

Zadanie 1J. Mały Karol jest ekscentrykiem, który nosi tylko pary skarpetek w różnych kolorach. W jego szafie znajdującej się w głębi ciemnej piwnicy jest 30 czerwonych, 40 zielonych i 40 niebieskich skarpetek. Karol wyciąga z szafy skarpetki jedną po drugiej, nie mogąc jednak rozpoznać koloru żadnej z nich. Jaka jest najmniejsza liczba skarpetek, które musi wyjąć z szafy, jeżeli chce mieć pewność uzyskania ośmiu dwukolorowych par skarpetek? Żadna skarpetka nie może być policzona w dwóch różnych parach.

Wynik. 48

Rozwiązanie. Gdyby Karol wyciągnął z szafy wszystkie zielone skarpetki i siedem skarpetek czerwonych, nie mógłby utworzyć ośmiu żądanych par, więc 47 to niewystarczająca liczba skarpetek. Jeśli natomiast Karol wyciągnie 48 skarpetek, to uzyska co najmniej $\frac{48}{3} = 16$ skarpetek pewnego koloru i co najmniej $48 - 40 = 8$ skarpetek, z których żadna nie jest tego koloru. Tym samym będzie mógł połączyć niektóre skarpetki w 8 dwukolorowych par.

Zadanie 2J. Przypuśćmy, że x i y to dodatnie liczby całkowite spełniające $x^2 + 2y^2 = 2468$. Znajdź x , jeżeli wiadomo, że istnieje dokładnie jedna taka para (x, y) oraz $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$.

Wynik. 30

Rozwiązanie. Korzystając z danej równości $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$, otrzymujemy

$$2468 = 2(28^2 + 2 \cdot 15^2) = (2 \cdot 15)^2 + 2 \cdot 28^2.$$

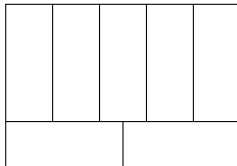
Stąd wynika, że para $(x, y) = (30, 28)$ spełnia warunki zadania, a skoro wiemy, że istnieje dokładnie jedna para o tej własności, to $x = 30$.

Zadanie 3J. Cyfrowy zegar wyświetla czas (godziny i minuty) w formacie dwudziestoczworogodzinnym. Przez ile minut w ciągu doby na wyświetlaczu zegara widoczna jest cyfra 5?

Wynik. 450

Rozwiązanie. W ciągu doby są dwie godziny w trakcie których cyfra 5 wyświetlana jest przez cały czas: 5 oraz 15. Stąd otrzymujemy 120 minut. W pozostałej części dnia piątkę można zobaczyć podczas ostatnich dziesięciu minut każdej godziny (co daje $22 \cdot 10 = 220$ minut) oraz pięciokrotnie podczas pozostałych pięćdziesięciu minut (skąd mamy $22 \cdot 5 = 110$ minut). Podsumowując, cyfra 5 widoczna jest na wyświetlaczu zegara przez dokładnie $120 + 220 + 110 = 450$ minut w ciągu doby.

Zadanie 4J. Duży prostokąt o obwodzie 136 cm jest podzielony na siedem przystających prostokątów, jak na rysunku.



Jakie jest pole dużego prostokąta w cm^2 ?

Wynik. 1120

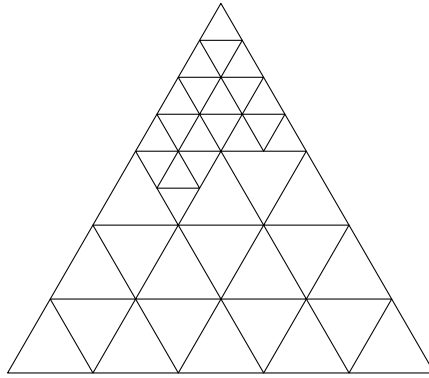
Rozwiązanie. Zauważmy, że długości boków każdego z małych prostokątów pozostają w stosunku 2 : 5, wobec czego możemy oznaczyć je przez $2x$ oraz $5x$. Długości boków dużego prostokąta wynoszą wówczas $10x$ oraz $7x$, a zatem jego obwód jest równy $2 \cdot (10x + 7x) = 34x$. Stąd wynika, że $x = 4$, więc szukane pole to $10 \cdot 7 \cdot 4^2 = 1120$.

Zadanie 5J. Pudełko czekoladek ma kształt trójkąta równobocznego o boku s cm. Pudełko jest szczelnie wypełnione przez $2n$ czekoladek, z których n jest w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 cm, a n — trójkąta równobocznego o boku 2 cm. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość s ?

Wynik. 10

Rozwiązanie. Niech a będzie polem małej czekoladki, tzn. tej, której bok ma długość 1 cm. Wówczas pole dużej czekoladki to $4a$, łączne pole wszystkich czekoladek to $na + 4na = 5na$, a pole dna pudełka to s^2a , gdyż aby otrzymać kształt pudełka wystarczy powiększyć małą czekoladkę s razy w każdym kierunku. Stąd wynika, że $5n = s^2$, więc liczba s jest wielokrotnością liczby 5. Można udowodnić, że nie jest możliwe zmieszczenie pięciu dużych czekoladek w pudełku o boku 5 cm, więc $s \neq 5$. Łatwo natomiast znaleźć ułożenie 20 małych i 20 dużych czekoladek wewnątrz

pudełka o boku 10 cm.



Zadanie 6J. Mały Karol wyrósł już ze swego ekscentryzmu i teraz nosi tylko pary skarpetek w tym samym kolorze. Ma też sporo nowych skarpetek, w jego szafie znajduje się teraz 20 brązowych, 30 czerwonych, 40 zielonych, 40 niebieskich, 30 czarnych i 20 białych skarpetek. Szafa jest jednak wciąż zlokalizowana w nieoświetlonej piwnicy. Jaka jest najmniejsza liczba skarpetek, które Karol musi wyjąć z szafy, aby mieć pewność uzyskania ośmiu par? Żadna skarpetka nie może być policzona w dwóch różnych parach.

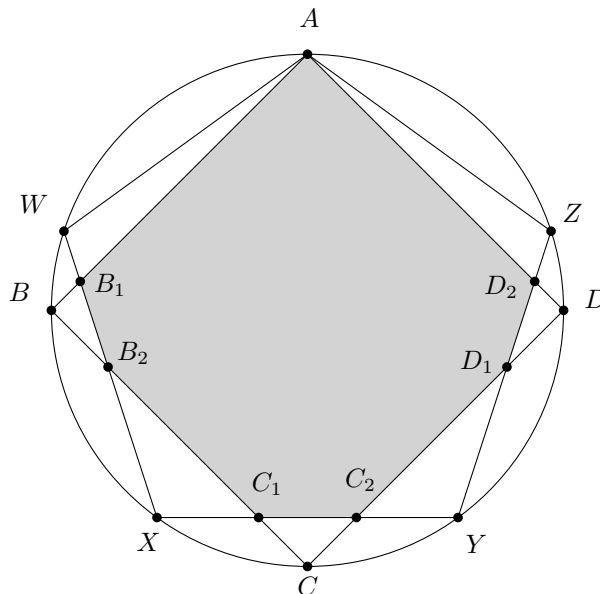
Wynik. 21

Rozwiązanie. Z jednej strony, każdy zestaw wyciągniętych skarpetek będzie złożony z parzystej liczby skarpetek, które można sparować oraz pewnej liczby skarpetek, które pozostaną bez pary. Liczba skarpetek bez pary wyniesie co najwyżej sześć (liczba możliwych kolorów). Jeżeli Karol wyjmie 21 skarpetek ze swojej szafy, nie będzie mogło znaleźć się wśród nich dokładnie sześć skarpetek bez pary, gdyż $21 - 6 = 15$ nie jest liczbą parzystą. Wobec tego będzie co najwyżej pięć pojedynczych skarpetek, a tym samym pozostałe skarpetki stworzą co najmniej $\frac{21-5}{2} = 8$ par. Z drugiej strony, wyciągnięcie 20 skarpetek może okazać się niewystarczające — jeżeli Karol wyciągnie siedem par białych skarpetek i po jednej skarpetce każdego z sześciu kolorów. Stąd wynika, że Karol musi wyciągnąć z szafy co najmniej 21 skarpetek.

Zadanie 7J. Kwadrat i pięciokąt foremny są wpisane w ten sam okrąg i mają wspólny wierzchołek. Ile wynosi miara największego z kątów wewnętrznych wielokąta będącego częścią wspólną kwadratu i pięciokąta?

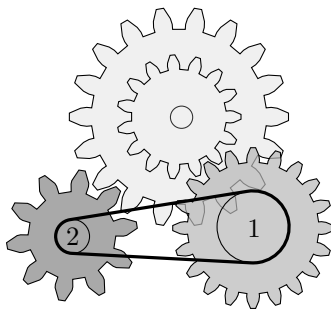
Wynik. 153°

Rozwiązanie. Oznaczmy punkty jak na rysunku. Wówczas wielokąt $AB_1B_2C_1C_2D_1D_2$ jest częścią wspólną danego kwadratu i danego pięciokąta.



Skoro wielokąt jest symetryczny względem prostej AC , to wystarczy sprawdzić, który z kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B_1, B_2, C_1 jest największy. Oczywiście pierwszy z tych kątów ma miarę 90° , a ostatni ma miarę 135° . Ponieważ proste B_2D_1 i XY są równoległe, więc $\angle D_1B_2B_1 = \angle YXW = 108^\circ$, skąd na mocy $\angle C_1B_2D_1 = \angle CBD = 45^\circ$ ($B_2D_1 \parallel BD$), kąt wewnętrzny przy wierzchołku B_2 ma miarę 153° . W końcu, skoro trójkąt B_1BB_2 jest prostokątny, to łatwo otrzymujemy, że miarą kąta przy wierzchołku B_1 jest 117° . Stąd szukany największy kąt to 153° .

Zadanie 8J. Koło numer 1 ma średnicę 48 mm. Jaką średnicę powinno mieć koło numer 2, aby cały mechanizm działał poprawnie?



Wynik. 20 mm

Rozwiązanie. Odczytawszy z rysunku liczby zębów każdego z kół, możemy zauważyć, że jeden pełny obrót koła numer 1 wymaga $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ obrotu podwójnego koła. Podobnie, gdy podwójne koło wykona jeden pełny obrót, koło numer 2 wykona $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ pełnego obrotu. Stąd, gdy koło numer 1 wykonuje jeden obrót, koło numer 2 wykonuje $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$ pełnego obrotu. Obwód koła numer 2 musi być zatem równy $\frac{5}{12}$ obwodu koła numer jeden. Stosunek obwodów kół jest równy stosunkowi długości ich średnic, więc możemy obliczyć, że średnica koła numer 2 ma długość $\frac{5}{12} \cdot 48 \text{ mm} = 20 \text{ mm}$.

Zadanie 9J. Na swoje 62-dniowe letnie wakacje w lipcu i sierpniu Włodek przygotował dokładny plan, w które dni będzie kłamał, a w które mówił prawdę. Następnie, Włodek k -tego dnia wakacji (dla każdego k od 1 do 62) stwierdzał, że zaplanował kłamanie w co najmniej k dni. Jak wiele spośród tych stwierdzeń było kłamstwami?

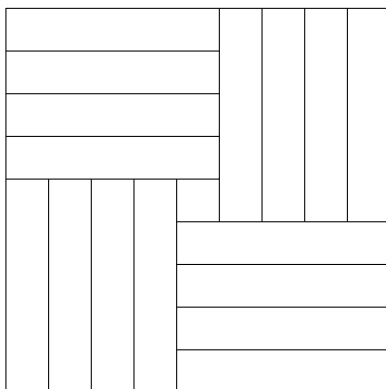
Wynik. 31

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeżeli Włodek mówił prawdę jednego dnia, to musiał on również mówić prawdę każdego z dni poprzednich. Gdyby mówił prawdę tylko w ciągu $k < 31$ dni, otrzymalibyśmy sprzeczność z tym, że kłamał przez $62 - k > 31$ dni. Podobnie, gdyby Włodek mówił prawdę przez więcej niż 31 dni, oznaczałoby to że za mało kłamał. Stąd wnioskujemy, że Włodek kłamał dokładnie w 31 dni.

Zadanie 10J. W grze w statki, która toczy się na planszy o wymiarach 9×9 , nasz przeciwnik gdzieś ukrył lotniskowiec, reprezentowany przez prostokąt o wymiarach 5×1 lub 1×5 . Jaka jest minimalna liczba strzałów, które musimy oddać, by choć raz trafić lotniskowiec, niezależnie od jego lokalizacji?

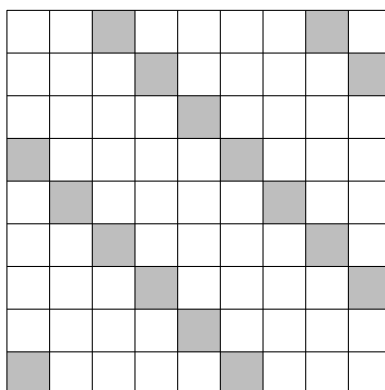
Wynik. 16

Rozwiązanie. Podział planszy z rysunku 1 pokazuje, że musimy strzelić co najmniej 16 razy — nie możemy ominąć żadnego z 16 prostokątów 5×1 , gdyż któryś może być zajmowany przez lotniskowiec.



Z rysunku 2 widzimy, że 16 strzałów wystarcza — nie da się tak ustawić lotniskowca, by nie przechodził przez żadne

zaciemnione pole.



Zatem odpowiedź to 16.

Zadanie 11J / 1S. Jaka jest największa możliwa wartość wspólnego dzielnika różnych dodatnich liczb całkowitych a , b , c spełniających równość $a + b + c = 2015$?

Wynik. 155

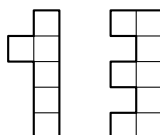
Rozwiązanie. Skoro $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015 = a + b + c = \text{NWD}(a, b, c) \cdot (a_0 + b_0 + c_0)$ dla pewnych różnych dodatnich liczb całkowitych a_0, b_0, c_0 , to otrzymujemy $a_0 + b_0 + c_0 \geq 6$. Stąd $\text{NWD}(a, b, c)$ może być równy co najwyżej $5 \cdot 31 = 155$. Wartość ta jest osiągana dla dowolnej trójki różnych dodatnich liczb całkowitych a_0, b_0, c_0 , sumujących się do 13. Na przykład przyjmując $a_0 = 1, b_0 = 5, c_0 = 7$, uzyskujemy $a = 1 \cdot 155, b = 5 \cdot 155, c = 7 \cdot 155$.

Zadanie 12J / 2S. Pociąg towarowy składa się z lokomotywy (która zawsze jest na początku) oraz sześciu wagonów, z których każdy przewozi węgiel lub rudę żelaza. Ada próbowała zrobić zdjęcie pociągu, ale w kadrze zmieścił się tylko jeden wagon z rudą żelaza oraz dwa wagony z węglem znajdujące się bezpośrednio za nim. Wagony były wystarczająco niesymetryczne i dla Ady jasne było, gdzie jest przód wagonu, a gdzie tył. Jak wiele różnych pociągów można sfotografować tak, by otrzymać takie samo zdjęcie, jak zdjęcie Ady?

Wynik. 31

Rozwiązanie. Są cztery możliwości umieszczenia ciągu wagonów Z-W-W (Z — wagon z rudą żelaza, W — wagon z węglem) w składzie pociągu, a dla każdej z tych możliwości pociąg można uzupełnić na 2^3 sposobów. W taki sposób policzymy jednak dwukrotnie pociąg Z-W-W-Z-W-W. Ostatecznie liczba różnych pociągów to $4 \cdot 2^3 - 1 = 31$.

Zadanie 13J / 3S. Bryła zbudowana z pewnej liczby identycznych sześciątów wygląda jak „1” od tyłu i jak „3” od góry (rysunek). Ile sześciątów można ujrzeć patrząc na tę bryłę od prawej strony, jeżeli wiadomo, że składa się ona z największej możliwej liczby sześciątów?



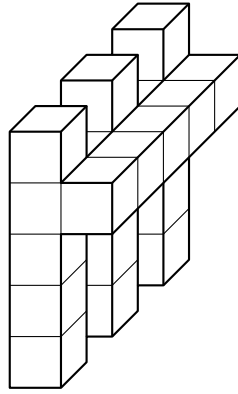
Uwaga: Poniższy rysunek przedstawia sześciąt oraz odpowiednio widok tego sześciątka od tyłu i od góry.



Wynik. 17

Rozwiązanie. Opisana bryła mieści się w pudełku o szerokości dwóch sześciątów, wysokości pięciu sześciątów i długości pięciu sześciątów. Podzielmy takie pudełko na pół i przeanalizujemy oddzielnie dwie części o wymiarach $1 \times 5 \times 5$. Gdy patrzymy na opisaną bryłę od przodu, widzimy lustrzane odbicie cyfry „1”. Wobec tego w prawej części pudełka jest jeden kwadrat widoczny od przodu oraz pięć kwadratów widocznych od góry. Jedynym sposobem na uzyskanie takiego efektu jest umieszczenie pięciu sześciątów w jednym rzędzie. Podobnie dla lewej części pudełka, jest pięć kwadratów widocznych od przodu oraz trzy kwadraty widoczne od góry, więc największą możliwą liczbę sześciątów uzyskamy wtedy, gdy ustawimy po pięć sześciątów w każdej z trzech kolumn.

Uzyskana struktura jest przedstawiona na poniższym rysunku. Gdy spojrzymy na nią od prawej strony, ujrzymy 17 sześciątów



Zadanie 14J / 4S. Powiemy, że dodatnia liczba całkowita n jest *nábojowa*, jeżeli suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 17 oraz suma cyfr liczby $n + 10$ także jest podzielna przez 17. Jaka jest najmniejsza liczba nábojowa?

Wynik. 7999

Rozwiązanie. Oznaczmy sumę cyfr liczby r przez $Q(r)$. Jeżeli cyfra dziesiątek liczby n jest różna od 9, to $Q(n + 10) = Q(n) + 1$. Wobec tego cyfrą dziesiątek liczby n musi być 9. Z kolei jeżeli cyfra setek jest różna od 9, to $Q(n + 10) = Q(n) - 8$. Jeśli cyfra setek jest równa 9, a cyfra tysięcy jest różna od 9, to $Q(n + 10) = Q(n) - 17$, więc istnieje możliwość, że obie liczby $Q(n)$ i $Q(n + 10)$ są podzielne przez 17. By uzyskać najmniejszą możliwą wartość n , przypuścimy, że cyfry dziesiątek i setek liczby n są równe 9 oraz $Q(n) = 2 \cdot 17 = 34$. Suma wszystkich cyfr oprócz cyfr dziesiątek i setek spełnia wówczas nierówność $34 - 2 \cdot 9 = 16 < 2 \cdot 9$, co oznacza, że oprócz nich wystarczą dwie cyfry. Łatwo teraz zauważyć, że $n = 7999$ to szukana najmniejsza liczba nábojowa.

Zadanie 15J / 5S. Przedsiębiorstwo autobusowe obsługuje linię między miastami A i D z przystankami w miastach B i C (w tej właśnie kolejności). Cena biletu jest wprost proporcjonalna do odległości przemierzanej przez autobus na danej trasie. Na przykład bilet z A do C kosztuje tyle samo, co łącznie bilety z A do B oraz z B do C . W ofercie nie ma jednak biletów powrotnych, są tylko bilety w jedną stronę. Dominik, zapalony kolekcjoner biletów autobusowych, chciałby zebrać bilety o wszystkich możliwych cenach, bez względu na kierunek podróży. Jak dotąd ma w swojej kolekcji bilety kosztujące 10, 40, 50, 60 i 70. Jakże możliwe ceny brakującego biletu?

Wynik. 20, 110

Rozwiązanie. Załóżmy najpierw, że Dominik ma już w swojej kolekcji najdroższy z biletów (czyli ten z A do D). Wówczas jego cena jest równa 70. Ponieważ jest to także suma cen trzech biletów na trasach AB , BC i CD , z których co najmniej dwa są już posiadane przez Dominika, więc jedyną możliwością jest, aby ceny tych biletów były równe 10, 20 i 40, a zatem brakującą ceną jest 20. Bezpośrednio sprawdzamy, że ceny te mogą być tak dopasowane do poszczególnych odcinków trasy, aby zgadzały się z pozostałymi cenami biletów.

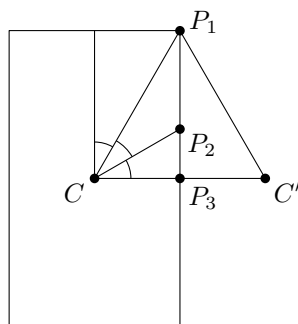
Jeżeli najdroższy bilet jest tym, którego brakuje, to bilet kosztujący 70 musi być na podróż z jednym przystankiem. Jedyną możliwością przedstawienia liczby 70 jako sumy cen dwóch biletów już posiadanych przez Dominika jest $10 + 60$. Stąd wnosimy, że bezpośredni bilet między pozostałymi dwoma miastami na trasie kosztuje 40. Wówczas najdłuższa podróż kosztuje $10 + 40 + 60 = 110$. Znowu nietrudno sprawdzić, że otrzymane wartości spełniają warunki zadania.

Zadanie 16J / 6S. Podczas zakupów, Sławek zwrócił uwagę na zegarek, który jest zapakowany w przezroczyste prostokątne opakowanie. Zegarek jest tak ułożony, że środek pudełka oraz środek zegarka (tzn. punkt wspólny jego wskazówek) się pokrywają. Krótszy bok opakowania ma długość 3 cm. Sławek zauważył, że w południe wskazówka zegarowa wskazuje środek krótszego boku pudełka, a o godzinie pierwszej — róg pudełka. Jak daleko od siebie znajdują się punkty na brzegu opakowania, które są wskazywane przez wskazówkę godzinową o godzinach odpowiednio pierwszej i drugiej?

Wynik. $\sqrt{3}$ cm

Rozwiązanie. Oznaczmy przez P_x punkt na brzegu pudełka, który jest wskazywany przez wskazówkę zegarową o godzinie x . Niech ponadto C będzie środkiem pudełka. Z równości $\angle P_2CP_1 = \angle P_3CP_2 = 360^\circ/12 = 30^\circ$ widzimy, że P_2 jest środkiem trójkąta równobocznego $CC'P_1$, gdzie C' oznacza odbicie punktu C względem punktu P_3 . Szukana

odległość P_1P_2 jest równa $\frac{2}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego o boku 3 cm, czyli $P_1P_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \text{ cm} = \sqrt{3} \text{ cm}$.



Zadanie 17J / 7S. Znajdź dziewięciocyfrową liczbę składającą się z cyfr $1, 2, \dots, 9$ ustawionych w pewnej kolejności, o tej własności, że jej każde dwie kolejne cyfry tworzą liczbę dwucyfrową, którą można przedstawić w postaci iloczynu $k \cdot l$, gdzie $k, l \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Wynik. 728163549

Rozwiązanie. Niech $x, y \in \{1, 2, \dots, 9\}$ będą różnymi cyframi. Parę xy nazwiemy *dopuszczalną*, jeżeli istnieją liczby $k, l \in \{1, 2, \dots, 9\}$ o tej własności, że $10x + y = kl$. Ponieważ jedyną dopuszczalną parą zawierającą cyfrę 9 jest 49, więc segment 49 musi występować na końcu szukanej liczby dziewięciocyfrowej z . Są dwie dopuszczalne pary, w których występuje cyfra 7: 27 oraz 72. Nie mogą one wystąpić jednocześnie w liczbie z , a koniec jest już zajęty, skąd wniosek, że segment 72 musi znajdować się na początku liczby z . Dopuszczalnymi parami zawierającymi cyfrę 8 są 18, 28, 48 i 81. Skoro liczba 4 została już użyta do utworzenia segmentu 49, jedyną możliwością pojawienia się cyfry 8 jest jej wystąpienie w segmencie postaci 281. Wobec tego $z = 7281 \dots 49$. Pozostaje uporać się z cyframi 3, 5 i 6. Ponieważ ani 13, ani 34 nie jest parą dopuszczalną, więc jedyną dopuszczalną parą xy , w której $x \in \{5, 6\}$ i $y = 3$, jest 63. Uzyskujemy $z = 728163549$ i bezpośrednio sprawdzamy, że liczba ta spełnia warunki zadania.

Zadanie 18J / 8S. Znajdź największą liczbę pierwszą p mniejszą od 210 o tej własności, że liczba $210 - p$ jest złożona.

Uwaga: Liczba 1 nie jest ani pierwsza, ani złożona.

Wynik. 89

Rozwiązanie. Zamiast szukać największej liczby pierwszej p , zajmiemy się znalezieniem najmniejszej liczby złożonej n , dla której liczba $210 - n$ jest pierwsza. Mamy $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, więc gdyby liczba n była podzielna przez 2, 3, 5 lub 7, to w konsekwencji także liczba $210 - n$, w szczególności — liczba ta nie byłaby pierwsza. Najmniejszą liczbą złożoną, która nie została wykluczona jako wartość n , jest 11^2 , skąd uzyskujemy $p = 210 - 121 = 89$. Liczba 89 jest pierwsza, więc rozwiązanie jest zakończone.

Zadanie 19J / 9S. Rada rodziców III LO w Krakowie postanowiła kupić pewną liczbę ołówków i rozdać je uczniom pierwszych klas. W szkole są trzy oddziały klas pierwszych: Ia, Ib i Ic. Wiadomo, że gdyby ołówki zostały rozdane po równo wszystkim uczniom, każdy otrzymałby po 9 ołówków. Gdyby zostały rozdane po równo uczniom klasy Ia, każdy uczeń tej klasy dostałby po 30 ołówków. Jeśli zostałyby rozdane tylko uczniom klasy Ib, każdy z nich otrzymałby po 36 ołówków. Po ile ołówków dostałby każdy uczeń klasy Ic, gdyby postanowiono je rozdać uczniom tylko tej klasy?

Wynik. 20

Rozwiązanie. Oznaczmy przez o liczbę ołówków oraz przez a, b, c liczby uczniów odpowiednich klas. Z warunków zadania wiemy, że $o = 9(a + b + c)$, $o = 30a$ i $o = 36b$. Chcemy znaleźć wartość wyrażenia o/c . Podstawiając $a = o/30$ i $b = o/36$ w pierwszym równaniu, dostajemy

$$\begin{aligned} o &= \frac{3}{10}o + \frac{1}{4}o + 9c, \\ \frac{9}{20}o &= 9c, \\ \frac{o}{c} &= 20. \end{aligned}$$

Zadanie 20J / 10S. Znajdź wszystkie czterocyfrowe kwadraty liczb naturalnych, których zarówno pierwsze dwie cyfry, jak i ostatnie dwie, tworzą liczby będące kwadratami dodatnich liczb całkowitych (druga liczba może rozpoczynać się zerem).

Wynik. 1681

Rozwiązanie. Skoro dla $k \geq 50$ zachodzi nierówność $(k + 1)^2 - k^2 > 100$, to $50^2 = 2500$ jest jedynym czterocyfrowym kwadratem rozpoczynającym się od 25 (podobne własności mają liczby 3600, 4900, 6400 i 8100). Wobec tego pierwszymi dwiema cyframi szukanej liczby muszą być 16, a jedynym kwadratem większym od 1600 i mniejszym od 1700 jest $41^2 = 1681$. Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba ta spełnia warunki zadania.

Zadanie 21J / 11S. Kierowca ciężarówki zwykle pokonuje dystans między dwoma miastami jadąc autostradą ze stałą prędkością. Niestety, podczas ostatniego przejazdu na niektórych odcinkach autostrady trwał remont, w wyniku czego kierowca musiał podczas jazdy na tych odcinkach zredukować prędkość o jedną czwartą. W wyniku tego w czasie, w którym zwykle pokonałby całą trasę, udało mu się przebyć tylko sześć siódmych jej długości. Jaką część czasu poświęconego na przebycie tej drogi kierowca jechał przez remontowane odcinki?

Wynik. $4/7$

Rozwiązanie. Niech x oznacza część czasu spędzoną na jeździe remontowanymi odcinkami. Wówczas $1 - x$ jest częścią czasu spędzoną na pozostałych odcinkach autostrady. To daje nam równanie

$$\frac{6}{7} = \frac{3}{4}x + 1 - x,$$

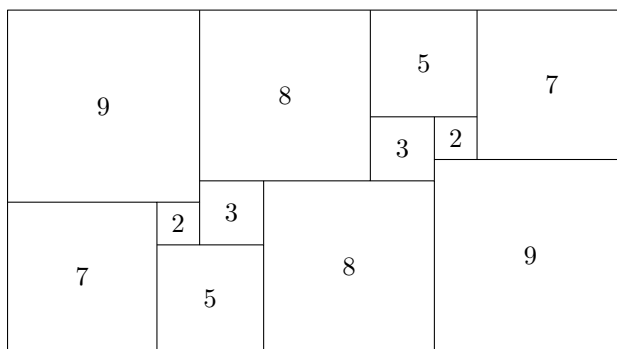
z którego wyliczamy $x = 4/7$.

Zadanie 22J / 12S. Prostokąt o wymiarach całkowitych został rozcięty na dwanaście kwadratów o następujących długościach boków: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Ile wynosi obwód wyjściowego prostokąta?

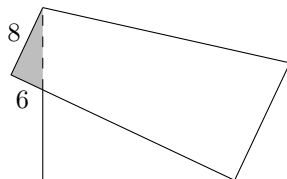
Wynik. 90

Rozwiązanie. Sumując pola kwadratów, dochodzimy do wniosku, że pole prostokąta jest równe $464 = 2^4 \cdot 29$. Obydwa wymiary prostokąta muszą być równe co najmniej 9, skoro z tego prostokąta został wycięty kwadrat o boku 9. W związku z tym jedynym możliwym rozkładem jest $16 \cdot 29$, skąd obwód prostokąta jest równy $2 \cdot (16 + 29) = 90$.

Uwaga: Istnieje sposób rozcięcia prostokąta, który spełnia warunki zadania:



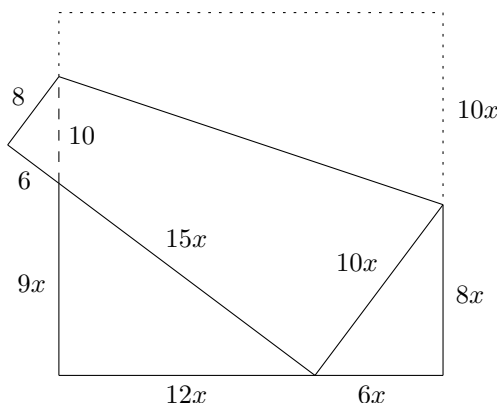
Zadanie 23J / 13S. Kwadratowa kartka papieru jest zagięta w taki sposób, że jeden z jej wierzchołków leży dokładnie na jednej z krawędzi kartki. Jak pokazano na rysunku, pewien trójkąt wychodzi poza wyjściowy kwadrat. Długość boku tego trójkąta przyległego do linii zgięcia wynosi 8 cm, a długość boku przyległego do boku kwadratu jest równa 6 cm.



Jaka jest długość boku kartki?

Wynik. 36 cm

Rozwiązanie.



Bezpośrednio rachując na kątach, stwierdzamy, że wszystkie trójkąty prostokątne znajdujące się na ilustracji do treści zadania są podobne. Jeśli oznaczymy długości boków trójkąta w prawym dolnym rogu przez $6x$, $8x$ oraz — zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa — $10x$, to po rozłożeniu kartki okaże się, że jej bok ma długość $18x$. To oznacza, że lewy dolny trójkąt ma jeden z boków długości $18x - 6x = 12x$, jak pokazano na rysunku. Pozostałe boki tego trójkąta mają długości $9x$ oraz $15x$, co wynika z faktu, że skala podobieństwa między omawianym trójkątem, a trójkątem opisanym wcześniej wynosi $3/2$. Możemy teraz zauważyć, że długość boku danej kartki to także $15x + 6$, skąd otrzymujemy $x = 2$. To oznacza, że długość boku kartki papieru to 36 cm.

Zadanie 24J / 14S. Statek parowy przepływa przez kanał ze stałą prędkością. Maciek chciałby zmierzyć jego długość. Podczas gdy statek powoli sunie do przodu, chłopiec idzie brzegiem kanału ze stałą prędkością, przechodząc od rufy do dziobu w 240 krokach. Następnie odwraca się i zaczyna iść z powrotem w kierunku rufy, osiągając ją po 60 krokach. Jaka jest długość statku parowego w krokach?

Wynik. 96

Rozwiązanie. Podczas swojej wędrówki Maciek zrobił 300 kroków, zaś statek przesunął się o $240 - 60 = 180$ kroków. Zatem w czasie gdy Maciek pokonuje 60 kroków, statek przesuwa się o $180 : 5 = 36$ kroków. Maciek dociera do rufy po 60 krokach, tak więc długość statku wynosi $60 + 36 = 96$.

Zadanie 25J / 15S. Liczba $137641 = 371^2$ to najmniejsza liczba sześciocyfrowa o tej własności, że wykreślając z niej trzy parami różne cyfry można otrzymać pierwiastek kwadratowy z tej liczby: $\sqrt{137641}$. Znajdź największą liczbę sześciocyfrową o tej własności.

Wynik. $992016 = 996^2$

Rozwiązanie. Niech $(1000 - n)^2$ będzie szukaną liczbą sześciocyfrową ($n \geq 1$). Korzystając ze związku $(1000 - n)^2 = 1000 \cdot (1000 - 2n) + n^2$, możemy łatwo obliczyć wartości kwadratów dla $n = 1, 2, 3, 4, \dots$: $999^2 = 998001$, $998^2 = 996004$, $997^2 = 994009$, $996^2 = 992016$, $\dots$ Pozostaje zauważyć, że cyfry 2, 0, 1 są parami różne oraz $992016 = 996^2$ jest pierwiastkiem kwadratowym z 992016. Stąd 992016 jest szukaną liczbą.

Zadanie 26J / 16S. Teodor wpisał na klawiaturze kalkulatora pewną trzycyfrową liczbę. Michał, który siedział naprzeciwko, zauważył, że gdy się popatrzy na wyświetlacz do góry nogami, można odczytać liczbę, która jest większa o 369 od tej faktycznie wpisanej. Jaką liczbę wpisał Teodor?

Uwaga: Kalkulator ma standardowy elektroniczny wyświetlacz, cyfry wyglądają tak jak na rysunku poniżej:



Wynik. 596

Rozwiązanie. Zauważmy, że po odwróceniu, cyfra albo nie zmienia się (0, 2, 5, 8), albo zmienia się ($6 \leftrightarrow 9$), albo dostajemy znak, który nie jest cyfrą (1, 3, 4, 7). Jeżeli obrócimy liczbę o cyfrach 0, 2, 5, 8 do góry nogami, zmienimy kolejność jej cyfr. Różnica dwóch takich liczb trzycyfrowych będzie podzielna przez 99, ponieważ $(a + 10b + 100c) - (c + 10b + 100a) = 99(c - a)$. Wiemy, że $99 \nmid 369$, zatem liczba wpisana przez Teodora musi zawierać 6 lub 9.

Gdyby cyfra 9 znajdowała się na pierwszej pozycji, odwrócona liczba miałaby 6 na ostatniej pozycji, skąd ostatnią cyfrą wyjściowej liczby musiałoby być 7 (aby różnica wynosiła 369). To jest niemożliwe, gdyż 7 po obróceniu przestaje być cyfrą. Z analogicznych powodów, 9 nie może być na ostatniej pozycji, a także 6 nie może być na pierwszej ani środkowej pozycji. Obie pozostałe możliwości, czyli 9 na środkowej pozycji i 6 na ostatniej pozycji, prowadzą do jedynego rozwiązania: 596.

Zadanie 27J / 17S. Na wyspie Na-boi żyją trzy rodziny. Do każdej z nich należy dwóch synów i dwie córki. Na ile sposobów można zaaranżować sześć heteroseksualnych małżeństw pomiędzy tymi osobami, zakładając, że małżeństwa pomiędzy rodzeństwem są zabronione?

Wynik. 80

Rozwiązanie. Oznaczmy rodziny jako A , B , C . Jeśli synowie z A ożenią się z córkami z jednej rodziny (bez straty ogólności B), córki z A muszą poślubić synów z C (w przeciwnym wypadku któryś z synów z C musiałby się ożenić z własną siostrą). Stąd wynika, że synowie z B muszą się ożenić z córkami z C . To daje nam $2 \cdot 2^3 = 16$ możliwości — możemy najpierw na dwa sposoby dobrać rodziny, a następnie dla każdej pary synów z jednej rodziny decydujemy na dwa sposoby, z którymi dokładnie kobietami się ożenią.

Gdyby synowie z A ożenili się z córkami z dwóch różnych rodzin, ich siostry muszą postąpić tak samo, aby uniknąć małżeństwa w obrębie jednej rodziny. Dwóch synów z A może tak wybrać żony na osiem sposobów, analogicznie córki z A . Po tych wyborach, w każdej z rodzin B i C pozostaje po jednym synu i jednej córce, którzy są niesparowani. Widzimy, że możemy ich poprawnie dobrać w pary na dokładnie jeden sposób. Zatem w tym wypadku mamy $8 \cdot 8 = 64$ sposoby.

Łącznie daje nam to $16 + 64 = 80$ różnych sposobów zaaranżowania małżeństw zgodnie z warunkami zadania.

Zadanie 28J / 18S. Jacek i Marta upiekli bardzo dużą pizzę składającą się z 50 jednakowych kawałków w kształcie wycinka koła. Na pizzy rozłożyli oliwki w taki sposób, że liczby oliwek na kolejnych kawałkach zgodnie z ruchem wskazówek zegara to $1, 2, 3, \dots, 50$. Teraz chcą podzielić pizzę na dwie równe połówki jednym prostym cięciem pomiędzy kawałkami w taki sposób, aby na połówce Jacka znalazło się dwa razy więcej oliwek niż na połówce Marty. Znajdź łączną liczbę oliwek znajdujących się na czterech kawałkach przyległych do linii cięcia.

Wynik. 68, 136

Rozwiązanie. Ponumerujmy kawałki pizzy przy pomocy liczb oliwek, które się na nich znajdują. Zauważmy, że linia cięcia nie może rozdzielać kawałków 1 i 50 (albo 25 i 26), gdyż

$$2 \cdot (1 + 2 + \dots + 25) < 26 + 27 + \dots + 50.$$

Wobec tego możemy założyć, że $n, n+1, n+25, n+26$ to numery kawałków przyległych do linii cięcia, gdzie $1 \leq n \leq 24$. Suma tych czterech numerów wynosi $4n+52$. Bezpośrednio liczymy, że $(n+1) + (n+2) + \dots + (n+25) = 25n + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 = 25(n+13)$ oraz $1 + 2 + \dots + 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 25 \cdot 51$. Są więc dwa przypadki:

$$25(n+13) = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 17 \quad \text{lub} \quad 25(n+13) = \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 34.$$

W pierwszym przypadku otrzymujemy $n=4$ i szukaną sumę równą $4n+52=68$. Drugi przypadek prowadzi do $n=21$ oraz $4n+52=136$. Istnieją więc dwie liczby spełniające warunki zadania: 68 oraz 136.

Zadanie 29J / 19S. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p o tej własności, że liczba $19p+1$ jest sześcianem pewnej liczby całkowitej.

Wynik. 421

Rozwiązanie. Jeżeli p jest liczbą pierwszą spełniającą dane warunki, to istnieje liczba całkowita $k > 2$ taka, że $k^3 = 19p+1$. Otrzymujemy stąd równanie

$$19p = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1).$$

Skoro $k > 2$, to obydwie liczby po prawej stronie powyższej równości są dzielnikami właściwymi liczby $19p$ (czyli większymi od 1 i mniejszymi od $19p$). Ponieważ $19p$ jest iloczynem dwóch liczb pierwszych, więc $k-1=19$ lub $k^2+k+1=19$. Pierwszy przypadek prowadzi do $k=20$ i $p=400+20+1=421$, a 421 jest liczbą pierwszą. W drugim przypadku równanie kwadratowe $k^2+k-18=0$ nie ma pierwiastków całkowitych. Stąd wniosek, że $p=421$ jest jedyną liczbą spełniającą warunki zadania.

Zadanie 30J / 20S. Na boku AD równoległoboku $ABCD$ wybrano taki punkt E , że $2 \cdot AE = ED$, a na boku AB wybrano taki punkt F , że $2 \cdot AF = FB$. Proste CF i CE przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach G i H . Jaką część powierzchni równoległoboku $ABCD$ zajmuje pięciokąt $AFGHE$?

Wynik. $\frac{7}{30}$

Rozwiązanie. W poniższym rozwiązaniu przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczać pole figury $\mathcal{F}$. Z faktu, że EHD i CHB są trójkątami podobnymi, dostajemy równanie

$$\frac{BH}{HD} = \frac{BC}{ED} = \frac{AD}{\frac{2}{3} \cdot AD} = \frac{3}{2}.$$

Analogicznie, z podobieństwa trójkątów FBG oraz CDG , otrzymujemy $\frac{DG}{GB} = \frac{3}{2}$. Zatem $DH = BG = \frac{2}{5} \cdot DB$ i $HG = \frac{1}{5} \cdot DB$. Korzystając z równości

$$[ECD] = \frac{2}{3}[ACD] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}[ABCD] = [FBC],$$

uzyskujemy

$$[AFGHE] = [AFCE] - [GCH] = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \right) [ABCD] = \frac{7}{30} [ABCD].$$

Zadanie 31J / 21S. Znajdź największą liczbę pięciocyfrową składającą się z niezerowych cyfr, która ma poniższe własności:

- pierwsze trzy cyfry tworzą liczbę, która jest 9 razy większa od liczby utworzonej przez dwie ostatnie cyfry,
- trzy ostatnie cyfry tworzą liczbę, która jest 7 razy większa od liczby utworzonej przez pierwsze dwie cyfry.

Wynik. 85595

Rozwiązanie. Niech $\overline{abcde}$ będzie taką liczbą pięciocyfrową, że $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{de}$ i $\overline{cde} = 7 \cdot \overline{ab}$. Mamy wówczas

$$63 \cdot \overline{de} = 7 \cdot \overline{abc} = 70 \cdot \overline{ab} + 7c = 10 \cdot \overline{cde} + 7c = 1007c + 10 \cdot \overline{de},$$

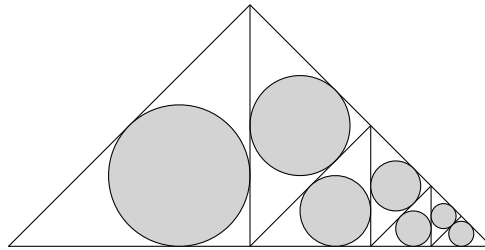
skąd $\overline{de} = \frac{1007c}{53} = 19c$. Analogicznie, $\overline{ab} = 17c$. Jeśli $c \geq 6$, to liczby $17c$ and $19c$ są większe od 100. Zatem największą możliwą wartością c to 5, a największą możliwą wartością liczby $17119c$ to 85595.

Zadanie 32J / 22S. Każdy z dwunastu bystrych studentów siedzących w kółku otrzymał jedną kartę losowo wybraną z dwunastu, wśród których było 9 kart pustych oraz trzy specjalne, oznaczone J , Q , K . Każdy spojrział na swoją kartę, a następnie podał ją swojemu sąsiadowi siedzącemu z prawej strony. Proces ten był kontynuowany i po każdym spojrzeniu w karty wszyscy byli jednocześnie proszeni o podniesienie ręki jeśli są w stanie bez wątplenia stwierdzić, kto trzyma którą z kart specjalnych w danym momencie. Nikt nie podniósł ręki po obejrzeniu czterech kart. Dokładnie jeden student podniósł rękę po obejrzeniu swojej piątej karty. Następnie x innych studentów podniosło ręce po zobaczeniu szóstej karty, a y — po zobaczeniu siódmej. Znajdź iloczyn xy .

Wynik. 42

Rozwiązanie. Pierwszy student który podniósł rękę jest pierwszą osobą, która ujrzała wszystkie trzy karty specjalne. To oznacza, że student ten musiał otrzymać kartę specjalną jako piątą z kolei, gdyż w przeciwnym przypadku mógłby podnieść rękę wcześniej. Co więcej, musiał on również otrzymać jedną z kart specjalnych na samym początku, gdyż w przeciwnym razie jego sąsiad siedzący po lewej stronie zobaczyłby wszystkie trzy karty specjalne jeszcze w poprzedniej kolejce. Oznaczmy przez K_1 pierwszą kartę, przez K_3 piątą kartę, a przez K_2 pozostałą kartę specjalną, którą zobaczył omawiany student. Po późniejszych spojrzeniach na swoje karty, dokładnie ci studenci, którzy widzieli K_2 i co najmniej jedną z pozostałych dwóch kart specjalnych mogą wydedukować pozycje wszystkich specjalnych kart — pozycje kart K_1 oraz K_3 są znane wszystkim, ale pozostali nie wiedzą, która z nich jest gdzie. Łatwo zauważyć, że po sześciu kolejkach dokładnie sześciu studentów widziało K_2 i co najmniej jedną z pozostałych dwóch kart specjalnych, a po siedmiu kolejkach jest dokładnie siedmiu takich studentów. Wynika stąd, że $x = 6$, $y = 7$ i w konsekwencji $xy = 42$.

Zadanie 33J / 23S. Wewnątrz równoramiennego trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 1 znajduje się siedem kół, jak pokazano na rysunku poniżej:



Jakie jest łączne pole wszystkich kół?

Wynik. $\pi \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \pi \frac{(1-\sqrt{2})^2}{4} = \pi \frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2} = \pi \frac{1}{4(3+2\sqrt{2})}$

Rozwiązanie. Zauważmy, że oś symetrii równoramiennego trójkąta prostokątnego dzieli go na dwa trójkąty przystające, z których każdy jest $\sqrt{2}$ razy mniejszy do wyjściowego — w takim samym stosunku pozostają więc promienie okręgów wpisanych w trójkąty. To oznacza, że każde nowe koło wpisane ma pole dwa razy mniejsze od pola dotychczasowego koła wpisanego. Innymi słowy, łączne pole wszystkich kół wpisanych nie zmienia się, gdy dowolne z nich zastąpimy dwoma mniejszymi, wynikającymi z opisanego wyżej podziału trójkąta. Pozostaje więc wyznaczyć pole koła wpisanego w wyjściowy trójkąt — promień tego koła obliczamy korzystając z równości odpowiednich odcinków stycznych. Skoro długości przyprostokątnych dużego trójkąta są równe $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (z twierdzenia Pitagorasa), a promień okręgu wpisanego poprowadzone do przyprostokątnych wyznaczają wraz z nimi kwadrat, to otrzymujemy, że promień ma długość $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$. Stąd wynika, że szukane pole wynosi

$$\pi \frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

Zadanie 34J / 24S. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p o tej własności, że liczba $p + 11$ jest dzielnikiem liczby $p(p + 1)(p + 2)$.

Wynik. 7, 11, 19, 79

Rozwiązanie. Skoro p jest liczbą pierwszą, to $p = 11$ (w tym przypadku warunki zadania są spełnione) albo liczby p i $p + 11$ są względnie pierwsze. W drugim przypadku dany iloczyn jest podzielny przez $p + 11$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(p + 1)(p + 2) = (p + 11)(p - 8) + 90$ jest podzielna przez $p + 11$, a tym samym $p + 11 \mid 90$. Ostatnia podzielność ma miejsce tylko dla liczb pierwszych p należących do zbioru $\{7, 19, 79\}$.

Zadanie 35J / 25S. Proszonki piwniczny (*Porcellio scaber*) to gatunek stonogi mającej czternaście nóg. Mama stonoga ma dużo identycznych skarpetek i butów, które przygotowała dla swoich dzieci na nadchodzącą zimę. Wyjaśniła małemu prosiakowi Łukaszowi, że może założyć swoje skarpetki i buty w dowolnej kolejności, ale musi pamiętać, by na każdą nogę z osobna najpierw założyć skarpetkę, a dopiero potem buta. Na ile sposobów mały Łukasz może ubrać wszystkie swoje nóżki?

Wynik. $\frac{28!}{2^{14}}$

Rozwiązanie. Sposób ubioru nóg prosiaka Łukasza może być reprezentowany przez umieszczenie w 28 polach prostokąta 1×28 czternastu skarpetek i czternastu butów, przy czym skarpetka zakładana na daną nogę powinna znaleźć się w polu na lewo od pola, w którym znajduje się but zakładany na tę nogę. Dla pierwszej pary skarpetka-but jest $\binom{28}{2}$ możliwości wyboru pól, w których zostaną umieszczone. Dla drugiej pary zostaje tylko 26 pól, skąd $\binom{26}{2}$ możliwości. Rozumując analogicznie, dochodzimy w końcu do sytuacji, w której zostają tylko dwa pola i dokładnie $\binom{2}{2} = 1$ możliwość rozmieszczenia ostatniej pary skarpetka-but. Wobec tego wynikiem jest

$$\binom{28}{2} \cdot \binom{26}{2} \cdot \binom{24}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{28!}{2^{14}}.$$

Zadanie 36J / 26S. Niech x będzie liczbą rzeczywistą spełniającą równanie $x^3 + 4x = 8$. Znajdź wartość wyrażenia $x^7 + 64x^2$.

Wynik. 128

Rozwiązanie. Wystarczy podstawić $x^3 = 8 - 4x$ do danego wyrażenia w następujący sposób:

$$x^7 + 64x^2 = x \cdot (x^3)^2 + 64x^2 = x(8 - 4x)^2 + 64x^2 = 64x + 16x^3 = 16(x^3 + 4x) = 128.$$

Zadanie 37J / 27S. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB dwusieczna kąta ACB przecina prostą AB w punkcie D , a dwusieczna kąta BAC przecina prostą BC w punkcie E . Wyznacz $\angle BAC$, jeśli wiadomo, że $AE = 2 \cdot CD$.

Wynik. 36°

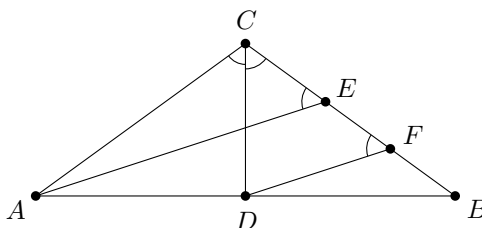
Rozwiązanie. Niech F będzie takim punktem na odcinku BC , że $AE \parallel DF$. Mamy $DF = \frac{1}{2}AE = CD$, więc FCD to trójkąt równoramienny o podstawie FC . Przyjmijmy oznaczenie $\varphi = \angle BAC$. Wówczas

$$\angle AEC = \angle DFC = \angle FCD = \angle DCA = 90^\circ - \varphi.$$

W końcu, skoro $\angle CAE = \frac{1}{2}\varphi$, to otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\varphi + 3(90^\circ - \varphi) = 180^\circ,$$

skąd $\varphi = 36^\circ$.



Zadanie 38J / 28S. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych (a_n) , w którym $a_1 = 2015$ oraz $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 \cdot a_n$ dla każdego $n \geq 1$. Znajdź a_{2015} .

Wynik. $\frac{1}{1008}$

Rozwiązanie. Odejmując stronami zależności rekurencyjne dla n oraz $n-1$, otrzymujemy $a_n = n^2 \cdot a_n - (n-1)^2 \cdot a_{n-1}$, co można uprościć do $a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$. Stąd

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 = \frac{2a_1}{n(n+1)},$$

a zatem $a_{2015} = \frac{2 \cdot 2015}{2015 \cdot 2016} = \frac{1}{1008}$.

Zadanie 39J / 29S. Kasia i Ania wymyśliły następującą grę: Pokolorowały każdą ze ścian dwóch symetrycznych dwunastościennych kostek na czerwono, zielono lub niebiesko w taki sposób, aby każdy z kolorów pojawił się na każdej z kostek co najmniej raz oraz aby w sumie były dokładnie cztery niebieskie ściany na pierwszej kostce. Jeżeli po rzucie tak przygotowanymi kośćmi na obu wypadnie ściana tego samego koloru, wygrywa Kasia, w przeciwnym wypadku wygrywa Ania. Załóżmy, że kolory ścian są tak dobrane, aby każda z dziewczynek miała jednakową szansę na zwycięstwo. Ile ścian koloru zielonego znajduje się na drugiej kostce?

Wynik. 1, 9

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $c_1, z_1, n_1, c_2, z_2, n_2$ liczby ścian odpowiednich kolorów na odpowiednich kostkach. Wiemy, że $c_1 + z_1 + n_1 = 12$, $c_2 + z_2 + n_2 = 12$ oraz $n_1 = 4$. Co więcej, spośród wszystkich $12^2 = 144$ możliwych wyników rzutu kośćmi, dokładnie w połowie otrzymujemy ten sam kolor na obu kostkach, skąd

$$c_1 c_2 + z_1 z_2 + n_1 n_2 = 72.$$

Zapisując lewą stronę powyższej równości w zależności od c_1, c_2 oraz z_2 za pomocą wyprowadzonych wcześniej równości, otrzymujemy

$$c_1 c_2 - c_1 z_2 - 4c_2 + 4z_2 + 48 = 72, \quad \text{czyli} \quad (c_1 - 4)(c_2 - z_2) = 24.$$

Korzystając z równości $-3 \leq c_1 - 4 \leq 3$ oraz $-9 \leq c_2 - z_2 \leq 9$, wnioskujemy, że $c_2 - z_2$ jest równe 8 lub -8 , co wraz z $0 < n_2 = 12 - c_2 - z_2$ oznacza, że $z_2 = 1$ lub $z_2 = 9$. Bezpośrednie sprawdzenie wskazuje, że obie znalezione wartości spełniają warunki zadania.

Zadanie 40J / 30S. Przy dużym okrągłym stole siedzi $n > 24$ polityków, z których każdy albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Każdy z nich twierdzi, że

- sam jest prawdomówny,
- polityk siedzący dwadzieścia cztery miejsca dalej na prawo jest kłamcą.

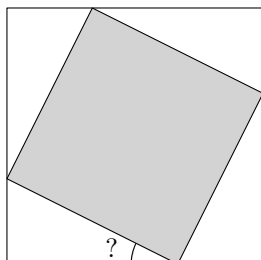
Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n , dla której taka sytuacja jest możliwa.

Wynik. 32

Rozwiązanie. Wybierzmy dowolnego polityka, następnie tego, który siedzi od niego o 24 miejsca po prawej stronie, potem kolejnego, siedzącego 24 miejsca dalej, itd. Po pewnej liczbie takich wyborów, powiedzmy s , trafimy z powrotem na wyjściowego polityka. Zauważmy, że liczba s to najmniejsza dodatnia liczba całkowita o tej własności, że $24s$ jest wielokrotnością n . Stąd $s = n/d$, gdzie $d = \text{NWD}(n, 24)$.

Zauważmy, że wybierani politycy muszą być na zmianę prawdomównymi i kłamcami, w szczególności polityk jest prawdomówny wtedy i tylko wtedy, gdy obaj oddaleni od niego o 24 miejsca przy stole politycy są kłamcami. Jeżeli liczba s byłaby nieparzysta, wynikałoby stąd sprzeczność. Stąd n jest liczbą podzielną przez wyższą potęgę dwójki niż 24. Najmniejszą taką liczbą większą od 24 jest 32 i bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że mogą być wówczas spełnione warunki zadania.

Zadanie 41J / 31S. Dwa kwadraty mają wspólny środek, a wierzchołki mniejszego z nich należą do boków większego. Jeżeli wytniemy z większego kwadratu mniejszy, pozostaną cztery przystające trójkąty, z których każdy ma pole równe $1/12$ pola większego kwadratu. Jaką miarę ma najmniejszy z kątów wewnętrznych w każdym z otrzymanych czterech trójkątów?



Wynik. 15°

Rozwiązanie. Oznaczmy przez a, b długości przyprostokątnych, a przez c — długość przeciwprostokątnej każdego z czterech otrzymanych trójkątów oraz załóżmy, że $a \leq b$. Bezpośredni rachunek pozwala zauważyć, że pole mniejszego kwadratu stanowi dwie trzecie pola większego kwadratu. Wobec tego pole jednego trójkąta stanowi jedną ósmą pola mniejszego kwadratu, czyli

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{8}c^2.$$

Niech α będzie szukany najmniejszym kątem wewnętrznym. Wówczas $a = c \sin \alpha$ oraz $b = c \cos \alpha$, więc

$$c^2 = 4ab = 4c^2 \sin \alpha \cos \alpha = 2c^2 \sin 2\alpha, \quad \text{czyli} \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

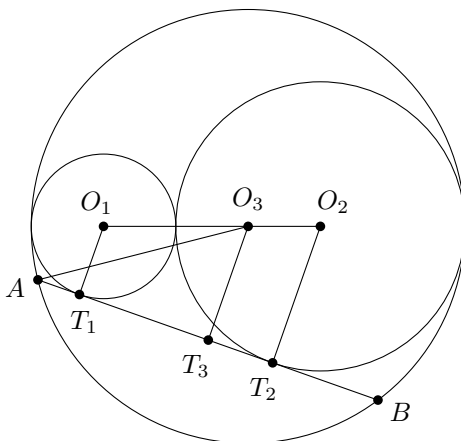
Skoro $\alpha \leq 45^\circ$, to $2\alpha = 30^\circ$ i w konsekwencji $\alpha = 15^\circ$.

Zadanie 42J / 32S. Okrąg ω_3 o promieniu 3 jest styczny wewnętrznie do okręgów ω_1 i ω_2 o promieniach odpowiednio 1 i 2. Co więcej, okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie. Na okręgu ω_3 wybrano punkty A, B w taki sposób, że prosta AB jest wspólną styczną zewnętrzną okręgów ω_1 i ω_2 . Znajdź długość odcinka AB .

Wynik. $\frac{4}{3}\sqrt{14}$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez O_1, O_2, O_3 środki odpowiednio okręgów $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, a przez T_1, T_2, T_3 — rzuty prostokątne odpowiednio punktów O_1, O_2, O_3 na prostą AB (punkty T_1 i T_2 są więc punktami styczności okręgu ω_1 do prostej AB). Skoro $O_1T_1 \parallel O_2T_2 \parallel O_3T_3$, $O_1T_1 = 1$, $O_2T_2 = 2$ oraz $O_1O_3 = 2O_2O_3$, a punkty O_1, O_2, O_3 są współliniowe, to korzystając z podobieństw odpowiednich trójkątów, łatwo otrzymujemy $O_3T_3 = \frac{5}{3}$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta AO_3T_3 , wnioskujemy, że

$$AB = 2AT_3 = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{14}.$$



Zadanie 43J / 33S. Pewnego dnia nieustraszony Edyp spotkał na swojej drodze Sfinksa, który zadał mu następującą zagadkę. Zadaniem Edypa było zgadnięcie wybranej przez Sfinksa dwucyfrowej liczby dodatniej S . Edyp mógł wybrać trzy jednocyfrowe dodatnie liczby całkowite $a < b < c$, a następnie zapytać czy S jest przez nie podzielna. Dla każdej z tych liczb, Edyp otrzymał osobną odpowiedź („tak” lub „nie”). Po otrzymaniu odpowiedzi Edyp był zrozpaczony, gdyż istniały dokładnie dwie liczby spełniające kryteria. Wtedy Sfinks przyznał się do pomyłki przy odpowiedzi na pytanie o podzielność przez b . W tej sytuacji Edyp wyznaczył jednoznacznie liczbę S . Jaka była wartość S ?

Wynik. 84

Rozwiązanie. Istnieją dokładnie trzy dwucyfrowe liczby spełniające jednocześnie warunki podzielności przez a i c (dwie odpowiadające początkowej odpowiedzi Sfinksa, oraz jedna odpowiadająca odpowiedzi po poprawce). Ponadto obie odpowiedzi musiały być twierdzące, gdyż w przeciwnym razie byłyby więcej niż trzy liczby spełniające warunki. Otrzymujemy, że wszystkie trzy liczby są podzielne przez $\text{NWW}(a, c) = m$. Liczba m spełnia warunki $25 \leq m \leq 33$. Jedynie dwie liczby z przedziału $[25, 33]$ da się przedstawić w postaci najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch cyfr, są to $28 = \text{NWW}(4, 7)$ oraz $30 = \text{NWW}(5, 6)$. Druga z tych możliwości nie może zajść ponieważ $c - a \geq 2$. Ostatecznie dostajemy, że $a = 4$ oraz $c = 7$. Przypuśćmy, że $b = 5$, wówczas nie istnieje liczba dwucyfrowa podzielna jednocześnie przez a, b i c . Jeżeli $b = 6$, to odpowiedź negatywna na pytanie o podzielność przez b odpowiada liczbom 28 i 56, a odpowiedź pozytywna odpowiada liczbie $S = 84$.

Zadanie 44J / 34S. Cztery osoby poruszają się wzdłuż prostej drogi, każda ze stałą prędkością. Pierwsza osoba prowadzi samochód, druga porusza się motocyklem, trzecia jedzie skuterem, a czwarta rowerem. Kierowca samochodu spotkał prowadzącego skuter o 12 w południe, rowerzystę o 14, a motocyklistę o 16. Motocyklista spotkał jadącego skuterem o 17, a rowerzystę o 18. O której godzinie nastąpiło spotkanie rowerzysty z kierującym skuterem?

Wynik. 15:20

Rozwiązanie. Zauważmy, że czasy spotkań nie zależą od układu odniesienia, dlatego możemy założyć, że samochód stoi w miejscu. Przy tym założeniu, motocyklista potrzebował godzinę aby dotrzeć od samochodu do miejsca spotkania z kierującym skuterem, któremu ten sam dystans zajął pięć godzin. Otrzymujemy, że motocyklista jest pięć razy szybszy od kierującego skuterem. Podobnie otrzymujemy, że motocyklista jest dwukrotnie szybszy od rowerzysty, co za tym idzie stosunek szybkości rowerzysty do kierującego skuterem wynosi 5 : 2.

Oznaczmy przez t liczbę godzin jaką potrzebował kierujący skuterem aby dostać się od samochodu do punktu spotkania z rowerzystą. Wówczas rowerzysta, do pokonania tego samego dystansu, potrzebuje $t - 2$ godziny. Stosunek tych czasów jest odwrotny do stosunku ich prędkości, więc

$$\frac{t - 2}{t} = \frac{2}{5},$$

lub równoważnie $t = 10/3$. Ostatecznie, skoro jadący skuterem spotkał kierowcę o 12 w południe to jego spotkanie z rowerzystą miało miejsce o godzinie 15:20.

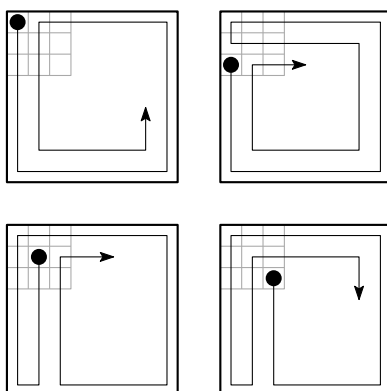
Zadanie 45J / 35S. Na podłodze w auli Collegium Novum UJ znajduje się kwadratowy dywan o boku długości 22 metrów. Robotyczny odkurzacz (robod) otrzymał zadanie wyczyszczenia całego dywanu. Dla wygody dywan jest podzielony na 484 kwadraty jednostkowe, które robod czyści jeden po drugim. Robod postępuje zgodnie z następującymi zasadami:

- Jeżeli pewien kwadrat został już odkurzony, robod nie może wjechać na niego ponownie.
- Robod jedzie cały czas w tym samym kierunku dopóki nie jest zmuszony by zmienić kierunek, gdy natrafi na krawędź dywanu lub już odkurzony kwadrat.
- Gdy robod musi zmienić kierunek ruchu i ma do wyboru dwie opcje, może wybrać tę, którą preferuje.

Na początku robod jest umieszczony w jednym z kwadratów i może wybrać dowolny kierunek. Dla ilu kwadratów startowych robod będzie mógł wyczyścić cały dywan?

Wynik. 20

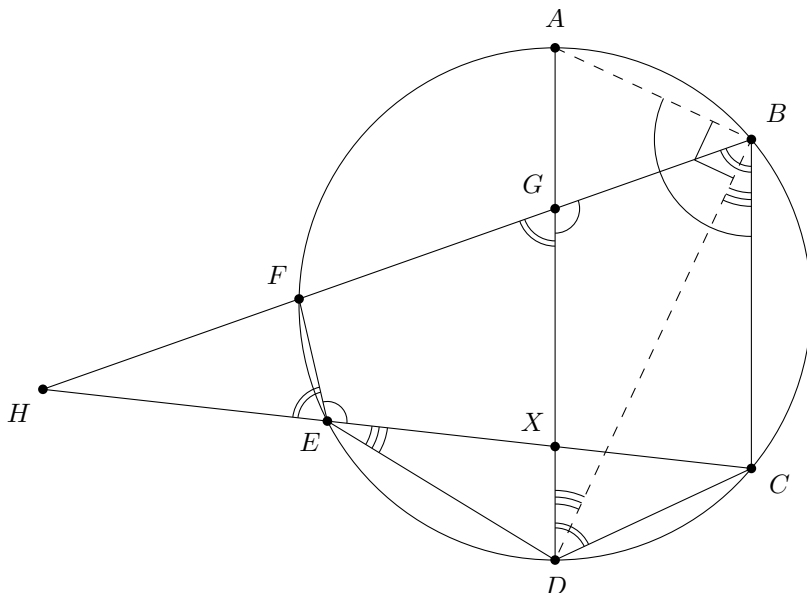
Rozwiązanie. Jeżeli robod nie rozpocznie czyszczenia w żadnym z narożnych kwadratów 3×3 , to zawsze pozostanie niewyczyszczony fragment dywanu — gdy robod przestanie poruszać się wzdłuż krawędzi dywanu (czyli nie później niż po szóstym skręcie), cały dywan zostanie podzielony na dwa oddzielne obszary złożone z niewyczyszczonych kwadratów takie, że robod nie może przedostać się z jednego do drugiego. Bezpośrednio sprawdzamy, że kwadraty startowe o współrzędnych $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ oraz ich symetryczne odpowiedniki w pozostałych narożnikach dywanu również nie spełniają warunków zadania z podobnych przyczyn. Za to kwadraty o współrzędnych $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$ spełniają. Wobec tego jest dokładnie $4 \cdot 5 = 20$ kwadratów startowych, zaczynając z których robod będzie w stanie wyczyścić cały dywan.



Zadanie 46J / 36S. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej właśnie kolejności, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, na okręgu ω w taki sposób, że AD jest średnicą okręgu ω . Prosta BF przecina AD i CE odpowiednio w punktach G i H , przy czym $\angle FEH = 56^\circ$, $\angle DGB = 124^\circ$ oraz $\angle DEC = 34^\circ$. Znajdź $\angle CEB$.

Wynik. 22°

Rozwiązanie. Kąty CDB i CEB są wpisane w okrąg ω i oparte na tym samym łuku, więc $\angle CDB = \angle CEB$, a zatem wystarczy wyznaczyć $\angle CEB$. Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych AD i CH . Zauważmy, że $124^\circ + 56^\circ = 180^\circ$ oraz $34^\circ + 56^\circ = 90^\circ$. Skoro czworokąt $EXGF$ jest wpisany w okrąg, to $AD \parallel BC$. Trójkąt ABD jest prostokątny oraz $\angle DEC = \angle DBC$, skąd $\angle ABC = 124^\circ$. W końcu $\angle BDA = \angle DBC = 34^\circ$ oraz $\angle CDA = 180^\circ - \angle ABC = 56^\circ$ ($ADCB$ jest wpisany w okrąg), co prowadzi do $\angle CEB = \angle CDB = 56^\circ - 34^\circ = 22^\circ$.



Zadanie 47J / 37S. Dziesięć osób — pięć kobiet i ich mężowie — wzięło udział w N imprezach. Wiemy, że żadna para małżonków nie wzięła udziału w tej samej imprezie, a każda para nie-małżonków (włączając pary tej samej płci) wzięła razem udział w dokładnie jednej imprezie. Ponadto jedna z osób była tylko na dwóch imprezach. Jaka jest najmniejsza wartość N , dla której taka sytuacja jest możliwa?

Wynik. 14

Rozwiązanie. Oznaczmy pary małżonków przez $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2), (e_1, e_2)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że a_1 to osoba, która wzięła udział w dokładnie 2 imprezach oraz, że na pierwszej z nich były obecne również osoby b_1, c_1, d_1 i e_1 , a na drugiej — ich drugie połówki. Na każdej z pozostałych imprez mogły pojawić się co najwyżej dwie osoby spośród $b_1, b_2, \dots, e_1, e_2$, a zatem musiało odbyć się jeszcze co najmniej 12 innych imprez. Jeżeli osoba a_2 wzięła udział w dowolnych czterech różnych z tych imprez, otrzymujemy sytuację opisaną w treści zadania. Stąd wynika, że szukaną najmniejszą wartością N jest 14.

Zadanie 48J / 38S. Nauczyciel podał uczniom trzycyfrową liczbę $\overline{abc}$, w której $0 < a < b < c$. Zadanie polegało na pomnożeniu tej liczby przez 6, a następnie zamienieniu miejscami cyfry dziesiątek z cyfrą setek. Zaspany Andrzej źle zapamiętał kolejność poleceń i najpierw dokonał zamiany cyfr, a dopiero potem pomnożył przez 6. Wynik okazał się jednak poprawny! Znajdź $\overline{abc}$.

Wynik. 678

Rozwiązanie. Skoro $0 < a < b$, to $b \geq 2$ oraz $6 \cdot \overline{bac} > 1200$, więc wynik otrzymany przez Andrzeja jest liczbą czterocyfrową, powiedzmy $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$. Z drugiej strony wiemy, że $6 \cdot \overline{abc} = \overline{dfeg}$. Odejmując stronami te dwie równości, otrzymujemy

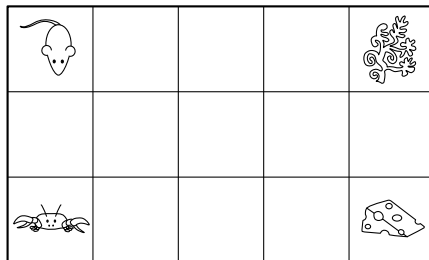
$$6(\overline{bac} - \overline{abc}) = \overline{defg} - \overline{dfeg}.$$

Stąd $540(b - a) = 90(e - f)$, czyli $6(b - a) = e - f$. Skoro e, f są cyframi, to $e - f \leq 9$, skąd wynika, że $e - f = 6$ oraz $b - a = 1$ ($b - a > 0$ ponieważ $b > a$). Podstawiając $b = a + 1$ w $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$, uzyskujemy

$$\overline{defg} = 6(100(a + 1) + 10a + c) = 660(a + 1) - 6(10 - c).$$

To oznacza, że $\overline{defg}$ różni się od pewnej wielokrotności liczby 660 o dodatnią wielokrotność liczby 6 nie większą od 42 ($c \geq 3$). Pamiętając, że $e - f = 6$ oraz $6 \mid \overline{defg}$, sprawdzamy kolejno $a = 1, 2, \dots, 7$ i otrzymujemy listę kandydatów na liczbę $\overline{defg}$: 1932, 1938, 2604, 3930, 3936, 4602, 4608. Jednak tylko dla $\overline{defg} = 4608$ liczba $\overline{bac} = \overline{defg}/6 = 768$ okazuje się mieć różne niezerowe cyfry. Bezpośrednio sprawdzamy, że rzeczywiście $6 \cdot \overline{abc} = 6 \cdot 678 = 4068 = \overline{dfeg}$.

Zadanie 49J / 39S. Rozważmy szachownicę 5×3 . W rogach szachownicy znajdują się kolejno mysz, krab, ser i algi. Mysz znajdująca się w lewym górnym rogu chce dotrzeć do sera, który znajduje się w prawym dolnym rogu. Zadaniem kraba znajdującego się początkowo w lewym dolnym rogu jest dotarcie do alg, które znajdują się w prawym górnym rogu. Zwierzęta ruszają się jednocześnie, przy czym w każdej sekundzie mysz idzie o jedno pole w dół lub w prawo, zaś krab jedno pole w górę lub w prawo. Na ile sposobów zwierzęta mogą dotrzeć do swoich przysmaków tak, aby nigdy się nie spotkały?



Wynik. 70

Rozwiązanie. Zauważmy, że ewentualne spotkanie może nastąpić jedynie w środkowym rzędzie. Ponadto, ścieżka jaką porusza się dane zwierzę jest jednoznacznie wyznaczona przez pola jakie odwiedza w środkowym rzędzie. Pozostaje obliczyć liczbę par nieprzecinających się przedziałów pól w środkowym rzędzie.

Rozważmy pierwszy przypadek, w którym jest przynajmniej jedno puste pole pomiędzy naszymi rozłącznymi przedziałami. Wówczas liczba możliwości jest równa $2 \cdot \binom{6}{4}$ — na $\binom{6}{4}$ sposobów wybieramy z sześciu krawędzi cztery, które ograniczają nasze przedziały, a następnie na dwa sposoby przypisujemy zwierzę do przedziału. W drugim przypadku, gdy przedziały są styczne, liczba możliwości to $2 \cdot \binom{6}{3}$, ponieważ tym razem wybieramy trzy z sześciu krawędzi. Ostatecznie szukana liczba sposobów to $2 \cdot \binom{6}{4} + 2 \cdot \binom{6}{3} = 70$.

Zadanie 50J / 40S. Wyznacz liczbę takich dodatnich liczb całkowitych n nie większych od 1000, że liczba $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ jest dzielnikiem liczby n .

Uwaga: Symbolem $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy część całkowitą liczby x tzn. największą liczbę całkowitą nie większą od x .

Wynik. 172

Rozwiązanie. Zauważmy, że równość $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = k$ jest równoważna nierównościom $k^3 \leq n \leq (k+1)^3 - 1$. Spośród $3k^2 + 3k + 1$ liczb całkowitych w przedziale $[k^3, (k+1)^3 - 1]$, poczynając od k^3 , dokładnie co k -ta liczba jest podzielna przez k . Otrzymujemy, że jest dokładnie $3k + 4$ takich liczb. Pozostaje zsumować to wyrażenie po wszystkich dodatnich liczbach całkowitych k spełniających warunek $(k+1)^3 - 1 \leq 1000$ (tzn. $k \leq 9$). Musimy również uwzględnić liczbę 1000, która należy do przedziału $[10^3, 11^3 - 1]$ oraz spełnia warunki zadania. Ostatecznie otrzymujemy wynik

$$1 + \sum_{k=1}^9 (3k + 4) = 1 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 172.$$

Zadanie 51J / 41S. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste m , dla których pierwiastki równania

$$x^3 - 15\sqrt{2}x^2 + mx - 195\sqrt{2} = 0$$

są długościami boków trójkąta prostokątnego.

Wynik. 281/2

Rozwiązanie. Niech liczby a, b, c będą pierwiastkami danego równania, które są również długościami boków trójkąta prostokątnego. Załóżmy, bez straty ogólności, że $0 < a, b < c$ tzn. c jest przeciwprostokątną. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równość $a^2 + b^2 = c^2$. Ze wzorów Viete'a otrzymujemy

$$15\sqrt{2} = a + b + c, \quad m = ab + ac + bc, \quad 195\sqrt{2} = abc.$$

Podnosząc do kwadratu równość $15\sqrt{2} - c = a + b$, dostajemy $450 - 30\sqrt{2}c = 2ab$. Po przemnożeniu przez c oraz podstawieniu $abc = 195\sqrt{2}$, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\sqrt{2}c^2 - 15c + 13\sqrt{2} = 0,$$

którego pierwiastkami są $c_1 = \sqrt{2}$ oraz $c_2 = 13\sqrt{2}/2$. Liczba $c_1 = \sqrt{2}$ nie może spełniać warunków $0 < a, b < c$ oraz $abc = 195\sqrt{2}$ stąd $c = 13\sqrt{2}/2$. Możemy już wyliczyć szukaną liczbę m z równości

$$m = ab + ac + bc = \frac{1}{2} \cdot ((a + b + c)^2 - 2c^2) = \frac{1}{2} \cdot 450 - c^2 = 281/2.$$

Zadanie 52J / 42S. W pudełku znajdują się jabłka w dwóch różnych kolorach: zielonym i czerwonym. Wiadomo, że przynajmniej jedno jabłko jest czerwone, oraz przynajmniej dwa jabłka są zielone. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrane jabłko jest czerwone jest 42 razy większe niż prawdopodobieństwo, że wśród dwóch losowo wybranych jabłek (bez zwracania) oba są zielone. Ile jest zielonych, a ile czerwonych jabłek?

Wynik. 4 zielone i 21 czerwonych

Rozwiązanie. Niech z, c oznaczają odpowiednio liczbę zielonych i czerwonych jabłek. Warunek podany w zadaniu można zapisać jako

$$\frac{c}{z+c} = 42 \cdot \frac{z \cdot (z-1)}{(z+c) \cdot (z+c-1)},$$

lub równoważnie

$$c^2 + (z-1)c - 42z \cdot (z-1) = 0.$$

Ostatnie równanie traktujemy jak równanie kwadratowe zmiennej c z parametrem z . Jego wyróżnik

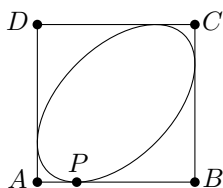
$$(z-1)^2 + 168z \cdot (z-1) = 169z^2 - 170z + 1$$

musi być kwadratem liczby całkowitej, w przeciwnym wypadku pierwiastki nie byłyby całkowite. Z warunku $z \geq 2$ otrzymujemy nierówność

$$(13z-6)^2 = 169z^2 - 156z + 36 > 169z^2 - 170z + 1 > 169z^2 - 208z + 64 = (13z-8)^2.$$

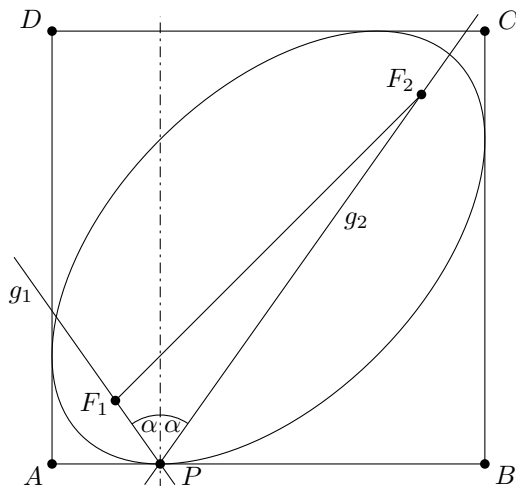
Stąd liczba $169z^2 - 170z + 1$ musi być równa $(13z-7)^2$, co pociąga za sobą równość $12z = 48$, czyli $z = 4$. Po podstawieniu otrzymujemy, że pierwiastkami naszego równania kwadratowego są -24 oraz 21 , ale z warunku $c > 0$ dostajemy, że $c = 21$ jest jedynym rozwiązaniem. Ostatecznie są 4 zielone jabłka i 21 czerwonych jabłek.

Zadanie 53J / 43S. Jasek Kluczyk, bardzo bogaty człowiek, chce wybudować w swoim ogrodzie basen. Jasek lubi symetrię, dlatego poprosił ogrodnika o wybudowanie basenu w kształcie elipsy w kwadracie $ABCD$ o wymiarach $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ spełniającego szereg wytycznych. Basen musi być styczny do wszystkich boków kwadratu, w szczególności do boku AB w punkcie P , który jest odległy o $2,5 \text{ m}$ od A . Ogrodnik wie jak skonstruować elipsę, mając dane ogniska oraz punkt na elipsie, wie również, że dzięki symetrii potrzebuje znać jedynie odległość między ogniskami. Jednak z tym zadaniem, ogrodnik ma problem i poprosił Ciebie o pomoc. Oblicz odległość między ogniskami.



Wynik. 10

Rozwiązanie. Rozwiążemy problem bardziej ogólny. Niech dany będzie kwadrat $ABCD$ o boku długości 1, niech ponadto A będzie środkiem układu współrzędnych. Punkt P o współrzędnych $(b, 0)$ leży na boku AB , przy czym spełnione są nierówności $0 < b < \frac{1}{2}$. Jeżeli przez (f, f) oznaczmy współrzędne ogniska F_1 , to współrzędne ogniska F_2 wyrażają się wzorem $(1-f, 1-f)$ (oba ogniska leżą na przekątnej AC symetrycznie względem drugiej przekątnej).



Oznaczamy przez g_1 prostą przechodzącą przez punkty P i F_1 , jej równanie dane jest wzorem

$$y = (x - b) \cdot \frac{f}{f - b},$$

podobnie prosta g_2 przechodzi przez punkty P i F_2 , a jej równanie to

$$y = (x - b) \cdot \frac{f - 1}{b + f - 1}.$$

Prosta przechodząca przez punkt P prostopadła do prostej AB jest dwusieczną kąta F_2PF_1 , dlatego współczynnik kierunkowy prostej g_1 jest liczbą przeciwną do współczynnika kierunkowego prostej g_2 . Dostajemy, że

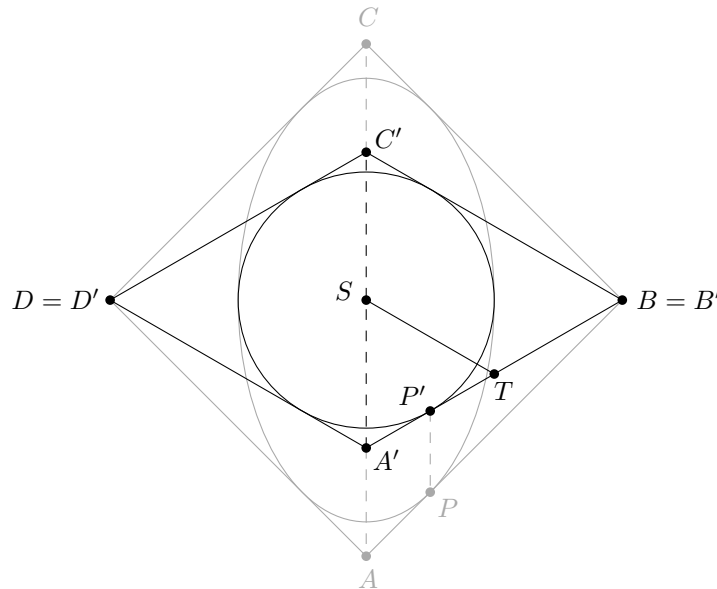
$$\frac{f}{f - b} = (-1) \cdot \frac{f - 1}{b + f - 1},$$

lub równoważnie

$$f^2 - f + \frac{b}{2} = 0.$$

Otrzymane równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania $f_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 2b})$, odpowiadające dwóm ogniskom elipsy. Odległość między ogniskami obliczamy korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymując $\sqrt{2 - 4b}$. Po podstawieniu $b = \frac{1}{4}$ oraz dziesięciokrotnym powiększeniu dostajemy żądany wynik $F_1F_2 = 10$.

Drugie rozwiązanie. Zastosujmy przekształcenie afiniczne, polegające na zwężeniu kwadratu oraz elipsy wzdłuż przekątnej AC , w ten sposób aby obrazem elipsy był okrąg. Punkty po przekształceniu oznaczamy apostrofem. Niech punkt S będzie środkiem odcinka AC , zaś punkt T środkiem odcinka $A'B'$.



Po przekształceniu stosunki boków równoległych zostają zachowane, dlatego $A'P' = \frac{1}{4}A'B'$ i w konsekwencji $A'P' = P'T$. W trójkącie $A'ST$ wysokość SP' dzieli bok $A'T$ na połowy, stąd $SA' = ST$. Otrzymujemy, że $A'C' = B'C'$ oraz trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny. Wnioskujemy stąd, że nasze przekształcenie odbyło się w stosunku

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Łatwo obliczyć, że promień otrzymanego okręgu (którego długość pokrywa się z długością b mniejszej półosi elipsy) wynosi $\frac{1}{4}AC$. Długość a dłuższej półosi otrzymujemy dzieląc długość krótszej półosi przez stosunek zwężenia. Znając długości a , b pozostaje obliczyć mimośród ze wzoru $e = \sqrt{a^2 - b^2}$, a następnie przemnożyć go przez dwa, aby otrzymać odległość ognisk.

Zadanie 54J / 44S. Ciąg (a_n) dany jest wzorami $a_1 = 1$, oraz $a_n = \lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} \rfloor$ dla $n > 1$. Wyznacz a_{1000} .

Uwaga: Symbolem $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy część całkowitą liczby x , tzn. największą liczbę całkowitą nie większą od x .

Wynik. 495

Rozwiązanie. Po wypisaniu początkowych wyrazów ciągu $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, \dots)$, zauważamy, że liczba 1 wystąpiła czterokrotnie, zaś pozostałe liczby występują dwu- lub trzykrotnie. Udowodnimy przez indukcję, że liczby występujące w naszym ciągu trzykrotnie to potęgi dwójki.

Przypuśćmy, że wypisaliśmy już nasz ciąg do pierwszego wystąpienia liczby $n > 1$ i zachowuje się on tak jak opisano powyżej. Niech k będzie największą liczbą całkowitą spełniającą warunek $2^k < n$. Wówczas suma początkowych wyrazów ciągu wynosi

$$s_1 = (1 + 2 + \dots + n) + (1 + 2 + \dots + n - 1) + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k) + 1 = n^2 + 2^{k+1}.$$

Skoro spełnione są nierówności $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2n < 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$, to $s_1 < (n + 1)^2$, w konsekwencji następna liczba w ciągu wynosi $\lfloor \sqrt{s_1} \rfloor = n$.

Wyznaczmy kolejną liczbę w ciągu. Suma początkowych wyrazów wynosi teraz $s_2 = s_1 + n = n^2 + n + 2^{k+1}$. Jeżeli $2^{k+1} < n + 1$, to ponownie $s_2 < (n + 1)^2$ i kolejnym elementem ciągu jest n . Jednakże k jest największą liczbą całkowitą spełniającą warunek $2^k < n$, czyli $2^{k+1} \geq n$. Widzimy, że nierówność $2^{k+1} < n + 1$ może być spełniona jedynie gdy $n = 2^{k+1}$. Jeżeli n nie jest potęgą dwójki, to kolejnym wyrazem ciągu jest $n + 1$, ponieważ $2^{k+1} < 2n < 3n + 4$, co jest równoważne z $n^2 + n + 2^{k+1} < (n + 2)^2$.

Pozostaje wykazać, że jeżeli $n = 2^{k+1}$, to po trzech wystąpieniach n pojawi się $n + 1$. Po obliczeniu kolejnej sumy początkowych wyrazów $s_3 = s_2 + n = n^2 + 2n + 2^{k+1} = n^2 + 3n$ dostajemy $(n + 1)^2 < s_3 < (n + 2)^2$. Otrzymujemy, że następną liczbą jest $n + 1$, co kończy dowód indukcyjny. Ostatecznie $a_{1000} = 495$ (gdyż $500 = a_{1010} = a_{1009}$).

Zadanie 55J / 45S. W pola szachownicy 4×4 wpisujemy nieujemne liczby całkowite. Wyznacz liczbę szachownic 4×4 spełniających warunki

- w każdym wierszu i każdej kolumnie co najwyżej dwa pola zawierają liczbę niezerową,
- suma liczb w każdym wierszu i każdej kolumnie wynosi 3.

Wynik. 576

Rozwiązanie. Zauważmy, że naszą szachownicę możemy rozbić na sumę dwóch szachownic: takiej która zawiera dokładnie jedną jedynkę w każdym wierszu i w każdej kolumnie oraz takiej, która zawiera dokładnie jedną dwójkę w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Odwrotnie, mając dwie takie szachownice po dodaniu wpisanych w nie liczb otrzymamy szachownicę spełniającą warunki zadania. Otrzymujemy, że żądany wynik to $(4!)^2 = 576$.