Úloha 1. Petržlen má zlatú tehličku v tvare kvádra rozmeru $2 \times 3 \times 4$. Keďže považuje sám seba za kockáča, tak tehličku roztavil a odlial z nej tri rovnako veľké kocky. Aká dlhá bola strana Petržlenovej kocky?

Riešenie. 2

Vzorové riešenie. Platí zákon zachovania hmoty a teda sa zachováva aj objem. Objem pôvodného kvádra bol $2 \times 3 \times 4 = 24$. Keďže všetky tri kocky majú rovnaký objem, tak jedna kocka mala objem $\frac{24}{3} = 8$. Ako z toho získame dĺžku strany? Vieme, že objem kocky je a^3, kde a je dĺžka hrany. Takže platí $a = \sqrt[3]{8} = 2$.

Úloha 2. Na novoročných oslavách bolo 43 ľudí. Pri bare sa podával džús, pivo a šampanské. Pivo pilo 25 ľudí, šampanské pilo 19 ľudí a aj pivo aj šampanské pilo 12 ľudí. Všetci ostatní šoférovali, takže pili len džús. Nikto nemiešal džús s pivom alebo šampanským. Koľko bolo ľudí, ktorí pili len džús?

Riešenie. 11

Vzorové riešenie. Označme si tri neznáme d, p a s ako počty ľudí, ktorí pili len džús, len pivo a len šampanské. Koľko ľudí pilo len pivo? Vieme, že neexistoval človek čo pil pivo aj džús. Takže len pivo pili len tí ľudia, ktorí pili pivo a nepili šampanské. Takže $p = 25 - 12 = 13$ a podobne $s = 19 - 12 = 7$. Koľko ľudí pilo len jeden nápoj? Všetci, čo nepili pivo aj šampanské. Takže $d + p + s = 43 - 12 = 31$. Z toho dostávame $d = 31 - p - s = 31 - 13 - 7 = 11$.

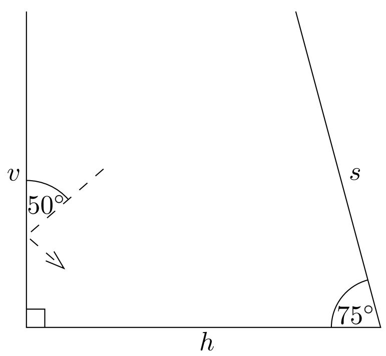
Úloha 3. Vypitím jednej šálky čierneho čaju získate kofeín na jednu hodinu. Vypitím jednej šálky kávy získate kofeín na štyri hodiny. V akom pomere treba zmiešať čierny čaj a kávu, aby sme v jednej šálke dostali kofeín na dve hodiny?

Riešenie. 2:1

Vzorové riešenie. Označme jednotku kofeínu ako k. Potom zo zadania má čierny čaj $1k$ a káva $4k$. Chceme do šálky namiešať $2k$. Môžeme si to predstaviť aj tak, že do výslednej šálky nalejeme x čaju a zvyšok, $1 - x$ dolejeme kávou. Takže platí $x \cdot 1k + (1 - x) \cdot 4k = 2k$ a z toho $x + 4 - 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Výsledný pomer je preto

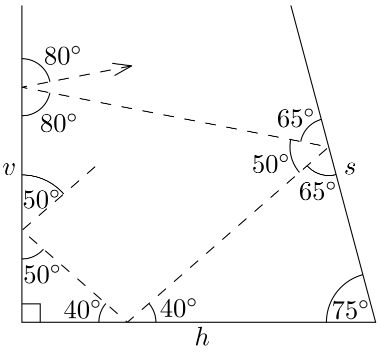
$$\frac{x}{1-x} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2 : 1.$$

Úloha 4. Zrkadlá v a h na obrázku sú navzájom kolmé. Uhol medzi zrkadlami h a s má veľkosť 75 stupňov. Svetelný lúč dopadol na v pod uhlom 50 stupňov. Pokračoval odrazom od h a s v tomto poradí. Pod akým uhlom potom dopadne znovu na v ak platí, že uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu?



Riešenie. 80

Vzorové riešenie. Dokreslime si trajektóriu lúču a budeme rátať uhly. Prvý odraz je $50°$, lebo uhol dopadu sa rovná uhlu odrazu. Pod akým uhlom dopadne na zrkadlo h? V trojuholníku musí platiť $x + 50° + 90° = 180°$, takže $40°$. Odrazí sa pod rovnakým uhlom $40°$. Pod akým uhlom dopadne na zrkadlo s? V trojuholníku musí platiť $y + 40° + 75° = 180°$, takže $65°$ a odrazí sa rovnakým uhlom. Pod akým uhlom dopadne znovu na zrkadlo v? Použime štvoruholník zo všetkých zrkadiel a časti lúča medzi s a v. Platí v ňom $z + 90° + 75° + (180° - 65°) = 360°$, takže výsledkom je $80°$.



Úloha 5. Počas roka 2013 predal obchod 235 kusov nábytku. V každom mesiaci predal obchod buď 20, 16 alebo 25 kusov nábytku. Koľko bolo mesiacov, keď obchod predal 20, v koľkých 16 a v koľkých 25 kusov nábytku?

Riešenie. 4, 5, 3

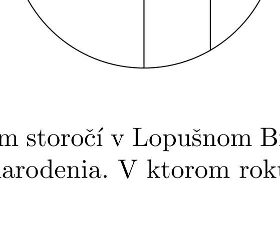
Vzorové riešenie. Označme a, b, c počty mesiacov, keď sa predalo 20, 16 a 25 kusov nábytku. Platí $20a+16b+25c = 235$. Pravá strana je deliteľná piatimi a teda aj ľavá musí byť. Triviálne je výraz $20a+25c$ deliteľný piatimi a teda aj výraz $16b$ musí byť deliteľný piatimi. Keďže $5 \nmid 16$, tak musí platiť, že $5 \mid b$. Mesiacov máme len dvanásť a dostávame teda tri možnosti:

- Ak $b = 0$, potom $c = 12 - a$ a po dosadení $5c = -5$, čo nie je možné.
- Ak $b = 5$, potom $20a + 25c = 155 \Leftrightarrow 4a + 5(7 - a) = 31 \Leftrightarrow a = 4$ a teda $a = 4$ a $c = 3$.
- Ak $b = 10$, potom $20a + 25(2 - a) = 75$, čo nie je možné pre $0 \leq a \leq 2$.

Úloha 6. Dve kružnice majú polomery 5 a 26. Menšia z nich prechádza stredom väčšej. Zoberieme najkratšiu a najdlhšiu tetivu väčšej kružnice z tých, ktoré sa dotýkajú menšej kružnice. Aký je rozdiel ich dĺžok?

Riešenie. 4

Vzorové riešenie. Najdlhšia tetiva je zjavne priemer väčšej kružnice dĺžkou 52. Ale ktorá je tá najkratšia? Tá, ktorej vzdialenosť od stredu väčšej kružnice je najväčšia. Táto vzdialenosť môže byť najviac 10, keďže tetiva sa musí dotýkať menšej kružnice. Najkratšia spojnica bodu a priamky je vždy na túto priamku kolmá. Teraz nám stačí použiť Pytagorovu vetu: dĺžka tejto tetivy je $2 \cdot \sqrt{r^2 - v^2} = 48$, kde r je polomer väčšej kružnice a v je vzdialenosť od stredu. Rozdiel dĺžok je potom $52 - 48 = 4$. Najdlhšia tetiva je zjavne priemer väčšieho kruhu s dĺžkou 52. Ale ktorá je tá najkratšia? Tá, ktorej vzdialenosť od stredu väčšieho kruhu je najväčšia. Táto vzdialenosť môže byť najviac 10, keďže tetiva sa musí dotýkať menšieho kruhu. Najkratšia spojnica bodu a priamky je vždy na túto priamku kolmá. Teraz nám stačí použiť Pytagorovu vetu: dĺžka tejto tetivy je $2 \cdot \sqrt{r^2 - v^2} = 48$, kde v je polomer väčšieho kruhu a v je vzdialenosť od stredu. Rozdiel dĺžok je potom $52 - 48 = 4$.

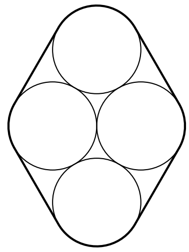


Úloha 7. Martin N. sa narodil v minulom storočí v Lopušnom Brieždení. Vieme, že v roku 1999 mal toľko rokov, koľko je súčet cifier v roku jeho narodenia. V ktorom roku sa narodil?

Riešenie. 1976

Vzorové riešenie. Nech $10X+Y$ bol jeho vek v roku 1999. Keďže sa narodil v 20. storočí, tak z vyjadrenia ciferného súčtu máme $1 + 9 + (9 - X) + (9 - Y) = 10X + Y$. Z toho dostávame $28 = 11X + 2Y$. Keďže $0 \leq X, Y \leq 9$ tak jediné riešenie je $X = 2$, $Y = 3$ a teda sa narodil v roku $1999 - 23 = 1976$.

Úloha 8. Hago si skonštruoval špeciálny tankový pás ako na obrázku. Okrem vrchného a spodného kolesa sa všetky navzájom dotýkajú. Navyše, pás je pevne natiahnutý na kolesá. Ak má koleso polomer 1, aká je dĺžka pásu?



Riešenie. $8 + 2\pi$

Vzorové riešenie. Tankový pás sa delí na dve časti: *rovné* a *zaoblené*. Akú dĺžku má zaoblená časť? Tankový pás je obopnutý okolo kolies a je zaoblený práve tam, kde sa dotýka kolies a preto urobí práve jedno kolečko. Takže urobí dokopy $360°$ a teda dĺžka zaoblenej časti je rovnaká ako obvod kolesa, čo je 2π.
Aká je dĺžka rovnej časti? Pozrime sa na dve susedné kolesá. Dĺžka tankového pásu je presne dĺžkou medzi dotykovými bodmi na spoločnej dotyčnici. Keďže sú kolesá rovnako veľké, tak sa táto dĺžka rovná vzdialenosti stredov kolies. Keďže je polomer 1, tak vzdialenosť stredov je 2. Všetky rovné časti sú symetrické, takže výsledkom je $4 \cdot 2 + 2\pi$.

Úloha 9. Chrobáky sa na telesnej zoraďujú podľa počtu nôh od najmenšieho počtu nôh po najväčší počet nôh. Na minulej telesnej boli okrem Buggyho ešte štyri ďalšie chrobáky s počtom nôh 6, 3, 10 a 9. Vieme, že po zoradení mal chrobák v strede radu priemerný počet nôh zo všetkých chrobákov (vrátane seba). Vypíšte všetky možné počty Buggyho nôh.

Riešenie. 2, 7, 17

Vzorové riešenie. Počet nôh chrobáka v strede radu označme m ako *medián*. Potom platí, že $m = \frac{1}{5}(6+3+10+9+x) = 5+\frac{3+x}{5}$. Medián musí byť buď 6, 3, 10, 9 alebo x. Všimnime si, že nemôže byť 3 ani 9, lebo ide druhú najmenšiu resp. druhú najväčšiu hodnotu. Zostali nám teda tri možnosti. Ukážme si to napríklad pre $x = m = 5 + \frac{3+x}{5} \Leftrightarrow 5x = 25 + 3 + x \Leftrightarrow x = 7$. Podobne dostaneme $x = 2$ pre $(2, 3, 6, 9, 10)$ a $x = 17$ pre $(3, 6, 9, 10, 17)$.

Úloha 10. Nájdite také cifry A, B a C, že $AA + BB + CC = ABC$. Zápisom AA, BB a CC myslíme dvojciferné číslo s dvoma rovnakými ciframi a zápisom ABC ľubovoľné trojciferné číslo. Pričom za rovnaké písmeno dosadíme rovnakú cifru. Napríklad, možným riešením $AB + CC = BAD$ je $11 + 99 = 110$.

Riešenie. 1, 9, 8

Vzorové riešenie. V tejto úlohe treba múdro rozobrať možnosti. Na poslednej cifre platí $A+B+C = C$. Takže buď $A + B = 0$ alebo $A + B = 10$. Keby $A + B = 0$ tak nutne $A = B = 0$ a potom AA nie je dvojciferné číslo. Takže $A + B = 10$. Na mieste desiatok platí $1 + A + B + C = B$. Jednotka sa preniesla z pozície jednotiek. Podobnou úvahou $A + C = 9$. A na mieste stoviek máme $1 = A$. Jednotka sa tentoraz preniesla z miesta desiatok. Z toho už ľahko $A = 1, B = 9$ a $C = 8$.

Úloha 11. Slávny zberateľ umeleckých diel Buggo bol v dôsledku ekonomickej krízy nútený predať tretinu svojich obrazov. Hneď potom svojej dcére venoval 3 Picassov. O niečo neskôr znovu predal tretinu z toho, čo mu zostalo, a venoval dvoch Monnetov a dvoch Manetov svojej manželke. Keď posledný-krát predal tretinu zostávajúcich obrazov a tri venoval múzeu, zostalo mu v domácej galérii už len 9 kópií Mony Lízy. Koľko mal obrazov na začiatku?

Riešenie. 54

Vzorové riešenie. Na konci mal Buggo deväť obrazov, predtým $\frac{3}{2}(9 + 3) = 18$, predtým $\frac{3}{2}(18 + 4) = 33$ a na začiatku $\frac{3}{2}(33 + 3) = 54$.

Úloha 12. Nájdite najmenšie kladné celé číslo väčšie ako 2014 ktoré nemôže byť zapísané ako súčet dvoch palindrómov. Poznámka: Palindróm je číslo, ktorého desiatkový zápis sa píše rovnako spredu ako od zadu.

Riešenie. 2019

Vzorové riešenie. Ak sa nejaké číslo väčšie ako 2014 dá zapísať ako súčet palindrómov, tak jeden z palindrómov bude 4-ciferný. Tých je ale málo, môžu to byť len 1001, 1111, …, 1991, 2002 (ostatné sú veľké). Čísla po 2018 sa dajú zapísať ako $2015 = 1551 + 464$; $2016 = 1441 + 575$; $2017 = 1331 + 686$; $2018 = 1221 + 797$). Prečo sa 2019 nedá? Musíme od neho odčítať palindróm tvaru $1AA1$ alebo palindróm tvaru $2BB2$. V prvom prípade dostaneme číslo tvaru $BC8$, kde A, B, C sú cifry. Ale $BC8$ musí byť tiež palindróm, takže $B = 8$. Na mieste desiatok musí byť vo výslednom čísle jednotka. Keby $A + C = 1$, tak $1AA1 + 8C8 < 2000$. Keby $A + C = 11$ tak musí aj $A + 8 + 1 = 10$, za čoho $A = 1$ a $C = 10$, čo spor s našim predpokladom, že C je cifra. V druhom prípade nám zostane $01D$, čo nevieme zapísať ako palindróm. Výsledkom je preto číslo 2019.

Úloha 13. Vodka dal Ondrovi číselnú hádanku. Vybral si cifru X a povedal: „Myslím si trojciferné číslo deliteľné jedenástimi, cifra na mieste stoviek je X a na mieste desiatok 3. Aká je cifra na mieste jednotiek?“ Ondro sa potešil, vediac ako riešiť tento problém. Po chvíle ale zistil, že žiadna číslica na pozícií jednotiek nevyhovuje vlastnostiam zadaných Vodkom. Akú cifru X si Vodka vybral?

Riešenie. 4

Vzorové riešenie. Označme Y cifru na mieste jednotiek. Kedy je číslo deliteľné 11? Vtedy keď (súčet cifier na párnych miestach) - (súčet cifier na nepárnych miestach) je deliteľný 11. Úloha sa teda zjednodušuje na: Pre aké X **ne**existuje Y také, že $(X + Y) - 3$ je deliteľné 11? Hľadáme teda také X, pre ktoré $1 \leq (X + Y) - 3 \leq 10$. Keďže $0 \leq Y \leq 9$ tak výraz $(X + Y) - 3$ bude mať najmenšiu hodnotu keď $Y = 0$. Vtedy musí platiť $(X + Y) - 3 = 1$ a z toho dostávame $X = 4$. Keby $(X + 0) - 3 \neq 1$, tak existuje také Y, pre ktoré $11 \mid (X + Y) - 3$.

Úloha 14. Robko si vymyslel štyri čísla $a < b < c < d$ a spočítal súčty každej dvojice z nich (celkom šesť súčtov). Zistil, že každý súčet je iný a navyše štyri najmenšie súčty sú 1, 2, 3 a 4. Aké hodnoty môže mať d? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. $\{3, 5; 4\}$

Vzorové riešenie. Aké je poradie súčtov párov? Dva najmenšie súčty sú $a+b$ a $a+c$. Prečo? Premyslite si. Z toho dostávame $a + b = 1$ a $a + c = 2$. Symetricky dva najväčšie súčty sú $c + d$ a $b + d$. Takže nám zostávajú dve možnosti:

- $a + d = 3$, $b + c = 4$. Z $2b = (a + b) - (a + c) + (b + c) = 1 - 2 + 4 \Leftrightarrow b = 1, 5$. Potom $a = -0, 5$ a $d = 3, 5$.
- $b + c = 3$, $a + d = 4$. Podobne z $2b = (a + b) - (a + c) + (b + c) = 1 - 2 + 3 \Leftrightarrow b = 1$. Potom $a = 0$ a $d = 4$.

Úloha 15. Hanka hovorí Kubovi: „Mám dvakrát toľko rokov, koľko si mal ty, keď ja som mala toľko rokov, čo ty dnes. Keď budeš mať môj vek, budeme mať spolu 90 rokov.“ Koľko rokov má Hanka?

Riešenie. 40

Vzorové riešenie. Označenia nám prídu vhod. Nech x je Hankin vek a y Kubov vek. Z času slovesa vety vieme, že $y \leq x$. Druhá veta sa preloží do

$$((x - y) + y) + ((x - y) + x) = 90 \Leftrightarrow 3x - y = 90.$$

Podobne sa preloží prvá veta $x = 2(y - (x - y)) \Leftrightarrow 3x = 4y$. Z toho $y = 30$ a $x = 40$.

Úloha 16. Kladné celé čísla $a_1, a_2, a_3, \dots$ tvoria aritmetickú postupnosť. Ak $a_1 = 10$ a $a_{a_2} = 100$, tak koľko je $a_{a_{a_3}}$?

Riešenie. 820

Vzorové riešenie. Keďže ide o aritmetickú postupnosť, môžme si k-ty člen zapísať ako $a_k = a_1 + (k - 1)d = 10 + (k - 1)d$. Z tohoto zápisu máme $a_2 = 10 + d$ a teda $a_{a_2} = a_{10+d} = 10 + (9 + d)d = 10 + 9d + d^2$. Zo zadania vieme, že $a_{a_2} = 100$ a teda $100 = 10 + 9d + d^2$. Jediné kladné riešenie kvadratickej rovnice je $d = 6$. Z toho vieme, že $a_k = 4 + 6k$. Zvyšok už jednoducho dorátame: $a_3 = 4 + 18 = 22$, $a_{a_3} = a_{22} = 4 + 132 = 136$ a na záver $a_{a_{a_3}} = a_{136} = 4 + 816 = 820$.

Úloha 17. Alicino obľúbené osemciferné číslo ma nasledovné vlastnosti:

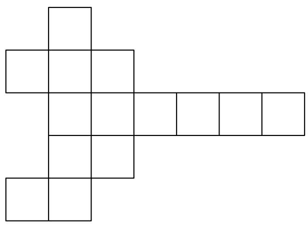
- Má 8 rozdielnych cifier.
- Cifry sa zľava doprava zmenšujú.
- Je deliteľné 180.

Aké je to číslo?

Riešenie. 97654320

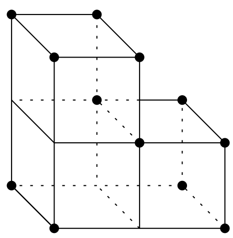
Vzorové riešenie. Ako bude vyzerať koniec hľadaného čísla? Má byť deliteľný 10, takže nutne bude končiť nulou. Cifra na mieste desiatok musí byť párna, lebo číslo má byť deliteľné 20. Ale 40, 60 ani 80 to nemôže byť, lebo by sme museli vynechať 1, 2 a 3 a nemali by sme dosť cifier na osemciferné číslo. Takže musí končiť na 20. Už nám zostáva len vyškrtnúť jednu cifru z $3, 4, \ldots, 9$ tak, aby bolo číslo deliteľné 9. Keďže $0 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 9 = 44$, tak to musí byť 8. Druhá podmienka nám cifry zoradí a dostávame výsledok 97654320.

Úloha 18. Kika si rada skladá trojrozmerné telesá zo štvorčekového papiera. Naposledy si vystrihla z papieru útvar, ako na obrázku. Potom ho zlepila dokopy tak, že žiadne dva štvorčeky sa neprekrývali a výsledné teleso nemalo diery, t.j. malo objem. Koľko vrcholov malo teleso, ktoré Kika takto poskladala? Poznámka: Za vrchol považujeme vrcholy poskladaného telesa a nie mrežové body papiera.



Riešenie. 12

Vzorové riešenie. Prvá možnosť je vystrihnúť si to a poskladať. Druhá možnosť je spočítať počet štvorčekov, tých je 14. Vieme, že ak sa pozrieme na výsledné teleso spredu, tak budeme vidieť rovnako veľa štvorčekov ako zo zadu (predpokladáme, že žiadne štvorčeky sa neskrývajú). Podobne sprava a zľava a zhora a zdola. Nech a, b, c sú počty viditeľných políčok zhora, sprava a spredu. Potom musí platiť $2(a + b + c) = 14$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a \leq b \leq c$. Potom nám zostanú štyri možnosti: $(1, 1, 5)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$ a $(2, 2, 3)$. Po chvíľke zamyslenia si uvedomíme "trojuholníkovú nerovnosť" vo forme $c \leq ab$ a zostanú nám dve možnosti: kváder $1 \times 3 \times 3$ a "L"-ko. Po chvíľke skúšania zistíme, že kváder to nebude a teda nám zostáva "L"-ko ako na obrázku.

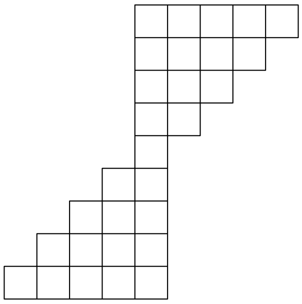


Úloha 19. Nájdite všetky dvojice x, y kladných celých čísel pre ktoré platí: $xy = nsn(x, y) + nsd(x, y)$. Poznámka: $nsd(x, y)$ označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel x a y a nsn označuje ich najväčší spoločný násobok.

Riešenie. $(2, 2)$

Vzorové riešenie. Označme $d = nsd(a, b)$. Ako vyjadríme $nsn(a, b)$ pomocou a, b, d? Uvedomíme si, že $nsd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. Preto $nsn(a, b) = \frac{ab}{d}$. Po dosadení $ab = d + \frac{ab}{d} \Leftrightarrow (d-1)ab = d^2$. Musí teda $(d - 1) \mid d$. Vieme, že vo všeobecnosti $nsd(n - 1, n) = 1$. Z toho dostávame $d = 2$ a $ab = 4$. Jediná dvojica, čo to spĺňa je $(2, 2)$.

Úloha 20. Žaba skáče na plániku zloženom z 29 štvorčekov ako na obrázku. V každom kroku môže skočiť na štvorček priamo hore alebo šikmo vpravo-hore, ak tam taký je. Žaba si na začiatku svojej skákavej cesty vyberie ľubovoľné políčko v spodnom rade a skáče až kým sa neocitne vo vrchnom rade. Koľkými rôznymi cestami sa vie preskákať zo spodku na vrch?



Riešenie. 256

Vzorové riešenie. Do každého políčka napíšeme koľkými spôsobmi sa doň vie žaba dostať. V spodnom rade teda napíšeme všade 1. V druhom rade všade 2, lebo buď prišla žaba zdola, alebo šikmo zdola-vľavo. Podobným princípom v treťom rade 8 a v strede 16. Tu si môžeme pomôcť symetriou príkladu, keďže zhora do stredu je rovnako veľa možností ako zdola do stredu. Výsledok je preto $16 \cdot 16 = 256$.

Úloha 21. Miťo skryl Ondrovi jeho vytúženú domácu slaninku do bludiska. Bludisko má tvar pravidelného osemuholníka a cesty vedú po jeho uhlopriečkach. Ondro začal v jednom z vrcholov a jeho úlohou bolo prejsť po každej uhlopriečke práve raz. Koľko rôznych spôsobov existuje?

Riešenie. 0

Vzorové riešenie. Ako vyzerá schéma všetkých Ondrových možností? Z každého vrchola ide práve päť hrán. Ako vyzerá možná Ondrova cesta? Začne v nejakom vrchole, prejde po nenavštívenej uhlopriečke do vrcholu a odíde po nenavštívenej uhlopriečke a tak ďalej. Okrem prvého a posledného vrcholu Ondro vždy navštívi práve dve uhlopriečky keď navštívi jeden vrchol. Takže okrem prvého a posledného vrcholu platí, že po skončení cesty je počet navštívených uhlopriečok z daného vrcholu párny. To ale nemôže byť pravda, lebo máme 8 vrcholov s nepárnym počtom uhlopriečok. Takže výsledný počet ciest je 0.

Úloha 22. Majme mriežku M veľkosti 2014×2014 s ľavým dolným rohom v bode $(0,0)$ a pravým horným rohom v bode $(2014, 2014)$. Priamka p prechádza súradnicami (0, 0) a (2014, 2019). Koľko políčok M pretína p? Poznámka: Priamka p *pretína* políčko M znamená, že má p aspoň dva spoločné body s políčkom. Napríklad diagonála mriežky M pretína 2014 políčok M.

Riešenie. 4023

Vzorové riešenie. Keď p prechádza cez bod (a, b), tak prechádza aj cez bod (ka, kb). A keďže 2014 a 2019 sú nesúdeliteľné, tak p neprechádza medzi (0, 0) a (2014, 2019) cez žiaden mrežový bod. Inými slovami vždy keď p pretne nejakú "mrežovú priamku", prejde do nového políčka. Priamka p vyjde z M v bode $(\frac{2014^2}{2019}, 2014)$. Dovtedy pretne 2013 vodorovných mrežových priamok a $\lfloor \frac{2014^2}{2019} \rfloor = 2009$ zvislých mrežových priamok. Začne teda v ľavom dolnom rohovom políčku a prejde ešte 2013+2009 nových. To je dokopy $1 + 2009 + 2013 = 4023$ políčok.

Úloha 23. Konvexný n-uholník má jeden uhol s ľubovoľnou veľkosťou a $n-1$ uhlov s veľkosťou $150°$. Aké môže byť n? Nájdite všetky možnosti.

Riešenie. 8 až 12

Vzorové riešenie. Koľko je súčet uhlov v n-uholníku? V trojuholníku je 180 a v štvoruholníku je $360°$. Keď sa zamyslíme, tak každý n-uholník vieme rozsekať na $n-2$ trojuholníkov. Takže súčet uhlov bude $(n-2)180°$ a to sa má rovnať $150°(n-1) + x$, kde x je ľubovoľný uhol. Po úpravách $n = \frac{x}{30} + 7$. Keďže je štvoruholník konvexný, tak $0° < x < 180°$ a preto $8 \leq n \leq 12$.

Úloha 24. Ak strany trojuholníka spĺňajú

$$\frac{3}{a+b+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c},$$

aký je uhol medzi stranami b a c?

Riešenie. $60°$

Vzorové riešenie. Po zbavení sa zlomkov upravíme rovnosť na

$$3(a^2 + ab + ac + bc) = 2a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + ac) + 2bc$$

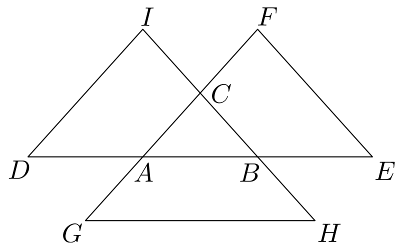
a teda $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Toto sa podobá na kosínusovú vetu, lebo $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$. Z čoho vidno $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, a $\alpha = 60°$.

Úloha 25. Nájdite všetky celé čísla od 1 po 200 vrátane, ktoré majú súčet rôznych prvočíselných delitelov rovný 16. Napríklad, súčet rôznych prvočíselných delitelov 12 je 2+3=5.

Riešenie. 66, 132, 198, 55, 39, 117

Vzorové riešenie. Ako rozoberieme všetky možné prípady? Prvočísla menšie ako 16 sú: 2, 3, 5, 7, 11 a 13. Ako sa dajú vyskladať? Postupne od najmenších prvočísel: $2 + 3 + 11 = 3 + 13 = 5 + 11$. Už nám len stačí zistiť v akých mocninách sa majú tieto prvočísla vyskytovať. Postupne $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66, 2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132, 2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 198, 3 \cdot 13 = 39, 3^2 \cdot 13 = 117$ a $5 \cdot 11 = 55$.

Úloha 26. Na obrázku platí $|DA| = |AB| = |BE|$, $|GA| = |AC| = |CF|$ a $|IC| = |CB| = |BH|$. Aký je obsah trojuholníka ABC, ak navyše platí $|EF| = 5$, $|DI| = 5$ a $|GH| = 6$.



Riešenie. 3

Vzorové riešenie. Toľko rovností, čo všetko bude zhodné? Vidíme, že AC je strednou priečkou $\triangle IDB$. Preto sú $\triangle IDB$ a $\triangle CAB$ podobné s koeficientom podobnosti $\frac{1}{2}$. Rovnako aj $\triangle CGH$ a $\triangle CAB$ aj $\triangle FAE$ a $\triangle CAB$. Keďže sú trojuholníky $\triangle IDB$, $\triangle CGH$ a $\triangle FAE$ podobné s rovnakým trojuholníkom $\triangle CAB$ a rovnakým koeficientom $\frac{1}{2}$, tak sú zhodné. Navyše vieme, že sú rovnoramenné so stranami $5, 5$ a 6. Aký je obsah $\triangle CAB$? Je to štvrtina obsahu $\triangle CGH$. Aký je obsah $\triangle CGH$? Podstava je 6, aká je výška. Keďže je rovnoramenný, tak jeho výška pretína základňu v polovici pod pravým uhlom a dá sa vyrátať z Pytagorovej vety ako $v = \sqrt{5^2 - (\frac{6}{2})^2} = 4$. Takže obsah $\triangle CGH$ je $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ a obsah $\triangle ABC$ je $\frac{12}{4} = 3$.

Úloha 27. Prvočíslo p nazveme *mocné* ak buď:

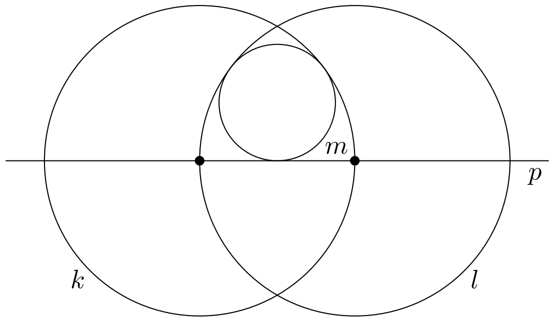
- p je jednociferné prvočíslo,
- alebo ak odobratím prvej cifry dostaneme mocné prvočíslo aj odobratím poslednej cifry p dostaneme mocné prvočíslo.

Nájdite všetky mocné prvočísla. *Napríklad* 37 je mocné prvočíslo, lebo odobratím prvej cifry vznikne 7 a odobratím poslednej cifry vznikne 3, čo sú obe mocné prvočísla.

Riešenie. 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373

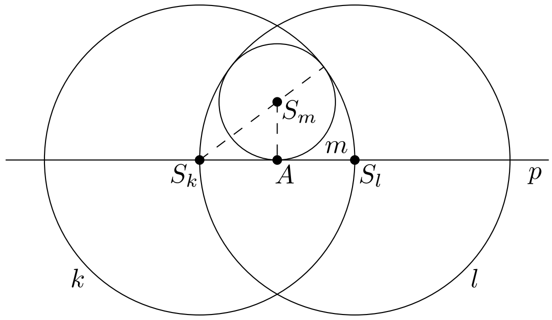
Vzorové riešenie. Jednociferné mocné prvočísla(ďalej len JMP) sú 2, 3, 5 a 7.
Dvojciferné mocné prvočísla (ďalej DMP) dostaneme zlepením dvoch JMP, tak aby sme získali prvočíslo. Všetkých možných zlepených čísel z JMP je 16. Keď vyhodíme párne, potom končiace sa 5, rovnako ako deliteľné 11, a nakoniec 27 a 57, zostanú nám 23, 37, 53 a 73.
A teraz hor sa na trojciferné mocné prvočísla(TMP). Keď odoberieme prvú cifru, dostaneme DMP, rovnako ako keď odoberieme poslednú cifru. Dostali sme teda dve DMP, kde druhá cifra jedného sa zhoduje s prvou cifrou druhého: z *abc* dostaneme *ab* a *bc*. Potom jediné možnosti pre TMP sú 237, 537, 737 a 373. Prvočíslo je len 373.
A čo štvorciferné mocné prvočísla(SMP)? Po odobratí prvej aj po odobratí poslednej cifry musí zostať TMP, čo je len 373. A také štvorciferné číslo zjavne neexistuje. Preto SMP neexistujú. A potom tiež neexistujú viacciferné MP. Takže všetky mocné prvočísla sú 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73, 373.

Úloha 28. Nech k a l sú dve kružnice s polomerom 16. Stred kružnice k leží na obvode kružnice l a naopak stred kružnice l leží na obvode kružnice k. Nech p je priamka spájajúca stredy kružníc k a l. Pridáme kružnicu m tak, aby sa zvnútra dotýkala oboch kružníc k a l a navyše sa dotýkala aj priamky p. Aký je polomer kružnice m?



Riešenie. 6

Vzorové riešenie. Označme si stredy kružníc k, l a m ako S_k, S_l a S_m. Ďalej označme r polomer kružnice m. Vieme, že S_k, S_m a spoločný dotykový bod kružníc k a m ležia na jednej priamke a preto $|S_kS_m| = 16 - r$. Uvažujme dotykový bod A kružnice m a priamky p. Kvôli symetrií obrázku platí $|S_kA| = |S_lA| = \frac{16}{2} = 8$. A zjavne $|S_mA| = r$. Použitím Pytagorovej vety na $\triangle S_kAS_m$ dostávame vzťah $8^2 + r^2 = (16 - r)^2 \Leftrightarrow 32r = 16^2 - 8^2 \Leftrightarrow r = 6$.



Úloha 29. Koľko je šesť-ciferných čísel takých, že každá jeho cifra sa v ňom vyskytuje práve toľkokrát, koľko je hodnota tej cifry? Napríklad 133232 je také číslo.

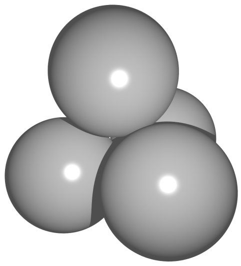
Riešenie. 82

Vzorové riešenie. Aké hodnoty môžu cifry hľadaného čísla nadobúdať? Musí pre ne platiť, že ich súčet je 6. Všimnime si, že nula nie je možnosťou. Všetky také čísla teda sú

$$6 = 1 + 5 = 1 + 2 + 3 = 2 + 4 = 6.$$

Prejdime si postupne všetky možnosti pre cifry. Pre cifry $\{6\}$ máme jedinú možnosť 666666. Pre cifry $\{1, 5\}$ máme 6 možností (jedna pre každú pozíciu jednotky). Pre cifry $\{2, 4\}$ máme $\binom{6}{2} = 15$ možností, lebo vyberáme dve pozície pre dvojky. Nakoniec pre cifry $\{1, 2, 3\}$ máme $6 \cdot \binom{5}{2} = 60$ možností, lebo najprv vyberieme pozíciu jednotky a potom zo zvyšných piatich pozícií vyberieme dve pre dvojky a zvyšné trojky už len doplníme. Dokopy máme $1 + 6 + 15 + 60 = 82$ možností.

Úloha 30. CDčka už nebavia kruhy s dierami. Preto, ako pravý chlap, pozliepal štyri gule polomeru 1 tak, aby sa všetky navzájom dotýkali. Aký je polomer najmenšej gule, ktorá obsahuje všetky štyri CDčkove gule?

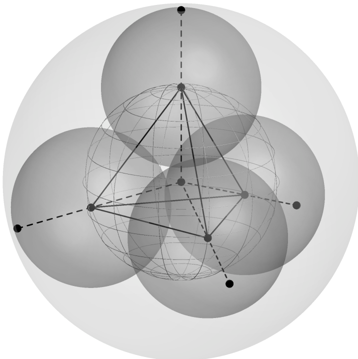


Riešenie. $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

Vzorové riešenie. Kde bude stred spoločnej opísanej gule? Bude rovnaký ako stred gule prechádzajúcej cez stredy CDčkových gulí. A to je ťažisko pravidelného štvorstenu tvoreného stredmi gulí, ktorého hrana je 2. Stačí nám zrátať polomer gule opísanej tomuto štvorstenu, ktorý bude o jedna menší ako výsledok. Z Pytagorových viet spočítame výšku stenovej výšky štvorstenu ako $v_s = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ a následne vzdialenosť stredov S, T dvoch protiľahlých hrán štvorstenu ako $|ST| = \sqrt{v_s^2 - 1^2} = \sqrt{2}$. Stred gule bude ležať v ťažisku štvorstena, ktoré leží v strede ST. Preto polomer menšej gule bude

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Hľadaný polomer je preto $1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.



Úloha 31. Kladné celé čísla $x > y$ sú obe menšie alebo rovné 100. Koľko existuje takých dvojíc (x, y), pre ktoré sú čísla $x^2 - y^2$ a $x^3 - y^3$ navzájom nesúdeliteľné?

Riešenie. 99

Vzorové riešenie. Použijeme vzorce $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ a $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Aby $nsd((x - y)(x + y), (x^2 + xy + y^2)) = 1$, t.j. aby boli nesúdeliteľné, musí platiť $x - y = 1$ a teda $x = y + 1$. Keď dosadím, hľadáme také x, pre ktoré $nsd(2x - 1, 3x^2 - 3x + 1) = 1$. Po odčítaní $x(2x - 1)$ a pripočítaní $(2x - 1)$ na pravej stane dostávame ekvivalentnú podmienku $nsd(2x - 1, x^2) = 1$. Nech d je najmenší deliteľ $2x - 1$ a x^2 väčší ako 1. Potom $d \mid x$ aj $d \mid 2x - 1$ a z toho $d \mid x - 1$. To je spor s $nsd(x, x - 1) = 1$. Takže $x = y + 1$ je nutná a postačujúca podmienka. Také dvojice sú $(2, 1), (3, 2) \ldots (100, 99)$, takže ich je 99.

Úloha 32. Majme číslo, ktoré začína takto: $122333444455555\ldots$ a pokračuje tak, že každé nasledujúce kladné celé číslo dopíšeme za sebou toľkokrát, aká je jeho hodnota. Aká je 2014-ta cifra v tomto čísle?

Riešenie. 4

Vzorové riešenie. Koľko miesta nám zaberú jednociferné čísla? Postupne $1 + 2 + \cdots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$. Koľko nám zaberú dvojciferné čísla? Postupne $2(10 + 11 + \cdots + 99) = 2(\frac{99 \cdot 100}{2} - \frac{9 \cdot 10}{2}) = 9900 - 90 = 9810$. Takže posledným napísaným číslom bude nejaké dvojciferné číslo. Uvedomíme si, že sa pýtame na 2014-te, takže párne číslo. A teda nám stačí vedieť hodnotu na mieste desiatok. Pre posledné napísané číslo musí platiť: najväčšie n, pre ktoré $2(10 + 11 + \cdots + n) \leq 2014$. Vidíme, že $40 < n < 50$ a preto je výsledkom 4.

Úloha 33. Aké je najmenšie kladné celé číslo N, pre ktoré má rovnica $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = N$ aspoň 2 rôzne riešenia, pričom platí $0 < x \leq y$ a $x, y \in \mathbb{Z}^+$?

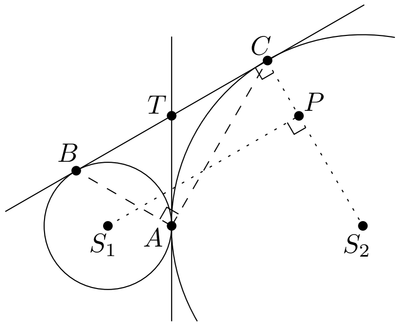
Riešenie. 360

Vzorové riešenie. Vypíšeme si aké hodnoty môže nadobúdať $(x^2 - 1)$. Sú to: 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, ... Teraz tu chceme nájsť dve dvojice s rovnakým súčinom a tak aby bol čo najmenší. Po chvíli iste nájdeme $3 \cdot 120 = 15 \cdot 24$. Menšia nie je, lebo jedna z tých dvojíc neobsahuje číslo 3. A k $8 \cdot 8$, $8 \cdot 15$, $8 \cdot 24$, $8 \cdot 35$, $15 \cdot 15$ nevieme nájsť dvojicu s rovnakým súčinom. Preto je to 360°, ku ktorému triviálne máme 2 riešenia $(2; 11)$ a $(4; 5)$.

Úloha 34. Dve kružnice s polomermi 1 a 3 sa zvonka dotýkajú v bode A. Ich spoločná vonkajšia dotyčnica sa ich dotýka v bodoch B a C. Čomu sa rovná $|AB|^2 + |BC|^2 + |AC|^2$?

Riešenie. 24

Vzorové riešenie. Označme stred menšej kružnice S_1, stred väčšej kružnice S_2 a priesečník spoločné dotyčnice vedenej bodom A s druhou dotyčnicou – priamkou BC – ako T. Z rovnosti dĺžok úsekov dotyčníc z bodu T k obom kružniciam dostávame $|TC| = |TA| = |TB|$. Bod A teda leží na Tálesovej kružnici nad priemerom BC. Trojuholník ABC je preto pravouhlý a platí $|AB|^2+|AC|^2 = |BC|^2$, resp. $|AB|^2+|BC|^2+|AC|^2 = 2|BC|^2$. Z Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník S_1S_2P, kde P je päta kolmice z bodu S_1 na S_2C vyplýva $|BC|^2 = |S_1P|^2 = (3+1)^2-(3-1)^2 = 12$. A teda $|AB|^2+|AC|^2+|BC|^2 = 2|BC|^2 = 24$.



Úloha 35. Nájdite najväčšie prvočíslo p také, že $p^p \mid 2014!$. *Poznámka:* “!” označuje *faktoriál*, ktorý je definovaný ako $n! = 1\cdot 2\cdot\dots\cdot n$.

Riešenie. 43

Vzorové riešenie. Ak je q prvočíslo, tak s ním súdeliteľných čísel v súčine $2014! = 1\cdot 2\cdot\cdot 2014$ je celkom $\lfloor \frac{2014}{q} \rfloor$ (sú to práve čísla $q, 2q, \dots, \lfloor \frac{2014}{q} \rfloor q$). Ak by bolo $q > \sqrt{2014}$, tak by platilo $\lfloor \frac{2014}{q} \rfloor < q$ a teda by sa q vyskytovalo v prvočíselnom rozklade 2014! menej ako q-krát, lebo žiadne z čísel $q, 2q, \dots, \lfloor \frac{2014}{q} \rfloor q$ by q neobsahovalo v druhej alebo vyššej mocnine. Preto musí pre hľadané p platiť $p \le \sqrt{2014}$. Ľubovoľné prvočíslo spĺňajúce túto nerovnosť už bude určite vyhovovať, lebo $\lfloor \frac{2014}{p} \rfloor$ je v takom prípade aspoň p. Najväčšie prvočíslo menšie rovné ako $\sqrt{2014}$ je 43 a preto $p = 43$.

Úloha 36. Majme mriežku 2×2014, ktorú ofarbujeme troma farbami. Koľkými spôsobmi je možné ofarbiť túto mriežku tak, aby žiadne dve políčka majúce spoločnú hranu nemali spoločnú farbu?

Riešenie. $6\cdot 3^{2013}$

Vzorové riešenie. Budeme ofarbovať zdola od prvých dvoch políčok nahor. Najprv ofarbíme prvé dve políčka ľubovoľne. To nám dáva $3\cdot 2 = 6$ možností. Ako to vyzerá ďalej? Keď má prvé poschodie farby (a, b), tak druhé má tri možnosti: (b, a), (b, c) a (c, a). Nezávisle na tom, ako zvolíme druhé poschodie, máme zase tri možnosti na tretie poschodie rovnakou úvahou. Takže na prvé poschodie máme 6 možností a na každé ďalšie tri možnosti. Poschodia sú navzájom nezávisle a teda použitím pravidla súčinu dostávame $6\cdot 3^{2013}$.

Úloha 37. Nájdite najmenšie kladné celé číslo m také, že $5m$ je piata mocnina celého čísla, $6m$ je šiesta mocnina celého čísla a $7m$ je siedma mocnina celého čísla.

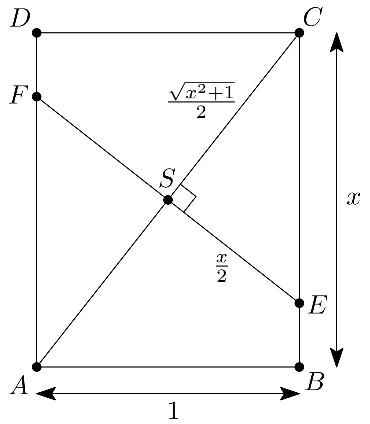
Riešenie. $5^{84}6^{35}7^{90}$

Vzorové riešenie. Zapíšeme si m v tvare $m = 5^a6^b7^cd$, kde d nie je deliteľné ani 5 ani 6 ani 7. Na to aby $5m$ bola piata mocnina, zrejme $5 \mid a+1, b, c$. Tak isto $6|a, b+1, c$ a $7 \mid a, b, c+1$. A d musí byť aj 5. aj 6. aj 7. mocnina. Keďže chceme výsledné číslo, čo najmenšie, zrejme dáme $d = 1$. A pre každé z a, b, c nájdeme také najmenšie číslo, čo spĺňa tie podmienky. Napr. a je deliteľné 42, a ešte $a+1$ je deliteľné 5 a preto najmenšie vyhovujúce je 84. Obdobne nájdeme $b = 35$ a $c = 90$. Tak dostaneme najmenšie také číslo a to $5^{84}6^{35}7^{90}$.

Úloha 38. Majme obdĺžnikový list papiera. Keď ho prehneme tak, aby sa dva (uhlopriečne) protiľahlé rohy dotýkali, vznikne nám ohyb. Platí, že dĺžka ohybu sa rovná dĺžke dlhšej strany obdĺžnika. Aký je pomer dĺžky dlhšej strany ku dĺžke kratšej strany tohoto obdĺžnika?

Riešenie. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Vzorové riešenie. Označíme si dôležité body ako na obrázku. Prvé, čo si všimneme je, že $FE \perp AC$, pretože po preklopení cez FE sú SA a SC zhodné úsečky. Vďaka symetrií ďalej platí, že $|FS| = |SE| = \frac{x}{2}$. Trojuholníky $\triangle AES$ a $\triangle ECS$ sú zhodné vďaka vete SUS a preto $|AE| = |EC|$. Z pravouhlého $\triangle ABC$ dostávame, že $|AC| = \sqrt{1^2 + x^2}$ a preto $|CS| = \frac{\sqrt{1^2+x^2}}{2}$. Z podobností $\triangle CSE$ a $\triangle CBA$ vyplýva $\frac{x^2+1}{x} = \frac{x}{1}$. Úpravou dostávame $x^4 - x^2 - 1 = 0$. Nahraďme $z = x^2$. Kvadratická rovnica $z^2 - z - 1 = 0$ nám dáva jediné kladné riešenie $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a teda $x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, čo je aj hľadaný pomer.



Úloha 39. Máme 20 farebných guľôčiek z ktorých každá je buď modrá, žltá, zelená alebo červená. Najviac koľko z nich môže byť modrých, keď počet všetkých farebne rozlíšiteľných postupností dĺžky 20, ktoré sa dajú z guľôčok poskladať, je presne 1140?

Riešenie. 17

Vzorové riešenie. Označme si počet modrých ako a, žltých ako b, zelených ako c a červených ako d. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $a \geq b \geq c \geq d$. Aký je počet zoradení vzhľadom na a, b, c, d? Najskôr rozmiestnime d červených, to vieme spraviť $\binom{20}{d}$ spôsobmi. Potom c zelených. Keďže nám zostalo $20 - d$ miest, tak to vieme spraviť $\binom{20-d}{c}$ spôsobmi. Podobne b žltých vieme $\binom{20-d-c}{b}$ spôsobmi. Zvyšné modré $\binom{20-d-c-b}{a} = \binom{a}{a} = 1$ spôsobom. Takže hľadáme najmenšie $(b + c + d)$ pre ktoré:

$$\binom{20}{d}\binom{20-d}{c}\binom{20-d-c}{b} = 1140.$$

Po použití $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, dosadení a upravení dostaneme:

$$1140 = \frac{20!}{(d)!(c)!(b)!(20-b-c-d)!}.$$

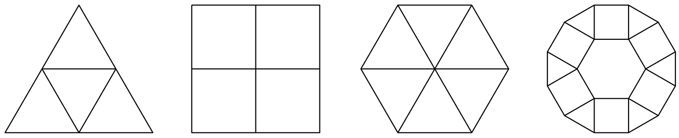
Pre jednoduchosť označme $z = a + b + c$. Keby $z = 0$, tak dostávame na pravej strane 1. Keby $z = 1$, tak dostaneme 20. Keby $z = 2$, tak najväčšie číslo dostaneme keď $d = c = 1$ a to je $20 \cdot 19 = 380$. Keby $z = 3$, tak najväčšia hodnota pravej strany bude $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840 = 6 \cdot 1140$. Takže potrebujeme v menovateli pridať 6. To spravíme napríklad tak, že $d = 3, c = 0, b = 0$. Výsledkom je preto $20 - z = 17$ modrých guličiek.

Úloha 40. Nájdite všetky $n \geq 3$ pre ktoré sa pravidelný n-uholník dá rozdeliť na niekoľko (aspoň 2) pravidelných mnohouholníkov.

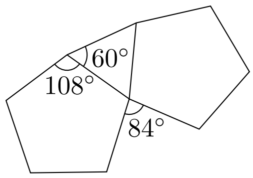
Riešenie. 3, 4, 6, 12

Vzorové riešenie. Najprv si vyskúšajme malé $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$. Pravidelný trojuholník sa dá rozdeliť na štyrie menšie pravidelné trojuholníky. Podobne štvorec na štyri menšie štvorce. Ďalej šesťuholník ide rozdeliť na 6 pravidelných trojuholníkov. Aby sme vyšetrili ďalšie možnosti musíme vedieť aká je veľkosť uhlu v pravidelnom n-uholníku. Každý n-uholník sa dá rozsekať na $n - 2$ trojuholníkov. Preto je súčet uhlov n-uholníka rovný $180°(n - 2)$ a jeden uhol má potom veľkosť $180°\frac{n-2}{n}$.
Skúsme teraz rozrezať všeobecný pravidelný b-uholník. Musíme rozrezať jeho uhol veľkosti $180°\frac{b-2}{b}$. Buď ho vyplníme jedným b-uholníkom (ako v prípade $b = 3, 4$) a potom musíme riešiť *problém rozdelenia uhla na strane*: $180° - 180°\frac{b-2}{b}$. Alebo ho rozdelíme dvoma $b_1, b_2 > b$ uholníkmi. Troma to nie je možné, lebo

najmenší uhol má pravidelný trojuholník a $3 \cdot 60^\circ > 180^\circ \frac{b-2}{b}$. Poďme vyriešiť problém rozdelenia uhla na strane. Okrem prípadu $b = 3$ ho musíme rozdeliť práve dvoma mnohouholníkmi n_1, n_2. Musí platiť $180^\circ \frac{n_1-2}{n_1} + 180^\circ \frac{n_2-2}{n_2} = 180^\circ \Leftrightarrow n_1 n_2 - 2n_1 - 2n_2 = 0 \Leftrightarrow (n_1-2)(n_2-2) = 4$. Takže $n_1 - 2 \in 1, 2, 4 \Leftrightarrow n_i \in 3, 4, 6$. Tieto prípady sme už vyriešili, takže pre žiadne iné b nemôžeme vyplniť uhol jedným b-uholníkom.



Keď chceme rozdeliť uhol na dve časti, tak jedným bude trojuholník (inak bude súčet aspoň 180°). A druhým môže byť len štvorec a päťuholník (inak bude súčet aspoň 180°). Poďme preskúmať tieto dve možnosti. V prípade trojuholník a štvorec máme $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ a to je 12-uholník. Keď jeho obvod vyplníme na striedačku, tak nám zostane v stred 6-uholník, ktorý už vieme rozdeliť. Druhý prípad trojuholník a päťuholník dáva $60^\circ + 108^\circ = 168^\circ$ a to je 30-uholník. Po vyplnení obvodu dostávame vnútri uhol $360^\circ - 60^\circ - 2 \cdot 108^\circ = 84^\circ$, ktorý vyplniť už nejde.



Úloha 41. Na šachovnici 5×5 máme v ľavom dolnom rohu šachovú vežu. Môže sa hýbať len vpravo a hore o ľubovoľný (nenulový) počet políčok. Koľkými spôsobmi sa vie veža dostať do pravého horného rohu? Poznámka: Dve cesty považujeme za rovnaké, ak sa zhodujú všetky ťahy vežou v poradí ich vykonania.

Riešenie. 838

Vzorové riešenie. Ako spočítame koľkými spôsobmi sa môže veža dostať vpravo hore? Zjednodušme si úlohu. Koľkými spôsobmi sa vieme dostať vľavo dole? Triviálne 1. A o políčko vpravo? Jedným, lebo len z prvého políčka. A o políčko vpravo? Dvoma, buď prišla veža z prvého, alebo z druhého políčka. A o políčko vpravo? Štyrmi, lebo buď z prvého, druhého alebo z tretieho. Vidíme, že počet spôsobov ako sa dostať na políčko je súčet počtu možností zo všetkých predošlých pozícií. Takže políčko vpravo dole bude $1 + 1 + 2 + 4 = 8$. Kvôli symetrií vyplníme ľavý stĺpec rovnako ako dolný riadok. Koľko možností máme do políčka $(2, 2)$? Predošlé políčka mohli byť $(1, 2)$ alebo $(2, 1)$, takže $P_{(2,2)} = P_{(1,2)} + P(2, 1) = 1 + 1 = 2$. Podobne $P_{(3,2)} = P_{(1,2)} + P(2, 2) + P(2, 1) = 1 + 2 + 1 = 4$. Takýmto spôsobom vyplníme zvyšok tabuľky P, pomáhame si symetriou.

8	28	94	289	838
4	12	37	106	289
2	5	14	37	94
1	2	5	12	28
1	1	2	4	8

Úloha 42. Aká cifra je na mieste stoviek v 11^{2014}?

Riešenie. $\lfloor ((\binom{2014}{2} + \binom{2014}{1} + 1) \pmod{1000})/100 \rfloor = 2$

Vzorové riešenie. Stačí určiť zvyšok čísla 11^{2014} po delení tisíckou a pozrieť sa prvú cifru zvyšku. Pomocou binomickej vety rozpíšeme:

$$11^{2014} = (10+1)^{2014} = \binom{2014}{0} \cdot 1 + \binom{2014}{1} \cdot 10 + \binom{2014}{2} \cdot 100 + 1000 \cdot \left(\binom{2014}{3} + \cdots \right),$$

z čoho už vidíme, že platí

$$11^{2014} \equiv 1 + 2014 \cdot 10 + 1007 \cdot 2013 \cdot 100 \equiv 1 + 140 + 7 \cdot 3 \cdot 100 \equiv 241 \pmod{1000}.$$

Hľadaná cifra je preto 2.

Úloha 43. Žaba skáče po vrcholoch rovnostranného trojuholníka. Ak stojí v nejakom vrchole, tak ako cieľ ďalšieho skoku si náhodne vyberie jeden z dvoch zvyšných vrcholov. Aká je pravdepodobnosť, že Žaba po 10-tich skokoch skončí v rovnakom vrchole ako začal?

Riešenie. $\frac{171}{512}$

Vzorové riešenie. Označme si (a_i, b_i, c_i) pravdepodobnosti, že Žaba je vo vrchole A, B alebo C po i-krokoch. Bez ujmy na všeobecnosti nech začne vo vrchole A a teda platí $(a_0, b_0, c_0) = (1, 0, 0)$. Vo všeobecnosti, aká je pravdepodobnosť, že Žaba v $(i+1)$-tom kroku skočí do vrcholu A? Nemohla skočiť z vrcholu A, lebo vždy skočí do iného. Takže skočila buď z vrcholu B alebo C. Keď bola napr. vo vrchole B, tak s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ skočila do vrcholu A a teda celková pravdepodobnosť skoku z B do A je $\frac{b_i}{2}$. Podobne pre C je $\frac{c_i}{2}$. Takže $a_{i+1} = \frac{b_i+c_i}{2}$ a podobne pre $b_{i+1} = \frac{a_i+c_i}{2}$ a $c_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$.
Poďme si zrátať prvých pár krokov:

$$(1,0,0) \to \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \to \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) \to \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}\right) \to \cdots .$$

Vidíme, že všetky hodnoty postupne spejú k $\frac{1}{3}$. Konkrétne

$$a_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot (1 - a_i).$$

Upravíme do tvaru

$$a_{i+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \cdot \left(a_i - \frac{1}{3}\right).$$

Vieme, že $a_0 = 1 = 1/3 + 2/3$ a dostávame

$$a_i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^i.$$

Spočítame hľadanú hodnotu ako

$$a_{10} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 512} = \frac{513}{512 \cdot 3} = \frac{171}{512}.$$

Úloha 44. Keď Ondro začne rúbať stromy a má na začiatku 100 energie. Každú minútu sa môže rozhodnúť medzi dvoma možnosťami:

- Vyrúbe n stromov, kde n jeho aktuálna energia. To ho unaví, a preto sa jeho energia zníži o 1.
- Dá si pauzu a získa 1 energiu.

Koľko najviac stromov môže Ondro vyrúbať v priebehu 60-tich minút?

Riešenie. 4293

Vzorové riešenie. Kedy sa oplatí Ondrovi odpočívať? Ak odpočíval po rúbaní, tak sa mu oplatí tieto dve činnosti vymeniť, t.j. najprv odpočívať a potom rúbať. Tak získa o jeden strom viac. Aké stratégie nám zostali po tomto pozorovaní? Jedine stratégia b-krát odpočívaj na začiatku a potom $(60-b)$-krát rúb. Iné stratégie sa dajú vždy vylepšiť našim prvým pozorovaním. Koľko stromov vyrúbe Ondro v závislosti od b? Keby $b = 0$ tak vyrúbe $S_0 = 100 + 99 + \cdots + 41$. Keby $b = 1$, tak vyrúbe $101 + 100 + \cdots + 43$. Na to sa dá pozerať aj tak, že Ondro 1 minútou oddychu získal $+1$ za každý čas rúbania a stratil posledné rúbanie, teda $S_1 = (100+1) + (99+1) + \cdots (42+1) = S_0 + 59 - 41$. Takže sa Ondrovi oplatilo odpočívať. Podobne $S_2 = S_1 + 58 - 43, S_3 = S_2 + 57 - 45$ a už vidíme $S_b = S_{b-1} + (60 - b) - (41 + 2b)$. Takže sa Ondrovi oplatí odpočívať až kým $b = 6$ lebo $S_7 = S_6 + 53 - 53$. Koľko stromov vyrúbal Ondro dokopy? Spočítame ako

$$\begin{aligned}
(40+2b+1) + (41+2b+1) + \cdots + (100+b) &= (1+2+\cdots+(100+b)) - (1+2+\cdots+(40+2b)) \\
&= \frac{(100+b)(100+b+1)}{2} - \frac{(40+2b)(40+2b+1)}{2} \\
&= \frac{106 \cdot 107}{2} - \frac{52 \cdot 53}{2} \\
&= 4293.
\end{aligned}$$

Úloha 45. Označme $\sqrt{\mathbb{N}} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots\}$, t.j. množinu odmocnín kladných celých čísel. Nech S je množina čísel a, pre ktoré platí $a \in \sqrt{\mathbb{N}}$ a $\frac{36}{a} \in \sqrt{\mathbb{N}}$. Aký je súčin prvkov množiny S?

Riešenie. 6^{25}

Vzorové riešenie. Platí $6 = \sqrt{36} \in S$. Všetky ostatné prvky S spárujeme tak, že prvok $\sqrt{n}$ dáme do páru s $\frac{36}{\sqrt{n}}$, ktorý tiež leží v S. Súčin prvkov v každom páre sa rovná $36 = 6^2$ a ostáva už len nájsť počet prvkov množiny S. Výsledkom bude potom $6^{|S|}$.
Uvažujme $\sqrt{n} \in S$. To znamená, že $\frac{36}{\sqrt{n}} \in \sqrt{N}$, resp. $\frac{36^2}{n}$ je celé číslo. Počet prvkov množiny S je potom rovný počtu deliteľov čísla $36^2 = 2^4 \cdot 3^4$. U dvojky aj u trojky máme päť možných exponentov (0 až 4) a teda množina S má celkom 25 prvkov. Výsledkom je preto 6^{25}.

Úloha 46. Keď vyberieme 2014 náhodných cifier z množiny $\{0,\ 1,\ \dots,\ 9\}$, tak aká je pravdepodobnosť, že ich súčin bude deliteľný 10?

Riešenie. $1 - (\frac{5}{10})^{2014} - (\frac{8}{10})^{2014} + (\frac{4}{10})^{2014}$

Vzorové riešenie. Aké cifry treba vybrať, aby ich súčin *ne*bol deliteľný 10? Buď sú to ľubovoľné nepárne cifry, alebo ľubovoľné cifry bez nuly a päťky, t.j. delitelov 5. Pravdepodobnosť výberu takých cifier je $(\frac{5}{10})^{2014} + \frac{8}{10})^{2014}$. Prečo to nie je správna odpoveď? Lebo niektoré čísla sme zarátali dvakrát. Ktoré? Nepárne cifry bez päťky. Tak že potrebuje odrátať $(\frac{4}{10})^{2014}$. V úlohe sme sa pýtali na opačnú otázku, takže výsledkom je $1 - (\frac{5}{10})^{2014} - (\frac{8}{10})^{2014} + (\frac{4}{10})^{2014}$.

Úloha 47. Určte hodnotu výrazu:

$$\lfloor 2014\sqrt[3]{-2014}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-2013}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-2012}\rfloor + \dots + \lfloor 2014\sqrt[3]{2014}\rfloor.$$

Poznámka $\lfloor x\rfloor$ označuje dolnú celú časť x.

Riešenie. -2002

Vzorové riešenie. Upravme si pôvodný výraz na:

$$\lfloor 2014\sqrt[3]{0}\rfloor + (\lfloor 2014\sqrt[3]{1}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-1}\rfloor) + \dots + (\lfloor 2014\sqrt[3]{2014}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-2014}\rfloor)$$

Aká je hodnota $(\lfloor 2014\sqrt[3]{a}\rfloor + \lfloor 2014\sqrt[3]{-a}\rfloor)$? Sú dve možnosti. Buď $\sqrt[3]{a}$ je celé číslo, alebo je desatinné. Keď je celé číslo, tak hodnota výrazu je 0. Ak je necelé číslo, nech je jeho tvar $\sqrt[3]{a} = k + x$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $0 < x < 1$. Potom je hodnota výrazu

$$(\lfloor 2014(k + x)\rfloor + \lfloor 2014(-(k + x))\rfloor) = -1,$$

lebo, vieme zapísať $2014(k+x) = m+y$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $0 < y < 1$. Z čoho $(\lfloor y\rfloor + \lfloor -y\rfloor) = 0-1 = -1$. Takže pre všetky $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{Z}$ bude hodnota 0 a pre ostatné -1. Koľko je tretích mocnín menších rovných 2014? Platí $1764 = 12^3 < 2014 < 13^3 = 2197$. Takže výsledkom je $(-1) \cdot (2014 - 12) = -2002$. Všimnime si, že sme člen $\lfloor 2014\sqrt[3]{0}\rfloor$ korektne odignorovali.

Úloha 48. Vodka počítal súčet $1+2+\dots+2012$. Zabudol však pričítať nejaké čísla a tak dostal výsledok deliteľný 2011. Anička počítala $A = 1 + 2 + \dots + 2013$ a zabudla pripočítať tie isté čísla ako Vodka a dostala tak súčet N deliteľný 2014. Aký je pomer $\frac{N}{A}$?

Riešenie. 2/3

Vzorové riešenie. Označme $S = 1+2+...+2012$ a V súčet, ktorý vyšiel Vodkovi. S dáva po delení 2011 zvyšok 1 a po delení 2014 zvyšok 1008. $N = 2013 + V$. Keďže N je deliteľné 2014, tak V dáva po delení 2014 zvyšok 1. Zároveň je V deliteľné 2011. Teda Vodka vynechal čísla ktorých súčet dáva po delení 2011 zvyšok 1 a po delení 2014 zvyšok 1007. Najmenšie číslo ktoré dáva také zvyšky je $335 \cdot 2014 + 1007$. Tento súčet vieme dostať napr. vybratím 1007 a 335 dvojíc so súčtom 2014. Napr. 2 a 2012, 3 a 2011 ... Potom $N = A - 1007 - 335 \cdot 2014$. Keďže $A = 1007 \cdot 2013 = 2014 \cdot 1006 + 1007$, tak $N = 671 \cdot 2014 = 1342 \cdot 1007$. Potom $\frac{N}{A} = \frac{2}{3}$

Úloha 49. Petržlen má novú hru. Je hraná 16-tími kartami, ktoré sú položené v rade za sebou. Každá karta je z jednej strany červená a z druhej čierna. V každom ťahu Petržlen nájde čiernu kartu, ktorá je najviac vpravo. Potom otočí túto kartu a všetky karty, ktoré sú od nej napravo. Hra skončí, keď už nie je možné urobiť ťah. Koľko najviac ťahov môže Petržlen túto hru hrať?

Riešenie. $2^{16}-1$

Vzorové riešenie. Vyskúšajme si, ako to funguje. Zoberme si zjednodušený prípad $n=8$ a nech čierna je 0 a červená 1. Začnime napríklad $00100010 \to 00100011 \to 00100100 \to 00100101 \to 00100110 \to 00100111 \to 00101000 \to \cdots$. Tím, ktorý to ešte nevidia ukážeme trocha inú hru: máme cifry $0,1,\ldots,9$ a zoberme poslednú cifru, ktorá nie je 9. Tak napríklad $188 \to 189 \to 190 \to 191 \to 192 \to 193 \to \cdots \to 199 \to 200$. Vidíme, že ťah v našej hre je len operácia $+1$ v binárnych číslach. Kedy už nie je možné urobiť ťah? Keď je situácia $11\ldots1 = 2^{16}-1$. Ako najdlhšie môžeme túto hru hrať? Keďže vždy pridáme $+1$, tak vtedy, keď začneme od $0 = 00\ldots0$.

Úloha 50. Koľko existuje pravouhlých trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán takých, že aspoň jedna odvesna trojuholníka má dĺžku 2014^{14}?

Riešenie. $\frac{27\cdot29^2-1}{2}$

Vzorové riešenie. Označme si druhú odvesnu b a preponu c. V pravouhlom trojuholníku musí platiť Pytagorova veta $(2014^{14})^2+b^2=c^2$. Úpravou dostaneme rovnosť súčinov $(c-b)(c+b)=2014^{28}=2^{28}19^{28}53^{28}$. Keďže riešime celočíselnú úlohu, otázkou ostáva koľkými spôsobmi môžme napísať $n=2014^{28}$ ako súčin deliteľa d čísla n a jeho patriacej dvojici $\frac{n}{d}$. Označme $(c-b)=d$ a $(c+b)=\frac{n}{d}$. Z toho zrejme $\frac{n}{d}=d+2b$. To je možné pre všetky $d|n$ až prípady keď d a $\frac{n}{d}$ majú rôznu paritu a keď $b=0$. Keďže $2|n$, tak musia byť oba párne. Koľko je teda možností pre d? Zostalo $27\cdot29\cdot29-1$ deliteľov, lebo 27 za rovnakú paritu a -1 za $b=0$. Keďže $d<\frac{n}{d}$ tak výsledkom je presne polovica $\frac{27\cdot29^2-1}{2}$.

Úloha 51. Aké je najmenšie kladné celé číslo, ktoré sa nedá zapísať ako súčet maximálne jedenástich (nie nutne rôznych) faktoriálov? Napríklad: $42 = 4!+3!+3!+2!+2!+1!+1!$.

Riešenie. 359

Vzorové riešenie. Označme P_i ako najmenšie číslo, ktoré nevieme zapísať i faktoriálmi. Poďme si zrátať prvé hodnoty. Najprv $P_1=3$, lebo $1=1!$ a $2=2!$. Ďalej $P_2=5$, lebo $3=1!+2!$, $4=2!+2!$. Ďalej $P_3=11$, lebo $5=1!+2!+2!$ a pre $n=6,7,8,9,10$ vieme zapísať $n=3!+P_2$. Ďalej $P_4=17$, lebo keď nepoužijeme $3!$ tak nám to nestačí a ak použijeme $3!$, tak $P_3=11$. Podobne $P_5=23$.
Intuícia nám hovorí, že sa nám vždy oplatí použiť najväčší možný faktoriál. A to je aj pravda. Dokážeme sporom. Nech $p!$ je najväčší možný faktoriál menší rovný ako n a oplatilo by sa nám ho nepoužiť, t.j. keby sme vyskladali $n=a_1\cdot1!+a_2\cdot2!+\cdots+a_{p-1}(p-1)!$. Keďže $1!,\ 2!,\ \ldots,\ (p-1)! \mid p!$, tak určite vieme súčet niektorých menších faktoriálov nahradiť $p!$. Aký bude teda výsledok? Zostávajú nám dva postupy, buď to vyskúšame čísla tvaru $p!-1$ a keď nie, tak odčítame niekoľkokrát $(p-1)!$ alebo si všimneme, že P_i bolo vždy začiatkom súčtu

$$1!+2!+2!+3!+3!+3!+4!+4!+4!+4!+5!+5!=359.$$

Úloha 52. Na šachovom turnaji hrá každý súťažiaci proti každému. Navyše sa hráči dohodli, že partia nemôže skončiť remízou. Nazvime skupinu šachistov *jasnou*, keď je v skupine jasný víťaz a jasný porazený, t.j. taký hráč, ktorý v skupine všetko vyhral a taký hráč, ktorý v skupine všetko prehral. Nájdite najmenšie n také, že v každom turnaji s n hráčmi je určite jasná skupina veľkosti 4.

Riešenie. 8

Vzorové riešenie. Dôkaz má dve časti. V prvej časti dokážeme, že pre $n=8$ určite existuje jasná skupina veľkosti 4. V druhej časti skonštruujeme graf pre $n=7$, ktorý neobsahuje jasnú skupinu veľkosti 4.
Koľko najmenej víťazstiev má hráč s najviac víťazstvami pre $n=8$? Priemerný počet víťazstiev je 3, 5. Aby sa tento priemer dosiahol, nejaký hráč v musí mať (aspoň) 4 víťazstvá nad hráčmi a_1,a_2,a_3,a_4. Podobne, z hráčov a_1,a_2,a_3,a_4 musí mať niekto (aspoň) dve víťazstvá s hráčmi a_1,a_2,a_3,a_4. Bez ujmy na všeobecnosti, nech a_1 porazil a_2 a a_3. Z hráčov a_2,a_3 musel niekto vyhrať, bez ujmy na všeobecnosti nech je to a_2. Potom ale skupina $\{v,a_1,a_2,a_3\}$ je jasná a má veľkosť 4.
Druhá časť dôkazu, že pre $n\le7$ nejde. Uvažujme preto nasledujúci graf: vrcholy sú čísla $0,1,\ldots,6$ a orientované hrany vychádzajú z i do $\{(i+1) \pmod 7, (i+2) \pmod 7, (i+4) \pmod 7\}$. Jediný kandidáti na jasnú skupinu sú skupiny tvorené vrcholom v a troma hráčmi, ktorých v porazil. Ale medzi každou takouto trojicou je cyklus dĺžky tri.

Úloha 53. Kika si vymyslela dve čísla od 1 do 9 (môžu byť aj rovnaké). Vodkovi povedala ich súčin a Ondrovi ich súčet. Potom nasledovala nasledovná konverzácia:

- Vodka: “Neviem, aké sú tie čísla.”
- Ondro: “Neviem, aké sú tie čísla.”
- Vodka: “Neviem, aké sú tie čísla.”
- Ondro: “Neviem, aké sú tie čísla.”
- Vodka: “Neviem, aké sú tie čísla.”
- Ondro: “Neviem, aké sú tie čísla.”
- Vodka: “Neviem, aké sú tie čísla.”
- Ondro: “Neviem, aké sú tie čísla.”
- Vodka: “Už viem, aké sú tie čísla.”

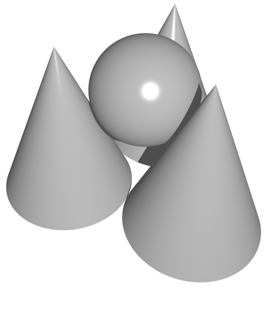
Aké čísla si Kika vymyslela?

Riešenie. 2×8

Vzorové riešenie. V riešení si bolo treba premyslieť dva kľúčové kroky. Prvý krok je, že príklad môže mať riešenie. Obaja hráči si pre každú dvojicu napíšu ich súčty a súčiny. Keby napríklad Vodka videl, že jeho číslo má len jeden možný súčin, tak je jasné aké čísla si Kika myslela. On ale povedal “Neviem”. Ondro si preto môže škrtnúť tie dvojice, ktoré dávajú jednoznačný súčin. Potom keby Ondro mal jednoznačný súčet, tak vie Kikine čísla. Ale on povedal “Neviem”, takže Vodka môže škrtnúť čísla s jednoznačným súčtom. A tak ďalej.
Druhým podstatným krokom bolo premyslieť si, ako to spočítať rýchlo. Uvedomíme si, že obaja majú rovnakú tabuľku a môžeme si Kikine čísla zoradiť. Ďalej si uvedomíme, že budeme potrebovať hľadať podľa hodnoty súčinu. Takže si pre každú hodnotu súčinu zapíšeme dvojice, napríklad $24 \to (3,8),(4,6)$ a stačí nám začať so súčinmi, ktorú majú aspoň dva páry, lebo Vodka na začiatku povedal “Neviem”. Potom škrtáme podľa súčtu (ten bude vždy najmenší alebo najväčší) a tak dookola.
Nech S_i je množina všetkých dvojíc (x,y), kde $x \leq y$ a čísla x,y mohli byť výsledkom keby rozhovor skončil po i krokoch. Hľadáme teda S_9. Množina S_1 sú dvojice, ktoré sa dajú rozložiť na súčin cifier len jedným spôsobom. To sú všetky tie čísla, ktorých súčin je rovný 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36. Aké súčty sú jednoznačné pre S_2? Sú to súčty 4, 12 a 13 a preto $S_2 = \{(2,2),(4,9),(6,6)\}$. Podobne ako S_1 dostávame $S_3 = \{(1,4)\}$ a podobne ako S_2 dostávame $S_4 = \{(2,3)\}$ s rozbehnutý pokračujeme:

$$S_5 = \{(1,6)\},\ S_6 = \{(3,4)\},\ S_7 = \{(2,6)\},\ S_8 = \{(4,4)\},\ S_9 = \{(2,8)\},$$

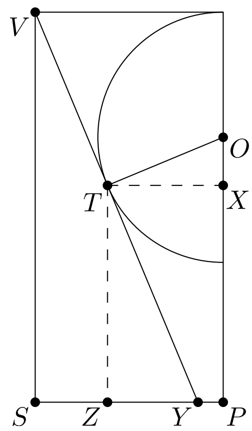
Úloha 54. Majme tri rovnaké kužele, ktorých podstavy sa navzájom dotýkajú a všetky tri podstavy ležia celé v jednej spoločnej rovine. Medzi kužele sme vložili guľu, ktorá je taká veľká, že jej vrch siaha do rovnakej výšky ako vrcholy troch kužeľov. Aký má guľa polomer, ak podstava kužeľov má polomer 50 a ich výška je 120?



Riešenie. $\frac{200\sqrt{3}}{9}$

Vzorové riešenie. Označme polomer tej gule r. Nech O je stred gule, T bod dotyku gule, S stred podstavy, V vrchol jedného kužeľa. Nech P je kolmý priemet O do roviny v ktorej sú podstavy kužeľov. Nech X je bod na OP v rovnakej výške ako T. Všimnime si, že TX je rovnobežné s rovinou podstáv kužeľov. Nech Y je bod na podstave a polpriamke VT. Zrejme leží aj na SP. A nakoniec nech Z je kolmý priemet T do roviny podstáv. Z Pytagorovej vety ľahko dorátame $|VY| = 130$.

Guľa sa dotýka kužeľa, preto sa dotýka aj priamky VT, a preto je VT kolmé na TO. Trojuholník $\triangle TXO$ je preto podobný s trojuholníkom $\triangle VSY$ (Ležia v jednej rovine a strany TXO sú kolmé na odpovedajúce strany VSY.) Preto $|OX| = \frac{5}{13}r$, $|TX| = \frac{12}{13}r$. Zrejme Z je vo *výške* $120 - \frac{18}{13}r = |TZ|$.
Z podobnosti trojuholníkov $\triangle VYS$ a $\triangle TYZ$ máme $|YZ| = (120 - \frac{18}{13}r) \cdot \frac{5}{12} = 50 - \frac{15}{26}r$ a teda $|SZ| = \frac{15}{26}r$. No na druhú stranu $|PZ| = |TX| = \frac{12}{13}r$. A $|SP|$ je vzdialenosť ťažiska od vrchola v rovnostrannom trojuholníku so stranou dĺžky 100 (Zrejme stredy podstáv kužeľov ho tvoria a priemet stredu gule musí byť v strede toho trojuholníka), čo je $\frac{100\sqrt{3}}{3}$. Preto $|SZ| = \frac{100\sqrt{3}}{3} - \frac{12}{13}r$. A keďže $|SZ| = |SZ|$:) ,tak dostávame rovnicu, ktorú ľahko vyriešime a teda $\frac{100\sqrt{3}}{3} = \frac{39}{26}r = \frac{3}{2}r$, z čoho $r = \frac{200\sqrt{3}}{9}$.



Úloha 55. Riadky aj stĺpce mriežky 7×7 sú očíslované $1, 2, \ldots, 7$. Koľkými spôsobmi vieme na mriežku rozmiestniť 8 magnetov tak, že pre každé dva magnety je rozdiel v ich číslach stĺpcov aspoň 3 alebo rozdiel v číslach riadkov aspoň 3?

Riešenie. 36 + 8 + 6 + 1 = 51

Vzorové riešenie. Keby sme mali v zadaní 9 magnetov, bola by len jediná možnosť ako ich umiestniť. Tým, že ich máme iba 8, dostávame istú voľnosť a potrebujeme rozumne rozobrať všetky možnosti. Označíme si stĺpce plochy $A - -G$ a riadky 1-7. Rozoberme všetky možnosti v závislosti od polohy magnetu najbližšieho ku stredu.
Ak je magnet umiestnený úplne v strede - t.j. na $D4$ - zvyšných 7 magnetov musí byť po obvode. Vďaka odpudzovaniu bude vždy 6 magnetov pravidelne rozostavených a zvyšné dva majú istú voľnosť po hrane. Určime si, že na hrane $A7 - -G7$ budú len dva magnety a zrátajme koľko možností nám to dáva. Ľahko môžme vidieť, že ich je 10. Pri otočení na inú hranu sa zopakujú len 4 z nich (ak je 8 magnetov v mriežke) a teda s magnetom v strede je 36 možností.
Ak je magnet vzdialený od stredu o 1, tak BÚNV nech je na $D3$ - nakoniec zase zrátame otočenia. Keďže medzi $B1$ a $F1$ nemôžu byť magnety, 6 z nich musí byť na $A1$, $A4$, $A7$, $G1$, $G4$, $G7$ a posledný na $D6$ alebo $D7$. To nám dáva 2 možnosti, po otočeniach 8 možností.
Ak je magnet BÚNV na $D2$, máme obdobne možnosti ako pre minulý prípad. Posledný môže byť na $D5$,$D6$ alebo $D7$. Možnosť $D5$ bola zarátaná v minulom prípade a možnosť $D6$ sa dá otočiť len dvakrát. Po otočeniach máme preto 6 možností.
Posledná možnosť je, že najbližšia je vzdialená 3, teda sú rovnomerne po obvode, to je jediná možnosť. Dokopy je to $36 + 8 + 6 + 1 = 51$ možností.

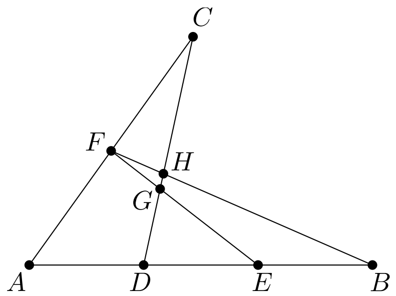
	A	B	C	D	E	F	G
1	●			●			●
2							
3							
4	●			○			●
5							
6							
7	×	×	×	×	×	×	×

	A	B	C	D	E	F	G
1	●						●
2							
3				○			
4	●						●
5							
6				×			
7	●			×			●

	A	B	C	D	E	F	G
1	●						●
2				○			
3							
4	●						●
5				×			
6				×			
7	●			×			●

	A	B	C	D	E	F	G
1	●			○			●
2							
3							
4	●						●
5							
6							
7	●			●			●

Úloha 56. Dané sú tri body A, B a C, ktoré neležia na jednej priamke. Úsečka AB je rozdelená na tri rovnako dlhé časti bodmi D a E. Bod F je stredom úsečky AC. Priamky DF a BF pretínajú priamku CE v poradí v bodoch G a H. Ak obsah $\triangle DEG$ je 18, tak aký je obsah trojuholníka $\triangle FGH$?



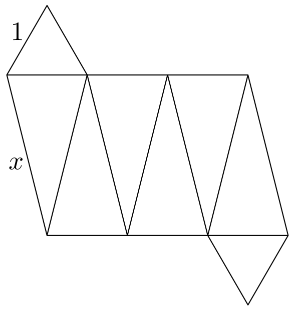
Riešenie. 1.8

Vzorové riešenie. Výrazom $[XYZ]$ budeme vo všeobecnosti označovať obsah $\triangle XYZ$. V trojuholníku AEC je G ťažiskom a preto $\frac{|EG|}{|GF|} = 2$, $|DG| = \frac{1}{3}|DC|$. Použijeme metódu hmotných bodov. Ak dáme bodom A,B,C hmotnosti 2, 1, 2 a zistíme, kde bude ležať ťažisko vzniknutej sústavy $2A + 1B + 2C$. Keďže $2A + 2C = 4F$, tak ťažisko sústavy leží na úsečke BF a delí ju v pomere $\frac{2+2}{1} = \frac{4}{1}$. Z rovnosti $2A + B = 3D$ súčasne vyplýva, že ťažisko leží na úsečke CD a delí ju v pomere $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$. Špeciálne teda dostávame, že ťažiskom sústavy je bod H.
A teda dostávame $|DH| = \frac{2}{5}|DC|$, čo dokopy s $|GH| = \frac{1}{15}|DC|$ dáva $\frac{|DG|}{|GH|} = 5$. Potom platí

$$\frac{[DEG]}{[FGH]} = \frac{|DG| \cdot |EG|}{|FG| \cdot |HG|} = 2 \cdot 5 = 10,$$

a preto $[FGH] = 1,8$.

Úloha 57. Plášť telesa je tvorený dvoma rovnostrannými trojuholníkmi s dĺžkou strany 1 a šiestimi rovnoramennými trojuholníkmi s ramenami dĺžky x a podstavou 1 ako na obrázku. Ak je objem telesa 6, koľko je x?



Riešenie. $\frac{5\sqrt{39}}{3}$

Vzorové riešenie. Keby bolo $x = 1$, bol by to pravidelný 8-sten. Jeho objem vieme spočítať, lebo je zložený z dvoch 4-bokých ihlanov. Ich podstava je štvorec so stranou 1, a výšku ľahko dorátame z Pytagorovej vety, je to $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a teda objem ihlanu je $\frac{\sqrt{2}}{6}$. Objem osemstenu je dvojnásobok, teda $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Postavme teraz náš osemsten na 1 stenu. Ak ho "natiahneme" v smere kolmom na tú stenu k-krát, (teda každý bod vzdialime od tej steny k-krát) dostaneme presne také teleso aké chceme. Jeho steny budú 2 rovnostranné trojuholníky (protiľahlá stena je rovnobežná preto sa nezmení) a 6 rovnoramenných. Platí, že pri „natiahnutí“ sa objem zväčší tiež k-krát. Preto aby to malo objem 6, $k = 9\sqrt{2}$.
Už len vyrátať dĺžku hrany. Najprv si uvedomíme, že ak máme ľubovoľné také teleso teleso postavené na stene rovnostranného trojuholníka (označme ho ABC, zvyšné 3 vrcholy budú D, E, F.) a má výšku (vzdialenosť tých 2 stien ABC a DEF) h, vieme ľahko vyrátať hranu. Ak totiž kolmo premietneme DEF do roviny ABC dostaneme pravidelný šesťuholník $AD'BE'CF'$. A my poznáme $|AB| = 1$, preto ľahko dorátame $|AD'| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. A potom z Pytagorovej vety

$$|AD| = \sqrt{h^2 + |AD'|^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{3}}.$$

Pre pravidelný osemsten vieme z tohto vyrátať $h_{\text{osemsten}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (lebo tam $|AD| = 1$). A pre naše teleso sa výška natiahne presne k-krát, teda bude $h_{\text{teleso}} = \frac{18}{\sqrt{3}}$. To už len dosadíme a máme:

$$|AD| = \sqrt{h_{\text{teleso}}^2 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{325}{3}} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{39}}{3}.$$