Úloha 1J. Malý Péťa je velký drsňák a nosí vždy jen ponožky různých barev. Ve skříni má 30 červených, 40 zelených a 40 modrých ponožek. Tato skříň se však nachází ve sklepě v místech, kde se nesvítí, takže když Péťa vytáhne nějakou ponožku, nedovede rozeznat její barvu. Kolik nejméně ponožek musí vytáhnout, aby mezi nimi bylo určitě aspoň osm různobarevných párů? Jedna ponožka může být započítána nejvýše v jednom páru.

Výsledek. 48

Řešení. Jestliže Péťa vytáhne například všechny zelené a sedm červených ponožek, zřejmě z nich osm různobarevných párů neposkládá. Tedy 47 nestačí. Pokud však vytáhne 48 ponožek, pak je mezi nimi určitě aspoň $\frac{48}{3} = 16$ ponožek jedné barvy a aspoň $48 - 40 = 8$ ponožek, které mají nějakou jinou barvu. To nám zaručuje osm párů, a tedy 48 už stačí.

Úloha 2J. Nechť x a y jsou kladná celá čísla vyhovující rovnici $x^2 + 2y^2 = 2468$. Určete x, jestliže víte, že řešením rovnice je pouze jedna dvojice (x, y) a že $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$.

Výsledek. 30

Řešení. Vynásobíme-li rovnost $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$ dvěma, dostaneme

$$2468 = 2(28^2 + 2 \cdot 15^2) = (2 \cdot 15)^2 + 2 \cdot 28^2.$$

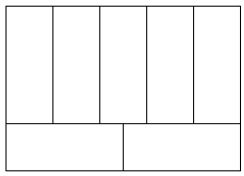
Jelikož víme, že rovnice v zadání má právě jedno řešení, je nutně $x = 30$.

Úloha 3J. Digitální hodinky ukazují čas v hodinách a minutách ve dvacetičtyřhodinovém formátu. Kolik minut denně se na jejich displeji vyskytuje aspoň jedna pětka?

Výsledek. 450

Řešení. Během 120 minut, kdy na pozici hodin svítí 5 nebo 15, je pětka vidět celou dobu. Po zbytek dne je pětka vidět vždy posledních deset minut každé hodiny ($22 \cdot 10 = 220$ minut) a dále pětkrát během zbývajících padesáti minut ($22 \cdot 5 = 110$ minut). Celkem je tedy pětka na displeji 450 minut.

Úloha 4J. Obdélník o obvodu 136 cm je rozdělen na sedm shodných obdélníčků jako na obrázku.



Jaký je obsah tohoto obdélníka v cm^2?

Výsledek. 1120

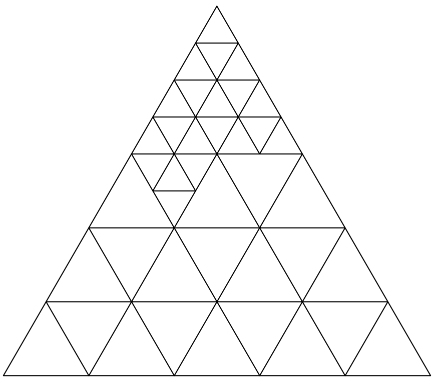
Řešení. Délky stran obdélníčků jsou v poměru $2 : 5$ – označme je $2x$ a $5x$. Délky stran původního obdélníka jsou pak $10x$ a $7x$, tedy jeho obvod je $2 \cdot (10x + 7x) = 34x$. To znamená, že $x = 4$ cm a obsah obdélníka je $10 \cdot 7 \cdot 4^2$ cm^2 = 1120 cm^2.

Úloha 5J. Bonboniéra má tvar rovnostranného trojúhelníka o straně délky s cm a obsahuje $2n$ bonbónů ve tvaru rovnostranného trojúhelníka – n o straně 1 cm a n o straně 2 cm. Bonbóny jsou naskládané těsně vedle sebe tak, aby zaplnily celou bonboniéru. Jaká je nejmenší možná hodnota s?

Výsledek. 10

Řešení. Nechť a je obsah malého bonbónu (toho o straně 1 cm). Pak obsah velkého bonbónu je $4a$ a součet obsahů všech bonbónů je $na + 4na = 5na$. Obsah bonboniéry je s^2a, protože její tvar je stejný jako tvar malého bonbónu, ale její strana je s-krát delší. To znamená, že $5n = s^2$, tedy s je násobkem pěti.

Snadno se ukáže, že není možné vměstnat pět velkých bonbónů do bonboniéry o straně délky 5 cm, takže $s \neq 5$. Nicméně pro $s = 10$ už vhodné uspořádání 20 malých a 20 velkých bonbónů existuje.



Úloha 6J. Malý Péťa vyrostl, i nosí už jen ponožky stejných barev. Navíc dostal mnoho nových ponožek, takže nyní má ve skříni 20 hnědých, 30 červených, 40 zelených, 40 modrých, 30 černých a 20 bílých ponožek. Skříň je však stále ve sklepě, kde není žádné světlo, a Péťa tak není schopen rozeznat barvy ponožek. Kolik nejméně ponožek musí ze skříně vzít, aby měl jistotu, že mezi nimi bude osm párů? Jednu ponožku lze samozřejmě započítat nejvýše do jednoho páru.

Výsledek. 21

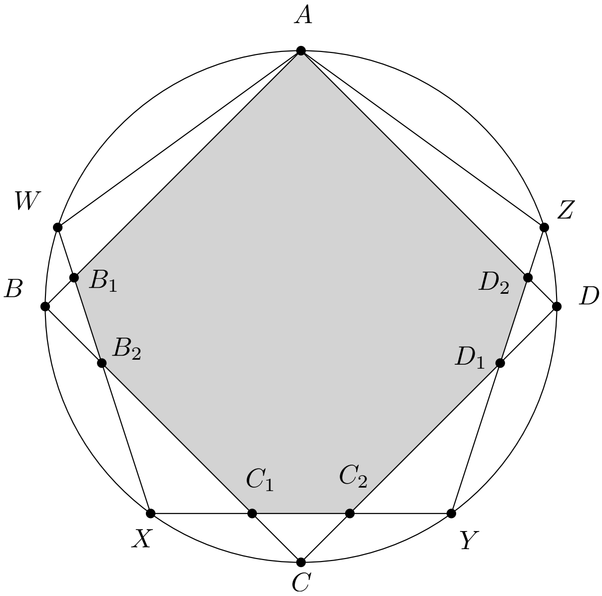
Řešení. Vytvoříme-li z vybraných ponožek co největší počet párů, zbyde vzhledem k počtu barev nejvýše šest nespárovaných. Jestliže vezme Péťa ze skříně 21 ponožek, bude mezi nimi dokonce nejvýše pět nespárovaných, neboť z $21 - 6 = 15$ ponožek nelze beze zbytku vytvořit páry. Pak ovšem zbylé ponožky tvoří alespoň $\frac{21-5}{2} = 8$ párů.

Naopak 20 ponožek ještě nestačí, neboť se může stát, že mezi nimi bude sedm párů a šest jednotlivých ponožek, každá jiné barvy. Z toho vyplývá, že Péťa potřebuje k zajištění osmi párů nejméně 21 ponožek.

Úloha 7J. Čtverec a pravidelný pětiúhelník mají společnou kružnici opsanou a sdílejí vrchol. Jak velký je největší vnitřní úhel mnohoúhelníka, který je jejich průnikem?

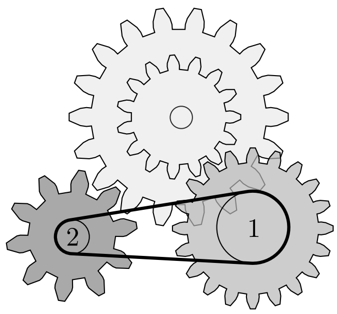
Výsledek. 153°

Řešení. Označíme-li vrcholy jako na obrázku, je průnikem čtverce a pětiúhelníka sedmiúhelník $AB_1B_2C_1C_2D_1D_2$.



Vzhledem k symetrii obrázku podle osy AC se stačí zabývat vnitřními úhly u vrcholů A, B_1, B_2 a C_1. První a poslední z nich mají zřejmě velikost 90° a 135°. Jelikož úsečka B_2D_1 je rovnoběžná s úsečkou XY, dostáváme $|\sphericalangle D_1B_2B_1| = |\sphericalangle YXW| = 108°$, a jelikož je zároveň rovnoběžná s úsečkou BD, je $|\sphericalangle C_1B_2D_1| = |\sphericalangle CBD| = 45°$. Vnitřní úhel u B_2 je pak 153°. Protože trojúhelník B_1BB_2 je pravoúhlý, snadno dopočteme, že vnitřní úhel u B_1 má velikost 117°. Největší vnitřní úhel má tedy velikost 153°.

Úloha 8J. Kolem koleček 1 a 2 je natažen řemen. Kolečko 1 má průměr 48 mm. Jaký průměr musí mít kolečko 2, pokud má celý mechanismus fungovat?



Výsledek. 20 mm

Řešení. Spočteme-li počty zubů všech kol, zjistíme, že jedna otáčka kolečka 1 vynutí $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ otáčky dvojitého kola a jedna otáčka dvojitého kola vynutí $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ otáčky kolečka 2. Tedy jedna otáčka kolečka 1 způsobí $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$ otáčky kolečka 2. Obvod kolečka 2 se proto musí rovnat $\frac{5}{12}$ obvodu kolečka 1. Protože poměr průměrů je roven poměru obvodů, spočteme průměr kolečka 2 jako $\frac{5}{12} \cdot 48$ mm $= 20$ mm.

Úloha 9J. Honza si na své dvaašedesátidenní prázdniny v červenci a srpnu připravil přesný plán, které dny bude lhát a které dny bude mluvit pravdu. V k-tém dni (pro každé k od 1 do 62) pak prohlásil, že měl v plánu lhát aspoň k dní. Kolik z těchto výpovědí bylo lživých?

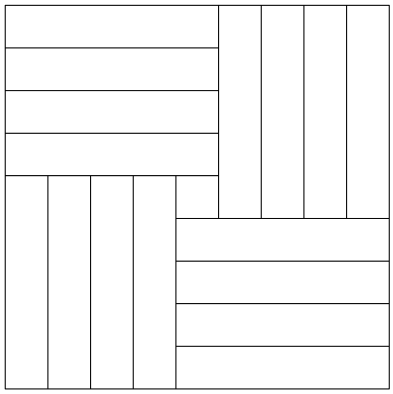
Výsledek. 31

Řešení. Všimneme si, že pokud mluví Honza nějaký den pravdu, pak musí mluvit pravdu i všechny předchozí dny. Kdyby mluvil pravdu méně než 31 dní, pak by musel lhát více než 31 dní, což by bylo v rozporu s tím, že 31. den lhal. Pokud by naopak mluvil pravdu více než 31 dní, pak by musel lhát méně než 31 dní, což by bylo v rozporu s pravdivou výpovědí z 31. dne. Honza tedy musel lhát právě 31 dní.

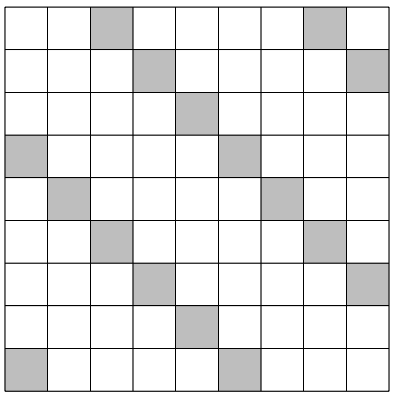
Úloha 10J. Šavlík s Filipem hráli lodě ve čtverci 9×9. Šavlík někam umístil letadlovou loď o rozměrech 5×1, resp. 1×5. Jaký je nejmenší počet polí, do nichž musí Filip vystřelit, aby loď s jistotou zasáhl?

Výsledek. 16

Řešení. Z následujícího obrázku je patrné, že 16 střel je nutných, neboť do každého obdélníka 5×1 musí Filip vystřelit nejméně jednou.



Oněch 16 střel stačí, jak je vidět z obrázku níže.



Úloha 11J / 1S. Jaká je největší možná hodnota společného dělitele po dvou různých kladných celých čísel a, b, c splňujících vztah $a + b + c = 2015$?

Výsledek. 155

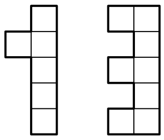
Řešení. Máme $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015 = a + b + c = \mathrm{NSD}(a, b, c) \cdot (a_0 + b_0 + c_0)$ pro nějaká navzájem různá kladná čísla a_0, b_0, c_0 (tedy $a_0 + b_0 + c_0 \geq 6$). Z toho vyplývá, že $\mathrm{NSD}(a, b, c)$ může být nanejvýš $5 \cdot 31 = 155$. Pro dosažení tohoto maxima stačí zvolit a_0, b_0, c_0 tak, aby $a_0 + b_0 + c_0 = 13$. Například $a_0 = 1$, $b_0 = 5$, $c_0 = 7$ dávají $a = 1 \cdot 155$, $b = 5 \cdot 155$, $c = 7 \cdot 155$ s požadovanými vlastnostmi.

Úloha 12J / 2S. Vlak zásobující továrnu sestává z lokomotivy (která je vždy na začátku) a šesti vagónů, z nichž každý veze buď železnou rudu, nebo uhlí. David chtěl takový vlak vyfotografovat, ale podařilo se mu zachytit jen tři sousední vagóny. První – ten z nich, který byl nejblíže lokomotivě – vezl železnou rudu a následující dva vezly uhlí. Kolik různých vlaků mohl David takto vyfotografovat?

Výsledek. 31

Řešení. Máme čtyři možnosti umístění vyfotografovaného úseku R-U-U v rámci celého vlaku. Pro každou z těchto možností lze 2^3 způsoby doplnit zbytek vlaku. Takto však započítáme vlak R-U-U-R-U-U dvakrát, takže počet různých vlaků je $4 \cdot 8 - 1 = 31$.

Úloha 13J / 3S. Útvar slepený z několika stejně velkých krychliček vypadá zezadu jako jednička a shora jako trojka, viz obrázek. Navíc víme, že obsahuje maximální možný počet krychliček. Kolik z nich je vidět při pohledu zprava?

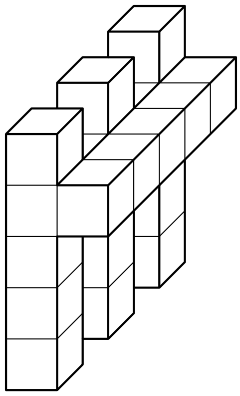


Poznámka: Následující obrázek ilustruje pohled zezadu a pohled shora na průhledné krychli.

Výsledek. 17

Řešení. Útvar se zřejmě vejde do kvádru o rozměrech $2 \times 5 \times 5$. Rozdělme jej napůl a rozeberme každou z částí $1 \times 5 \times 5$ zvlášť. Podíváme-li se na útvar zepředu, uvidíme zrcadlově převrácenou jedničku. V pravé části je tedy zepředu vidět jedna krychlička a shora pět, což nám dává jedinou možnost, a to pět krychliček v jedné řadě. Podobně v levé části vidíme zepředu pět krychliček a shora tři, což může být nejvýše pět krychliček v každém ze tří sloupců.

Výsledný útvar je znázorněn na obrázku níže. Podíváme-li se na něj zprava, uvidíme 17 krychliček.



Úloha 14J / 4S. Řekneme, že přirozené číslo n je *lahodné*, jestliže ciferný součet n i $n + 10$ je dělitelný sedmnácti. Jaké je nejmenší lahodné číslo?

Výsledek. 7999

Řešení. Označme $Q(r)$ ciferný součet čísla r. Jestliže je cifra na pozici desítek různá od 9, pak $Q(n + 10) = Q(n) + 1$. Proto musí být na místě desítek devítka. Jestliže je nyní cifra na pozici stovek různá od 9, máme $Q(n + 10) = Q(n) - 8$, ale pokud je na místě stovek devítka, zatímco na místě tisíců nikoliv, dostaneme $Q(n + 10) = Q(n) - 17$. V tomto případě mohou být oba ciferné součty dělitelné sedmnácti. Protože hledáme co nejmenší n, předpokládejme, že tento případ nastane a že $Q(n) = 2 \cdot 17 = 34$. Součet všech cifer kromě těch na pozici desítek a stovek pak musí být $34 - 2 \cdot 9 = 16 < 2 \cdot 9$, tedy stačí dvě další cifry. S těmito informacemi již snadno dojdeme k výsledku $n = 7999$.

Úloha 15J / 5S. Autobusová doprava provozuje linku mezi městy A a D s mezizastávkami v městech B a C (v tomto pořadí). Cena jízdenky je přímo úměrná vzdálenosti, kterou autobus urazí, tedy například jízdenka z A do C stojí stejně jako jízdenky z A do B a z B do C dohromady. Prodávají se přitom pouze jednosměrné jízdenky. Tonda je vášnivý sběratel a rozhodl se do své sbírky získat jízdenky všech možných cen (stačí mu od každé ceny jedna). Zatím má jízdenky o cenách 10, 40, 50, 60 a 70. Jaké jsou možné ceny poslední jízdenky?

Výsledek. 20, 110

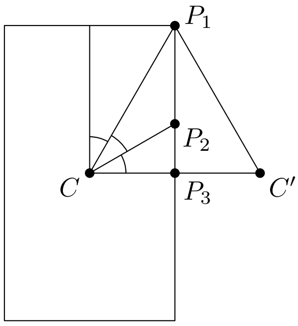
Řešení. Předpokládejme nejprve, že Tonda již vlastní jízdenku mezi A a D. Její cena pak musí být 70. Jelikož je tato částka součtem cen jízdenek na trasách AB, BC a CD, z nichž nejméně dvě už Tonda má, je patrné, že jediné vyhovující rozdělení je 10, 20, 40. Cena chybějící jízdenky je tedy 20. Snadno ověříme, že i ostatní ceny v tomto případě souhlasí.

Pokud Tondovi nejdražší jízdenka chybí, pak musí 70 stát cesta s jednou zastávkou. Jediný způsob, jak dostat 70 jako součet cen dvou jízdenek, které už Tonda má, je $60 + 10$. To znamená, že jízdenka na zbývající část cesty mezi A a D stojí 40 a nejdražší jízdenka pak $10 + 40 + 60 = 110$. Opět snadno ověříme, že i tato možnost vyhovuje zadání.

Úloha 16J / 6S. Vejtek v hodinářství obdivuje hodinky zabalené v ploché průhledné krabičce obdélníkového tvaru. Všiml si, že střed hodinek (místo, kde se setkávají hodinová a minutová ručička) je přesně ve středu krabičky. Navíc zpozoroval, že v poledne ukazuje malá ručička do středu kratší strany krabičky, zatímco v jednu hodinu ukazuje přesně do rohu. Jak daleko jsou od sebe body na hranici krabičky, na něž ukazuje malá ručička v jednu a ve dvě hodiny? Délka kratší strany krabičky je 3 cm.

Výsledek. $\sqrt{3}$ cm

Řešení. Označme C střed krabičky a P_x bod na její hranici, na který ukazuje malá ručička v x hodin. Protože $|\sphericalangle P_2CP_1| = |\sphericalangle P_3CP_2| = 30°$, je bod P_2 středem kružnice vepsané rovnostranného trojúhelníka $CC'P_1$, kde C' je obraz bodu C v osové souměrnosti podle přímky P_1P_3. Tedy P_2 je zároveň těžištěm a hledaná vzdálenost $|P_1P_2|$ je rovna dvěma třetinám výšky. Délka strany trojúhelníka $CC'P_1$ je 3 cm, tedy $|P_1P_2| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \text{ cm} = \sqrt{3}$ cm.



Úloha 17J / 7S. Najděte devíticiferné číslo, které obsahuje každou z cifer $1, 2, \ldots, 9$ právě jednou, a navíc každé dvě jeho sousední cifry tvoří dvojciferné číslo, jež je součinem $k \cdot l$ dvou čísel $k, l \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Výsledek. 728163549

Řešení. Hledané devíticiferné číslo nazveme z. Dvojčíslí xy (kde $x, y \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ a $x \neq y$) nazveme *přípustné*, kdykoliv existují $k, l \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ splňující $10x + y = kl$. Jelikož jediné přípustné dvojčíslí obsahující devítku je 49, musí se toto dvojčíslí objevit na konci čísla z. Přípustná dvojčíslí obsahující sedmičku jsou pouze 27 a 72. Nemohou se vyskytnout obě zároveň a konec čísla z už je obsazen, takže 72 musí být na začátku z. Přípustná dvojčíslí s osmičkou jsou 18, 28, 48 a 81, přičemž čtyřka už se vyskytuje ve spojení s devítkou. Máme tedy jedinou možnost, a to postavit blok 281. Nyní je $z = 7281\ldots49$ a zbývá doplnit číslice 3, 5 a 6. Protože 13 ani 34 nejsou přípustná dvojčíslí a jediné přípustné dvojčíslí xy s $x \in \{5, 6\}$ a $y = 3$ je 63, dostáváme $z = 728163549$. Toto z zřejmě splňuje podmínky zadání.

Úloha 18J / 8S. Najděte největší prvočíslo p menší než 210 takové, že číslo $210 - p$ je složené.

Poznámka: Připomeňme, že jednička není ani prvočíslo, ani číslo složené.

Výsledek. 89

Řešení. Namísto hledání největšího prvočísla p budeme hledat nejmenší složené číslo n takové, že $210 - n$ je prvočíslo. Máme $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Kdyby tedy bylo n dělitelné dvěma, třemi, pěti nebo sedmi, platilo by totéž pro $210 - n$, neboli $210 - n$ by nebylo prvočíslo. Nejmenším kandidátem na n je proto 11^2 a to nám dává $p = 210 - 121 = 89$, což je prvočíslo.

Úloha 19J / 9S. Základní škola se rozhodla nakoupit spoustu tužek pro prvňáky, rozdělené do tříd A, B a C. Kdyby se tužky rozdaly spravedlivě ve všech třídách, dostal by každý žáček devět tužek. Pokud by se rozdaly jen ve třídě A, dostal by jich každý 30, a pokud jen ve třídě B, měl by každý 36. Kolik tužek by dostal každý žáček ve třídě C, kdyby se tužky rozdaly jen tam?

Výsledek. 20

Řešení. Nechť T je celkový počet tužek a a, b, c jsou počty žáků v příslušných třídách. Ze zadání víme, že $T = 9(a + b + c) = 30a = 36b$, a hledáme T/c. Dosazením $a = T/30$ a $b = T/36$ do první rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{3}{10}T + \tfrac{1}{4}T + 9c, \\ \tfrac{9}{20}T &= 9c, \\ \tfrac{T}{c} &= 20. \end{aligned}$$

Úloha 20J / 10S. Najděte všechny čtyřciferné čtverce, jejichž první i druhé dvojčíslí jsou nenulové čtverce (druhý z nich může začínat nulou).

Poznámka: Čtvercem rozumíme druhou mocninu nějakého celého čísla.

Výsledek. 1681

Řešení. Jelikož pro $k \geq 50$ platí $(k+1)^2 - k^2 > 100$, je $50^2 = 2500$ jediný čtverec začínající dvojčíslím 25 a obdobnou vlastnost mají zřejmě čísla 3600, 4900, 6400 a 8100. Tedy první dvojčíslí musí být 16. Jediným čtvercem větším než 1600 a menším než 1700 je $41^2 = 1681$. Ten má zřejmě všechny požadované vlastnosti.

Úloha 21J / 11S. Řidič jel konstantní rychlostí po dálnici vedoucí mezi dvěma městy. Bohužel se některé úseky dálnice opravovaly, a tak byl nucen při průjezdu těmito místy snížit rychlost o čtvrtinu. V čase, kdy by obyčejně dorazil do cíle, měl proto za sebou teprve šest sedmin celkové vzdálenosti. Jaký zlomek celkového času strávil do této chvíle v opravovaných úsecích?

Výsledek. 4/7

Řešení. Je-li x zlomek celkového času strávený v opravovaných úsecích, pak $1-x$ je zlomek času strávený na zbytku dálnice. Tedy

$$\frac{6}{7} = \frac{3}{4}x + 1 - x,$$

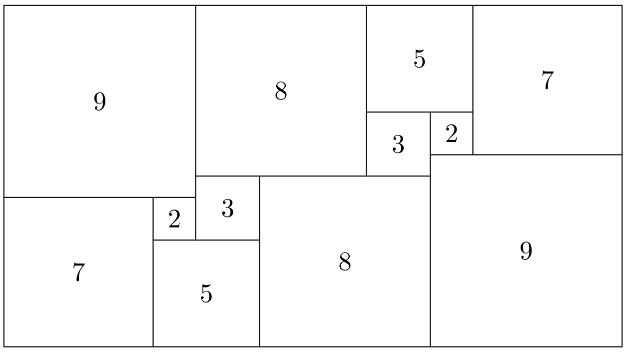
což nám dává $x = 4/7$.

Úloha 22J / 12S. Obdélník s celočíselnými délkami stran je rozřezán na dvanáct čtverců, které mají délky stran 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Jaký je obvod tohoto obdélníka?

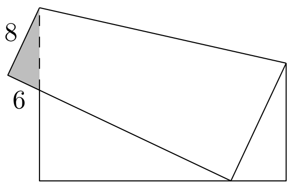
Výsledek. 90

Řešení. Sečteme-li obsahy všech čtverců, zjistíme, že obsah obdélníka je $464 = 2^4 \cdot 29$. Obdélník musí mít navíc délky stran aspoň 9, neboť jinak by se do něho nevešly čtverce o straně 9. Jediná možnost, jak 464 rozložit na součin dvou čísel větších než 9, je $16 \cdot 29$, což dává obvod 90.

Poznámka: Rozřezání obdélníka 16×29 na čtverce s příslušnými délkami stran skutečně existuje, jak ukazuje obrázek.



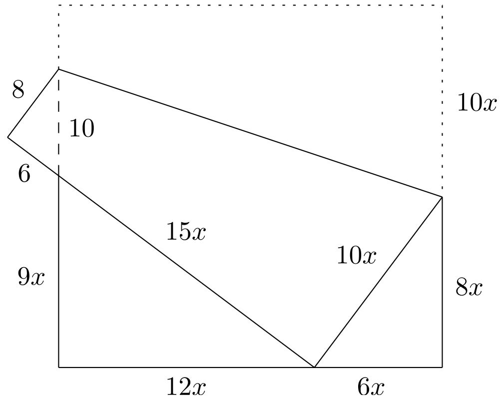
Úloha 23J / 13S. Čtvercový list papíru je přeložen tak, že se jeden z jeho vrcholů dotýká jedné z protějších stran jako na obrázku. V trojúhelníčku přesahujícím obrys původního čtverce má delší z vnějších stran (sousedící s přehybem) délku 8 cm a kratší z nich má délku 6 cm.



Jaká je délka strany papíru?

Výsledek. 36 cm

Řešení. Zřejmě jsou všechny trojúhelníky na obrázku pravoúhlé a navzájem podobné podle věty *uu*. Označíme-li délky stran pravého dolního trojúhelníka jako $6x$, $8x$ a (z Pythagorovy věty) $10x$, pak je délka strany čtverce rovna $18x$. To znamená, že trojúhelník vlevo dole má spodní stranu délky $18x - 6x = 12x$. Délky zbylých dvou stran jsou pak díky podobnosti $9x$ a $15x$, tedy délka strany čtverce je také $15x + 6$ cm. Z rovnosti $15x + 6$ cm $= 18x$ dostáváme $x = 2$ cm, neboli $18x = 36$ cm.



Úloha 24J / 14S. Starý křižník pluje konstantní rychlostí po kanálu. Štěpána by zajímalo, jak je dlouhý. Zatímco se loď pomalu pohybuje vpřed, kráčí Štěpán konstantní rychlostí po břehu od zádi až k přídi, přičemž napočítá 240 kroků. Poté se hned otočí a kráčí zpět k zádi, což mu vyjde na 60 kroků. Jaká je délka křižníku v krocích?

Výsledek. 96

Řešení. Za cestu tam i zpět napočítá Štěpán 300 kroků, přičemž křižník se pohne o $240 - 60 = 180$ kroků. Zatímco tedy Štěpán udělá 60 kroků od přídě k zádi, urazí křižník $180 : 5 = 36$ kroků. Délka křižníku je proto $60 + 36 = 96$ kroků.

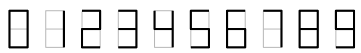
Úloha 25J / 15S. Číslo $137641 = 371^2$ je nejmenším šesticiferným číslem, z něhož je možné vyškrtnout tři navzájem různé cifry a dostat tak jeho druhou odmocninu: $\cancel{1}37\cancel{6}\cancel{4}1$. Najděte největší šesticiferné číslo s touto vlastností.

Výsledek. $992016 = 996^2$

Řešení. Stačí spočítat čtverce $(1000 - n)^2 = 1000 \cdot (1000 - 2n) + n^2$ pro $n = 1, 2, 3, 4$. Máme $999^2 = 998001$, $998^2 = 996004$, $997^2 = 994009$ a $996^2 = 992016$, přičemž první tři čísla zřejmě nevyhovují, ale čtvrté už ano: $99\cancel{2}\cancel{0}\cancel{1}6 = 996 = \sqrt{992016}$.

Úloha 26J / 16S. Martina naťukala něco do kalkulačky a na displeji se objevilo trojciferné číslo x. Olin, který seděl naproti ní, si všiml, že ze svého pohledu (vzhůru nohama) přečte na displeji přesně číslo, které je o 369 větší než x. Jaké je ono Martinino číslo x?

Poznámka: Kalkulačka má segmentový displej, číslice 0–9 tedy vypadají takto:



Výsledek. 596

Řešení. Otočíme-li číslici vzhůru nohama, mohou nastat tři možnosti: buď se nezmění (0, 2, 5, 8), nebo se změní ($6 \leftrightarrow 9$), nebo nebude výsledkem žádná číslice (1, 3, 4, 7). Nechť x je Martinino číslo a x' je toto číslo vzhůru nohama. Protože 369 končí devítkou, musí x končit jednou z cifer 0, 6, 9 – všechny ostatní přípustné cifry totiž vedou na nepřípustnou poslední cifru čísla x'.

Kdyby x končilo nulou, pak by x' začínalo nulou, což není možné. Kdyby x končilo devítkou, pak by x' končilo osmičkou, tedy x by začínalo osmičkou a x' šestkou, což zjevně odporuje podmínce $x' > x$. Předpokládejme proto, že x končí šestkou. Pak máme $x = \overline{5a6}$ a $x' = \overline{9a'5}$ pro nějakou přípustnou cifru a a její převrácenou verzi a'. Vzhledem k podmínce $x' - x = 369$ není možné, aby $a = a'$, tedy nutně $a \in \{6, 9\}$. Nyní snadno dopočteme, že $x = 596$.

Úloha 27J / 17S. Na ostrově Na-boi žijí tři rodiny, z nichž v každé mají dva syny a dvě dcery. Kolika způsoby může těchto dvanáct potomků utvořit šest manželských párů, jestliže sňatky sourozenců nejsou přípustné?

Výsledek. 80

Řešení. Označme rodiny jako A, B a C. Pokud si oba synové z A vezmou dcery z jedné rodiny (BÚNO B), musí si dcery z A vzít syny z C, aby se zabránilo sňatkům sourozenců v C. Synům z B pak nezbývá než si vzít dcery z C. V tomto případě máme celkem $2 \cdot 2^3 = 16$ možností – přiřazení rodin lze provést dvěma způsoby a v každé rodině se pak mohou dcery dvěma způsoby vdát za syny z příslušné jiné rodiny.

Pokud si jeden syn z A vezme dceru z B a druhý dceru z C, pak si v zájmu předejití sourozeneckým sňatkům musí rovněž jedna dcera z A vzít syna z B a druhá syna z C. Synové z A mají v tomto případě dohromady osm možností výběru manželek a totéž platí pro dcery z A. Poté už zbývá jen spárovat zbývající syny a dcery z rodin B a C, což lze udělat právě jedním způsobem. Tento případ tedy zahrnuje $8 \cdot 8 = 64$ možností.

Celkem máme $16 + 64 = 80$ možností, jak utvořit šest manželských párů.

Úloha 28J / 18S. Jana a Jirka upekli obrovskou pizzu, kterou rozřezali na padesát stejných dílků (kruhových výsečí), a na každý z těchto dílků dali postupně po směru hodinových ručiček $1, 2, 3, \ldots, 50$ oliv. Nyní by pizzu chtěli rovným řezem mezi dílky rozdělit napůl tak, aby Jana dostala dvakrát více oliv než Jirka. Jaký bude součet počtu oliv na čtyřech dílcích sousedících s tímto řezem?

Výsledek. 68, 136

Řešení. Označme dílky čísly 1–50 podle počtu oliv. Řez nemůže procházet mezi dílky 1 a 50, respektive 25 a 26, neboť

$$2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 25) < 26 + 27 + \cdots + 50.$$

Můžeme tedy předpokládat, že dílky sousedící s řezem mají čísla n, $n+1$, $n+25$, $n+26$, kde $1 \leq n \leq 24$. Součet těchto čísel je $4n + 52$. Nyní spočteme $(n+1) + (n+2) + \cdots + (n+25) = 25n + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 = 25(n+13)$ a $1 + 2 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 25 \cdot 51$. Máme dvě možnosti:

$$25(n+13) = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 17 \quad \text{nebo} \quad 25(n+13) = \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 34.$$

První z nich dává $n = 4$ a hledaný součet je pak $4n + 52 = 68$. Pro druhou možnost dostaneme $n = 21$ a $4n + 52 = 136$. Úloha má tedy dvě řešení, a to 68 a 136.

Úloha 29J / 19S. Najděte všechna prvočísla p, pro která je $19p + 1$ třetí mocninou celého čísla.

Výsledek. 421

Řešení. Jestliže p je takové prvočíslo, pak $19p + 1 = k^3$ pro nějaké $k > 2$. Dostáváme tak rovnost

$$19p = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1).$$

Protože $k > 2$, obě závorky na pravé straně jsou vlastními děliteli čísla $19p$. Ovšem $19p$ je součin dvou prvočísel, tedy $k - 1 = 19$ nebo $k^2 + k + 1 = 19$. V prvním případě je $k = 20$ a $p = 400 + 20 + 1 = 421$, což je prvočíslo. Druhý případ vede na kvadratickou rovnici $k^2 + k - 18 = 0$, která nemá žádný celočíselný kořen. Jediným řešením úlohy je tedy prvočíslo 421.

Úloha 30J / 20S. Mějme rovnoběžník $ABCD$ a body E, F postupně na stranách AD, AB takové, že $2|AE| = |ED|$ a $2|AF| = |FB|$. Přímky CF a CE protínají úhlopříčku BD postupně v bodech G a H. Jakou část plochy rovnoběžníka $ABCD$ zaujímá pětiúhelník $AFGHE$?

Výsledek. $\frac{7}{30}$

Řešení. V následujícím textu budeme obsah útvaru značit hranatými závorkami. Jelikož jsou trojúhelníky EHD a CHB podobné, platí

$$\frac{|BH|}{|HD|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|AD|}{\frac{2}{3}|AD|} = \frac{3}{2}$$

a z podobnosti trojúhelníků FBG a CDG máme $\frac{DG}{GB} = \frac{3}{2}$. Tedy $|DH| = |BG| = \frac{2}{5}|DB|$ a $|HG| = \frac{1}{5}|DB|$. Vzhledem k tomu, že

$$[ECD] = \frac{2}{3}[ACD] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}[ABCD] = [FBC],$$

dostáváme

$$[AFGHE] = [AFCE] - [GCH] = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)[ABCD] = \frac{7}{30}[ABCD].$$

Úloha 31J / 21S. Najděte největší pěticiferné číslo s nenulovými ciframi, které má následující vlastnosti:

- První trojčíslí tvoří číslo devětkrát větší než poslední dvojčíslí.
- Poslední trojčíslí tvoří číslo sedmkrát větší než první dvojčíslí.

Výsledek. 85595

Řešení. Nechť $\overline{abcde}$ je pěticiferné číslo takové, že $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{de}$ a $\overline{cde} = 7 \cdot \overline{ab}$. Pak

$$63 \cdot \overline{de} = 7 \cdot \overline{abc} = 70 \cdot \overline{ab} + 7c = 10 \cdot \overline{cde} + 7c = 1007c + 10 \cdot \overline{de},$$

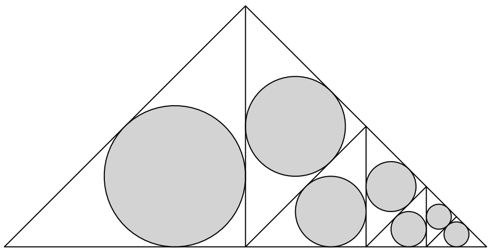
tedy $\overline{de} = \frac{1007c}{53} = 19c$. Podobně dostaneme, že $\overline{ab} = 17c$. Jestliže $c \geq 6$, pak čísla $17c$ a $19c$ jsou větší než 100. To znamená, že c může být nanejvýš 5. Pro $c = 5$ dostáváme $\overline{abcde} = 17119c = 85595$.

Úloha 32J / 22S. V kruhu sedělo dvanáct bystrých mužů a každému z nich byla náhodně rozdána jedna z dvanácti karet – devíti prázdných a tří význačných označených jako J, Q a K. Každý z mužů se podíval na svou kartu a poté ji poslal sousedovi po pravé ruce. Takto se pokračovalo dále, přičemž po každém zhlédnutí karty byli všichni v jeden okamžik vyzváni, aby se přihlásili, pokud vědí, kdo právě drží kterou význačnou kartu. V prvních čtyřech kolech se nepřihlásil nikdo a po spatření páté karty zvedl ruku jeden člověk. V následujícím kole, tj. po šesti kartách, se přihlásilo x lidí a v tom dalším y lidí. Určete xy.

Výsledek. 42

Řešení. První člověk, který zvedl ruku, musel být také první, kterému prošly rukama všechny tři význačné karty. Označme je v tomto pořadí C_1, C_2 a C_3. Kartu C_3 dostal muž určitě jako pátou, jelikož jinak by mohl zvednout ruku už ve čtvrtém kole. Kartu C_1 musel naopak dostat už na začátku, neboť v opačném případě by se v předchozím kole mohl přihlásit soused po jeho levé ruce. Od tohoto okamžiku tedy všichni znali polohu karet C_1 a C_3, ale ne všichni dovedli říct, které význačné karty to jsou. V dalších kolech se proto přihlásili právě ti lidé, kterým prošla rukama karta C_2 a aspoň jedna z karet C_1 a C_3. Snadno nahlédneme, že po šestém kole bylo takových lidí šest a po sedmém kole sedm, tedy odpověď je 42.

Úloha 33J / 23S. Uvnitř rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, jehož základna má délku 1, bylo sestrojeno sedm kružnic jako na následujícím obrázku:



Jaký je součet jejich obsahů?

Výsledek. $\pi\frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \pi\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4} = \pi\frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2} = \pi\frac{1}{4(3+2\sqrt{2})}$

Řešení. Kdykoliv rozdělíme rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník na dva shodné trojúhelníky, pak jsou tyto trojúhelníky podobné původnímu trojúhelníku s koeficientem podobnosti $1 : \sqrt{2}$. Tedy rovněž poloměr každé nové kružnice je $\sqrt{2}$-krát menší než poloměr té předchozí, neboli její obsah je polovinou obsahu té předchozí. Jinými slovy se součet obsahů kružnic při dělení trojúhelníka nemění, takže stačí spočítat obsah kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Protože odvěsny trojúhelníka mají z Pythagorovy věty délku $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a kolmice na odvěsny vedené středem kružnice vepsané tvoří spolu s těmito odvěsnami čtverec, je poloměr kružnice vepsané roven $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$. Výsledný obsah je tedy

$$\pi\frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

Úloha 34J / 24S. Najděte všechna prvočísla p taková, že $p + 11$ dělí $p(p + 1)(p + 2)$.

Výsledek. 7, 11, 19, 79

Řešení. Buď je $p = 11$ a pak zřejmě podmínku splňuje, nebo je p nesoudělné s $p + 11$. Ve druhém případě dělí $p + 11$ součin $p(p+1)(p+2)$, právě když dělí součin $(p+1)(p+2)$. Ten se modulo $p+11$ rovná $(-10)\cdot(-9)$, takže musí platit $p + 11 \mid 90$, neboli $p \in \{7, 19, 79\}$.

Úloha 35J / 25S. Stínka obecná (Porcellio scaber) má čtrnáct nohou. Maminka stínka má velké zásoby stejných ponožek a bot a připravuje své děti na nadcházející chladné období. Vysvětluje malému Kubovi, že ponožky i boty si může obout v libovolném pořadí, ale na každou nohu si musí dát nejprve ponožku a až pak botu. Kolika způsoby se může Kuba obout?

Výsledek. $\frac{28!}{2^{14}}$

Řešení. Všechny způsoby obutí lze zakódovat do uspořádaných 28-tic sestávajících ze 14 ponožek a 14 bot, v nichž ponožka na určitou nohu vždy předchází botu na tuto nohu. Pro dvojici ponožky a boty na první nohu máme $\binom{28}{2}$ možností, kam ji v rámci 28-tice umístit. Pro druhou dvojici už máme jen 26 míst, a tedy $\binom{26}{2}$ možností. Takto můžeme pokračovat, dokud nezbyde $\binom{2}{2} = 1$ možnost, kam umístit poslední dvojici. Celkový počet způsobů, jak se může Kuba obout, je tedy

$$\binom{28}{2}\cdot\binom{26}{2}\cdot\binom{24}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{28!}{2^{14}}.$$

Úloha 36J / 26S. Nechť x je reálné číslo splňující $x^3 + 4x = 8$. Jaká je hodnota výrazu $x^7 + 64x^2$?

Výsledek. 128

Řešení. Dosazením $x^3 = 8 - 4x$ do $x^7 + 64x^2$ získáme

$$x^7 + 64x^2 = x \cdot (x^3)^2 + 64x^2 = x(8 - 4x)^2 + 64x^2 = 64x + 16x^3 = 16(x^3 + 4x) = 128.$$

Úloha 37J / 27S. V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou AB buď D průsečík osy úhlu ACB s AB a E průsečík osy úhlu BAC s BC. Víte-li, že $|AE| = 2|CD|$, určete $|\sphericalangle BAC|$.

Výsledek. $36°$

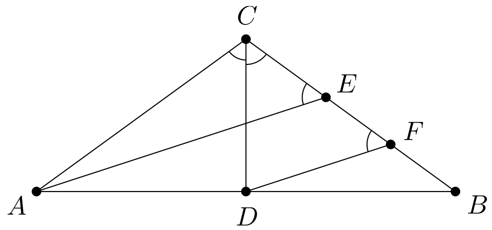
Řešení. Nechť F je bod na straně BC takový, že $AE \parallel DF$. Pak $|DF| = \frac{1}{2}|AE| = |CD|$, tedy trojúhelník FCD je rovnoramenný se základnou FC. Označme $\varphi = |\sphericalangle BAC|$. Pak

$$|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle FCD| = |\sphericalangle DCA| = 90° - \varphi.$$

Protože $|\sphericalangle CAE| = \frac{1}{2}\varphi$, sečtením vnitřních úhlů v trojúhelníku AEC dostaneme

$$\frac{1}{2}\varphi + 3(90° - \varphi) = 180°,$$

odkud máme $\varphi = 36°$.



Úloha 38J / 28S. Je dána posloupnost reálných čísel (a_n) splňující $a_1 = 2015$ a $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_n$ pro všechna $n \geq 1$. Určete a_{2015}.

Výsledek. $\frac{1}{1008}$

Řešení. Odečtením rekurentních vzorců pro n a $n-1$ dostaneme $a_n = n^2 \cdot a_n - (n-1)^2 \cdot a_{n-1}$, což se dá zjednodušit na $a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$. Tedy

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 = \frac{2a_1}{n(n+1)},$$

a proto $a_{2015} = \frac{2 \cdot 2015}{2015 \cdot 2016} = \frac{1}{1008}$.

Úloha 39J / 29S. Míša s Aničkou vymyslely hru. Obarvily stěny dvou dvanáctistěnných kostek azurovou, purpurovou a žlutou barvou tak, aby na každé kostce byla aspoň jedna stěna každé z těchto barev a na první z nich byly právě čtyři stěny žluté. Jestliže nyní hodí oběma kostkami a padnou na nich stejné barvy, vyhrává Míša, v opačném případě vyhrává Anička. Kolik purpurových stěn je na druhé kostce, mají-li obě děvčata stejnou šanci na výhru?

Výsledek. 1, 9

Řešení. Označme c_1, c_2 počty azurových stěn na první a druhé kostce. Podobně označme m_1, m_2 počty purpurových stěn a y_1, y_2 počty žlutých stěn. Víme, že $c_1 + m_1 + y_1 = c_2 + m_2 + y_2 = 12$ a $y_1 = 4$. Navíc přesně v polovině všech možných hodů padnou na obou kostkách stejné barvy, tedy

$$c_1c_2 + m_1m_2 + y_1y_2 = \frac{12^2}{2} = 72.$$

Dosazením z výše zmíněných vztahů za m_1, y_1 a y_2 dostaneme

$$c_1c_2 - c_1m_2 - 4c_2 + 4m_2 + 48 = 72,$$

neboli

$$(c_1 - 4)(c_2 - m_2) = 24.$$

Jelikož $-3 \leq c_1 - 4 \leq 3$ a $-9 \leq c_2 - m_2 \leq 9$, musí být $c_2 - m_2$ buď 8, nebo -8. Protože navíc $0 < y_2 = 12 - c_2 - m_2$, je m_2 buď 1, nebo 9. Přímočarým ověřením zjistíme, že obě tyto hodnoty jsou možné.

Úloha 40J / 30S. Okolo kulatého stolu sedí $n > 24$ žen, z nichž každá buď vždy lže, nebo vždy mluví pravdu. Navíc každá z těchto žen tvrdí následující:

- „Já mluvím pravdu.“
- „Odpočítám-li 24 židlí po mé pravici, tak na té 24. sedí lhářka.“

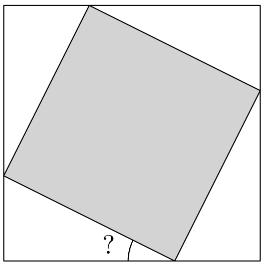
Najděte nejmenší n, pro které tato situace může nastat.

Výsledek. 32

Řešení. Začněme u nějaké ženy a odpočítejme 24 míst od ní směrem doprava, poté znovu 24 míst směrem doprava atd. Po několika krocích se zřejmě dostaneme zpět k ženě, u které jsme začali – označme tento počet kroků jako s. Pak s je nejmenší kladné celé číslo, pro které platí $n \mid 24s$. Tedy $s = n/d$, kde d je největší společný dělitel čísel n a 24.

Všimněme si, že na 24. místě vpravo od pravdomluvné ženy (resp. lhářky) musí vždy sedět lhářka (resp. pravdomluvná žena). Znamená to, že s musí být sudé, neboli n musí být dělitelné vyšší mocninou dvojky než 24. Nejmenší kandidát je 32 a snadno ověříme, že toto číslo je skutečně řešením úlohy.

Úloha 41J / 31S. Dva čtverce mají společný střed, přičemž vrcholy menšího z nich leží na stranách většího. Vystřihneme-li menší čtverec z většího, zbydou nám čtyři shodné trojúhelníky, z nichž každý má obsah rovný jedné dvanáctině obsahu většího čtverce. Jaká je velikost nejmenšího vnitřního úhlu těchto trojúhelníků ve stupních?



Výsledek. 15°

Řešení. Označme a, b ($a \leq b$) délky odvěsen a c délku přepony těchto trojúhelníků. Ze zadání vyplývá, že obsah menšího čtverce je roven dvěma třetinám obsahu většího čtverce. Obsah jednoho trojúhelníka se tedy rovná jedné osmině obsahu menšího čtverce, neboli

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{8}c^2.$$

Nechť α je nejmenší vnitřní úhel trojúhelníků. Pak $a = c \sin\alpha$ a $b = c\cos\alpha$, tedy

$$c^2 = 4ab = 4c^2 \sin\alpha \cos\alpha = 2c^2 \sin 2\alpha,$$

neboli

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

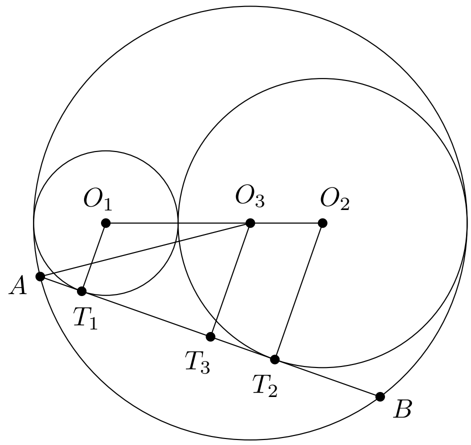
Jelikož $\alpha \leq 45°$, musí být $2\alpha = 30°$, a konečně $\alpha = 15°$.

Úloha 42J / 32S. Kružnice ω_3 o poloměru 3 má vnitřní dotyk s kružnicí ω_1 o poloměru 1 a kružnicí ω_2 o poloměru 2, přičemž ω_1 a ω_2 mají vnější dotyk. Na ω_3 leží body A, B takové, že úsečka AB je vnější společnou tečnou kružnic ω_1 a ω_2. Spočtěte délku úsečky AB.

Výsledek. $\frac{4}{3}\sqrt{14}$

Řešení. Označme O_1, O_2, O_3 postupně středy kružnic ω_1, ω_2, ω_3 a T_1, T_2, T_3 paty kolmic z bodů O_1, O_2, O_3 na AB (tedy T_1 a T_2 jsou body dotyku AB a kružnic ω_1, ω_2). Protože $O_1T_1 \parallel O_2T_2 \parallel O_3T_3$, $|O_1T_1| = 1$, $|O_2T_2| = 2$ a $|O_1O_3| = 2|O_2O_3|$, pomocí podobných trojúhelníků snadno spočteme $|O_3T_3| = \frac{5}{3}$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku AO_3T_3 pak máme

$$|AB| = 2|AT_3| = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{14}.$$



Úloha 43J / 33S. Jednoho dne potkal nebojácný Oidipus Sfingu, která mu položila hádanku. Vymyslela si dvojciferné číslo S a následně umožnila Oidipovi vybrat tři různá jednociferná čísla $a < b < c$ a pro každé z nich se zeptat, zda je jím S dělitelné. Poté, co Oidipus obdržel tři odpovědi ano/ne, měl číslo S uhádnout. Upadl však do zoufalství, neboť tyto podmínky splňovala právě dvě různá čísla. Naštěstí mu Sfinga krátce nato sdělila, že se spletla v dělitelnosti b, což mu umožnilo číslo S s jistotou určit. Jaké bylo číslo S?

Výsledek. 84

Řešení. Existují právě tři dvojciferná čísla, která vyhovují daným odpovědím ohledně dělitelnosti čísly a a c (dvě z nich odpovídají původnímu výroku a jedno opravenému výroku). Navíc musí být obě tyto odpovědi kladné, protože záporná odpověď by vedla na více než tři možná čísla. Ona vyhovující čísla jsou tedy násobky $\mathrm{nsn}(a, c) = m$, což znamená, že $25 \leq m \leq 33$. Jen dvě čísla z tohoto rozmezí jsou nejmenším společným násobkem dvou jednociferných čísel, a proto buď $m = 28 = \mathrm{nsn}(4, 7)$, nebo $m = 30 = \mathrm{nsn}(5, 6)$. Druhá možnost vede na $5 < b < 6$, což není možné. Nechť tedy $a = 4$, $c = 7$ a $m = 28$. Pokud $b = 5$, pak neexistuje dvojciferné číslo dělitelné a, b i c zároveň. Pokud však $b = 6$, pak záporná odpověď na otázku o dělitelnosti číslem b dává čísla 28 a 56, zatímco kladná odpověď dává $S = 84$.

Úloha 44J / 34S. Po silnici se pohybovaly čtyři dopravní prostředky – auto, motocykl, skútr Vespa a kolo. Každý z nich jel nějakou konstantní rychlostí. Auto se v pravé poledne minulo s Vespou, ve dvě hodiny odpoledne s kolem a ve čtyři odpoledne s motocyklem. Motocykl potkal v pět odpoledne Vespu a v šest večer kolo. V kolik hodin se setkala Vespa s kolem?

Výsledek. 15:20

Řešení. Jelikož hledaný časový údaj nezávisí na volbě vztažné soustavy, můžeme předpokládat, že auto stálo celou dobu na místě. Za tohoto předpokladu trvala motocyklu cesta od auta na místo setkání s Vespou hodinu, zatímco Vespa urazila stejnou vzdálenost za pět hodin. Vespa se tedy pohybovala pětkrát pomaleji než motocykl. Podobně odvodíme, že motocykl byl dvakrát rychlejší než kolo, takže poměr rychlostí Vespy a kola byl $2 : 5$.

Jestliže Vespa jela od auta na místo setkání s kolem t hodin, pak kolo urazilo stejnou vzdálenost za $t - 2$ hodin. Poměr časů je roven převrácenému poměru rychlostí, tedy

$$\frac{t-2}{t} = \frac{2}{5},$$

neboli $t = 10/3$. Jelikož Vespa minula auto ve 12:00, znamená to, že s kolem se potkala v 15:20.

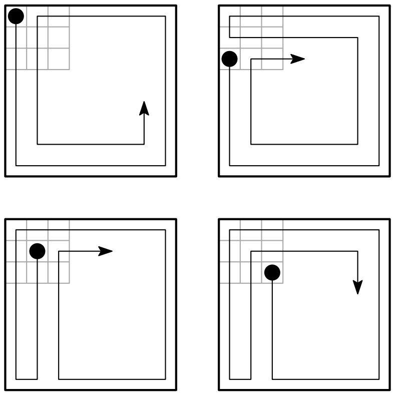
Úloha 45J / 35S. Podlaha haly je pokryta čtvercovým kobercem o straně délky 22 metrů, který je rozdělen na 484 jednotkových čtverců. Robotický vysavač dostal za úkol koberec vysát. Vysává jeden čtverec za druhým podle následujících pravidel:

- Jakmile vysaje nějaký čtverec, už se na něj nikdy nevrátí.
- Pohybuje se jedním směrem, dokud není nucen jej změnit buď kvůli tomu, že dorazil na okraj koberce, nebo proto, že mu v cestě stojí již vysátý čtverec.
- Kdykoliv je nucen změnit směr a má dvě možnosti, sám zvolí jednu z nich.

Robotický vysavač začíná na některém jednotkovém čtverci a může si vybrat libovolný z kolmých směrů. Skončit může na kterémkoliv čtverci. Pro kolik různých počátečních čtverců je vysavač schopen vysát celý koberec?

Výsledek. 20

Řešení. Jestliže vysavač nezačne v jednom z rohových bloků 3×3, vždy nechá část koberce nevysátou. Když totiž poprvé opustí hranu koberce (nejpozději po šesté změně směru), rozdělí dosud nevysáté čtverce na dvě oddělené oblasti a do jedné z nich se už nikdy nedostane. Podobně můžeme argumentovat u čtverců se souřadnicemi $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ a čtverců jim odpovídajících ve zbylých třech rozích. Nicméně čtverce $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 1)$ a $(1, 3)$ již vyhovují, jak je znázorněno na obrázku. Máme tedy celkem $4 \cdot 5 = 20$ možných počátečních pozic vysavače.



Úloha 46J / 36S. Body A, B, C, D, E, F leží postupně po směru hodinových ručiček na kružnici ω, přičemž AD je její průměr. Přímka BF protíná přímky AD a CE postupně v bodech G a H. Předpokládejme, že $|\sphericalangle FEH| = 56°$, $|\sphericalangle DGB| = 124°$ a $|\sphericalangle DEC| = 34°$. Spočtěte $|\sphericalangle CEB|$.

Výsledek. 22°

Řešení. Platí $|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle CDB|$ (obvodové úhly), tedy stačí určit $|\sphericalangle CDB|$. Jelikož je čtyřúhelník $BCEF$ tětivový, máme

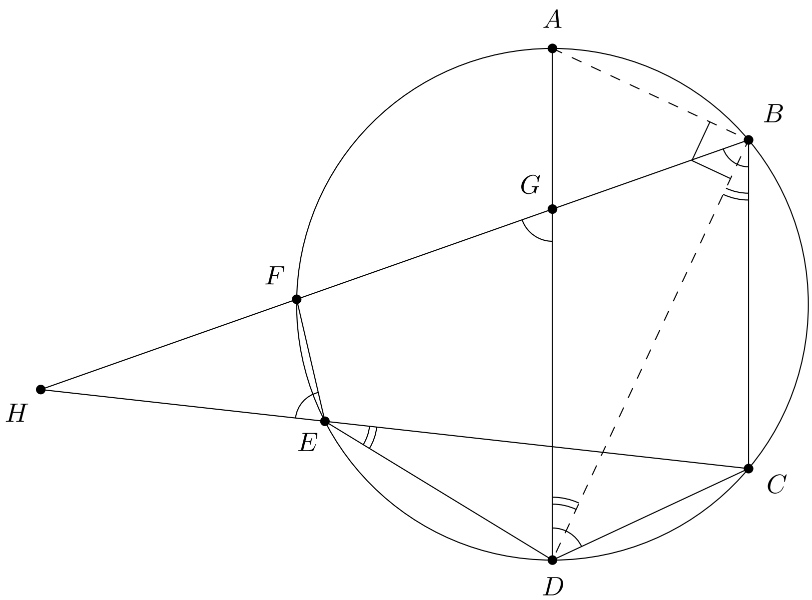
$$|\sphericalangle FBC| = 180° - |\sphericalangle FEC| = 180° - (180° - |\sphericalangle FEH|) = 56°.$$

Zároveň však $|\sphericalangle DGF| = 180° - |\sphericalangle DGB| = 56°$, takže $AD \parallel BC$. Dostáváme $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DBC|$ (rovnoběžnost) a současně $|\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle DEC| = 34°$ (obvodové úhly). Protože zřejmě $|\sphericalangle ABD| = 90°$ a lichoběžník $ABCD$ je tětivový, máme

$$|\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ABC| = 180° - (|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle DBC|) = 56°,$$

a konečně

$$|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle ADC| - |\sphericalangle ADB| = 56° - 34° = 22°.$$



Úloha 47J / 37S. Pět manželských párů se zúčastnilo V večírků. Víme, že na žádném večírku se nepotkali muž a žena tvořící pár, ale každá jiná dvojice (včetně dvojic osob stejného pohlaví) byla společně na právě jednom večírku. Jedna z osob navštívila pouze dva večírky. Pro jaké nejmenší V mohla popsaná situace nastat?

Výsledek. 14

Řešení. Označme manželské páry (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2), (e_1, e_2). Můžeme BÚNO předpokládat, že a_1 je osoba, která navštívila pouze dva večírky, a že prvního z nich se zúčastnily ještě osoby b_1, c_1, d_1 a e_1, zatímco druhého se zúčastnili jejich partneři. Každý další večírek pak mohli navštívit současně nejvýše dva lidé z $b_1, b_2, \ldots, e_1, e_2$, takže se muselo konat alespoň dvanáct dalších večírků. Nyní stačí, aby se osoba a_2 zúčastnila libovolných čtyř z těchto dvanácti večírků, a dostaneme přesně situaci popsanou v zadání. Nejmenší možný počet proběhlých večírků je tedy $V = 14$.

Úloha 48J / 38S. Studenti dostali trojciferné číslo $\overline{abc}$ takové, že $0 < a < b < c$. Měli za úkol jej vynásobit šesti a poté prohodit cifru na místě stovek s cifrou na místě desítek. Pepa udělal chybu a provedl tyto dvě operace v opačném pořadí. Ukázalo se však, že i přesto dostal správný výsledek! Nalezněte $\overline{abc}$.

Výsledek. 678

Řešení. Protože $0 < a < b$, máme $b \geq 2$ a $6 \cdot \overline{bac} > 1200$. Pepa tedy získal čtyřciferné číslo $\overline{defg} = 6 \cdot \overline{bac}$. Dále víme, že $6 \cdot \overline{abc} = \overline{dfeg}$. Odečtením těchto dvou rovností dostaneme

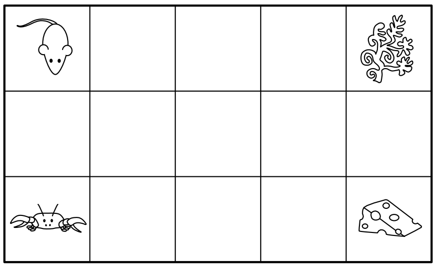
$$6(\overline{bac} - \overline{abc}) = \overline{defg} - \overline{dfeg}.$$

Tedy $540(b - a) = 90(e - f)$, neboli $6(b - a) = e - f$. Jelikož e a f jsou cifry, je $|e - f| \leq 9$, takže vzhledem k podmínce $b > a$ musí být $e - f = 6$ a $b - a = 1$. Dosadíme-li $b = a + 1$ do vztahu $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$, dostaneme

$$\overline{defg} = 6(100(a + 1) + 10a + c) = 660(a + 1) - 6(10 - c).$$

Číslo $\overline{defg}$ se tedy musí lišit od násobku 660 o nějaký nenulový násobek šestky, který je nanejvýš 42 ($c \geq 3$). Vyzkoušíme-li postupně $a = 1, 2, \ldots, 7$, nalezneme všechny kandidáty na $\overline{defg}$: 1938, 2604, 3930, 3936, 4602, 4608. Jedině pro $\overline{defg} = 4608$ má $\overline{bac} = \overline{defg}/6 = 768$ různé nenulové cifry. Nyní už zbývá jen ověřit, že skutečně $6 \cdot \overline{abc} = 6 \cdot 678 = 4068 = \overline{dfeg}$.

Úloha 49J / 39S. Uvažujme mřížku 5×3. V levém horním rohu sedí myš, která chce získat kousek sýra v pravém dolním rohu, a v levém dolním rohu je krab, který si dělá zálusk na řasy v pravém horním rohu. Pohybují se oba současně. Každou sekundu se myš přemístí o jeden čtverec doprava nebo dolů a krab se přesune o jeden čtverec doprava nebo nahoru. Kolika způsoby mohou oba dorazit ke své potravě, aniž by se na nějakém čtverci potkali?



Výsledek. 70

Řešení. Zvířata se mohou potkat pouze v prostřední řadě. Cesta každého z nich je navštíveným úsekem prostřední řady jednoznačně určena a zvířata se potkají, právě když mají tyto úseky neprázdný průnik. Hledáme tedy počet dvojic disjunktních úseků prostřední řady.

Nejprve rozebereme případ, kdy je mezi úseky alespoň jedno prázdné políčko. Počet takovýchto dvojic spočteme jako $\binom{6}{4}$, neboť vybíráme čtyři ze šesti přepážek v prostřední řadě (první a druhá přepážka určují jeden úsek, třetí a čtvrtá druhý úsek). Pokud mezi úseky není žádné volné pole, dostáváme podobně $\binom{6}{3}$ dvojic. Pro každou dvojici úseků máme dva způsoby, jak k nim přiřadit zvířata, což dává celkem $2 \cdot (\binom{6}{4} + \binom{6}{3}) = 70$ způsobů.

Úloha 50J / 40S. Najděte počet kladných celých čísel n nepřevyšujících 1000 takových, že číslo $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ je dělitelem n. Poznámka: Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x, tj. největší celé číslo nepřevyšující x.

Výsledek. 172

Řešení. Platí $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = k$, právě když $k^3 \leq n \leq (k + 1)^3 - 1$. Každé k-té (počínaje k^3) z $3k^2 + 3k + 1$ čísel v tomto intervalu je dělitelné číslem k, tedy takových čísel je $3k + 4$. Nyní už zbývá jen sečíst tyto výrazy přes všechna k, pro která $(k + 1)^3 - 1 \leq 1000$, a přičíst jedničku za číslo 1000, jež rovněž splňuje podmínky. Výsledek je tedy

$$1 + \sum_{k=1}^{9} (3k + 4) = 1 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 172.$$

Úloha 51J / 41S. Najděte všechna reálná čísla m, pro která jsou kořeny rovnice

$$x^3 - 15\sqrt{2}x^2 + mx - 195\sqrt{2} = 0$$

délkami stran pravoúhlého trojúhelníka.

Výsledek. 281/2

Řešení. Nechť a, b, c jsou kořeny dané rovnice, jež jsou zároveň stranami pravoúhlého trojúhelníka. Můžeme BÚNO předpokládat, že $0 < a, b < c$, takže podle Pythagorovy věty platí $a^2 + b^2 = c^2$. Z Viètových vztahů (nebo roznásobením výrazu $(x - a)(x - b)(x - c)$ a porovnáním koeficientů) dostáváme

$$15\sqrt{2} = a + b + c, \quad m = ab + ac + bc, \quad 195\sqrt{2} = abc.$$

Umocníme $15\sqrt{2} - c = a + b$ na druhou a upravíme do tvaru $450 - 30\sqrt{2}c = 2ab$. Po vynásobení c a dosazení $abc = 195\sqrt{2}$ obdržíme kvadratickou rovnici

$$\sqrt{2}c^2 - 15c + 13\sqrt{2} = 0$$

s kořeny $c_1 = \sqrt{2}$ a $c_2 = 13\sqrt{2}/2$. Protože podmínky $0 < a, b < c$ a $abc = 195\sqrt{2}$ připouští pouze $c = 13\sqrt{2}/2$, hledané číslo m se spočte jako

$$m = ab + ac + bc = \frac{1}{2} \cdot ((a + b + c)^2 - 2c^2) = \frac{1}{2} \cdot 450 - c^2 = 281/2.$$

Úloha 52J / 42S. V košíku jsou zelená a červená jablka – aspoň jedno červené a aspoň dvě zelená. Pravděpodobnost, že náhodně vybrané jablko bude červené, je 42-krát větší než pravděpodobnost, že dvě různá náhodně vybraná jablka budou obě zelená. Kolik zelených a kolik červených jablek je v košíku?

Výsledek. 4 zelená a 21 červených

Řešení. Nechť z je počet zelených a c počet červených jablek. Zadání úlohy můžeme přepsat jako

$$\frac{c}{z + c} = 42 \cdot \frac{z \cdot (z - 1)}{(z + c) \cdot (z + c - 1)},$$

ekvivalentně

$$c^2 + (z - 1)c - 42z \cdot (z - 1) = 0.$$

Na tento vztah můžeme pohlížet jako na kvadratickou rovnici s proměnnou c a parametrem z. Diskriminant

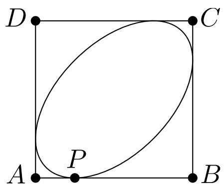
$$(z - 1)^2 + 168z \cdot (z - 1) = 169z^2 - 170z + 1$$

musí být čtverec, jinak by byly kořeny rovnice iracionální. Vzhledem k podmínce $z \geq 2$ dostáváme nerovnosti

$$(13z - 6)^2 = 169z^2 - 156z + 36 > 169z^2 - 170z + 1 > 169z^2 - 208z + 64 = (13z - 8)^2,$$

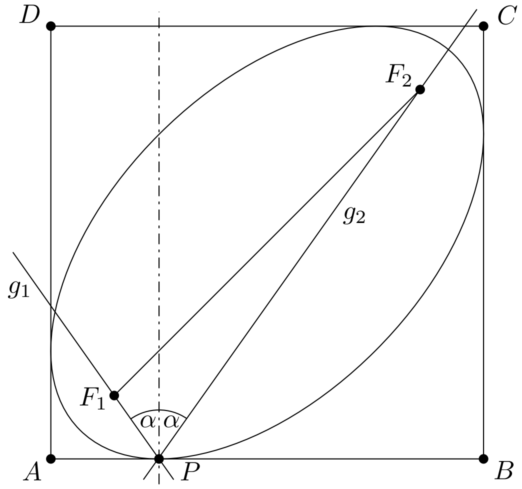
tedy nutně $169z^2 - 170z + 1 = (13z - 7)^2$, neboli $z = 4$. Kořeny kvadratické rovnice jsou pak -24 a 21, ale vzhledem k podmínce $c > 0$ vyhovuje pouze $c = 21$. V košíku jsou tedy čtyři zelená a jednadvacet červených jablek.

Úloha 53J / 43S. Gilbert Bates, velmi bohatý člověk, se rozhodl, že si na zahradě nechá postavit bazén ve tvaru elipsy. Sdělil zahradníkovi své přání, že tato elipsa by se měla vejít do čtverce $ABCD$ o rozměrech 10 m × 10 m, přičemž by se měla dotýkat všech jeho stran. Je-li navíc P bod dotyku elipsy se stranou AB, pak by vzdálenost bodů A a P měla být 2,5 m. Zahradník, který umí sestrojit elipsu, má-li danou polohu ohnisek a nějaký bod této elipsy, si uvědomil, že díky symetrii mu v tomto případě stačí znát vzdálenost ohnisek. Jaká je tato vzdálenost v metrech?



Výsledek. 10

Řešení. Vyřešíme úlohu obecněji. Nechť $ABCD$ je čtverec o straně délky 1, jehož vrchol A leží v počátku souřadnicového systému. Bod P ležící na AB nechť má souřadnice $(b, 0)$, kde $0 < b < \frac{1}{2}$. Jestliže ohnisko F_1 má souřadnice (f, f), pak ohnisko F_2 má souřadnice $(1-f, 1-f)$, neboť obě ohniska musí ležet na úhlopříčce AC stejně daleko od středu čtverce.



Označme g_1, g_2 postupně přímky procházející body P, F_1 a P, F_2. Pak g_1 je dána vzorcem

$$y = (x-b) \cdot \frac{f}{f-b}$$

a g_2 vzorcem

$$y = (x-b) \cdot \frac{f-1}{b+f-1}.$$

Jelikož kolmice na tečnu AB vedená bodem P půlí úhel F_2PF_1, směrnice přímek g_1 a g_2 musí být opačná čísla. Máme tedy

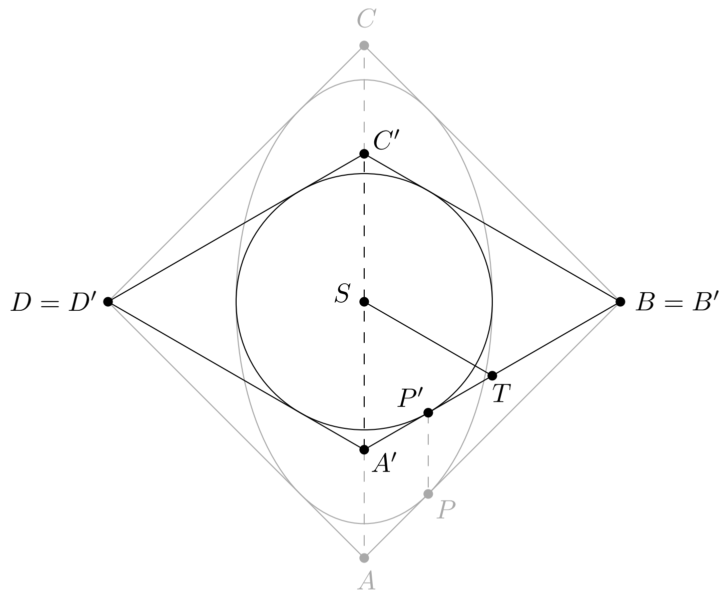
$$\frac{f}{f-b} = (-1) \cdot \frac{f-1}{b+f-1},$$

což vede na kvadratickou rovnici

$$f^2 - f + \frac{b}{2} = 0.$$

Tato rovnice má kořeny $f_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-2b}\right)$, z nichž každý odpovídá jednomu ohnisku. Vzdálenost ohnisek je pak z Pythagorovy věty $\sqrt{2-4b}$. Položíme-li $b = \frac{1}{4}$, získáme $|F_1F_2| = 1$, což nám v našem případě dává výsledek 10 m.

Alternativní řešení. Stlačíme čtverec i elipsu ve směru úhlopříčky AC tak, aby z elipsy vznikla kružnice, a nové body označíme jako původní s čárkou. Dále označíme střed AC jako S a střed $A'B'$ jako T.



Jelikož platí $|A'P'| = \frac{1}{4}|A'B'|$, je také $|A'P'| = |P'T|$ a $|SA'| = |ST|$. Tedy $|A'C'| = |B'C'|$ a trojúhelník $A'B'C'$ je rovnostranný. Koeficient stlačení je proto

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Snadno spočteme, že poloměr kružnice, který je zároveň délkou b vedlejší poloosy elipsy, je roven $\frac{1}{4}|AC|$. Délku a hlavní poloosy pak dostaneme jako $b/(\frac{\sqrt{3}}{3})$. Pomocí délek a, b můžeme spočítat excentricitu jako $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Vzdálenost ohnisek se pak rovná $2e$.

Úloha 54J / 44S. Posloupnost (a_n) je zadána rekurentně jako $a_1 = 1$ a $a_n = \lfloor\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}\rfloor$ pro $n > 1$. Určete a_{1000}.

Poznámka: Symbol $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část x, tj. největší celé číslo nepřevyšující x.

Výsledek. 495

Řešení. Vypíšeme-li několik prvních členů $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, \ldots)$, zjistíme, že jednička se opakuje čtyřikrát, zatímco vyšší čísla se opakují dvakrát až třikrát. Indukcí dokážeme hypotézu, že tři výskyty mají právě mocniny dvojky počínaje 2^1 a ostatní čísla mají dva výskyty.

Předpokládejme, že jsme vypsali začátek posloupnosti až k prvnímu výskytu čísla n ($n > 1$) a až sem se posloupnost chová tak, jak je popsáno výše. Nechť k je největší celé číslo splňující $2^k < n$. Pak součet všech vypsaných členů je

$$s_1 = (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k) + 1 = n^2 + 2^{k+1}.$$

Jelikož $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2n < 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$, máme $s_1 < (n + 1)^2$, a následující člen je tedy $\lfloor\sqrt{s_1}\rfloor = n$.

Nyní určíme další člen v pořadí. Součet je nyní $s_2 = s_1 + n = n^2 + n + 2^{k+1}$, takže pokud $2^{k+1} < n + 1$, pak $s_2 < (n + 1)^2$ a další člen je n. Nicméně k je největší celé číslo splňující $2^k < n$, takže platí $2^{k+1} \geq n$. Předchozí situace proto nastává pouze v případě, že $2^{k+1} = n$. Když n není mocninou dvojky, je další člen $n + 1$, neboť platí $n + 1 \leq 2^{k+1} < 2n < 3n + 4$, neboli $(n + 1)^2 \leq n^2 + n + 2^{k+1} < (n + 2)^2$.

Zbývá ukázat, že pokud $n = 2^{k+1}$, pak po třech výskytech n následuje $n + 1$. To je snadné, neboť tentokrát je součet roven $s_3 = s_2 + n = n^2 + 2n + 2^{k+1} = n^2 + 3n$ a okamžitě dostáváme nerovnosti $(n + 1)^2 < s_3 < (n + 2)^2$. Indukční krok je tedy hotov. Nyní vidíme, že $500 = a_{1010} = a_{1009}$, odkud dopočteme $a_{1000} = 495$.

Úloha 55J / 45S. Určete počet tabulek 4×4, v jejichž políčkách jsou vepsána nezáporná celá čísla taková, že

- v každém řádku a každém sloupci jsou nejvýše dvě nenulová čísla,
- součet čísel každém řádku a v každém sloupci je 3.

Výsledek. 576

Řešení. Každá tabulka splňující daná kritéria se jednoznačně rozkládá na součet (po složkách) dvou tabulek, z nichž jedna má v každém řádku i sloupci právě jednu jedničku a druhá má v každém řádku i sloupci právě jednu dvojku. Naopak každá dvojice takových tabulek dává v součtu vyhovující tabulku. Máme tedy $(4!)^2 = 576$ různých vyhovujících tabulek.