Úloha 1J. Zlatá cihlička je kvádr o rozměrech $2 \times 3 \times 4$. Cihlička byla roztavena a ze všeho získaného zlata byly zhotoveny tři stejné krychle. Zjistěte délku hrany každé z nich.

Výsledek. 2

Řešení. Jelikož se celkový objem zlata nezměnil, každá ze tří nových krychlí má oproti cihličce třetinový objem. Objem kvádru je součin délek jeho stran, takže objem každé ze tří nových krychlí je $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8$. Hrana krychle o objemu 8 je $\sqrt[3]{8} = 2$.

Úloha 2J. Novoročních oslav v restauraci U Vybitého zásobníku se zúčastnilo 43 lidí. Na baru se podával džus, pivo a šampaňské. Pivo pilo 25 lidí a šampaňské pilo 19 lidí, přičemž pivo a šampaňské dohromady pilo 12 lidí. Všichni ostatní ten večer řídili, takže pili jen džus. Kolik lidí pilo pouze džus?

Výsledek. 11

Řešení. Lidí, kteří pili nějaký alkoholický nápoj, bylo $25 + 19 - 12 = 32$ (sečetli jsme počet lidí, kteří pili pivo, a počet lidí, kteří pili šampaňské, a odečetli jsme ty, které jsme započítali v obou skupinách). Víme, že všichni ostatní pili jen džus. Odpověď je tedy $43 - 32 = 11$.

Úloha 3J. Vypitím jednoho šálku černého čaje získáme kofein na jednu hodinu. Vypitím jednoho šálku kávy získáme kofein na čtyři hodiny. V jakém poměru je třeba smíchat černý čaj a kávu, abychom v jednom šálku získali kofein na dvě hodiny?

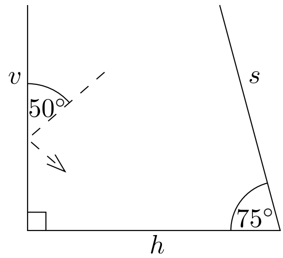
Výsledek. $2 : 1$

Řešení. Nechť $k > 0$ je množství kofeinu na jednu hodinu. Potom v šálku čaje je k kofeinu a v šálku kávy $4k$ kofeinu. Smícháme-li x šálků čaje a $1 - x$ šálků kávy (celkový objem je jeden šálek), bude pro množství kofeinu ve směsi platit $x \cdot k + (1 - x) \cdot 4k = 2k$. Tedy $x + 4 - 4x = 2$, neboli $x = \frac{2}{3}$. Výsledný poměr je proto

$$\frac{x}{1 - x} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 : 1.$$

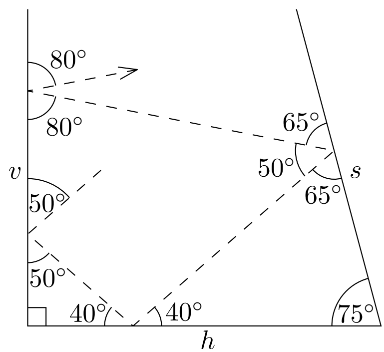
Úloha 4J. Zrcadla v a h na obrázku jsou navzájem kolmá a úhel mezi zrcadly h a s má velikost $75°$. Paprsek dopadl na v pod úhlem $50°$ a pokračoval odrazem od h a následně od s. Pod jakým úhlem poté dopadne znovu na v?

Poznámka: Úhlem odrazu/dopadu zde rozumíme odchylku dopadajícího paprsku od zrcadla. Paprsek se odráží pod stejně velkým úhlem, pod jakým dopadá.



Výsledek. 80

Řešení. Dokreslíme si dráhu paprsku a dopočítáme úhly ve vzniklých trojúhelnících. Součet úhlů v trojúhelníku je $180°$ a zrcadla v a h svírají úhel $90°$. Jelikož se tedy paprsek odrazil od v pod úhlem $50°$, dopadl na h pod úhlem $180° - 90° - 50° = 40°$. Podobně dostaneme, že na s dopadl pod úhlem $65°$ a podruhé na v pod úhlem $80°$ (zde využíváme toho, že součet úhlů v čtyřúhelníku je $360°$).



Úloha 5J. V zakázkami nabitém roce 2013 se v obchodě prodalo 235 kusů nábytku, přičemž v každém měsíci to bylo buď 20, nebo 16, nebo 25 kusů. V kolika měsících se prodalo 20, v kolika 16 a v kolika 25 kusů nábytku?

Výsledek. 4, 5, 3

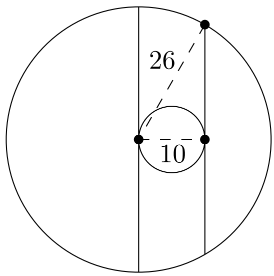
Řešení. Označme a, b, c počty měsíců, v nichž se prodalo postupně 16, 20 a 25 kusů nábytku. Platí $16a + 20b + 25c = 235$. Pravá strana je dělitelná pěti a výraz $20b + 25c$ také, takže $16a$, a tudíž i samotné a je dělitelné pěti. S ohledem na $a + b + c = 12$ rozebereme tři možnosti.

- Je-li $a = 0$, pak $b = 12 - c$ a po dosazení $5c = -5$, což není možné.
- Je-li $a = 5$, pak $b = 7 - c$ a po dosazení $80 + 5c = 95$, tedy $c = 3$ a $b = 4$.
- Je-li $a = 10$, pak $b = 2 - c$ a po dosazení $200 + 5c = 235$, čili $c = 7$ a $b = 2 - 7$, což není možné.

Úloha 6J. Dvě kružnice mají poloměry 5 a 26. Menší z nich prochází středem větší. Uvažme nejkratší a nejdelší tětivu větší kružnice, které se obě dotýkají menší kružnice. Jaký je rozdíl jejich délek?

Výsledek. 4

Řešení. Nejdelší tětiva je zřejmě průměr větší kružnice, tedy má délku 52. Nejkratší tětiva je ta, která má největší vzdálenost od středu větší kružnice. Tato vzdálenost může být nejvýše 10. Z Pythagorovy věty pak spočteme délku nejkratší tětivy jako $2 \cdot \sqrt{26^2 - 10^2} = 48$. Hledaný rozdíl je roven $52 - 48 = 4$.

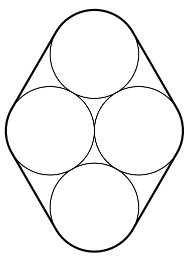


Úloha 7J. Leoš Mareš se narodil v minulém století. Víme, že v roce 1999 byl jeho věk roven součtu cifer v čísle roku jeho narození. Ve kterém roce se narodil?

Výsledek. 1976

Řešení. Označme Leošův věk v roce 1999 jako $10x+y$, kde x, y jsou cifry. Jelikož se Leoš narodil ve 20. století, lze ciferný součet roku jeho narození vyjádřit jako $1+9+(9-x)+(9-y)$. Odtud $28 = 11x + 2y$. Protože $0 \leq x, y \leq 9$, je jediným řešením dvojice $x = 2$, $y = 3$. Leoš se tedy narodil v roce $1999 - 23 = 1976$.

Úloha 8J. David si vyrobil tankový pás jako na obrázku. Všechna kola kromě vrchního a spodního se navzájem dotýkají. Jaká je délka pásu, víme-li, že kola mají poloměr 1 a pás je kolem nich těsně natažen?



Výsledek. $8 + 2\pi$

Řešení. Tankový pás můžeme rozdělit na rovné a zaoblené části. Zaoblené části tvoří dohromady kružnici o poloměru 1. Rovné části jsou všechny stejně dlouhé a délka každé z nich je rovna vzdálenosti středů sousedících kol. Celková délka pásu je tedy $2\pi + 4 \cdot 2$.

Úloha 9J. Broučci se na tělocviku řadí podle počtu nohou. Kromě Pytlíka dnes dorazili ještě čtyři broučci s počty nohou 6, 3, 10 a 9. Víme, že po seřazení byl počet nohou broučka uprostřed roven aritmetickému průměru počtu nohou všech přítomných broučků. Kolik nohou měl Pytlík? Najděte všechny možnosti.

Výsledek. 2, 7, 17

Řešení. Označme p hledaný počet Pytlíkových nohou a s počet nohou broučka, který stál uprostřed řady. Pak platí $s = \frac{1}{5}(6 + 3 + 10 + 9 + p)$, takže $p = 5s - 28$. Všimneme si, že $s \in \{6, 9, p\}$. Dosadíme-li za s tyto hodnoty, získáme výsledky 2, 7, 17, které odpovídají postupně pěticím $(2, 3, 6, 9, 10)$, $(3, 6, 7, 9, 10)$ a $(3, 6, 9, 10, 17)$.

Úloha 10J. Pro nenulové číslice A, B, C platí $\overline{AA} + \overline{BB} + \overline{CC} = \overline{ABC}$. Určete $\overline{ABC}$.

Poznámka: Zápisem $\overline{XY}$ pro číslice X, Y rozumíme číslo, jehož desítkový zápis je XY.

Výsledek. 198

Řešení. Porovnáním číslic na místě jednotek dostáváme, že $A + B = 10$ (pokud totiž $A + B = 0$, pak $A = B = 0$, což nelze). Zaměřme se na pozici desítek. Jelikož došlo k přenosu, máme na levé straně rovnosti $1 + A + B + C$. Jenže $B < 1 + A + B + C < 20 + B$, takže musí být $1 + A + B + C = 10 + B$. Proto $A + C = 9$ a na pozici stovek se přenese jednička, čili $A = 1$. Lehce dopočteme, že $\overline{ABC} = 198$.

Úloha 11J / 1S. Vášnivý sběratel hudebních nástrojů Pepa byl v důsledku ekonomické krize nucen prodat třetinu své sbírky. Hned potom daroval Alče tři flétny od Hieronyma Bosche. Později znovu prodal třetinu z toho, co mu zbylo, a věnoval Davidovi dvoje stradivárky a dvě gibsonky. Když naposled prodal třetinu zbylých nástrojů a tři daroval muzeu, zbylo mu v domácí galerii už jenom devět klavírů, se kterými nemohl hnout. Kolik nástrojů měl na začátku?

Výsledek. 54

Řešení. Na konci měl Pepa devět nástrojů, předtím $\frac{3}{2}(9 + 3) = 18$, předtím $\frac{3}{2}(18 + 4) = 33$ a na začátku $\frac{3}{2}(33 + 3) = 54$.

Úloha 12J / 2S. Najděte nejmenší přirozené číslo větší než 2014, které se nedá zapsat jako součet dvou palindromů.

Poznámka: Palindrom je číslo, jehož desítkový zápis se čte stejně odpředu jako odzadu.

Výsledek. 2019

Řešení. Čísla 2015 až 2018 lze zapsat jako $2015 = 1551+464$, $2016 = 1441+575$, $2017 = 1331 + 686$, $2018 = 1221 + 797$. Tvrdíme, že číslo 2019 se požadovaným způsobem zapsat nedá.

Kdyby ano, musel by jeden ze sčítanců být čtyřciferný. Pokud by druhý sčítanec měl sudý počet cifer, pak by byl jejich součet dělitelný jedenácti, což pro 2019 neplatí. Jednociferný sčítanec zřejmě nestačí, a tedy musíme sčítat palindromy tvaru $\overline{1AA1}$ a $\overline{BCB}$, kde A, B, C jsou číslice. Porovnáním číslic na pozici jednotek dostáváme $B = 8$. Porovnáme-li nyní číslice na pozici desítek, zjistíme, že musí platit buď $A + C = 1$, nebo $A + C = 11$. V prvním případě je $\overline{1AA1} + \overline{8C8} < 2000$, ve druhém bychom porovnáním číslic na pozici stovek dostali $A + 8 + 1 = 10$, což nelze s ohledem na $A + C = 11$. Číslo 2019 proto požadovaným způsobem zapsat nemůžeme.

Úloha 13J / 3S. Štěpán dal Lukášovi hádanku. Vybral si číslici X a řekl: „Myslím si trojciferné číslo dělitelné jedenácti. Na pozici stovek má číslici X a na pozici desítek trojku. Tvým úkolem je zjistit číslici na pozici jednotek.“ Lukáš se na chvilku a zamyslel a vykřikl: „Ha, už vím, jak na to!“ Ale pak si uvědomil, že hádanka nemá řešení – žádná číslice na pozici jednotek nevyhovuje popsaným vlastnostem Štěpánova čísla. Jakou číslici Štěpán za X vybral?

Výsledek. 4

Řešení. Označme Y cifru na pozici jednotek. Číslo $\overline{X3Y}$ je dělitelné jedenácti právě tehdy, když je číslo $(X+Y)-3$ dělitelné jedenácti. Hledáme proto takovou číslici X, aby pro žádné $0 \leq Y \leq 9$ nebylo číslo $X + Y - 3$ dělitelné jedenácti. Těmto požadavkům vyhovuje jen $X = 4$.

Úloha 14J / 4S. David si vymyslel čísla $a < b < c < d$ a spočítal součty každých dvou z nich (celkem šest součtů). Zjistil, že každý součet je jiný a že čtyři nejmenší součty jsou 1, 2, 3 a 4. Jakou hodnotu může mít d? Najděte všechny možnosti.

Výsledek. 3,5; 4

Řešení. Nejmenší součty jsou jistě $a + b$ a $a + c$, takže $a + b = 1$ a $a + c = 2$. Největší součty jsou naopak jistě $c + d$ a $b + d$. Máme tedy dvě možnosti:

- Je-li $a + d = 3$, $b + c = 4$, pak $2a = (a + b) + (a + c) - (b + c) = 1 + 2 - 4$, proto $a = -0{,}5$ a dopočítáme $b = 1{,}5$, $c = 2{,}5$ a $d = 3{,}5$.

- Je-li $b+c=3$, $a+d=4$, pak $2a=(a+b)+(a+c)-(b+c)=1+2-3$, tedy $a=0$ a dopočítáme $b=1$, $c=2$ a $d=4$.

Úloha 15J / 5S. Říká takhle Křemílek Vochomůrkovi: „Je mi dvakrát více let, než bylo tobě, když jsem byl tak starý, jako jsi ty dnes. Až budeš starý jako já, bude nám dohromady 90 let.“ Kolik let je Křemílkovi?

Výsledek. 40

Řešení. Označme k současný věk Křemílka a v současný věk Vochomůrky (zřejmě $k>v$). Dle zadání sestavíme rovnice $k=2(v-(k-v))$ a $k+(k+(k-v))=90$, které upravíme na $3k=4v$ a $3k-v=90$. Dosazením za k do druhé rovnice dostaneme $3v=90$, takže $v=30$ a $k=40$.

Úloha 16J / 6S. Kladná celá čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří aritmetickou posloupnost. Pokud $a_1=10$ a $a_{a_2}=100$, čemu je rovno $a_{a_{a_3}}$?

Výsledek. 820

Řešení. V aritmetické posloupnosti lze k-tý člen zapsat jako $a_k=a_1+(k-1)d$, kde d je diference. Odtud máme $a_2=10+d$, takže

$$100=a_{a_2}=a_{10+d}=10+(9+d)d=10+9d+d^2.$$

Jediným kladným řešením této rovnice je $d=6$. Pak $a_k=4+6k$ a zbývá dopočítat $a_3=4+18=22$, $a_{a_3}=a_{22}=4+132=136$ a konečně $a_{a_{a_3}}=a_{136}=4+816=820$.

Úloha 17J / 7S. Alčino oblíbené číslo má následující vlastnosti:

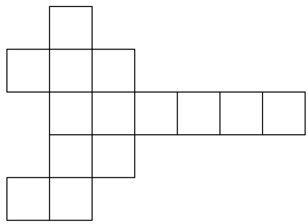
- Má celkem osm cifer.
- Jeho cifry jsou navzájem různé a zleva doprava se zmenšují.
- Je dělitelné 180.

Jaké je to číslo?

Výsledek. 97654320

Řešení. Aby bylo číslo, které je složené z různých cifer, dělitelné dvaceti, musí končit jedním z dvojčíslí 20, 40, 60, 80. Přitom jen dvojčíslí 20 lze zleva doplnit na osmiciferné číslo splňující druhou podmínku. Zbývá určit, která z cifer $3, 4, \ldots, 9$ bude chybět. Aby bylo číslo dělitelné devíti, musí být jeho ciferný součet dělitelný devíti. Jelikož $0+2+3+4+\cdots+9=44$, musíme vyškrtnout osmičku a dostáváme výsledek 97654320.

Úloha 18J / 8S. Kikina si ráda skládá trojrozměrná tělesa ze čtverečkovaného papíru. Naposledy si vystřihla útvar jako na obrázku a slepila ho tak, že se žádné dva čtverečky nepřekrývaly a výsledné těleso nemělo díry a mělo nenulový objem. Jaký byl počet vrcholů tohoto tělesa? Poznámka: Mřížové body pláště uvnitř hran tělesa se za vrcholy nepočítají.



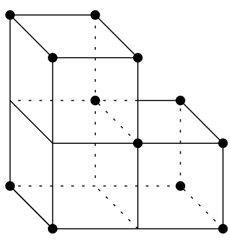
Výsledek. 12

Řešení.

Pokud se na poskládané těleso podíváme zepředu, uvidíme stejný počet čtverečků, jako když se na něj podíváme zezadu. Podobně zprava a zleva a také shora a zdola. Označme a, b a c počty viditelných políček shora, zprava a zepředu.

Pokud nejsou žádná políčka skryta, musí platit $2(a + b + c) = 14$ (tolik je čtverečků celkem). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a \leq b \leq c$. Potom pro trojici (a, b, c) zbývají čtyři možnosti: $(1, 1, 5)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$ a $(2, 2, 3)$. Protože musí platit nerovnost $c \leq ab$, první dvě možnosti odpadají. V úvahu tedy připadá pouze kvádr o rozměrech $1 \times 3 \times 3$ a „L“. Kvádr to nebude, tedy poskládaným tělesem bude „L“.

Kdyby bylo nějaké políčko skryto, museli bychom při pohledu z nějaké strany vidět alespoň pět políček, což jsme již vyloučili výše.



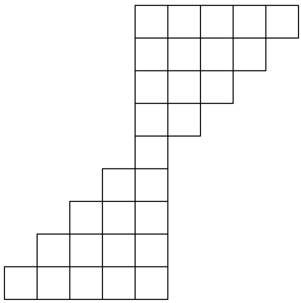
Úloha 19J / 9S. Pro přirozená čísla a, b platí $ab = \mathrm{nsn}(a, b) + \mathrm{NSD}(a, b)$. Najděte všechny takové dvojice (a, b).

Poznámka: Symbolem $\mathrm{nsn}(a, b)$ rozumíme nejmenší společný násobek čísel a, b a symbolem $\mathrm{NSD}(a, b)$ jejich největší společný dělitel.

Výsledek. $(2,2)$

Řešení. Označme $d = \mathrm{NSD}(a,b)$. Pak $\mathrm{nsn}(a,b) = \frac{ab}{d}$, jak snadno nahlédneme z prvočíselných rozkladů příslušných čísel. Po dosazení máme $ab = d + \frac{ab}{d}$, čili $(d-1)ab = d^2$. Jelikož $a,b \geq d$ a $d > 0$, musí platit $a = b = d$ a $d - 1 = 1$, z čehož plyne, že jedinou vyhovující dvojicí je $(2,2)$.

Úloha 20J / 10S. Žába skáče na hřišti složeném z 29 políček, které je vyobrazeno na přiloženém plánku. Začíná na libovolném políčku ve spodním řádku a v každém kroku může skočit o jedno políčko nahoru nebo šikmo doprava nahoru (pokud tam nějaké je). Žába skáče, dokud se neocitne v horním řádku. Kolik různých cest může proskákat?



Výsledek. 256

Řešení. Žába musí vždy projít přes prostřední políčko (to, které je v řádku samo). Při cestě z něj se čtyřikrát rozhoduje, jestli skočí nahoru, nebo šikmo doprava nahoru. Počet cest z prostředního políčka je tedy $2^4 = 16$. Počet cest ze spodního řádku do prostředního políčka je stejný jako počet cest nazpátek s opačnými pohyby (obrázek je středově souměrný), tedy také 16. Cesty lze uprostřed libovolně navázat, tedy jejich celkový počet je $16^2 = 256$.

Úloha 21J / 11S. Při své honbě za truhlicemi nabitými poklady stál jednoho dne Olin před úkolem projít bludiště. Mělo tvar pravidelného osmiúhelníku a cesty vedly po jeho úhlopříčkách. Olin začal v pevně daném vrcholu a měl projít bludiště tak, aby každou úhlopříčku navštívil právě jednou. Kolika způsoby to mohl provést?

Výsledek. 0

Řešení. Všechny navštívené vrcholy kromě prvního a posledního musí Olin opustit tolikrát, kolikrát do nich vstoupí. Jelikož ale z každého vrcholu osmiúhelníku vede lichý počet (konkrétně pět) úhlopříček, nemůže takto každou z nich projít právě jednou. Žádná vyhovující posloupnost úhlopříček tedy neexistuje.

Úloha 22J / 12S. Máme tabulku T o rozměrech 2014×2014 s levým dolním rohem v bodě $[0, 0]$ a pravým horním v bodě $[2014, 2014]$. Přímka p prochází body o souřadnicích $[0, 0]$ a $[2014, 2019]$. Kolik políček tabulky T přímka p protíná?

Poznámka: Přímka p *protíná* políčko tabulky, pokud s ním má společné alespoň dva body. Například diagonála protíná 2014 políček T.

Výsledek. 4023

Řešení. Jelikož přímka p prochází body $[0, 0]$ a $[2014, 2019]$, platí pro každý její bod $B = [x, y]$ vztah $x/y = 2014/2019$. Čísla 2014 a 2019 jsou nesoudělná, takže poslední zlomek je v základním tvaru, a p proto neprochází žádným jiným rohem políčka tabulky T. Kdykoliv tedy protne nějakou přímku tvořící hranici mezi políčky, protne i nové políčko. Na cestě z $[0, 0]$ do $[2014, 2019]$ protne p přesně 2013 takových vodorovných a $\lfloor 2014^2/2019 \rfloor = 2009$ takových svislých přímek (v bodě $[2014^2/2019, 2014]$ tabulku „opustí“). Začne tedy v levém dolním rohovém políčku a projde $2013 + 2009$ nových. To je celkem $1 + 2009 + 2013 = 4023$ políček.

Úloha 23J / 13S. Konvexní mnohoúhelník má všechny vnitřní úhly až na jeden rovny 150°, zbývající úhel může mít libovolnou velikost. Najděte všechny možné počty vrcholů takového mnohoúhelníka.

Výsledek. 8, 9, 10, 11, 12

Řešení. Konvexní n-úhelník můžeme rozdělit na $n-2$ trojúhelníků, takže součet jeho vnitřních úhlů je roven $(n-2) \cdot 180^\circ$, což se má rovnat $150^\circ \cdot (n-1) + x$, kde $0^\circ < x < 180^\circ$ je velikost nějakého konvexního úhlu. Po úpravě dostaneme $n = \frac{x}{30^\circ} + 7$, tedy $8 \le n \le 12$.

Úloha 24J / 14S. Délky stran trojúhelníka splňují vztah

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}.$$

Jaký úhel svírají strany b a c?

Výsledek. 60°

Řešení. Rovnost upravíme do tvaru

$$3(a^2 + ab + ac + bc) = 2a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + ac) + 2bc,$$

ekvivalentně $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Z kosinové věty máme $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Dostáváme tedy $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, neboli $\alpha = 60^\circ$.

Úloha 25J / 15S. Najděte všechna celá čísla mezi 1 a 200 včetně taková, že součet všech jejich prvočíselných dělitelů je 16. Každé prvočíslo přitom počítáme pouze jednou, tedy například součet různých prvočíselných dělitelů čísla 12 je $2 + 3 = 5$.

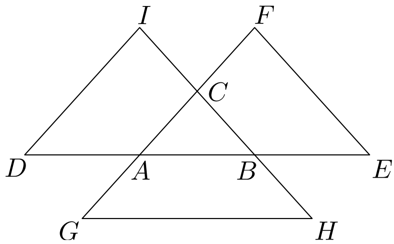
Výsledek. 66, 132, 198, 55, 39, 117

Řešení. Číslo 16 lze rozepsat na součet různých prvočísel jen následujícími způsoby:

$$16 = 2 + 3 + 11 = 3 + 13 = 5 + 11.$$

V prvním případě získáváme čísla tvaru $1 \leq 2^a 3^b 11^c \leq 200$, kde a, b, c jsou přirozená čísla. Dostaneme takto $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$, $2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$, $2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198$. Pro druhý případ máme obdobně $3 \cdot 13 = 39$, $3^2 \cdot 13 = 117$ a pro třetí $5 \cdot 11 = 55$.

Úloha 26J / 16S. Pro vzdálenosti bodů na obrázku platí, že $|DA| = |AB| = |BE|$, $|GA| = |AC| = |CF|$ a $|IC| = |CB| = |BH|$. Jaký je obsah trojúhelníka ABC, když navíc $|EF| = 5$, $|DI| = 5$ a $|GH| = 6$?



Výsledek. 3

Řešení. Ze zadaných rovností plyne, že AB je střední příčkou v trojúhelníku CGH. Proto $|AB| = |GH|/2 = 3$. Podobně dopočítáme $|AC| = |DI|/2 = 2{,}5$ a $|BC| = \frac{|EF|}{2} = 2{,}5$. V rovnoramenném trojúhelníku ABC protíná výška z vrcholu C základnu AB v jejím středu M. Z Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku AMC plyne $|MC| = \sqrt{|AC|^2 - |AM|^2} = \sqrt{6{,}25 - 2{,}25} = 2$. Obsah trojúhelníku ABC je pak $S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |MC| = 3$.

Úloha 27J / 17S. Prvočíslo p nazveme *mocné*, jestliže:

- p je jednociferné, nebo
- po odebrání jeho první cifry dostaneme opět mocné prvočíslo a totéž platí pro poslední cifru.

Například 37 je mocné prvočíslo, jelikož odebráním první cifry vznikne 7 a odebráním poslední cifry vznikne 3, což jsou obě mocná prvočísla. Najděte všechna mocná prvočísla.

Výsledek. 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373

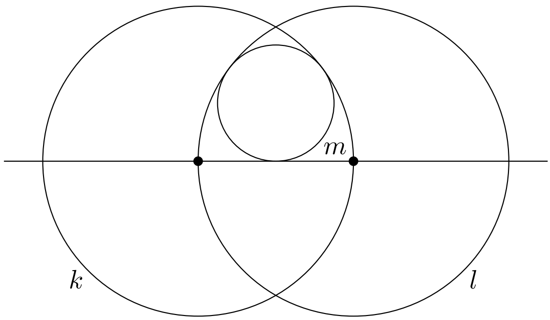
Řešení. Jednociferná mocná prvočísla (dále jen JMP) jsou 2, 3, 5 a 7.

Dvojciferná mocná prvočísla (dále jen DMP) dostaneme pouze slepením dvou JMP tak, abychom získali opět prvočíslo. Takto získáme mocná prvočísla 23, 37, 53 a 73.

Trojciferná mocná prvočísla (dále jen TMP) mají tu vlastnost, že po odebrání první, respektive poslední cifry dostaneme DMP. Příslušná DMP se tedy musí shodovat v jedné cifře. Proto se všechna TMP vyskytují mezi čísly 237, 537, 737 a 373. Jediné prvočíslo mezi nimi je 373.

Čtyřciferné mocné prvočíslo (dále jen ČMP) vznikne ze dvou TMP takových, že poslední dvě cifry prvního jsou zároveň prvními dvěma ciframi druhého (jejich pořadí zůstane zachováno). Protože však tuto vlastnost jediné TMP 373 nemá, neexistuje žádné ČMP. Je zřejmé, že potom neexistuje ani žádné víceciferné mocné prvočíslo.

Úloha 28J / 18S. Jsou dány dvě kružnice k, l o poloměru 16, z nichž každá prochází středem té druhé. Sestrojme kružnici m tak, aby měla vnitřní dotyk s k i s l, a navíc se dotýkala spojnice jejich středů. Jaký je poloměr m?

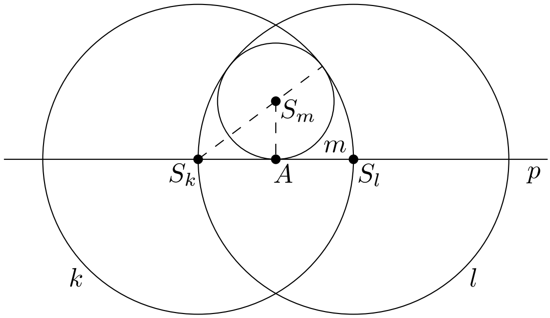


Výsledek. 6

Řešení. Označme středy kružnic k, l, m postupně S_k, S_l, S_m a poloměr kružnice m jako r. Bod dotyku kružnic k a m leží na spojnici středů S_kS_m, takže $|S_kS_m| = 16 - r$. Uvažme bod dotyku A kružnice m a přímky spojující body S_k a S_l. Ze symetrie obrázku platí $|AS_k| = |AS_l| = 8$. Navíc $|S_mA| = r$, takže z Pythagorovy věty pro $\triangle S_kAS_m$ dostáváme

$$8^2 + r^2 = (16 - r)^2,$$

odkud už snadno dopočteme $r = 6$.



Úloha 29J / 19S. V kolika šesticiferných číslech se každá cifra vyskytuje tolikrát, jaká je její hodnota? Číslem s těmito vlastnostmi je například 133232.

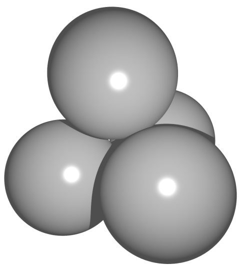
Výsledek. 82

Řešení. Součet různých použitých cifer musí být roven šesti. Číslo šest lze rozepsat na součet několika různých přirozených čísel čtyřmi způsoby:

$$6 = 1 + 2 + 3 = 1 + 5 = 2 + 4 = 6.$$

Čísel tvořených třemi trojkami, dvěma dvojkami a jednou jedničkou je celkem $6 \cdot \binom{5}{2} = 60$ (nejprve vybereme pozici jedničky a poté ze zbylých pěti pozic dvě, na nichž budou dvojky. Podobně pro rozklady $1 + 5$, $2 + 4$ a 6 dostaneme postupně šest možností, $\binom{6}{2} = 15$ možností a jednu možnost. Celkem tak máme $60 + 6 + 15 + 1 = 82$ možností.

Úloha 30J / 20S. E.T. si jako správný chlap slepil 4 koule o poloměru 1 tak, aby se všechny navzájem dotýkaly. Jaký je poloměr nejmenší koule, do níž se všechny E.T.-ho koule vejdou?

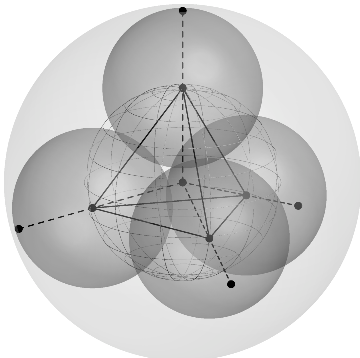


Výsledek. $1 + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$

Řešení. Středy čtyř slepených koulí tvoří pravidelný čtyřstěn o hraně délky 2. Střed nejmenší koule obsahující čtyři slepené koule bude ve středu tohoto čtyřstěnu a její poloměr bude o 1 větší než poloměr koule tomuto čtyřstěnu opsané. Z Pythagorových vět dopočteme délku stěnové výšky jako $v_s = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ a následně vzdálenost středů S, T dvou protějších hran jako $|ST| = \sqrt{v_s^2 - 1^2} = \sqrt{2}$. Střed O sféry opsané čtyřstěnu leží ve středu úsečky ST. Vzdálenost bodu O od vrcholu tedy spočteme jako

$$\sqrt{|OS^2| + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Poloměr hledané koule je pak $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.



Úloha 31J / 21S. Pro přirozená čísla x, y platí $100 \geq x > y$. Čísla $x^2 - y^2$ a $x^3 - y^3$ jsou přitom nesoudělná. Kolik takových dvojic (x, y) existuje?

Výsledek. 99

Řešení. Platí $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ a $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Člen $x - y$ se vyskytuje v obou těchto číslech, tedy vzhledem k nesoudělnosti a podmínce $x > y$ musí být $x - y = 1$. Dosadíme-li za y číslo $x - 1$, dostaneme $\mathrm{NSD}(2x - 1, 3x^2 - 3x + 1) = 1$. Přičtení násobku jednoho z čísel k druhému hodnotu NSD nezmění, takže po odečtení $(x - 1)(2x - 1)$ od $3x^2 - 3x + 1$ dostáváme $\mathrm{NSD}(2x - 1, x^2) = 1$. Libovolné prvočíslo, které dělí x^2, dělí i x, a tedy nemůže dělit $2x - 1$. To znamená, že podmínka $x - y = 1$ je postačující. Vyhovují jí dvojice $(2, 1), (3, 2), \ldots, (100, 99)$.

Úloha 32J / 22S. Mějme číslo, které začíná $122333444455555\ldots$ a pokračuje tak, že každé další přirozené číslo napíšeme za sebou tolikrát, jaká je jeho hodnota. Po napsání 2014 cifer skončíme. Jaká je poslední napsaná cifra?

Výsledek. 4

Řešení. Všechna jednociferná čísla zaberou prvních

$$1 + 2 + \cdots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

míst. Dvojciferná čísla zaberou dalších

$$2(10 + 11 + \cdots + 99) = 2\left(90\frac{10 + 99}{2}\right) = 9810$$

Na 2014. místo byla tedy napsána cifra nějakého dvojciferného čísla. Protože jednociferná čísla zabírají lichý počet míst, platí po celou dobu výskytu dvojciferných čísel, že na sudých místech jsou cifry na pozici desítek a na lichých cifry na pozici jednotek. Jelikož

$$45 + 2(10 + 11 + \cdots + 40) < 2014 < 45 + 2(10 + 11 + \cdots + 50),$$

je na 2014. místě cifra 4.

Úloha 33J / 23S. Najděte nejmenší přirozené číslo N, pro které má rovnice $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = N$ alespoň dvě různá řešení $x, y \in \mathbb{N}$, $x \leq y$.

Výsledek. 360

Řešení. Vypíšeme několik prvních hodnot výrazu $t^2 - 1$ pro $t \in \mathbb{N}$:

$$0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, \ldots$$

Chceme najít dvě dvojice čísel tvaru $t^2 - 1$ se stejným a co nejmenším součinem. Platí $3 \cdot 120 = 15 \cdot 24 = 360$. Předpokládejme, že existují dvě dvojice se součinem menším než 360. Pokud bychom použili nějaké číslo větší než 120, byl by součin jistě větší než $3 \cdot 120$. Můžeme se tedy omezit na výše vypsané hodnoty. Alespoň jedna z použitých dvojic určitě neobsahuje číslo 3. Její součin je tedy jedním z čísel $8 \cdot 8, 8 \cdot 15, 8 \cdot 24, 8 \cdot 35, 15 \cdot 15$ (ostatní možné součiny jsou větší než 360). K žádné z těchto dvojic nenajdeme druhou se stejným součinem, a nejmenší vyhovující N je tedy vskutku 360.

Úloha 34J / 24S. Dvě kružnice s poloměry 1 a 3 mají v bodě A vnější dotyk. Jejich společná tečna neprocházející bodem A se jich dotýká postupně v bodech B a C. Čemu se rovná $|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2$?

Výsledek. 24

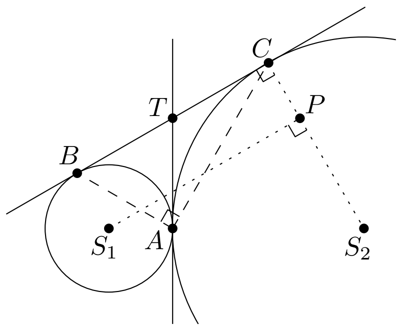
Řešení. Označme střed menší kružnice S_1, střed větší kružnice S_2 a průsečík společné tečny vedené bodem A s druhou tečnou – přímkou BC – jako T. Z rovnosti délek úseků tečen z bodu T k oběma kružnicím dostáváme $|TC| = |TA| = |TB|$. Bod A tedy leží na Thaletově kružnici nad průměrem BC. Trojúhelník ABC je proto pravoúhlý a platí $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, neboli

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2 = 2|BC|^2.$$

Z Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník S_1S_2P, kde P je pata kolmice z bodu S_1 na S_2C, plyne

$$|BC|^2 = |S_1P|^2 = (3+1)^2 - (3-1)^2 = 12.$$

Tedy $|AB|^2 + |AC|^2 + |BC|^2 = 2|BC|^2 = 24$.



Úloha 35J / 25S. Najděte největší prvočíslo p splňující $p^p \mid 2014!$.

Poznámka: Symbol „!“ označuje *faktoriál*, který je definován jako $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.

Výsledek. 43

Řešení. Je-li q prvočíslo, pak s ním soudělných čísel obsažených v součinu $2014! = 1 \cdot 2 \cdots 2014$ je celkem $\lfloor 2014/q \rfloor$ (jsou to právě čísla $q, 2q, \ldots, \lfloor 2014/q \rfloor q$). Kdyby bylo $q > \sqrt{2014}$, platilo by $\lfloor 2014/q \rfloor < q$, a tedy by se q vyskytovalo v prvočíselném rozkladu 2014! méně než q-krát, protože žádné z čísel $q, 2q, \ldots, \lfloor 2014/q \rfloor q$ by q neobsahovalo ve druhé nebo vyšší mocnině. Proto musí hledané p splňovat nerovnost $p \leq \sqrt{2014}$. Libovolné prvočíslo splňující tuto nerovnost už bude určitě vyhovovat, protože $\lfloor 2014/p \rfloor$ je v takovém případě alespoň p. Největší prvočíslo velikosti nejvýše $\sqrt{2014}$ je 43, tedy $p = 43$.

Úloha 36J / 26S. Mějme tabulku 2×2014. Kolika způsoby je možné ji obarvit třemi barvami tak, aby žádná dvě políčka sdílející hranu neměla stejnou barvu?

Výsledek. $6 \cdot 3^{2013}$

Řešení. Nejprve libovolně obarvíme obě políčka z prvního sloupečku, což můžeme provést šesti způsoby. Nyní budeme postupně obarvovat další sloupečky. Pokud poslední obarvený sloupeček obsahuje (shora) barvy a a b, máme (opět shora) tři možnosti: (b, a), (b, c) a (c, a). Pro každý sloupeček od druhého dále máme tedy vždy tři možnosti, jak jej obarvit, takže výsledný počet způsobů je roven $6 \cdot 3^{2013}$.

Úloha 37J / 27S. Najděte nejmenší přirozené číslo m takové, že $5m$ je pátá mocnina celého čísla, $6m$ je šestá mocnina celého čísla a $7m$ je sedmá mocnina celého čísla.

Výsledek. $5^{84}6^{35}7^{90}$

Řešení. Zapišme m ve tvaru $m = 5^a 6^b 7^c d$, kde d není dělitelné pěti, šesti ani sedmi. Jelikož $5m$ má být pátá mocnina, musí platit $5 \mid a + 1, b, c$. Podobně $6 \mid a, b + 1, c$ a $7 \mid a, b, c + 1$. Navíc d musí být pátá, šestá i sedmá mocnina. Jelikož m je nejmenší možné, musí být $d = 1$. Z uvedených dělitelností vyplývá, že a je dělitelné šesti i sedmi, tedy $a = 42k$. Zároveň $5 \mid 42k + 1$. Nejmenší vyhovující k je tedy 2 a odpovídá mu $a = 84$. Podobně dostaneme nejmenší možné $b = 35$ a $c = 90$. Hledané nejmenší m je tedy $5^{84}6^{35}7^{90}$.

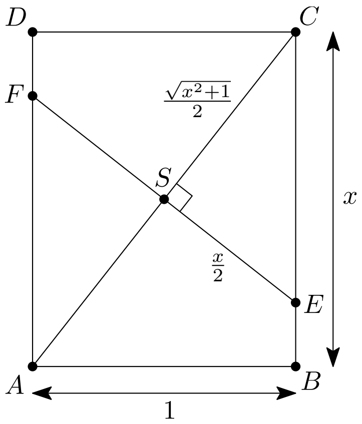
Úloha 38J / 28S. Máme obdélníkový list papíru. Když jej přeložíme tak, aby se dva protilehlé rohy dotýkaly, vznikne nám přehyb stejné délky, jako je delší strana papíru. Jaký je poměr delší strany ku kratší straně původního obdélníku?

Výsledek. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Řešení. Označme A, B, C, D rohy papíru a S jeho střed. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsme přeložili A na C a $1 = |AB| \leq |BC|$. Krajní body ohybu označme $E \in BC$ a $F \in AD$. Body A, C jsou osově souměrné podle EF, takže úsečky AC a EF jsou na sebe kolmé a S je jejich společný střed. Položme $|BC| = x$. Ze zadání víme, že $|EF| = x$, tedy $|ES| = x/2$. Délka úhlopříčky je z Pythagorovy věty $|AC| = \sqrt{x^2 + 1}$, tedy $|CS| = \sqrt{x^2 + 1}/2$. Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků CSE a CBA plyne $\sqrt{x^2 + 1} : x = x : 1$. Úpravou dostáváme $x^4 - x^2 - 1 = 0$. Položme $z = x^2$. Kvadratická rovnice $z^2 - z - 1 = 0$ nám dává jediné kladné řešení $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, čili

$$x = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}},$$

což je i hledaný poměr.



Úloha 39J / 29S. Máme 20 barevných kuliček, z nichž každá je modrá, žlutá, zelená, nebo červená. Kolik nejvíce může být modrých kuliček, jestliže počet všech barevně různých posloupností délky 20, jež se dají z kuliček poskládat, je přesně 1140?

Výsledek. 17

Řešení. Počty modrých, žlutých, zelených a červených kuliček označme postupně b, y, g, r. Kdyby měla každá kulička jinou barvu, měli bychom $(r+g+b+y)! = 20!$ různých posloupností. Protože však máme více kuliček jedné barvy, jsou některé z těchto posloupností stejné. Pro každé z $r!$ uspořádání červených kuliček totiž dostaneme tutéž posloupnost, podobně pro ostatní barvy. Celkem tedy máme

$$\frac{20!}{r!\,g!\,b!\,y!} = \frac{20(20-1)\cdots(b+1)}{r!\,g!\,y!}$$

různých barevných posloupností. Je-li $b \geq 18$, je čitatel roven nejvýše $20 \cdot 19 = 380$, tedy posloupností bude méně než požadovaných 1140. Pro $b = 17$ umíme docílit hodnoty 1140 například volbou $r = 3$, $g = 0$, $y = 0$.

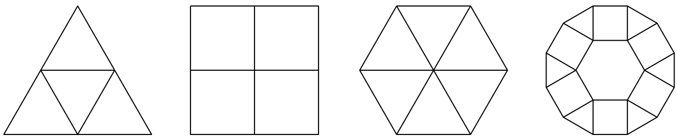
Úloha 40J / 30S. Najděte všechna možná $n \geq 3$, pro která lze pravidelný n-úhelník rozdělit na několik (aspoň dva) pravidelných mnohoúhelníků.

Výsledek. 3, 4, 6, 12

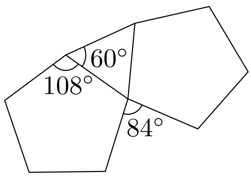
Řešení. Rovnostranný trojúhelník rozdělíme středními příčkami na 4 rovnostranné trojúhelníky, čtverec na čtyři čtverce a šestiúhelník na šest trojúhelníků.

Nyní uvažme pravidelný n-úhelník pro n různé od 3, 4 a 6. Všimněme si, že pravidelné mnohoúhelníky o třech až šesti vrcholech mají velikost vnitřního úhlu postupně $60°$, $90°$, $108°$ a $120°$, a má-li pravidelný mnohoúhelník více než šest vrcholů, je jeho vnitřní úhel větší než $120°$. Potřebujeme vyskládat vnitřní úhel zadaného n-úhelníku – buď menším n-úhelníkem, nebo dvěma mnohoúhelníky o pěti a méně vrcholech. Kdybychom použili menší n-úhelník, museli bychom následně vyskládat ostrý úhel, jehož velikost však není $60°$, a to není možné. Vnitřní úhel původního n-úhelníku se tak musí skládat z jednoho trojúhelníku a jednoho čtyřúhelníku nebo z jednoho trojúhelníku a jednoho pětiúhelníku, čili může být roven $180° - \frac{360°}{n} = 150°$ nebo $180° - \frac{360°}{n} = 168°$. Tomu odpovídá $n = 12$ nebo $n = 30$.

Skutečně je možné vyskládat dvanáctiúhelník – po obvodu umístíme čtverce a trojúhelníky a uprostřed zbyde pravidelný šestiúhelník.



Na druhou stranu třicetiúhelník vyskládat nelze. Takové vyskládání by totiž muselo mít nad každou druhou stranou pětiúhelník a dva sousední pětiúhelníky by se pak dotýkaly v jednom vrcholu pod úhlem $60°$. To znamená, že „na druhé straně“ by vznikl úhel $360° - 60° - 2 \cdot 108 = 84°$, který ale není možné vyskládat.



Úloha 41J / 31S. V levém dolním rohu šachovnice 5×5 se nachází šachová věž. V každém tahu se tato věž přesune o libovolný nenulový počet políček doprava, nebo nahoru. Kolika způsoby se může dostat do pravého horního políčka?

Poznámka: Dva způsoby projití považujeme za shodné, pouze pokud se přesně shodují všechny tahy v pořadí jejich provedení.

Výsledek. 838

Řešení. Pro každé políčko spočítáme, kolika způsoby se do něj může věž dostat. Levé dolní políčko má jednu možnost (prázdná posloupnost tahů). Nechť P je nějaké další políčko. Jestliže od libovolné posloupnosti tahů končící v P odebereme poslední tah, skončíme na políčku ve sloupečku pod P nebo v řádku vlevo od P. Naopak, kdykoli se věž dostane na takové políčko, může se pomocí jednoho tahu přesunout do P. Počet způsobů, jak se dostat do políčka P, je tedy roven součtu všech možností, jak se dostat do políček pod P a vlevo od P. S touto znalostí můžeme postupně určit počet možností, jak se dostat do všech políček tabulky. Pro pravé horní políčko pak dostaneme 838 možností.

8	28	94	289	838
4	12	37	106	289
2	5	14	37	94
1	2	5	12	28
1	1	2	4	8

Úloha 42J / 32S. Jaká číslice se nachází na pozici stovek čísla 11^{2014}?

Výsledek. 2

Řešení. Stačí určit zbytek čísla 11^{2014} po dělení tisícem a podívat se na jeho první cifru. Pomocí binomické věty rozepíšeme

$$\begin{aligned}11^{2014} &= (10+1)^{2014} = \\ &= \binom{2014}{0}\cdot 1 + \binom{2014}{1}\cdot 10 + \binom{2014}{2}\cdot 100 + 1000\cdot\left(\binom{2014}{3} + \cdots\right),\end{aligned}$$

odkud již vidíme, že platí

$$11^{2014} \equiv 1+2014\cdot 10+1007\cdot 2013\cdot 100 \equiv 1+140+7\cdot 3\cdot 100 \equiv 241. \pmod{1000}$$

Hledaná číslice je tedy 2.

Úloha 43J / 33S. Kobylka skáče po vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Vždy, když stojí v některém vrcholu, si jako cíl dalšího skoku náhodně vybere jeden ze dvou zbylých vrcholů. Jaká je pravděpodobnost, že po deseti skocích skončí v tom vrcholu, ve kterém začínala?

Výsledek. $\frac{171}{512}$

Řešení. Označme A počáteční vrchol a a_i pravděpodobnost, že se kobylka po i krocích ocitne ve vrcholu A. Speciálně $a_0 = 1$. Spočteme nyní a_{i+1} pomocí a_i. Jestliže má kobylka po $i + 1$ krocích skončit ve vrcholu A, musí po prvních i krocích skončit ve vrcholu různém od A a pak si musí vybrat tu „správnou“ ze dvou možností, tedy celkem

$$a_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot (1 - a_i),$$

což chytře upravíme do tvaru

$$a_{i+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \left(a_i - \frac{1}{3}\right).$$

Víme, že $a_0 = 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$, a tedy máme

$$a_i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i.$$

Spočteme hledané

$$a_{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 512} = \frac{513}{512 \cdot 3} = \frac{171}{512}.$$

Úloha 44J / 34S. Lukáš jde kácet stromy, na začátku má 100 jednotek síly. Každou minutu se může rozhodnout mezi dvěma možnostmi:

- Vykácí n stromů, kde n je jeho současná síla. To ho unaví, takže se jeho síla následně sníží o 1.
- Odpočine si a získá 1 jednotku síly.

Kolik nejvíce stromů může Lukáš vykácet během šedesáti minut?

Výsledek. 4293

Řešení. Jestliže Lukáš některou minutu kácí a další odpočívá, vyplatí se mu tyto dvě činnosti vyměnit – vykácí tak jeden strom navíc, aniž by se více unavil. K tomu, aby vykácel největší možný počet stromů, musí tedy nejprve b minut odpočívat a následně $(60 - b)$ minut kácet. Počet stromů, který takto vykácí, je roven

$$\begin{aligned}(b + 100) + (b + 99) + \cdots + (b + 100 - (60 - b - 1)) &= \\ = \frac{(b + 100 + 2b + 41)}{2} \cdot (60 - b) = -\frac{3}{2}(b^2 - 13b - 2820) &= \\ = -\frac{3}{2}((b - 6{,}5)^2 - 2862{,}25).&\end{aligned}$$

Největší hodnoty tento výraz nabývá, pokud je druhá mocnina v závorce nejmenší možná, tedy $b = 6$ nebo $b = 7$. Lukáš tedy vykácí nejvýše $\frac{3}{2} \cdot 2862 = 4293$ stromů.

Úloha 45J / 35S. Nechť $\sqrt{\mathbb{N}} = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\right\}$ je množina odmocnin přirozených čísel. Nechť S je množina čísel $a \in \sqrt{\mathbb{N}}$ takových, že současně $\frac{36}{a} \in \sqrt{\mathbb{N}}$. Jaký je součin prvků množiny S?

Výsledek. 6^{25}

Řešení. Platí $6 = \sqrt{36} \in S$. Všechny ostatní prvky S spárujeme tak, že prvek $\sqrt{n}$ dáme do páru s $36/\sqrt{n}$ (který rovněž leží v S). Součin prvků v každém páru je roven $36 = 6^2$, a zbývá tedy nalézt počet prvků množiny S. Výsledek pak bude $6^{|S|}$.

Uvažme $\sqrt{n} \in S$. To znamená, že $36/\sqrt{n} \in \sqrt{\mathbb{N}}$, neboli $36^2/n$ je celé číslo. Počet prvků množiny S je tak roven počtu dělitelů čísla $36^2 = 2^4 \cdot 3^4$. U dvojky i u trojky máme pět možných exponentů (0 až 4), a tedy má množina S celkem 25 prvků. Jejich součin je roven 6^{25}.

Úloha 46J / 36S. Šavlík vybral 2014 náhodných celých čísel od nuly do devíti a navzájem je vynásobil. S jakou pravděpodobností dostal číslo dělitelné deseti?

Výsledek. $1 - \left(\frac{5}{10}\right)^{2014} - \left(\frac{8}{10}\right)^{2014} + \left(\frac{4}{10}\right)^{2014}$

Řešení. Budeme zkoumat dělitelnost dvěma a pěti. Pravděpodobnost, že součin nebude dělitelný pěti, je rovna $a = (4/5)^{2014}$ (každé číslo může nabývat libovolných hodnot kromě 0 a 5). Dále pravděpodobnost, že součin nebude dělitelný dvěma, je rovna $b = (1/2)^{2014}$ (každé číslo musí být liché). Podobně zjistíme, že součin nebude dělitelný dvěma ani pěti s pravděpodobností $c = (4/10)^{2014}$. Nás zajímá pravděpodobnost, že součet bude dělitelný pěti a zároveň dvěma, kterou spočteme jako $1-a-b+c$ (pravděpodobnost, že součin nebude dělitelný ani 2 ani 5, jsme odečítali dvakrát, a tak ji musíme opět přičíst).

Úloha 47J / 37S. Určete hodnotu výrazu:

$$\left\lfloor 2014\sqrt[3]{-2014}\right\rfloor + \left\lfloor 2014\sqrt[3]{-2013}\right\rfloor + \left\lfloor 2014\sqrt[3]{-2012}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor 2014\sqrt[3]{2014}\right\rfloor.$$

Poznámka: Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část x, tedy největší celé číslo nepřevyšující x.

Výsledek. -2002

Řešení. Platí
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{je-li } x \text{ celé,} \\ -1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spárujeme-li nyní první člen s posledním, druhý s předposledním atd. (prostřední nulový člen zbyde), zjistíme, že hledaným součtem je minus počet čísel mezi 1 a 2014, jejichž třetí odmocnina není celé číslo. Z čísel 1 až 2014 mají celou třetí odmocninu jen $1^3, 2^3, \ldots, 12^3 = 1728$, neboť $13^3 = 2197 > 2014$. Tedy hledaný součet je $-(2014 - 12) = -2002$.

Úloha 48J / 38S. Martin počítal součet $1 + 2 + \cdots + 2012$. Zapomněl ale přičíst některá čísla, a tak dostal výsledek dělitelný 2011. Anička počítala součet $A = 1 + 2 + \cdots + 2013$, přičemž zapomněla přičíst ta samá čísla jako Martin, a tak dostala tak součet N dělitelný 2014. Určete poměr $\frac{N}{A}$.

Výsledek. $\frac{2}{3}$

Řešení. Martinovi vyšlo číslo $N-2013$. Máme tedy $N \equiv 2013 \equiv 2 \pmod{2011}$ a současně $N \equiv 0 \pmod{2014}$. Pro číslo $2A = 2013 \cdot 2014$ máme podobně $2A \equiv 0 \pmod{2014}$ a $2A \equiv 2 \cdot 3 = 6 \pmod{2011}$. Vzhledem k tomu, že $2A$ je dělitelné třemi, avšak 2011 ani 2014 třemi dělitelné nejsou, můžeme kongruence pro $2A$ vydělit třemi. Shledáváme, že čísla $\frac{2}{3}A$ a N dávají stejné zbytky po dělení čísly 2011 a 2014, přičemž jsou obě menší než $2011 \cdot 2014$. Dle Čínské zbytkové věty jsou si tedy rovna a hledaný poměr je $\frac{2}{3}$.

Úloha 49J / 39S. Vejtek má novou hru. Hraje se s šestnácti kartami, které jsou položené v řadě za sebou. Každá karta je z jedné strany červená a z druhé černá. V každém tahu najde Vejtek tu černou kartu, která je nejvíce vpravo. Tuto kartu otočí a společně s ní otočí i všechny karty, které jsou od ní napravo. Hra skončí, jakmile už není možné táhnout. Kolik nejvýše tahů může Vejtek provést?

Výsledek. $2^{16} - 1$

Řešení. Představíme-li si černé karty jako nuly a červené jako jedničky, odpovídá Vejtkův tah přičtení jedničky k číslu v binární soustavě. Číslo ze samých jedniček odpovídá číslu $2^{16}-1$. Začne-li tedy Vejtek se samými černými kartami, udělá $2^{16} - 1$ tahů. Je zřejmé, že více jich udělat nemůže.

Úloha 50J / 40S. Kolik existuje pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran takových, že alespoň jedna jejich odvěsna má délku 2014^{14}?

Výsledek. $\frac{1}{2}(27 \cdot 29^2 - 1) = 45\,412$

Řešení. Označme si délku druhé odvěsny jako b a délku přepony jako c. Z Pythagorovy věty je $(2014^{14})^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$. Hledáme počet možností, jak rozložit 2014^{14} na součin čísel $c-b$, $c+b$. Kdyby jedno z čísel $c-b$, $c+b$ bylo liché, už by nutně muselo být liché i to druhé. Pak by ovšem byl lichý i jejich součin, což není pravda. Obě tato čísla tedy musí být sudá.

Rozložme $(2014^{14})^2 = 2^{28} \cdot 19^{28} \cdot 53^{28}$ na součin prvočísel. Pro číslo $c-b$ máme 27 možností, jak zvolit exponent u dvojky (1 až 27), 29 možností, jak zvolit exponent u 19 (0 až 28), a 29 možností, jak zvolit exponent u 53 (0 až 28). Celkem je to $27 \cdot 29^2$ možností, avšak ještě je třeba odečíst možnost, pro niž by bylo $c-b = c+b$, a ze zbývajících ještě právě polovinu případů, pro které $c-b > c+b$. Zbývá $\frac{1}{2}(27 \cdot 29^2 - 1)$ rozkladů na součin sudých čísel $x = c-b$, $y = c+b$, kde $y > x$. Z jakékoli takové dvojice čísel x, y je naopak možné zpětně dopočítat délky stran vyhovujícího trojúhelníka jako $c = \frac{y+x}{2}$, $b = \frac{y-x}{2}$, takže odpověď je $\frac{1}{2}(27 \cdot 29^2 - 1)$.

Úloha 51J / 41S. Jaké je nejmenší přirozené číslo, které se nedá zapsat jako součet jedenácti nebo méně (ne nutně různých) faktoriálů? Například: $42 = 4! + 3! + 3! + 2! + 2! + 1! + 1!$.

Výsledek. 359

Řešení. Pokud se číslo n dá zapsat jako součet a_1 čísel 1!, a_2 čísel 2!, …, a_k čísel $k!$, budeme psát $n = [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1]$. Jelikož $i+1$ sčítanců tvaru $i!$ můžeme nahradit číslem $(i+1)!$, existuje pro libovolné číslo zápis, v němž je každé a_i rovno nejvýše i. Tomuto zápisu říkejme zápis čísla ve faktoriálové soustavě (například tedy $42 = [1, 3, 0, 0]$).

Můžeme si rozmyslet, že zápis čísla ve faktoriálové soustavě je jednoznačný (platí $[k, k-1, \ldots, 2, 1] + 1 = [1, 0, \ldots, 0]$) a využívá nejmenší možný počet faktoriálů. Hledáme tedy vlastně nejmenší číslo, které má při zápisu ve faktoriálové soustavě ciferný součet větší než 11. Tímto číslem je

$$[2, 4, 3, 2, 1] = 1! + 2! + 2! + 3! + 3! + 3! + 4! + 4! + 4! + 4! + 5! + 5! = \\ = (5! - 1) + 5! + 5! = 359.$$

Úloha 52J / 42S. Na šachovém turnaji hraje každý s každým. Navíc se hráči dohodli, že partie nemůže skončit remízou. Skupinu šachistů nazveme *jasnou*, pokud je v ní hráč, který porazil všechny ostatní členy skupiny, a hráč, který byl všemi ostatními členy skupiny poražen. Najděte nejmenší n takové, že v každém turnaji n šachistů už musí nutně existovat jasná skupina čtyř hráčů.

Výsledek. 8

Řešení. Je-li $n = 8$, pak každý hráč odehraje sedm partií, z nichž každou buď vyhraje, nebo prohraje. V průměru tak jeden hráč vyhraje 3,5 partie. To znamená, že v každém turnaji existuje šachista A, který porazil alespoň čtyři hráče. Mezi těmito poraženými šachisty najdeme stejnou úvahou hráče B, který prohrál alespoň se dvěma z nich. Tito pak spolu s A a B tvoří jasnou skupinu.

Nyní ukážeme, že pro $n \leq 7$ žádná jasná skupina čtyř hráčů existovat nemusí. Zřejmě to stačí ukázat pro $n = 7$. Seřaďme hráče do pravidelného sedmiúhelníku a uvažme turnaj, v němž každý porazil prvního, druhého a čtvrtého ze skupiny čtyř hráčů následujících po něm ve směru hodinových ručiček. Kdyby v tomto turnaji existovala jasná skupina čtyř šachistů, musel by v ní být hráč-vítěz a s ním všichni tři hráči, které porazil. Lehce však nahlédneme, že v takové čtveřici neexistuje hráč, který by se zbylými třemi prohrál.

Úloha 53J / 43S. Dáška si vymyslela dvě celá čísla od jedné do devíti. Davidovi prozradila jejich součin a Pepovi jejich součet. Následoval takovýto rozhovor:

- David: „Nevím, jaká jsou ta čísla.“
- Pepa: „Nevím, jaká jsou ta čísla.“
- David: „Nevím, jaká jsou ta čísla.“
- Pepa: „Nevím, jaká jsou ta čísla.“
- David: „Nevím, jaká jsou ta čísla.“
- Pepa: „Nevím, jaká jsou ta čísla.“
- David: „Nevím, jaká jsou ta čísla.“
- Pepa: „Nevím, jaká jsou ta čísla.“
- David: „Už vím, jaká jsou ta čísla!“

Jaká čísla si Dáška vymyslela?

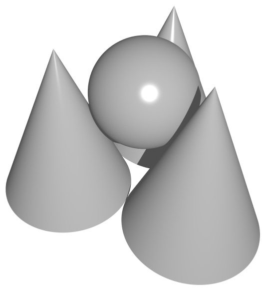
Výsledek. 2, 8

Řešení. Označme S_i množinu všech dvojic (x, y), kde $x \leq y$ a x, y mohla být Dáščina čísla za předpokladu, že se odehrál rozhovor o i výpovědích a jako poslední zazněla věta „Už vím, jaká jsou ta čísla!“. Potřebujeme najít S_9.

Množina S_1 je množinou všech dvojic, které se dají právě jedním způsobem rozložit na součin cifer, a David je tak schopen tyto cifry najít. To jsou všechny až na ty, jejichž součin je roven jednomu z čísel 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36. Nyní spočteme S_2. Pepa zná součet a ví, že Dáščino číslo neleží v množině S_1, tedy ví, že součin je jedním z výše vypsaných čísel. Jednoznačně může určit pouze součty 4, 12 a 13, a tedy $S_2 = \{(2,2), (4,9), (6,6)\}$. Množinu S_3 dále tvoří ty páry, které nejsou v S_1 ani S_2, ale všechny ostatní páry se stejným součinem již v S_1 nebo S_2 jsou (David tak na základě součinu pozná ten správný pár). Všechna taková čísla musí mít součin stejný jako některý pár z S_2, neboť jinak by byly již v S_1. Vyhovuje tedy pouze $S_3 = \{(1,4)\}$. Obdobně spočítáme S_4, přičemž namísto součinů uvažujeme součty. Dostaneme $S_4 = \{(2,3)\}$ a pokračujeme dále:

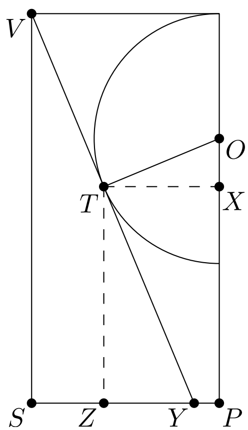
$$S_5 = \{(1,6)\},\ S_6 = \{(3,4)\},\ S_7 = \{(2,6)\},\ S_8 = \{(4,4)\},\ S_9 = \{(2,8)\}.$$

Úloha 54J / 44S. Mezi tři stejné kužely, které stojí na podložce tak, že se navzájem dotýkají podstavami, jsme vložili kouli. Koule je tak velká, že její nejvyšší bod leží ve stejné výšce jako vrcholy kuželů. Kužely mají podstavu o poloměru 50 cm a jejich výška je 120 cm. Zjistěte poloměr koule.



Výsledek. $\frac{200\sqrt{3}}{9}$

Řešení. Nechť r je poloměr koule, O její střed, T její bod dotyku s jedním kuželem, V vrchol tohoto kuželu a S střed jeho podstavy. Buď P kolmý průmět bodu O do roviny podstav kuželů a X bod na úsečce OP ve stejné výšce jako T. Dále buď Y bod podstavy, jímž prochází polopřímka VT (zřejmě Y leží i na SP), a nakonec buď Z bud kolmý průmět bodu T do roviny podstav.



Z Pythagorovy věty snadno spočítáme $|VY| = 130$. Jelikož se koule dotýká kužele, jsou na sebe VT a TO kolmé. Trojúhelníky TXO a VSY jsou tedy podobné (leží v jedné rovině a dvojice odpovídajících si stran jsou na sebe kolmé), odkud dostáváme $|TX| = \frac{12}{13}r$, $|OX| = \frac{5}{13}r$. Jelikož

$$|TZ| = |VS| - r - |OX| = 120 - \frac{18}{13}r,$$

můžeme z podobnosti trojúhelníků VSY a TZY dopočítat

$$|ZY| = \left(120 - \frac{18}{13}r\right) \cdot \frac{5}{12} = 50 - \frac{15}{26}r.$$

Tedy $|SZ| = |SY| - |ZY| = \frac{15}{26}r$. Protože $|ZP| = |TX|$, máme

$$|SP| = |SZ| + |ZP| = \frac{24}{26}r + \frac{15}{26}r = \frac{39}{26}r = \frac{3}{2}r.$$

V rovnostranném trojúhelníku tvořeném středy podstav kuželů je P těžištěm a S jedním z vrcholů. Protože délka strany tohoto trojúhelníka je 100, je $|SP| = \frac{100\sqrt{3}}{3}$. Tedy $\frac{3}{2}r = \frac{100\sqrt{3}}{3}$ a $r = \frac{200\sqrt{3}}{9}$.

Úloha 55J / 45S. Řádky a sloupce tabulky 7×7 jsou standardně očíslovány čísly $1, 2, \ldots, 7$. Kolika způsoby můžeme do políček tabulky rozmístit osm nábojnic tak, že pro každé dvě nábojnice bude rozdíl čísel jejich řádků nebo rozdíl čísel jejich sloupců alespoň tři?

Výsledek. 51

Řešení. Pro účely řešení budeme písmeny A–G značit sloupce a čísly 1–7 řádky tabulky. Rozebereme všechny možnosti v závislosti na poloze nábojnice, která je nejblíže ke středu. Je-li jedna nábojnice přímo ve středu, tedy na D4, musí být ostatní po obvodu. Vzhledem k podmínce ze zadání bude vždy šest nábojnic pravidelně rozestavených a zbylé dvě budou mít volnost na hraně. Pro jednu vybranou hranu dostáváme zřejmě deset možností. Při otočení o 90^circ se vždy jedna možnost opakuje, a tedy s nábojnicí ve středu máme dohromady 36 možností.

Nechť je nyní jedna z nábojnic od středu vzdálená o 1 (BÚNO leží na D3). Protože mezi B1 a F1 nemohou být nábojnice, musí šest z nich ležet na polích A1, A4, A7, G1, G4, G7 a poslední na D6 nebo D7. To nám dává dvě možnosti. Uvážíme-li všechny čtyři polohy středové nábojnice, získáváme dohromady 8 možností. Pokud je středová nábojnice na D2, dostáváme obdobně, že poslední nábojnice může ležet na D5, D6 nebo D7. Případ D5 je již započten a případ D6 dává po otočení pouze dvě nové možnosti. Celkem tedy máme 6 možností.

Konečně poslední případ odpovídá vzdálenosti středové nábojnice od středu o 3 a zahrnuje jedinou možnost – všechny nábojnice jsou po obvodu. Dohromady máme $36 + 8 + 6 + 1 = 51$ možností.

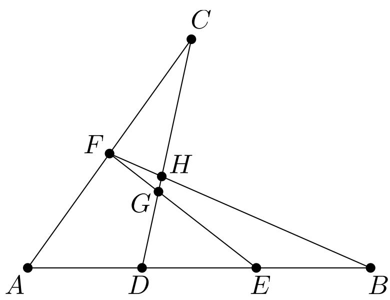
	A	B	C	D	E	F	G
1	●			●			●
2							
3							
4	●			○			●
5							
6							
7	×	×	×	×	×	×	×

	A	B	C	D	E	F	G
1	●						●
2							
3				○			
4	●						●
5							
6				×			
7	●			×			●

	A	B	C	D	E	F	G
1	●						●
2				○			
3							
4	●						●
5				×			
6				×			
7	●			×			●

	A	B	C	D	E	F	G
1	●			○			●
2							
3							
4	●						●
5							
6							
7	●			●			●

Úloha 56J / 46S. Jsou dány tři body A, B a C, které neleží v přímce. Úsečka AB je dělícími body D a E rozdělena na tři stejně dlouhé části. Bod F je středem úsečky AC. Přímky EF a BF protínají přímku CD v bodech G a H (v tomto pořadí). Je-li obsah trojúhelníka DEG roven 18, jaký je obsah trojúhelníka FGH?



Výsledek. 1,8

Řešení. Výrazem $[XYZ]$ budeme označovat obsah trojúhelníka XYZ. V trojúhelníku AEC je G těžištěm, a proto $\frac{|EG|}{|GF|} = 2$, $|DG| = \frac{1}{3}|DC|$. Použijeme metodu hmotných bodů. Bodům A, B, C přiřadíme hmotnosti postupně 2, 1, 2 a zjistíme, kde bude ležet těžiště vzniklé soustavy $2A + 1B + 2C$.

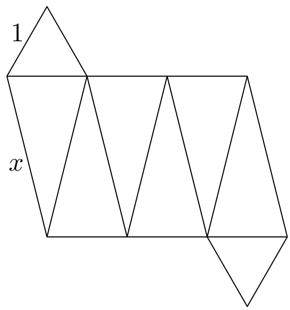
Jelikož $2A+2C = 4F$, leží těžiště soustavy na úsečce BF a dělí ji v poměru $\frac{2+2}{1} = \frac{4}{1}$. Z rovnosti $2A+B = 3D$ současně plyne, že těžiště leží na úsečce CD a dělí ji v poměru $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$. Speciálně tedy dostáváme, že těžištěm soustavy je bod H.

Tedy $|DH| = \frac{2}{5}|DC|$, což spolu s $|GH| = \frac{1}{15}|DC|$ dává $\frac{|DG|}{|GH|} = 5$. Potom platí

$$\frac{[DEG]}{[FGH]} = \frac{|DG| \cdot |EG|}{|FG| \cdot |HG|} = 2 \cdot 5 = 10,$$

a tudíž $[FGH] = 1{,}8$.

Úloha 57J / 47S. Plášť tělesa je tvořen dvěma rovnostrannými trojúhelníky s délkou strany 1 a šesti rovnoramennými trojúhelníky s rameny délky x a podstavou délky 1, viz obrázek. Je-li objem tělesa 6, čemu je rovno x?



Výsledek. $\frac{5\sqrt{39}}{3}$

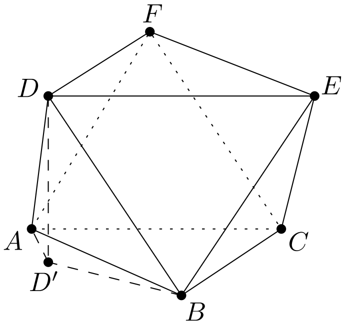
Řešení. Pro $x = 1$ by se jednalo o pravidelný osmistěn. Jeho objem spočítáme jako součet objemů dvou čtyřbokých jehlanů se čtvercovou podstavou o straně délky 1 a výšce (snadno z Pythagorovy věty) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Objem osmistěnu je tedy $2\frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Postavme nyní náš osmistěn na jednu stěnu a k-krát ho „natáhněme“ ve směru kolmém na tuto stěnu – každý bod tedy vzdálíme od této stěny k-krát. Stěnami tělesa, které takto dostaneme, budou dva rovnostranné trojúhelníky (protilehlá stěna je rovnoběžná s podstavou, a proto zůstane beze změny) a šest rovnoramenných trojúhelníků. Objem výsledného tělesa bude přitom k-krát větší než objem původního. Pro těleso o objemu 6 je tedy $k = 9\sqrt{2}$.

Nyní stačí vyjádřit délku boční hrany. Označme spodní podstavu jako ABC a horní podstavu jako DEF tak, aby při označení projekcí bodů D, E, F do spodní roviny jako D', E', F' byl $AD'BE'CF'$ pravidelný šestiúhelník. Jelikož $|AB| = 1$, spočítáme $|AD'| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a z Pythagorovy věty následně

$$|AD| = \sqrt{h^2 + |AD'|^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{3}},$$

kde h je výška příslušného tělesa.



Pro pravidelný osmistěn máme $h_{\text{osmistěn}} = \sqrt{2/3}$ (neboť $|AD| = 1$), pro těleso o objemu 6 pak $h_{\text{těleso}} = 9\sqrt{2} \cdot \sqrt{2/3} = \frac{18}{\sqrt{3}}$. Po dosazení je

$$|AD| = \sqrt{h_{\text{těleso}}^2 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{325}{3}} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{39}}{3}.$$