjesť maximálne $3 \cdot 14 = 42$ cukríkov, zatiaľ čo Mišo ich zjedol minimálne $2 \cdot 21 = 42$. Pretože však obaja mali rovnaké množstvo, musel každý z nich mať 42 cukríkov. V balíčku pôvodne bolo 84 cukríkov.

Úloha 9J. Koľkými spôsobmi môžeme v schéme na obrázku prečítať slovo *Náboj*?



Výsledok. 16

Riešenie. Z každého z písmen *N*, *á*, *b*, *o* môžeme ďalej pokračovať v čítaní dvoma spôsobmi. Preto možno slovo *Náboj* prečítať celkom $2^4 = 16$ spôsobmi.

Úloha 10J. Na ostrove žijú obyvatelia dvoch typov: pravdovravní vždy hovoria pravdu, klamári zásadne klamú. Dvanásť obyvateľov ostrova sa posadilo do kruhu. Všetci svorne tvrdia, že sú pravdovravní. Tiež tvrdia, že po ich pravej ruke sedí klamár. Koľko najviac klamárov môže byť medzi týmito dvanástimi ľuďmi?

Výsledok. 6

Riešenie. Predpokladajme, že by vedľa seba sedeli dvaja pravdovravní alebo dvaja klamári. Potom by ten, ktorý sedí v takej dvojici naľavo, prehlásil o človeku po svojej pravici, že je pravdovravný. To je ale v rozpore so zadaním – pravdovravní a klamári sa teda musia striedať. Klamárov je preto v kruhu práve šesť.

Úloha 11J / 1S. Lukáš má jedenásť zhodných štvorcových dlaždičiek – šesť červených, tri modré a dve zelené. Koľkými spôsobmi môže z niektorých deviatich z nich zostaviť tabuľku 3×3, ak musí ofarbenie tabuľky ostať zachované, ak ju otočíme o 90° po smere hodinových ručičiek? Dlaždičky rovnakej farby považujeme za nerozlíšiteľné.

Výsledok. 0

Riešenie. Aby zostalo ofarbenie pri otočení o 90° zachované, musia mať všetky rohové dlaždičky rovnakú farbu. Rovnakú farbu musia mať tiež štyri dlaždičky v stredoch krajných stĺpcov a riadkov. Potrebujeme preto buď aspoň osem dlaždičiek jednej farby, alebo po štyroch dlaždičkách z dvoch rôznych farieb. Také dlaždičky ale k dispozícii nemáme, a tak žiadne vyhovujúce ofarbenie neexistuje.

Úloha 12J / 2S. Na ostrove sú ženaté dve pätiny mužov a vydaté tri pätiny žien. Koľko percent obyvateľstva ostrova žije v manželstve?

Výsledok. $48\% = \frac{12}{25}$

Riešenie. Označme D celkový počet zosobášených párov na ostrove. Celkový počet mužov, resp. žien potom možno vyjadriť ako $\frac{5}{2}D$, resp. $\frac{5}{3}D$. Na ostrove teda žije celkom $\frac{5}{2}D + \frac{5}{3}D = \frac{25}{6}D$ ľudí, z toho $2D$ je zosobášených. Podiel ostrovanov žijúcich v manželstve je teda

$$\frac{2D}{\frac{25}{6}D} = \frac{12}{25} = 48\%.$$

Úloha 13J / 3S. Aká je dĺžka strany najväčšieho rovnostranného trojuholníka, ktorý možno vystrihnúť z obdĺžnikového papiera o rozmeroch $21 \times 29{,}7\,\mathrm{cm}$?

Výsledok. $14\sqrt{3} = \frac{42}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}$

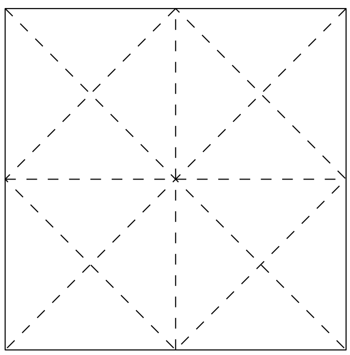
Riešenie. Ak máme ľubovoľný rovnostranný trojuholník vo vnútri pásu ohraničeného dvoma rovnobežnými priamkami, môžeme ho vhodne zväčšiť tak, aby dva z vrcholov ležali na protiľahlých hraničných priamkach. Zo všetkých takých rovnostranných trojuholníkov má najväčšiu dĺžku strany ten, ktorého jedna strana leží celá na hranici.

Ak teda máme pás o šírke 21 cm, potom najväčší rovnostranný trojuholník, ktorý sa vojde do tohto pásu, má výšku 21 cm. Dĺžka jeho strany je $\frac{21\,\mathrm{cm}}{\sin 60^\circ} = 14\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Keďže $14\sqrt{3} < 14 \cdot 2 < 29{,}7$, vojde sa tento trojuholník aj do zadaného obdĺžnika.

Úloha 14J / 4S. Dáška si vzala štvorcový kus papiera a zložila ho štyrikrát na polovicu bez spätného rozkladania tak, že každým zložením vytvorila rovnoramenný pravouhlý trojuholník. Koľko štvorcov je vidieť po rozložení papiera?

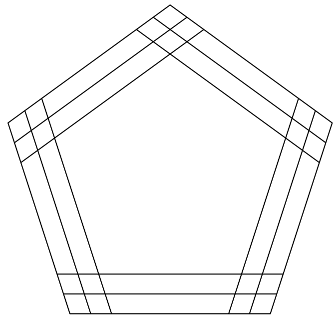
Výsledok. 10

Riešenie. Na nasledujúcom obrázku sú znázornené prehyby, ktoré uvidíme po rozložení papiera.



Uvidíme teda celkom desať štvorcov – celý papier, štvorec spájajúci stredy jeho strán a v každom z týchto štvorcov navyše štyri menšie.

Úloha 15J / 5S. Koľko päťuholníkov sa nachádza na obrázku?



Výsledok. $3^5 = 243$

Riešenie. Všimneme si, že každý päťuholník musí mať vo svojom vnútri stred obrázku. Pre každú z piatich strán máme na výber z troch možností (vonkajšia, prostredná, vnútorná čiara), takže päťuholníkov na obrázku je $3^5 = 243$.

Úloha 16J / 6S. Pri sčítaní dvoch prirodzených čísel Pepa omylom za jedno z nich pripísal nulu, a tak mu vyšlo 3858 namiesto 2013. Čomu je rovné väčšie z čísel, ktoré mal Pepa sčítať?

Výsledok. 1808

Riešenie. Označme a, b čísla, ktoré mal Pepa sčítať. Keďže pripísanie nuly odpovedá vynásobeniu desiatimi, môžeme zostaviť rovnice

$$\begin{aligned} a + b &= 2013, \\ 10a + b &= 3858. \end{aligned}$$

Ich odčítaním získame $a = 205$, takže $b = 1808$, čo je hľadaný väčší sčítanec.

Úloha 17J / 7S. Aký polomer má najmenší kruh, ktorým možno zakryť trojuholník so stranami dĺžok $3, 5$ a 7.

Výsledok. 3,5

Riešenie. Keďže $3^2 + 5^2 < 7^2$, uhol oproti strane dĺžky 7 je tupý a celý trojuholník možno zakryť kruhom, ktorého priemerom je táto strana. Naopak každý kruh zakrývajúci celý trojuholník musí zakrývať aj jeho stranu dĺžky 7 a teda musí mať polomer aspoň 3,5.

Úloha 18J / 8S. Lukáš, Mirek, Pepa a Viktor majú dokopy 100 lízaniek. Pritom každý dvaja z nich majú dokopy lízaniek aspoň 41. Koľko najmenej lízaniek môže mať Pepa?

Výsledok. 12

Riešenie. Ak označíme počty lízaniek jednotlivých chlapcov postupne L, M, P a V, musí zo zadania okrem iného platiť $L + P \geq 41$, $M + P \geq 41$ a $V + P \geq 41$. Sčítaním týchto nerovností získame $2P + (L + M + P + V) \geq 123$. Keďže $L + M + P + V = 100$, dostávame $2P \geq 23$, teda $P \geq 12$ (P je prirodzené číslo). Naopak hodnoty $L = M = 29$, $P = 12$, $V = 30$ všetkým podmienkam úlohy vyhovujú, takže takáto možnosť môže nastať.

Úloha 19J / 9S. Viktor si nakreslil obdĺžnik $ABCD$ s obsahom 80 a dĺžkou uhlopriečky 16. Čomu je rovný sínus ostrého uhla, ktorý zvierajú uhlopriečky obdĺžnika?

Výsledok. $\frac{5}{8} = 0{,}625$

Riešenie. Označme S priesečník uhlopriečok obdĺžnika $ABCD$ a v dĺžku výšky na stranu AC v trojuholníku ABC. Obsah obdĺžnika $ABCD$ môžeme vyjadriť ako $|AC| \cdot v$, z čoho $v = 80/16 = 5$. Nakoniec spočítame hľadanú hodnotu $\sin|\sphericalangle ASB| = \sin|\sphericalangle CSB| = \frac{v}{|BS|} = \frac{5}{8}$.

Úloha 20J / 10S. Akú najväčšiu hodnotu môže mať výraz $a^b + c^d$, ak a, b, c, d sú navzájom rôzne čísla z množiny $\{-7, -5, -4, -3, -2, -1\}$?

Výsledok. $(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = \frac{10}{9}$

Riešenie. Všimneme si, že aby sme dostali kladné číslo, musíme umocňovať na párny exponent. Keďže $(-2)^{-4} = (-4)^{-2} < (-1)^{-2}$, budeme za exponenty brať -2 a -4. Keďže čím väčšie číslo umocníme na záporný exponent, tým menšie bude po umocnení, budeme za základy mocnín brať -1 a -3. Z ostávajúcich dvoch možností má väčšiu hodnotu $(-1)^{-4} + (-3)^{-2} = \frac{10}{9}$.

Úloha 21J / 11S. Do roviny s kartézskou súradnicovou sústavou sme náhodne umiestnili uhol o veľkosti 110°. Aká je pravdepodobnosť, že ramená tohto uhla tvoria graf funkcie?

Výsledok. $\frac{11}{18}$

Riešenie. Aby bol uhol grafom nejakej funkcie, musí každému bodu na osi x priraďovať maximálne jednu hodnotu y. Záleží teda iba na natočení uhla a my môžeme bez ujmy na všeobecnosti umiestniť jeho vrchol do počiatku súradnicovej sústavy.

Nech najprv jedno rameno uhla splýva s kladnou časťou osi y a druhé leží napravo od osi y. Teraz uhlom otáčajme v smere hodinových ručičiek a skúmajme, kedy je grafom funkcie. Po otočení o 70° sa prvýkrát stane to, že každému bodu na osi x bude priradená iba jedna hodnota na osi y. Toto potrvá až do otočenia o celkových 180°. Otočenie o 180° až 360° vyšetrovať nemusíme, lebo tu je situácia symetrická. Pravdepodobnosť, že sú ramená nášho uhla grafom nejakej funkcie, je teda $\frac{110}{180} = \frac{11}{18}$.

Úloha 22J / 12S. Pepa si v deň konania minuloročného náboja (23. marca 2012) nakreslil pravidelný stouholník $A_1A_2 \dots A_{100}$ (číslovaný v smere hodinových ručičiek) a na jeden náhodný vrchol položil žetón. Každé ďalšie ráno potom posunul žetón o toľko vrcholov po smere hodinových ručičiek, aké bolo číslo vrcholu na ktorom práve žetón ležal (napríklad z vrcholu A_3 by sa tento žetón presunul na A_6, z vrcholu A_{96} na A_{92}). Teraz leží žetón na vrchole A_{100}. Ak?? bola pravdepodobnosť, že sa niečo také stane?

Výsledok. $0{,}04 = \frac{1}{25}$

Riešenie. Pýtame sa vlastne na to, ktoré čísla od 1 do 100 majú tú vlastnosť, že ak ich opakovane (približne 380 krát) vynásobíme dvojkou, budú deliteľné 100. Každé také číslo musí byť určite už od začiatku násobkom čísla 25 a naopak všetky čísla $25, 50, 75, 100$ zrejme vyhovujú (už ich štvornásobky končia číslicami 00). Odpoveď je preto $\frac{4}{100} = 0{,}04 = \frac{1}{25}$.

Úloha 23J / 13S. Prirodzeným číslam, ktoré sa dajú napísať ako rozdiel druhých mocnín dvoch celých čísel, hovorme *rozdielové*. Koľko z čísel $1, 2, \dots, 2013$ je rozdielových?

Výsledok. 1510

Riešenie. Hľadajme všetky prirodzené čísla $n \leq 2013$, ktoré sa dajú zapísať v tvare $n = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ pre nejaké $a, b \in \mathbb{Z}$. Každé nepárne číslo môžeme zrejme napísať ako $2k+1 = (k+1)^2 - k^2$, každé číslo deliteľné štyrmi ako $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$. Ostáva vyšetriť čísla tvaru $4k+2$, teda čísla deliteľné dvomi, ale nie štyrmi. Tie rozdielové nie sú, pretože $a+b$ a $a-b$ sú buď obe párne alebo obe nepárne (ich súčin je teda buď nepárny, alebo deliteľný štyrmi).

Čísel tvaru $4k+2$ je v danom intervale 503. Rozdielových čísel je preto $2013 - 503 = 1510$.

Úloha 24J / 14S. Tri pravidelné neprekrývajúce sa mnohouholníky o stranách dĺžky 1 sa stretávajú v bode A tak, že tvoria (nekonvexný) mnohouholník M, pre ktorý je bod A vnútorným bodom. Ak je jeden z mnohouholníkov šesťuholník a druhý štvorec, určte obvod mnohouholníka M.

Výsledok. 16

Riešenie. Porovnaním veľkostí vnútorných uhlov troch mnohouholníkov pri spoločnom vrchole A dostaneme, že veľkosť vnútorného uhla v treťom pravidelnom mnohouholníku je rovná $360° - 90° - 120° = 150°$. Keďže súčet veľkostí vnútorných uhlov v n-uholníku je rovný $180°(n-2)$, platí:

$$180°(n-2) = n \cdot 150°,$$
$$n \cdot 30° = 360°,$$
$$n = 12.$$

Tretí mnohouholník je teda dvanásťuholník a keďže každé dva mnohouholníky zdieľajú jednu stranu, má mnohouholník M obvod rovný $4 + 6 + 12 - (3 \cdot 2) = 16$.

Úloha 25J / 15S. Viktor napísal na papier čísla 1 až 100 v náhodnom poradí. Aká je pravdepodobnosť, že pre každé $i = 1, \dots, 50$ je to $(2i-1)$-te menšie ako to $(2i)$-te?

Výsledok. 2^{-50}

Riešenie. Predstavme si, že Viktor písal čísla postupne po dvojiciach – vždy si náhodne vybral dve doposiaľ nenapísané čísla a pripísal ich na papier za už napísané. Pravdepodobnosť, že napísal skôr to menšie, je $\frac{1}{2}$ (bez ohľadu na to, ktoré dve čísla si vybral). Pre všetkých päťdesiat dvojíc teda máme pravdepodobnosť $(\frac{1}{2})^{50} = 2^{-50}$.

Úloha 26J / 16S. Ružová farba vznikne zmiešaním červenej a bielej v pomere 1 : 1, azúrová vznikne z modrej a bielej v pomere 1 : 2. Stanka si chce vymaľovať izbu farbou, ktorá vznikne z ružovej a azúrovej zmiešanej v pomere 2 : 1. Zatiaľ zmiešala tri plechovky modrej a jednu plechovku červenej farby. Ostávajú jej už len plechovky s červenou a bielou farbou. Koľko celkom plechoviek ešte musí pridať?

Výsledok. 23

Riešenie. Vzhľadom k tomu, že môžeme pridávať iba červenú a bielu, musia byť vo výslednej farbe presne tri plechovky modrej. Modrá nieje vôbec zastúpená v ružovej farbe, takže z pomeru 1 : 2 v azúrovej farbe vieme, že azúrovej farby musí byť celkom 9 plechoviek (3 modré a 6 bielych). Nakoniec z pomeru 2 : 1 vo výslednej farbe vieme, že celkom v nej musí byť 27 plechoviek (z toho 9 sa zmieša na azúrovú a 18 na ružovú). Štyri plechovky už namiešané máme, teda musíme pridať $27 - 4 = 23$ plechoviek.

Úloha 27J / 17S. V klobúku je niekoľko bielych, sivých a čiernych králikov. Je známe, že keď kúzelník začne králiky postupne náhodne vyťahovať (bez toho, aby ich vracal späť), je pravdepodobnosť, že vytiahne skôr bieleho králika ako sivého, rovná $\frac{3}{4}$. Podobne je pravdepodobnosť, že vytiahne skôr sivého králika ako čierneho, rovná $\frac{3}{4}$. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahne skôr bieleho králika ako čierneho?

Výsledok. $\frac{9}{10}$

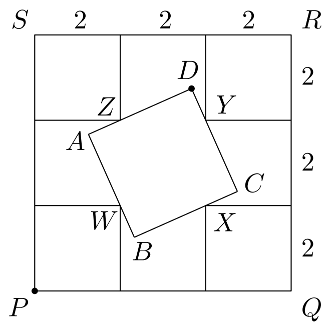
Riešenie. Pravdepodobnosť, že kúzelník vytiahne skôr bieleho králika ako sivého, je rovná $\frac{3}{4}$, takže v klobúku je trikrát viac bielych králikov ako sivých. Podobne je v klobúku trikrát viac sivých králikov ako čiernych. Z toho plynie, že bielych králikov je deväťkrát viac ako čiernych, a hľadaná pravdepodobnosť je tak rovná $\frac{9}{10}$.

Úloha 28J / 18S. Pre prirodzené čísla a, b platí $49a + 99b = 2013$. Určte hodnotu súčtu $a + b$.

Výsledok. 37

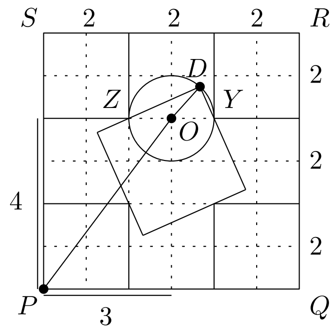
Riešenie. Pripočítaním $a+b$ k obidvom stranám rovnosti dostávame $50(a+2b) = 2013+(a+b)$. Keďže je ľavá strana rovnosti deliteľná päťdesiatimi, musí byť aj pravá, takže $a+b$ je tvaru $50k-13$, $k \in \mathbb{N}$. Keby však bolo $a+b \geq 87$, mali by sme $49a + 99b > 49a + 49b \geq 49 \cdot 87 > 2013$, čo nie je možné. Preto $a + b = 37$.

Úloha 29J / 19S. V rohoch štvorca $PQRS$ o strane dĺžky 6 cm sú umiestnené štyri menšie štvorce o stranách dĺžky 2 cm. Označme ich vrcholy W, X, Y, Z ako na obrázku. Štvorec $ABCD$ je zostrojený tak, že body W, X, Y, Z ležia vo vnútri jeho strán AB, BC, CD, DA. Určte najväčšiu možnú vzdialenosť bodov P a D.



Výsledok. 6

Riešenie. Bod D sa nachádza na Thalesovej kružnici nad priemerom ZY, jej stred označme O. Táto kružnica má polomer 1 a z Pythagorovej vety spočítame $|PO| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, teda z trojuholníkovej nerovnosti $|PD| \leq |PO| + |OD| = 6$. Rovnosť nastáva, pokiaľ body P, O, D ležia na priamke, túto vzdialenosť teda možno získať.



Úloha 30J / 20S. V dvadsiatich krabiciach je spolu 129 jabĺk. Pritom v niekoľkých krabiciach je presne po štyroch jablkách a v ostatných po x jablkách. Nájdite všetky možné hodnoty x.

Výsledok. 11, 53

Riešenie. Označme K počet krabíc, ktoré obsahujú x jabĺk ($K \leq 20$). Ostatných $20 - K$ krabíc potom obsahuje po štyroch jablkách a my môžeme písať

$$K \cdot x + (20 - K) \cdot 4 = 129, \quad \text{teda} \quad K(x - 4) = 49.$$

Keďže $K \leq 20$, v úvahu pripadajú len možnosti $K = 1$, $K = 7$ odpovedajúce po rade výsledkom $x = 53$, $x = 11$.

Úloha 31J / 21S. Kladné reálne čísla a, b spĺňajú $a > b$ a súčasne

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2013.$$

Čomu sa rovná hodnota výrazu $\frac{a+b}{a-b}$?

Výsledok. $\sqrt{\frac{2015}{2011}}$

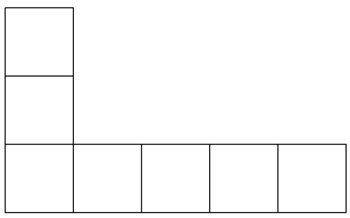
Riešenie. Podmienku zo zadania si prepíšeme na $a^2 + b^2 = 2013ab$. Jej použitím dostávame nasledujúce vzťahy:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2015ab,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 2011ab.$$

Keďže je hľadaný výraz kladný, môžeme jeho hodnotu spočítať pomocou vyššie uvedených rovností ako

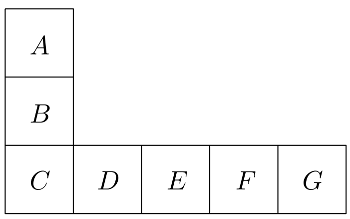
$$\frac{a + b}{a - b} = \sqrt{\frac{(a + b)^2}{(a - b)^2}} = \sqrt{\frac{2015ab}{2011ab}} = \sqrt{\frac{2015}{2011}}.$$

Úloha 32J / 22S. Koľkými spôsobmi možno do rôznych políčok heptomina na obrázku vyplniť čísla 1 až 7 (každé musíme použiť práve raz), aby bol súčet čísel v spodnom riadku rovnaký ako súčet čísel v ľavom stĺpci?



Výsledok. $144 = 3 \cdot 2 \cdot 4!$

Riešenie. Označme si hodnoty v jednotlivých políčkach ako na obrázku.



Zo zadania vieme, že $A+B+C+D+E+F+G = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$ a $A+B = D+E+F+G = \frac{1}{2}(28-C)$. Preto C je párne číslo.

Pokiaľ $C = 2$, potom $A + B = 13 = 6 + 7$, teda máme dve možnosti, ako doplniť políčka v ľavom stĺpci. Pre každú z týchto možností môžeme zvoliť jedno zo 4! usporiadaní zvyšných čísel v spodnom riadku. Pre $C = 4$ je $A+B = 12 = 5+7$ ($6+6$ nevyhovuje, lebo všetky čísla majú byť navzájom rôzne) a pre $C = 6$ máme $A+B = 11 = 4+7$ ($5 + 6$ nevyhovuje, lebo už $C = 6$), čo nám v oboch prípadoch dáva opäť $2 \cdot 4!$ možností doplnenia tabuľky. Celkom dostávame $3 \cdot 2 \cdot 4! = 144$ možnost??.

Úloha 33J / 23S. Dĺžky strán ostrouhlého trojuholníka ABC spĺňajú $|AB| = 4\pi$, $|BC| = 4\pi + 3$, $|CA| = 4\pi + 6$. Označme D pätu výšky z vrcholu A. Určte $|CD| - |BD|$.

Výsledok. 12

Riešenie. Pythagorova veta pre pravouhlé trojuholníky ADC a ADB dáva $|CD|^2 = |AC|^2 - |AD|^2$ a $|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2$. Odčítaním týchto vzťahov dostaneme

$$|CD|^2 - |BD|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = (4\pi + 6)^2 - (4\pi)^2 = 48\pi + 36.$$

Keďže bod D leží vo vnútri strany BC, máme súčasne

$$|CD|^2 - |BD|^2 = (|CD| - |BD|) \cdot (|CD| + |BD|) = (|CD| - |BD|) \cdot (4\pi + 3),$$

takže $|CD| - |BD| = 12$.

Úloha 34J / 24S. Električky majú celý deň v obidvoch smeroch trasy rovnaké intervaly. Chodec, ktorý šiel pozdĺž dráhy električky, pozoroval, že ho každých 12 minút jedna električka predbehne a zároveň každé 4 minúty ho minie električka v protismere. Aký interval majú električky?

Výsledok. 6 minút

Riešenie. Označíme rýchlosť električky e, rýchlosť chodca c a vzdialenosť medzi električkami d. Zadanie dáva

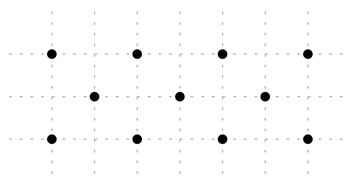
$$\begin{aligned} e - c &= \frac{d}{12\,\mathrm{min}}, \\ e + c &= \frac{d}{4\,\mathrm{min}}. \end{aligned}$$

Spočítaním rovníc a vydelením dvoma dostávame

$$e = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12\,\mathrm{min}} + \frac{1}{4\,\mathrm{min}}\right) \cdot d = \frac{d}{6\,\mathrm{min}}.$$

takže električka prejde vzdialenosť d za 6 minút, čo odpovedá intervalu električky.

Úloha 35J / 25S. Koľko nedegenerovaných trojuholníkov môže byť vytvorených spojením niektorých troch bodov na obrázku?



Poznámka: Body sú zarovnané do naznačenej mriežky.

Výsledok. $148 = \binom{11}{3} - 17$

Riešenie. Počet spôsobov, ako vybrať niektoré tri body z dotyčných jedenástich, je rovný

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165.$$

Ostáva spočítať, koľko trojíc bodov leží na priamke, a toto číslo odpočítať. Vodorovných trojíc je celkom $4+1+4 = 9$, šikmých trojíc potom $3 + 3 + 1 + 1 = 8$, takže celkový počet trojuholníkov je $165 - 17 = 148$.

Úloha 36J / 26S. Mirek dostal bonboniéru s tridsiatimi bonbónmi usporiadanými v troch riadkoch po desať. Aby si ju náležite vychutnal, je bonbóny po jednom, a to tak, aby sa počty ostávajúcich bonbónov v každých dvoch riadkoch v každom okamihu líšili najviac o jedna. Koľkými spôsobmi môže bonboniéru zjesť?

Výsledok. $6^{10} \cdot (10!)^3$

Riešenie. Poradie, v akom Mirek bonbóny zje, môžeme jednoznačne zadať nasledovne: pre každý riadok určíme, v akom poradí budú bonbóny v tomto riadku zjedené; súčasne určíme, v akom poradí bude Mirek voliť riadky.

V každom riadku môžeme bonbóny usporiadať 10! spôsobmi, vo všetkých troch riadkoch dohromady teda $(10!)^3$ spôsobmi.

Pre určenie počtu možných poradí riadkov si uvedomme, že kedykoľvek je v každom riadku rovnaký počet bonbónov, potom si Mirek môže zvoliť ľubovoľný z nich. Pri ďalšom výbere si musí zvoliť jeden zo zostávajúcich dvoch (pri voľbe toho istého by v tomto už boli o dva bonbóny menej) a v následnom treťom výbere musí nutne zvoliť ten posledný nevybraný. Po troch zjedených bonbónoch teda bude vo všetkých riadkoch opäť rovnaký počet bonbónov. Stačí preto desaťkrát zvoliť poradie troch riadkov, čo je možné $(3!)^{10} = 6^{10}$ spôsobmi.

Možných spôsobov zjedenia bonboniéry je $6^{10} \cdot (10!)^3$.

Úloha 37J / 27S. Povieme, že šesťciferné prirodzené číslo je *dvojité*, pokiaľ sa jeho prvé tri cifry (v tomto poradí) zhodujú s jeho ďalšími tromi ciframi (teda napríklad číslo 227227 je dvojité, zatiaľ čo číslo 135153 dvojité nie je). Koľko dvojitých čísel je bezo zvyšku deliteľných číslom 2013?

Poznámka: Prirodzené číslo nemôže začínať nulou.

Výsledok. 5

Riešenie. Každé dvojité šesťciferné prirodzené číslo môžeme zapísať ako $1001 \cdot k$, kde k je trojciferné prirodzené číslo, a naopak z každého trojciferného prirodzeného čísla takto dostaneme šesťciferné dvojité. Pretože je $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ a z týchto troch prvočísel je 1001 deliteľné iba jedenástimi, dostávame, že dvojité šesťciferné číslo je násobkom 2013 práve vtedy, keď jemu príslušné trojciferné číslo je násobkom $3 \cdot 61 = 183$. Trojciferných čísel deliteľných 183 je práve päť, a toľko je teda i šesťciferných dvojitých násobkov 2013.

Úloha 38J / 28S. Na každé políčko hracieho plánu 4×4 náhodne nakreslíme šípku doprava alebo dole a na ľavé horné políčko postavíme robota. Robot sa vždy posúva na susedné políčko v smere šípky. Aká je pravdepodobnosť, že robot opustí hrací plán krokom z pravého dolného políčka?

Výsledok. $\frac{5}{16} = \frac{\binom{6}{3}}{2^6}$

Riešenie. Spočítajme, koľkými rôznymi cestami sa robot môže do pravého dolného políčka dostať a aká je pravdepodobnosť priechodu jednej takej cesty. Každá cesta sa skladá z troch krokov dole a troch krokov doprava, čo dáva celkom $\binom{6}{3}$ možných ciest. Pravdepodobnosť, že sa robot bude cesty držať, je v oboch prípadoch 2^{-6} – každý zo šiestich krokov musí byť ten správny. Celková pravdepodobnosť je teda $2^{-6} \cdot \binom{6}{3}$.

Úloha 39J / 29S. Vyjadrite

$$\frac{212121210}{112121211}$$

v základnom tvare (tj. ako zlomok $\frac{a}{b}$, kde a, b sú nesúdeliteľné prirodzené čísla).

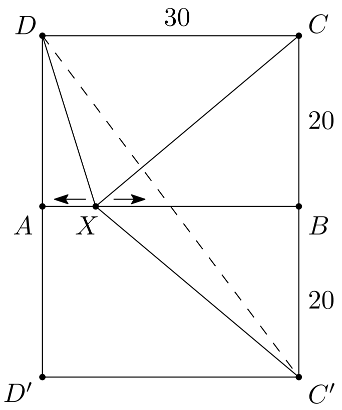
Výsledok. $\frac{70}{37}$

Riešenie. Všimnime si (pomocou ciferného súčtu), že zadaný čitateľ aj menovateľ sú deliteľní troma, a následným vydelením zistíme, že $212121210 = 3 \cdot 70707070$ a $112121211 = 3 \cdot 37373737$. Teraz si stačí uvedomiť, že $70707070 = 70 \cdot 1010101$ a $37373737 = 37 \cdot 1010101$, teda hľadaný zlomok je $\frac{70}{37}$.

Úloha 40J / 30S. Je daný obdĺžnik $ABCD$ s dĺžkami strán $|AB| = 30$, $|BC| = 20$. Pre koľko bodov X na jeho strane AB platí, že trojuholník CDX má celočíselný obvod?

Výsledok. 13

Riešenie. Stačí zistiť, kedy je celým číslom $|DX| + |XC|$. Zobrazme zadaný obdĺžnik $ABCD$ podľa AB na $ABC'D'$. Potom je $|DX| + |XC| = |DX| + |XC'|$. Pravá strana je zrejme najmenšia vtedy, keď je X stredom AB, a najväčšia vtedy, ak X splýva s jedným z bodov A, B.



Z Pythagorovej vety spočítame $|DC'| = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ a $|AC'| = \sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{1300}$, z čoho plynie $36 < |AC'| < 37$. Ak sa bod X pohybuje po úsečke AB od bodu A smerom k B, klesá najprv hodnota $|DX| + |XC|$ z čísla tesne prevyšujúceho $20 + 36 = 56$ ($X = A$) až k 50 (X je stred AB) a následne stúpa k číslu tesne prevyšujúcemu 56 ($X = B$). Celočíselnú hodnotu má teda pre $6 + 1 + 6 = 13$ polôh bodu X.

Úloha 41J / 31S. V akom poradí je potrebné usporiadať riadky $r_1, \dots, r_{11}$ vyobrazenej tabuľky, aby vznikla tabuľka symetrická podľa vyznačenej uhlopriečky? Stačí nájsť jedno riešenie.

r_1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
r_2	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
r_3	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1
r_4	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
r_5	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
r_6	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
r_7	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
r_8	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
r_9	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
r_{10}	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0
r_{11}	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1

Výsledok. Odzadu s prípadnou cyklickou zámenou, teda $r_{11}, r_{10}, r_9, \dots, r_1$ alebo $r_{10}, r_9, \dots, r_1, r_{11}$ atď. až $r_1, r_{11}, r_{10}, \dots, r_2$

Riešenie. Všimnime si, že tabuľka je symetrická podľa opačnej uhlopriečky. K tomu, aby bola symetrická podľa vyznačenej uhlopriečky, ju stačí preklopiť podľa vodorovnej osi.

Poznámka: Pre túto tabuľku iné riešenie než uvedených 11 neexistuje.

Úloha 42J / 32S. Pre každé prirodzené číslo n položme

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[3]{n^3 + n^2 - n - 1}.$$

Nájdite najmenšie prirodzené číslo $k \geq 2$ také, že $a_2 \cdot a_3 \cdots a_k > 4$.

Výsledok. 254

Riešenie. Označme $A_n = a_n^3$ a ekvivalentne skúmajme, pre ktoré najmenšie prirodzené číslo $k \geq 2$ je $A_2 \cdot A_3 \cdots A_k > 4^3 = 64$. Platí

$$A_n = \frac{n^3 + n^2 - n - 1}{n^3} = \frac{(n+1) \cdot (n+1) \cdot (n-1)}{n \cdot n \cdot n},$$

takže

$$A_2 \cdot A_3 \cdots A_k = \frac{3 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} \cdots \frac{(k+1) \cdot (k+1) \cdot (k-1)}{k \cdot k \cdot k} = \frac{1 \cdot (k+1) \cdot (k+1)}{2 \cdot 2 \cdot k} = \frac{(k+1)^2}{4k}.$$

Teraz už ostáva len vyriešiť v prirodzených číslach nerovnicu

$$(k+1)^2 > 256k,$$

ktorá je po roznásobení ľavej strany a vydelení kladným k ekvivalentná s $k + \frac{1}{k} > 254$. Riešením je číslo 254.

Úloha 43J / 33S. Kaťa pripravila pizzu, rozkrájala ju na n rovnakých dielikov a potom na ne pripichla lístky s číslami $1, 2, \ldots, n$ (každé číslo použila práve raz) tak, že medzi dielikmi so za sebou idúcimi číslami bol vždy rovnaký počet iných dielikov. Potom prišiel Lukáš a skoro celú pizzu zjedol – ostali len tri susedné dieliky s číslami 11, 4 a 17 (v tomto poradí). Koľko dielikov mala pizza pôvodne?

Výsledok. 20

Riešenie. Nech medzi dielikmi so za sebou idúcimi číslami je práve $k-1$ iných dielikov, teda „skokom" o k dielikov sa dostaneme z dieliku 1 na dielik 2, z dieliku 2 na dielik 3 atď. Tieto skoky musia byť všetky v rovnakom smere, pretože prvým skokom v opačnom smere by sme sa dostali na predchádzajúci dielik s nižším číslom. Z dieliku n potom nutne skočíme na dielik 1, pretože všetky ostatné majú vo vzdialenosti k dielik s o jedna menším a o jedna väčším číslom.

Pretože skákaním o k prejdeme postupne všetky dieliky pizze, existuje také s, že ak skočíme o k presne s-krát, skončíme na susednom dieliku. Platí teda

$$11 - 4 \equiv s \cdot k \equiv 4 - 17 \pmod{n},$$

odkiaľ dostávame, že $7 - (-13) = 20$ musí byť deliteľné n. Pretože však existuje dielik s číslom 17, musí byť $n \geq 17$, teda $n = 20$.

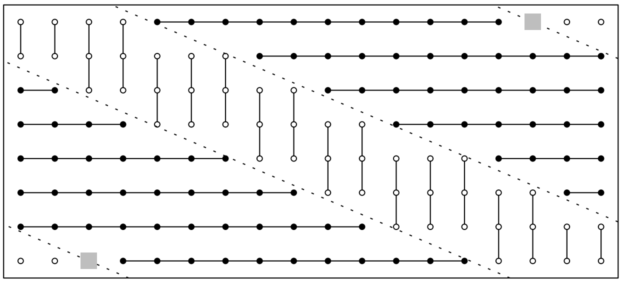
Úloha 44J / 34S. V jednej posluchárni na Matfyze sú miesta na sedenie usporiadané do obdĺžnikovej mriežky. Počas jednej prednášky z analýzy sedelo v každom rade presne 11 chlapcov, v každom stĺpci sedeli presne 3 dievčatá a ešte celkovo dve miesta zostali voľné. Koľko najmenej miest môže byť v posluchárni?

Výsledok. 144

Riešenie. Označme r a s počet radov a stĺpcov v posluchárni. Zo zadania plynie $rs = 11r + 3s + 2$, čo upravíme na

$$(r-3)(s-11) = 35.$$

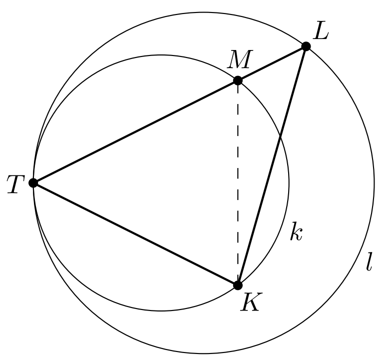
Buď sú teda zátvorky v nejakom poradí rovné 5 a 7 alebo 1 a 35. Vyskúšaním štyroch možností zistíme, že najmenšia hodnota súčinu rs odpovedá prípadu $r - 3 = 5$, $s - 11 = 7$ a je rovná $rs = 8 \cdot 18 = 144$. Do takejto posluchárne možno študentov naozaj rozmiestniť – napríklad ako na obrázku.



Úloha 45J / 35S. Kružnica k s polomerom 3 a kružnica l s polomerom 4 majú vnútorný dotyk v bode T. Aký najväčší obsah môže mať trojuholník TKL, ktorého vrcholy K, L ležia po rade na kružniciach k, l?

Výsledok. $9\sqrt{3} = \frac{27}{\sqrt{3}}$

Riešenie. Symbolom $[XYZ]$ budeme označovať obsah trojuholníka XYZ.



Označme M priesečník úsečky TL s kružnicou k rôzny od T. Keďže T je stredom rovnoľahlosti s koeficientom $\frac{4}{3}$ zobrazujúcim kružnicu k na kružnicu l, je bod L obrazom bodu M, a teda $|TL| = \frac{4}{3}|TM|$ a $[TKL] = \frac{4}{3}[TKM]$ (trojuholníky zdieľajú výšku z vrcholu K). Stačí preto maximalizovať obsah trojuholníka TKM vpísaného do kružnice k s polomerom 3. Zo všetkých takýchto trojuholníkov má najväčší obsah ten rovnostranný, a to

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \sin 120^\circ\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

Obsah príslušného trojuholníka TKL potom vyjde

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$

Úloha 46J / 36S. Lukáš a Viktor hrajú hru. Na začiatku majú množinu $\{0, 1, \ldots, 1024\}$ a striedajú sa v ťahoch. Najskôr Lukáš odoberie ľubovoľných jej 2^9 prvkov, potom odoberie Viktor ľubovoľných 2^8 prvkov, potom Lukáš 2^7 prvkov a tak ďalej až nakoniec odoberie Viktor jeden prvok, takže v množine presne dve čísla ostanú. Tým hra končí a Lukáš zaplatí Viktorovi absolútnu hodnotu rozdielu týchto čísel v eurách. Koľko eur Viktor vyhrá, pokiaľ obidvaja hráči hrajú najlep??ie ako môžu?

Výsledok. 32

Riešenie. Viktor môže v každom svojom ťahu zdvojnásobiť najmenšiu vzdialenosť medzi dvomi číslami v množine tým, že z nich odoberie každý druhý prvok. Takto si zaistí výhru aspoň $2^5 = 32$ eur. Naopak Lukáš môže každým svojim ťahom znížiť rozdiel najväčšieho a najmenšieho čísla o polovicu tým, že odoberie spodnú alebo hornú časť množiny, a teda vie zaistiť, že Viktor vyhrá najviac $1024/2^5 = 32$ eur. Pri optimálnej hre obidvoch hráčov tak Viktor vyhrá 32 eur.

Úloha 47J / 37S. Na Matfyze vyhodili z analýzy niekoľko študentov. Všetci títo študenti prestúpili na VŠN (vysokú školu nemenovanú). To malo nasledujúce dôsledky:

1. Počet študentov na Matfyze sa znížil o šestinu.
2. Počet študentov na VŠN sa zvýšil o tretinu.
3. Na obidvoch školách vzrástlo priemerné IQ o 2%.

Koľkokrát je teraz priemerné IQ na Matfyze vyššie ako na VŠN?

Výsledok. $\frac{6}{5} = 1{,}2$-krát

Riešenie. Označme $100m$ pôvodné priemerné IQ študentov Matfyzu a $100v$ pôvodné priemerné IQ študentov VŠN. Nakoniec označme p priemerné IQ študentov, ktorí prestúpili.

Keďže sa priemerné IQ na Matfyze zvýšilo o 2%, je priemerné IQ zvyšných matfyzákov $102m$. Z pomeru $5 : 1$ zvyšných matfyzákov k vyhodeným a z nového priemeru $100m$ dostávame rovnosť $100m = \frac{5}{6} \cdot 102m + \frac{1}{6}p$, ktorú upravíme na $p = 90m$.

Obdobne na VŠN bolo pôvodné priemerné IQ $100v$, po spriemerovaní s novými študentami $102v$, teda z pomeru $3 : 1$ pôvodných študentov k novým máme $p = 108v$.

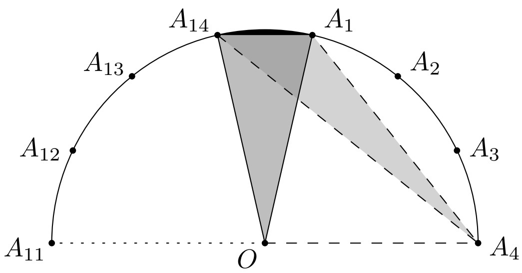
Celkovo máme

$$90m = 108v, \quad \text{teda} \quad \frac{102m}{102v} = \frac{108}{90} = \frac{6}{5}.$$

Úloha 48J / 38S. Do kružnice k s polomerom 1 je vpísaný pravidelný štrnásťuholník $A_1A_2 \ldots A_{14}$. Aká je plocha tej časti kruhu ohraničeného kružnicou k, ktorá leží vo vnútri ostrého uhla $A_1A_4A_{14}$?

Výsledok. $\frac{\pi}{14}$

Riešenie. Zamerajme sa okrem bodov A_1, A_4 a A_{14} ešte na bod A_{11}.



Keďže $11 = 4 + 7$, je úsečka A_4A_{11} priemerom kružnice k. Súčasne je $4 - 1 = 3 = 14 - 11$, takže $A_1A_4A_{11}A_{14}$ je rovnoramenný lichobežník a jeho základne A_4A_{11} a A_1A_{14} sú rovnobežné. Obsah trojuholníka $A_1A_4A_{14}$ je preto rovnaký ako obsah trojuholníka A_1OA_{14}, kde O je stred kružnice k. Hľadaný obsah je tak rovný obsahu kruhového výseku A_1OA_{14}, teda jednej štrnástine obsahu celého kruhu.

Úloha 49J / 39S. Olin s Martinou uvideli 24-prvkovú množinu $\{1, 2, \ldots, 24\}$. Olin si vypísal všetky jej dvanásťprvkové podmnožiny, ktoré majú párny súčet prvkov, zato Martina si vypísala všetky dvanásťprvkové podmnožiny s nepárnym súčtom prvkov. Kto si vypísal viac množín a o koľko?

Výsledok. Olin o $\binom{12}{6} = 924$

Riešenie. Uvažujme ľubovoľnú dvanásťprvkovú podmnožinu M a predpokladajme, že existuje prirodzené číslo i také, že M obsahuje práve jedno z čísel $2i - 1$, $2i$. Vezmeme najmenšie také i a zostrojme dvanásťprvkovú množinu $f(M)$, ktorá bude obsahovať rovnaké prvky ako M až na to, že z dvojice $2i - 1$, $2i$ bude obsahovať ten druhý prvok.

Ľahko si rozmyslíme, že keď f prevedieme na jednu množinu dvakrát po sebe, získame opäť pôvodnú množinu, a ďalej, že ak prevedieme f na niektorú Olinovu podmnožinu, získame Martininu podmnožinu a obrátene. Funkcia f je teda bijekciou medzi Olinovými a Martininými podmnožinami, samozrejme iba tými, pre ktoré existuje i z predchádzajúceho odseku. Ostáva si rozmyslieť, ako vyzerajú „zvyšné“ množiny, pre ktoré také i nie je možné nájsť.

V takýchto podmnožinách musí byť práve šesť nepárnych čísel a šesť párnych čísel, ktoré sú nasledníkmi tých nepárnych. Súčet čísel v takýchto podmnožinách je tak vždy párny a ich počet je $\binom{12}{6}$.

Úloha 50J / 40S. Viktor si myslí tri navzájom rôzne prirodzené čísla a, b, c také, že súčet niektorých dvoch z nich je 800. Keď si na papier napísal čísla a, b, c, $a + b - c$, $a + c - b$, $b + c - a$ a $a + b + c$, zistil, že to sú všetko prvočísla. Určte rozdiel najväčšieho a najmenšieho čísla na Viktorovom papieri.

Výsledok. 1594

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $b + c = 800$. Aspoň jedno z čísel a, $b + c - a = 800 - a$, $a + b + c = 800 + a$ je deliteľné tromi, takže aby bolo súčasne prvočíslom, musí sa trom priamo rovnať. Keďže $800 + a > 800$, ponúkajú sa dve možnosti: $a = 3$ alebo $800 - a = 3$.

Pokiaľ $a = 3$, máme z Viktorových prvočísel $3 + (b - c) \geq 2$ a súčasne $3 - (b - c) \geq 2$, teda $|b - c| \leq 1$, čo vzhľadom k $b + c = 800$ nepripadá do úvahy.

Vieme teda, že $800 - a = 3$, čiže $a = 797$. Najväčšie z Viktorových čísel je $a + b + c = 797 + 800 = 1597$. Vzhľadom k predpokladu $b + c = 800$ nemôže byť žiadne z Viktorových prvočísel párne, a preto je najmenšie číslo $800 - a = 3$. Rozdiel tak je $1597 - 3 = 1594$.

Ešte poznamenajme, že čísla vyhovujúce zadaniu skutočne existujú – napríklad $a = 797$, $b = 223$, $c = 577$.

Úloha 51J / 41S. Alča na dve náhodné miesta metrovej tyčky nakreslila bodky. Potom prišiel Pepa a tyčku náhodne rozlámal na 2013 častí. Aká je pravdepodobnosť, že obe bodky sú teraz na tej istej časti?

Výsledok. $\frac{1}{1007}$

Riešenie. Predstavme si tyčku v celku. Alča na ňu náhodne naniesla dve bodky, ale Pepa na ňu náhodne naniesol 2012 zlomov. Celkom je tak na tyčke 2014 značiek, z toho dve náhodné značky sú bodky. Celkový počet možností, ktoré značky môžu byť bodky, je $\binom{2014}{2} = 1007 \cdot 2013$. Bodky sú na jednom dieliku presne vtedy, keď ide o susedné značky, na čo máme 2013 možností. Výsledná pravdepodobnosť je

$$\frac{2013}{1007 \cdot 2013} = \frac{1}{1007}.$$

Úloha 52J / 42S. Koľko desaťciferných prirodzených čísel obsahujúcich každú z cifier $0, 1, \ldots, 9$ práve raz je násobkom čísla 11111?

Poznámka: Prirodzené číslo nemôže začínať nulou.

Výsledok. $3456 = 2^5 \cdot 5! - 2^4 \cdot 4!$

Riešenie. Pretože $0 + 1 + \cdots + 9 = 9 \cdot 5$, musia byť skúmané čísla deliteľné deviatimi, teda dokonca číslom 99999. Označme A, resp. B, číslo zložené z prvej, resp. druhej, pätice cifier skúmaného čísla. Potom máme

$$99999 \mid 100000A + B, \text{ práve keď } 99999 \mid A + B.$$

Pretože sú A, B päťciferné prirodzené čísla menšie ako 99999, je

$$0 < A + B < 2 \cdot 99999, \text{ teda } A + B = 99999, \text{ alebo } B = 99999 - A.$$

Z toho dostávame nutnú a postačujúcu podmienku na A, B pre deliteľnosť príslušného desaťciferného čísla číslom 99999: Pre $i = 1, \ldots, 5$ je i-tá cifra čísla B doplnkom do deviatky i-tej cifry čísla A. Ponúkané cifry preto spárujeme do piatich dvojíc

$$(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5).$$

Vieme, že tieto dvojice musíme použiť v istom poradí (5! možností), a súčasne si pri každej dvojici môžeme vybrať, ktoré číslo z dvojice dáme do A a ktoré do B (2^5 možností). Musíme však odčítať možnosti obsahujúce nulu na začiatku A, pre ktoré nedostaneme desaťciferné číslo – to je 4! možností ako usporiadať ostatné dvojice, a 2^4 možností ako rozdeliť ich čísla medzi A a B. Celkový počet čísel spĺňajúcich zadanie je teda $5! \cdot 2^5 - 4! \cdot 2^4$.

Úloha 53J / 43S. Polynóm $P(x)$ stupňa 2013 s reálnymi koeficientmi spĺňa pre $n = 0, 1, \ldots, 2013$ vzťah $P(n) = 3^n$. Určte $P(2014)$.

Výsledok. $3^{2014} - 2^{2014}$

Riešenie. Definujme polynóm $Q(x) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{x}{k} 2^k$. Ten má stupeň 2013 a tiež pre ľubovoľné $x \in \{0, \ldots, 2013\}$ spĺňa podľa binomickej vety

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{x}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{x} \binom{x}{k} 2^k = (1+2)^x = P(x).$$

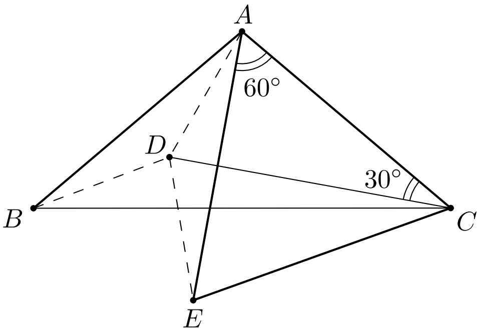
Polynóm $P(x) - Q(x)$ je stupňa 2013 a má 2014 koreňov, teda je nulový. Teda $P(x) = Q(x)$. Ostáva spočítať

$$Q(2014) = \sum_{k=0}^{2013} \binom{2014}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{2014} \binom{2014}{k} 2^k - \binom{2014}{2014} 2^{2014} = (1+2)^{2014} - 2^{2014} = 3^{2014} - 2^{2014}.$$

Úloha 54J / 44S. Vo vnútri rovnoramenného trojuholníka ABC spĺňajúceho $|AB| = |AC|$ a $|\sphericalangle BAC| = 99{,}4^\circ$ je daný bod D tak, že $|AD| = |DB|$ a $|\sphericalangle BAD| = 19{,}7^\circ$. Určte $|\sphericalangle BDC|$.

Výsledok. $149{,}1^\circ$

Riešenie. Označme E obraz bodu B v osovej súmernosti podľa AD.



Potom $|AE| = |AB| = |AC|$ a $|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle BAC| - 2 \cdot |\sphericalangle BAD| = 60^\circ$, takže trojuholník AEC je rovnostranný a $|CE| = |CA|$. Vďaka osovej súmernosti však tiež $|DE| = |DB| = |DA|$, takže CD je os úsečky AE a $|\sphericalangle ACD| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACE| = 30^\circ$. Teraz už z nekonvexného štvoruholníka $ABDC$ ľahko dopočítame

$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DBA| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACD| = 19{,}7^\circ + 99{,}4^\circ + 30^\circ = 149{,}1^\circ.$$

Úloha 55J / 45S. Nájdite najväčšie prirodzené číslo nekončiace nulou také, že škrtnutím niektorej jeho „vnútornej“ cifry získame jeho deliteľa.

Poznámka: „Vnútornou“ cifrou rozumieme každú cifru okrem prvej a poslednej.

Výsledok. 180625

Riešenie. Označme hľadané číslo X. Najskôr si rozmyslíme, že škrtať musíme jeho druhú cifru.

Pre spor predpokladajme, že prvé dve cifry neboli škrtnuté. Škrtnutím sme dostali z n-ciferného čísla X číslo $(n-1)$-ciferné (nazvime ho X'). Potom $10 \cdot X'$ je opäť n-ciferné číslo, ktoré sa s X zhoduje v prvých dvoch cifrách, ale pritom sa mu nerovná, pretože pôvodné číslo nekončilo nulou. To je ale spor, lebo dva násobky $(n-1)$-ciferného čísla sa nemôžu líšiť o $(n-2)$-ciferné číslo.

Číslo X si teraz zapíšeme v tvare $X = a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + c$, kde a a b sú cifry $(a \neq 0)$ a $c < 10^n$ číslo nekončiace na nulu. Škrtnutím druhej cifry vznikne číslo $X' = a \cdot 10^n + c$. Pre vhodné $k \in \mathbb{N}$ tak musí platiť

$$a \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + c = k \cdot (a \cdot 10^n + c).$$

Uvedomme si, že $k < 20$. Skutočne, keby bolo $k \geq 20$, začínalo by X na väčšiu cifru ako X', čo nemôže. Upravme ďalej rovnosť do tvaru

$$10^n(10a + b - k \cdot a) = (k-1)c.$$

Keďže ľavá strana je deliteľná 2^n i 5^n, musí byť obidvoma deliteľná i pravá strana. Číslo c samozrejme nekončí na nulu, takže činiteľ $k-1$ musí byť deliteľný aspoň jedným z prvočísel 2, 5 v jeho plnej mocnine. Keďže $k < 20$, usudzujeme, že $n \leq 4$ (lebo $2^5 > 20$, a dokonca $5^2 > 20$), a teda X je najviac šesťciferné. Naopak pre $n = 4$ musí byť už nutne $k - 1 = 16$, čo po dosadení dáva

$$5^4(b - 7a) = c.$$

Aby vyšla pravá strana nezáporná, musí byť $a = 1$ (a a b sú cifry). Pre b máme možnosti $b = 8$, $b = 9$, z ktorých druhú zavrhujeme, lebo c by končilo na nulu. Pre $b = 8$ dopočítame $c = 5^4 = 625$, spätne dosadíme a overíme, že číslo $X = 1 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 625 = 180625$ úlohu skutočne rieši.

Úloha 56J / 46S. Pre navzájom rôzne reálne čísla a, b, c platí

$$a = (b-2)c, \quad b = (c-2)a, \quad c = (a-2)b.$$

Čomu je rovný súčin abc?

Výsledok. 3

Riešenie. Pokiaľ je jedno z čísel a, b, c nulové, potom sú nulové všetky, čo je v spore s tým, že sú navzájom rôzne. Podobne zistíme, že čísla a, b, c sú rôzne od troch.

Dosaďme tretí vzťah do prvých dvoch a druhý vzťah $b = (ab-2b-2)a$ upravme na $b(a^2-2a-1) = 2a$. Keďže pravá strana je nenulová, je nenulová i ľavá – môžeme teda deliť výrazom a^2-2a-1 a tým získať vyjadrenie b pomocou a. To dosadíme do prvého vzťahu. Po úprave dostaneme

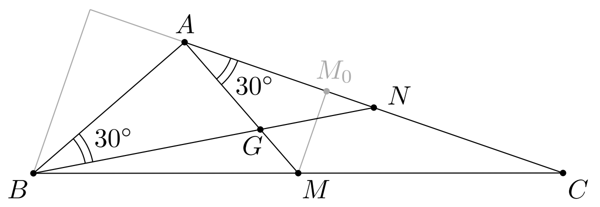
$$a(a-3)(a^3-3a^2-9a-3) = 0,$$

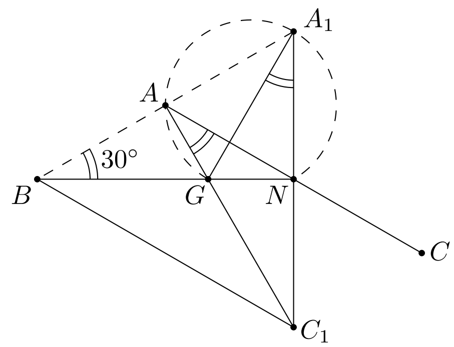
takže a je koreňom polynómu $P(x) = x^3+3x^2-9x-3$. Analogicky odvodíme, že i b a c sú korene tohto polynómu. Keďže sú čísla a, b, c navzájom rôzne, znamená to, že $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Porovnaním koeficientov u absolútneho člena získavame hľadané $abc = 3$.

Úloha 57J / 47S. V rôznostrannom trojuholníku ABC má jedna výška rovnakú dĺžku ako jedna ťažnica a iná výška má rovnakú dĺžku ako iná ťažnica. V akom pomere sú dĺžka tretej výšky a dĺžka tretej ťažnice?

Výsledok. $\frac{2}{7}$

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a > b > c$. Potom pre dĺžky príslušných výšok a ťažníc platí $v_a < v_b < v_c$ a $t_a < t_b < t_c$. Súčasne $v_a < t_a$, $v_b < t_b$ a $v_c < t_c$, takže musí byť $v_b = t_a$ a $v_c = t_b$. Označme M stred strany BC a M_0 pätu kolmice z bodu M na stranu AC. V pravouhlom trojuholníku AMM_0 platí $|MM_0| = \frac{1}{2}v_b = \frac{1}{2}t_a = \frac{1}{2}|AM|$, takže $|\sphericalangle MAC| = 30°$. Ak označíme N stred strany AC, získame podobne $|\sphericalangle NBA| = 30°$.





Označme G ťažisko trojuholníka ABC a uvažujme rovnostranný trojuholník A_1BC_1, ktorý má BN za ťažnicu. Bod A_1 spĺňa $|\sphericalangle NBA_1| = 30°$ i $|\sphericalangle GA_1N| = 30°$, ale pritom sa líši od bodu A (trojuholník ABC musí byť zo zadania rôznostranný). „Pravý“ bod A je preto druhým priesečníkom polpriamky BA_1 a kružnicového oblúka GA_1N, teda stredom úsečky BA_1. Z toho plynie $|\sphericalangle BAC| = 120°$ a $|AC| : |AB| = 2$.

V trojuholníku s uhlom $\alpha = 120°$ a dĺžkami strán $|AB| = 1$, $|AC| = 2$ už ľahko z kosínusovej vety dopočítame dĺžku strany $a = \sqrt{1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2} = \sqrt{7}$ a dĺžku ťažnice $t_c = \sqrt{1/4 + 1 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{21}$, ďalej obsah $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ a nakoniec dĺžku výšky $v_a = 2S/a = 3/\sqrt{21}$. Celkovo tak dostávame

$$\frac{v_a}{t_c} = \frac{\frac{3}{\sqrt{21}}}{\frac{1}{2}\sqrt{21}} = \frac{2}{7}.$$