**Úloha 1J.** Malý Peťko kráča s dobou, a preto nosí pár ponožiek tak, že na každej nohe má ponožku inej farby. K dispozícii má 30 červených, 40 zelených a 40 modrých ponožiek vo svojej komode v neosvetlenej izbe. Peťko vyberá z komody postupne po jednej ponožke bez toho, aby sa pozrel na jej farbu, až kým nemá potrebný počet. Aký najmenší počet ponožiek potrebuje vybrať z komody, aby mal určite osem dvojfarebných párov ponožiek?
*Poznámka: Ponožka nemôže byť započítaná do dvoch rôznych párov.*

*Výsledok.* 48

*Riešenie.* Ak Peťko vyberie všetky zelené ponožky a sedem červených ponožiek, nemôže vytvoriť osem párov (ako hovorí zadanie). Takže 47 ponožiek nepostačuje. Ak zoberieme 48 ponožiek, je tu aspoň $\frac{48}{3} = 16$ ponožiek jednej farby a aspoň $48-40 = 8$ ponožiek, ktoré nemajú túto farbu, čo nám umožňuje vytvoriť osem dvojfarebných párov ponožiek.

**Úloha 2J.** Predpokladajme, že $x$ a $y$ sú kladné celé čísla spĺňajúce rovnicu $x^2 + 2y^2 = 2468$. Určte hodnotu $x$, ak viete, že existuje len jedna taká dvojica $(x, y)$ a $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$.

*Výsledok.* 30

*Riešenie.* Použitím rovnosti $1234 = 28^2 + 2 \cdot 15^2$ dostávame

$$2468 = 2(28^2 + 2 \cdot 15^2) = (2 \cdot 15)^2 + 2 \cdot 28^2.$$

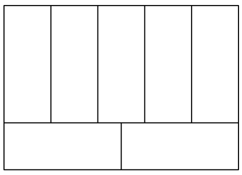
Zo zadania vieme, že existuje jediná dvojica spĺňajúca rovnicu v zadaní, a preto $x = 30$.

**Úloha 3J.** Digitálne hodinky zobrazujú čas v hodinách a minútach použitím 24-hodinového formátu času. Koľko minút za deň je na displeji digitálnych hodiniek možné vidieť číslicu 5?

*Výsledok.* 450

*Riešenie.* Počas 24 hodín sú 2 hodiny, počas ktorých je číslica 5 zobrazená neustále: 5. a 15. hodina. Spolu to trvá 120 minút. V zvyšných hodinách dňa je možné číslicu 5 vidieť počas posledných 10 minút každej hodiny ($22 \cdot 10 = 220$ minút) a tiež päťkrát počas zvyšných 50 minút ($22 \cdot 5 = 110$ minút). Číslica 5 je zobrazená počas 24 hodín na digitálnych hodinách spolu 450 minút.

**Úloha 4J.** Veľký obdĺžnik s obvodom 136 cm je rozdelený na 7 zhodných obdĺžnikov ako na obrázku.



Aký je obsah veľkého obdĺžnika v cm$^2$?

*Výsledok.* 1120

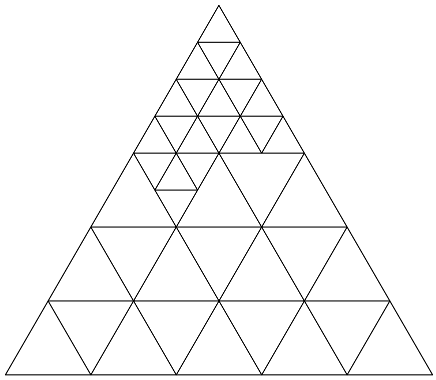
*Riešenie.* Strany malých obdĺžnikov sú v pomere 2 : 5 – ich dĺžky označme $2x$ a $5x$. Strany veľkého obdĺžnika sú teda $10x$ a $7x$. Obvod veľkého obdĺžnika je $2 \cdot (10x + 7x) = 34x = 136$ cm. Odtiaľ dostávame, že $x = 4$ a obsah veľkého trojuholníka je $10 \cdot 7 \cdot 4^2 = 1120$ cm$^2$.

**Úloha 5J.** Bonboniéra má tvar rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky $s$ cm. Je v nej $2n$ čokoládok v tvare rovnostranných trojuholníkov, ktoré bez medzier vypĺňajú bonboniéru: $n$ z nich má stranu dĺžky 1 cm a ďalších $n$ čokoládok má stranu dĺžky 2 cm. Aká je najmenšia možná hodnota $s$?

*Výsledok.* 10

*Riešenie.* Nech $a$ je obsah menšej čokoládky, teda tej so stranou dĺžky 1 cm. Obsah väčšej čokoládky je potom $4a$. Celkový obsah čokoládok je $na + 4na = 5na$, čo je i obsah celej bonboniéry $s^2a$. Teda $5n = s^2$, z čoho plynie, že $s$ je násobkom 5.

Ľahko vidno, že nie je možné vyplniť bonboniéru piatimi veľkými čokoládkami v bonboniére s dĺžkou strany 5 cm, teda $s \neq 5$. Avšak je celkom jednoduché nájsť rozloženie 20 menších a 20 väčších čokoládok vo vnútri bonboniéry so stranou dĺžky 10 cm.



**Úloha 6J.** Malý Peťko vyrástol a teraz nosí ponožky tak, že má obe ponožky rovnakej farby. Aktuálne má vo svojej komode 20 hnedých, 30 červených, 40 zelených, 40 modrých, 30 čiernych a 20 bielych ponožiek. Komoda je ale stále umiestnená v neosvetlenej miestnosti. Aký je najmenší počet ponožiek, ktorý musí Peťko vybrať z komody, aby určite mal osem klasických párov ponožiek, ak počas výberu nevie rozoznať, akú farbu vytiahol?
*Poznámka: Ponožka nemôže byť započítaná do dvoch rôznych párov.*

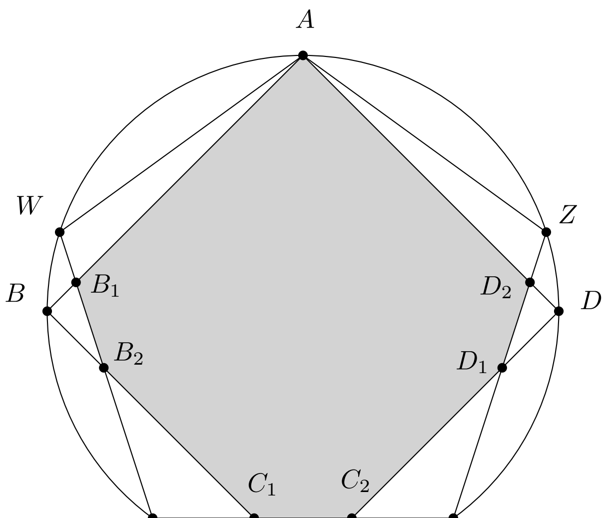
*Výsledok.* 21

*Riešenie.* Počet vybraných ponožiek je súčtom párneho počtu ponožiek, ktoré použijeme na vytvorenie párov a počtu nespárovaných ponožiek (to môže byť najviac šesť, keďže toľko je farieb ponožiek). Ak Peter vyberie 21 ponožiek z komody, nemôže mať vo svojom výbere šesť nespárovaných ponožiek, nakoľko $21 - 6 = 15$ nie je párne číslo. Takže máme najviac päť nespárovaných ponožiek a ostatné ponožky tak vytvárajú spolu $\frac{21-5}{2} = 8$ párov ponožiek. Zobrať len 20 ponožiek nestačí, lebo by mohol vytiahnuť napríklad sedem párov bielych ponožiek a šesť nespárených ponožiek, teda po jednom kuse z každej farby. To znamená, že Peter musí vytiahnuť aspoň 21 ponožiek z komody.

**Úloha 7J.** Štvorec a pravidelný päťuholník sú vpísané do tej istej kružnice tak, že majú jeden vrchol spoločný. Aký najväčší vnútorný uhol má mnohouholník, ktorý je prienikom nášho štvorca a päťuholníka?

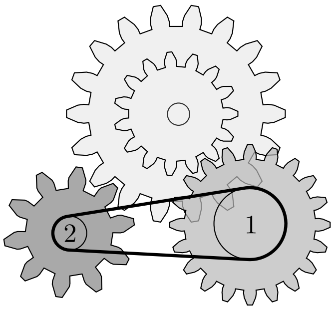
*Výsledok.* $153^\circ$

*Riešenie.* Označme vrcholy ako na obrázku. Mnohouholník $AB_1B_2C_1C_2D_1D_2$ je prienikom nášho štvorca a päťuholníka.




Nakoľko je obrázok osovo symetrický podľa priamky $AC$, tak stačí overiť vnútorné uhly pri vrcholoch $A$, $B_1$, $B_2$ a $C_1$. Prvý je zjavne $90^\circ$ a posledný $135^\circ$. Keďže priamka $B_2D_1$ je rovnobežná s priamkou $XY$, tak $|\sphericalangle D_1B_2B_1| = |\sphericalangle YXW| = 108^\circ$, a vďaka rovnosti $|\sphericalangle C_1B_2D_1| = |\sphericalangle CBD| = 45^\circ$ ($B_2D_1 \parallel BD$) je uhol pri vrchole $B_2$ rovný $153^\circ$. Nakoniec trojuholník $B_1BB_2$ je pravouhlý, odkiaľ vieme zistiť, že uhol pri $B_1$ je $117^\circ$. Takže najväčší vnútorný uhol mnohouholníka je $153^\circ$.

**Úloha 8J.** Koliesko označené číslom 1 má tvar kružnice s priemerom 48 mm. Aký priemer musí mať koliesko označené číslom 2, aby mohol celý mechanizmus fungovať?




*Výsledok.* 20 mm

*Riešenie.* Po spočítaní zúbkov koliesok je zrejmé, že jedno úplné otočenie kolieska 1 otočí veľké koliesko o $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ z celého okruhu. Jedno úplné otočenie veľkého kolieska otočí koliesko 2 o $\frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ z celého okruhu. A teda vždy, keď sa koliesko 1 úplne otočí, otočí sa koliesko 2 o $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$ z celého okruhu. Obvod kolieska 2 preto musí byť $\frac{5}{12}$-krát väčší ako obvod kolieska 1. Pomer obvodov je rovný pomeru priemerov, čím sa dostávame k priemeru kolieska 2: $\frac{5}{12} \cdot 48 \text{ mm} = 20 \text{ mm}$.

**Úloha 9J.** Robko si pripravil presný plán, v ktoré dni zo svojich 62-dňových letných prázdnin bude klamať a v ktoré hovoriť pravdu. V $k$-tý deň jeho prázdnin (pre každé $k$ od 1 do 62) oznámil, že mal v pláne klamať aspoň $k$ dní. Koľko z jeho tvrdení boli klamstvá?

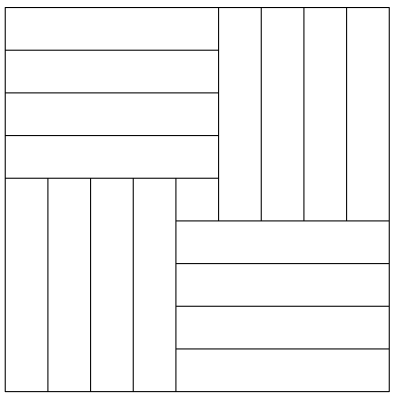
*Výsledok.* 31

*Riešenie.* Všimnime si, že ak by Robko rozprával pravdu jeden deň, tak musel vravieť pravdu aj všetky predošlé dni. Ak vravel pravdu len pre $k < 31$ dní, bolo by to v rozpore s tým, že klame $62 - k > 31$ dní. Obdobne, vravieť pravdu viac ako 31 dní by viedlo k rozporu s počtom dní klamania. Teda Robko klamal presne 31 dní.

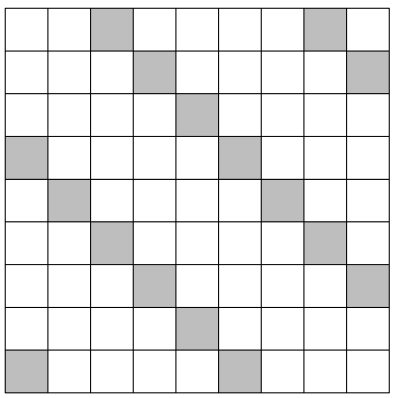
**Úloha 10J.** Hráme loďky na štvorčekovom papieri rozmerov $9 \times 9$. Náš súper niekde umiestnil svoj Titanic tvaru $5 \times 1$ alebo $1 \times 5$ štvorčekov. Najmenej koľko krát musíme vystreliť, kým si budeme istí, že sme zasiahli súperov Titanic aspoň raz (vystreliť znamená označiť niektoré políčko z mriežky)?

*Výsledok.* 16

*Riešenie.* Rozdeľme si hraciu plochu $9 \times 9$ ako na obrázku. Vidíme, že na to, aby sme zasiahli každý z $5 \times 1$ Titanicov aspoň raz, musíme vystreliť najmenej 16-krát.



Na obrázku 2 vidíme, že na 16 výstrelov to naozaj ide.



Preto je správnym riešením 16 výstrelov.

**Úloha 11J / 1S.** Aký je najväčší možný spoločný deliteľ navzájom rôznych prirodzených čísel $a$, $b$, $c$ spĺňajúcich $a + b + c = 2015$?

*Výsledok.* 155

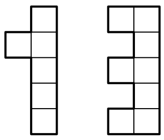
*Riešenie.* Keďže $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015 = a + b + c = nsd(a, b, c) \cdot (a_0 + b_0 + c_0)$ pre nejaké prirodzené čísla $a_0$, $b_0$, $c_0$ dostaneme $a_0 + b_0 + c_0 \geq 6$. Preto $nsd(a, b, c)$ môže byť najviac $5 \cdot 31 = 155$. Maximum môžeme dosiahnuť, ak vezmeme navzájom rôzne prirodzené čísla, ktorých súčet je 13. Napríklad $a_0 = 1$, $b_0 = 5$, $c_0 = 7$ vedie k $a = 1 \cdot 155$, $b = 5 \cdot 155$, $c = 7 \cdot 155$

**Úloha 12J / 2S.** Vlak zásobujúci železiarne pozostáva z lokomotívy (je vždy vpredu) a šiestich vagónov. V každom vagóne je buď uhlie alebo železná ruda. Adam si vlak odfotil, ale nepodarilo sa mu zachytiť ho celý. Na fotke vidno iba vagón so železnou rudou, po ktorom nasledujú dva vagóny s uhlím. Vagóny nie sú úplne symetrické, takže vidíme, že vagón zo železnou rudou je z týchto troch zaradený ako prvý. Koľko rôznych vlakov mohlo byť odfotených tak, že fotografia vyzerá ako Adamova?

*Výsledok.* 31

*Riešenie.* V rámci šiestich vagónov máme štyri možnosti ako môže byť odfotená trojica ruda-uhlie-uhlie. Pre každú z nich máme $2^3$ možností ako doplniť ostatné vagóny. Možnosť $R - U - U - R - U - U$ sme ale zarátali dvakrát, takže počet rôznych vlakov je $4 \cdot 8 - 1 = 31$.

**Úloha 13J / 3S.** Objekt postavený z niekoľkých rovnakých kociek vyzerá zozadu ako '1' a zhora ako '3' (pozri obrázok). Koľko kociek vidíme, keď sa pozeráme sprava, ak vieme, že objekt pozostáva z najväčšieho možného počtu kociek?

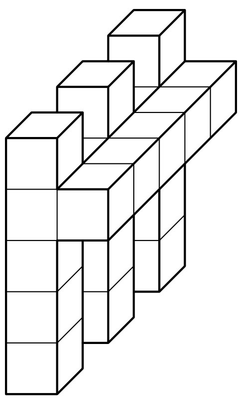


Poznámka: Na obrázku dole je postupne kocka, pohľad na kocku zozadu a zhora.

*Výsledok.* 17

*Riešenie.* Objekt sa určite zmestí do kvádra $2 \times 5 \times 5$ kociek. Rozdeľme ho na dve polovice $1 \times 5 \times 5$ a skúmajme ich osobitne. Keď sa na objekt pozrieme spredu, vidíme zrkadlovú '1'. Preto pri pohľade na pravú polovicu spredu vidíme jeden štvorček a pri pohľade zvrchu päť štvorčekov. Jediný spôsob ako to dosiahnuť je umiestniť päť kociek do jedného radu. Podobne pre ľavú polovicu: pri pohľade spredu vidíme päť štvorčekov a pri pohľade zvrchu tri. Takže maximálny počet kociek dosiahneme, ak umiestnime po päť kociek do každého z troch radov.

Výsledný objekt vyzerá ako na obrázku. Keď sa naň pozrieme sprava, vidíme 17 kociek.



**Úloha 14J / 4S.** Hovoríme, že prirodzené číslo $n$ je *vynikajúce*, ak súčet cifier takéhoto čísla je deliteľný 17 a to isté platí pre $n+10$. Aké je najmenšie vynikajúce číslo?

*Výsledok.* 7999

*Riešenie.* Súčet cifier čísla $r$ označme ako $Q(r)$. Ak je cifra na mieste desiatok odlišná od 9, dostaneme $Q(n+10) = Q(n)+1$. Preto cifra na mieste desiatok čísla $n$ musí byť 9. Ak je cifra na mieste stoviek odlišná od 9, dostaneme $Q(n+10) = Q(n)-8$, ale ak je cifra na mieste stoviek 9 a cifra na mieste tisícok je odlišná, dostaneme $Q(n+10) = Q(n)-17$. Takto vieme vytvoriť obe čísla $Q(n)$ a $Q(n+10)$ deliteľné 17. Aby bolo $n$ čo možno najmenšie, predpokladáme, že je to prípad $Q(n) = 2 \cdot 17 = 34$. Súčet všetkých cifier okrem stoviek a desiatok je teda $34 - 2 \cdot 9 = 16 < 2 \cdot 9$, čo znamená, že ďalšie dve cifry postačia na vytvorenie najmenšieho vynikajúceho čísla. Teraz je už jednoduché určiť, že $n = 7999$ je požadovaný výsledok.

**Úloha 15J / 5S.** Autobusová spoločnosť premáva linkou medzi mestami $A$ a $D$ so zastávkami v mestách $B$ a $C$ (v tomto poradí). Cena lístku je priamo úmerná vzdialenosti prejdenej autobusom. Napríklad cestovný lístok z $A$ do $C$ stojí rovnako ako lístky z $A$ do $B$ a z $B$ do $C$ dohromady. Okrem toho spoločnosť neponúka spiatočné lístky, len jednosmerné. Líza, ktorú baví zbieranie autobusových lístkov, chce získať lístky so všetkými možnými cenami bez ohľadu na smer cesty. Zatiaľ má lístky, čo stoja 10, 40, 50, 60 a 70. Aké sú možné ceny chýbajúcich lístkov?

*Výsledok.* 20, 110

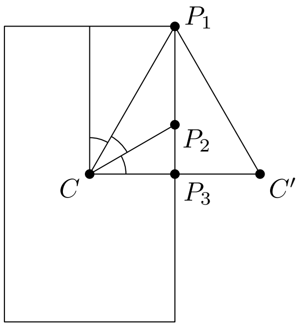
*Riešenie.* Predpokladajme najprv, že Líza má vo svojej kolekcii najdrahší lístok (teda ten z $A$ do $D$), teda jeho cena je 70. Vzhľadom k tomu, že cena je súčet lístkov na častiach $AB$, $BC$ a $CD$, a to najmenej dva z nich sú už vo vlastníctve Lízy. Vidíme, že jediná možnosť cien lístkov je 10, 20 a 40, takže chýbajúca cena musí byť 20. Je ľahké vidieť, že tieto ceny môžu byť priradené k častiam trasy tak, že súhlasia s ostatnými lístkami.

Ak najdrahší lístok chýba, potom lístok za 70 musí byť na cestu s jednou zastávkou; jediný spôsob, ako rozložiť túto cenu na súčet dvoch cien lístkov, ktoré Líza už má je $10+60$. Usudzujeme, že vstupenka na zostávajúcom úseku stojí 40 a najdlhšia cesta stojí $10+40+60 = 110$. Opäť vieme ľahko skontrolovať, či tieto hodnoty sú vyhovujúce.

**Úloha 16J / 6S.** Katka obdivuje v hodinárstve hodinky, ktoré sú zabalené v priehľadnej obdĺžnikovej krabici tak, že stred krabice a stred hodiniek (v mieste, kde sa ručičky pretínajú) sa prekrýva. Kratšia strana krabica je 3 cm dlhá. Všimla si, že na poludnie hodinová ručička ukazuje na stred kratšej strany škatule a o jednej poobede ukazuje na roh krabice. Ako ďaleko od seba sú dva body na okraji krabice, na ktoré ukazuje hodinová ručička o jednej a o druhej hodine poobede?

*Výsledok.* $\sqrt{3}$ cm

*Riešenie.* Označme $P_x$ bod na hranici škatule, na ktorý ukazuje hodinová ručička o $x$-tej hodine a nech $C$ je stred krabice. Keďže $|\sphericalangle P_2CP_1| = |\sphericalangle P_3CP_2| = 30°$, tak vidíme, že bod $P_2$ je stred vpísanej kružnice a ťažisko rovnostranného trojuholníka $CC'P_1$, kde $C'$ je $C$ zobrazené cez $P_3$. Vzdialenosť $P_1P_2$, ktorú hľadáme, je 2/3 výšky rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany 3 cm. To znamená, že $|P_1P_2| = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \text{ cm} = \sqrt{3}$ cm.




**Úloha 17J / 7S.** Zoraďte cifry $1, 2, \dots, 9$ do 9-ciferného čísla tak, aby sa každé číslo tvorené dvojicou po sebe idúcich cifier dalo napísať ako súčin $k \cdot l$ nejakých cifier $k, l \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

*Výsledok.* 728163549

*Riešenie.* Nech $x, y \in \{1, 2, \dots, 9\}$ sú rôzne cifry. Dvojicu $xy$ nazvime *dobrá*, ak existujú $k, l \in \{1, 2, \dots, 9\}$ také, že $10x + y = kl$. Keďže jediná dobrá dvojica obsahujúca 9 je 49, dvojica 49 musí byť na konci hľadaného čísla $z$. Dvojice obsahujúce 7 sú iba 27 a 72. Pretože nemôžu byť použité naraz a na konci $z$ je už 49, na začiatku musí byť dvojica 72. Dvojice obsahujúce 8 sú 18, 28, 48 a 81. Číslo 4 už je raz použité v bloku 49, preto jediná možnosť je použiť trojicu 281. Z toho $z = 7281\dots49$. Teraz už musíme doplniť iba cifry 3, 5 a 6. Keďže 13 a 34 nie sú dobré dvojice a jediná dobrá dvojica $xy$ spĺňajúca $x \in \{5, 6\}$ a $y = 3$ je 63, máme $z = 728163549$. Ľahko overíme, že takéto číslo $z$ spĺňa všetky podmienky.

**Úloha 18J / 8S.** Nájdi najväčšie prvočíslo $p$ menšie než 210, pričom platí, že $210 - p$ je zložené číslo.

Poznámka: Nezabudni, že číslo 1 nie je prvočíslo ani zložené číslo.

*Výsledok.* 89

*Riešenie.* Namiesto hľadania najväčšieho prvočísla $p$, budeme hľadať najmenšie zložené číslo $n$ také, že $210 - n$ je prvočíslo. Platí $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ak by $n$ bolo deliteľné číslom 2, 3, 5 alebo 7, tak aj $210 - n$ by bolo deliteľné týmto číslom, a teda $210 - n$ by nebolo prvočíslo. Ďalšie najmenšie možné zložené číslo je teda $11^2$, ktoré implikuje $p = 210 - 121 = 89$. Číslo 89 je teda hľadané prvočíslo.

**Úloha 19J / 9S.** V jednej nemenovanej základnej škole sa rozhodli kúpiť určitý počet ceruziek a rozdať ich žiakom prvého ročníka. Žiaci sú rozdelení do tried $1.A$, $1.B$ a $1.C$. Ak by ich rozdali všetkým prvákom, každý by dostal 9 ceruziek. Ak by ich rozdali iba v $1.A$, každý žiak z $1.A$ by dostal 30 ceruziek. Nakoniec ak by ich rozdali iba v $1.B$, každý žiak z $1.B$ by dostal 36 ceruziek. Koľko ceruziek by rozdali každému žiakovi $1.C$, ak by sa rozdávalo iba v tejto triede?

*Výsledok.* 20

*Riešenie.* Označme $T$ celkový počet ceruziek a $a$, $b$, $c$ počty žiakov v jednotlivých triedach. Zo zadania vieme, že $T = 9(a + b + c)$, $T = 30a$, a $T = 36b$. Hľadáme pomer $T/c$. Dosadením $a = T/30$ a $b = T/36$ do prvej rovnice dostávame

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{3}{10}T + \tfrac{1}{4}T + 9c, \\ \tfrac{9}{20}T &= 9c, \\ \tfrac{T}{c} &= 20. \end{aligned}$$

**Úloha 20J / 10S.** Nájdite všetky 4-ciferné čísla, ktorých prvé dve cifry, posledné dve cifry a samotné číslo sú nenulové štvorce. Na mieste desiatok môže byť aj nula.

*Výsledok.* 1681

*Riešenie.* Pre $k \geq 50$ platí nerovnosť $(k+1)^2 - k^2 > 100$, preto $50^2 = 2500$ je jediný štvorec začínajúci s 25 (podobne pre 3600, 4900, 6400 a 8100). Na začiatku teda musí byť 16. Jediný štvorec väčší ako 1600 a menší ako 1700 je $41^2 = 1681$, ktorý jasne spĺňa podmienky zadania.

**Úloha 21J / 11S.** Vodič jazdí po diaľnici medzi dvoma mestami konštantnou rýchlosťou. Bohužiaľ, niektoré časti diaľnice opravovali, takže v týchto miestach musel rýchlosť znížiť o štvrtinu. Preto mal za čas, za ktorý bežne dôjde do cieľa prejdených len $6/7$ vzdialenosti medzi mestami. Akú časť z cesty, ktorú doteraz prešiel, jazdil po opravovaných častiach diaľnice?

*Výsledok.* $4/7$

*Riešenie.* Nech $x$ je čas, ktorý strávil vodič na úseku diaľnice, ktorý sa opravuje. Potom $1 - x$ je čas, ktorý strávil na zvyšku diaľnice. Čím dostávame

$$\frac{6}{7} = \frac{3}{4}x + 1 - x,$$

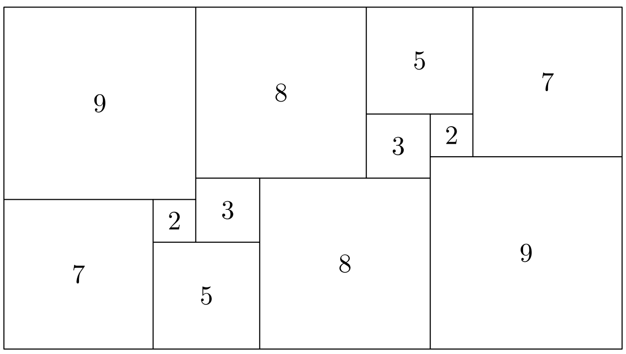
z ktorého vyplýva, že $x = 4/7$.

**Úloha 22J / 12S.** Obdĺžnik s celočíselnými dĺžkami je rozdelený do 12 štvorcov s dĺžkami: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Aký je obvod tohto obdĺžnika?

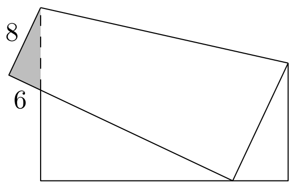
*Výsledok.* 90

*Riešenie.* Sčítaním obsahov štvorcov dostávame obsah obdĺžnika, ktorý je $464 = 2^4 \cdot 29$. Dĺžky jednotlivých strán obdĺžnika sú aspoň 9, nakoľko v ňom máme štvorec s dĺžkou strany 9. Takže jediný vhodný rozklad je $16 \cdot 29$, pre ktorý je obvod obdĺžnika 90.

Poznámka: Že takýto rozklad existuje, vidíme na priloženom obrázku:



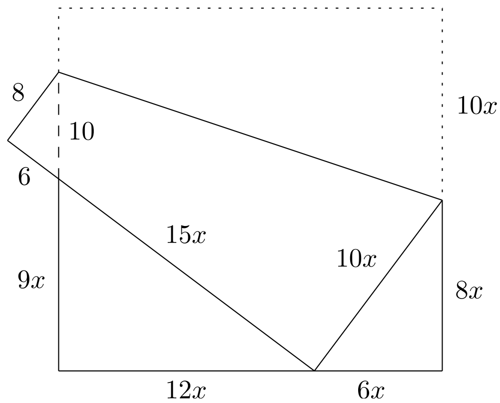
**Úloha 23J / 13S.** Štvorcový list papiera je zložený tak, že jeden z jeho vrcholov leží na protiľahlej strane. Ako vidno na obrázku, malý trojuholník presahuje. Dĺžka jeho strany, ktorá susedí so stranou listu papiera je 8 cm a dĺžka druhej takto susediacej strany je 6 cm.




Aká je dĺžka strany štvorcového papiera?

*Výsledok.* 36 cm

*Riešenie.* Kontrolou uhlov vidíme, že všetky trojuholníky na obrázku sú pravouhlé a vzájomne podobné. Dĺžky strán trojuholníka v pravom dolnom rohu sú $6x$, $8x$ a na základe Pytagorovej vety $10x$. Vzhľadom k tomu, že strana s dĺžkou $10x$ vzniká preložením strany štvorca, dĺžka strany štvorca je $18x$. To znamená, že ľavý dolný trojuholník má jednu stranu dĺžky $18x - 6x = 12x$, ako je vidieť na nasledujúcom obrázku. Ostatné strany tohto trojuholníka majú dĺžky $9x$ a $15x$, vzhľadom k pomeru podobnosti $3/2$. Dĺžka strany daného štvorca je tiež $15x + 6$, čo dáva $x = 2$. Dĺžka strany papiera je teda 36 cm.




**Úloha 24J / 14S.** Starý parník sa pohybuje pozdĺž kanála konštantnou rýchlosťou. Šimon chce zistiť jeho dĺžku. Kým parník pomaly postupuje, Šimon kráča popri vode konštantnou rýchlosťou od zadnej časti parníka k jeho čelu a napočíta 240 krokov. Potom sa okamžite otočí a ide späť až k zadnej časti parníka a napočíta 60 krokov. Aká je dĺžka parníka v krokoch?

*Výsledok.* 96

*Riešenie.* Keď sa Šimon vrátil k zadnej časti lode, urobil 300 krokov a loď sa posunula o $240 - 60 = 180$ krokov. Preto v čase, v ktorom Šimon spraví 60 krokov, loď urobí $180 : 5 = 36$ krokov vpred. Avšak Šimon sa dostane k zadnej časti lode po 60 krokoch, takže dĺžka lode musí byť $60 + 36 = 96$ krokov.

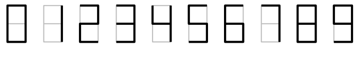
**Úloha 25J / 15S.** Číslo $137641 = 371^2$ je najmenšie šesťciferné číslo také, že z neho je možné vyškrtnúť tri navzájom rôzne číslice tak, aby sme dostali jeho druhú odmocninu: $\cancel{1}37\cancel{6}\cancel{4}1$. Nájdite najväčšie šesťciferné číslo s touto vlastnosťou.

*Výsledok.* $992016 = 996^2$

*Riešenie.* Nech $(1000 - n)^2$ je hľadané číslo ($n \geq 1$). Spočítame druhé mocniny pre $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ použitím vzťahu $(1000 - n)^2 = 1000 \cdot (1000 - 2n) + n^2$ a dostávame $999^2 = 998001$, $998^2 = 996004$, $997^2 = 994009$, $996^2 = 992016$, …. Ostáva si všimnúť, že číslice 2, 0, 1 sú po dvojiciach rôzne a že $99\cancel{2}\cancel{0}\cancel{1}6 = 996$ je odmocninou čísla 992016. Takže 992016 je hľadané číslo.

**Úloha 26J / 16S.** Linda napísala niečo na kalkulačke a na displeji sa objavilo trojmiestne číslo. Patrik, ktorý sedel oproti nej, si všimol, že z jeho pohľadu (teda dole hlavou) to vyzeralo presne tak, ako trojmiestne číslo, ktoré je o 369 väčšie ako to zadané. Aké bolo číslo, ktoré Linda napísala?

Poznámka: Kalkulačka má sedemsegmentový displej, teda číslice vyzerajú takto:



*Výsledok.* 596

*Riešenie.* Všimnime si, že ak obrátime číslice hore nohami, potom sa buď nemenia (0, 2, 5, 8), alebo sa menia ($6 \leftrightarrow 9$), alebo sa z nich nestane číslica vôbec (1, 3, 4, 7). Preto ak obrátime rad zložený z 0, 2, 5, 8 dole hlavou, dostaneme rovnaké číslo, ako keby sme obrátili poradie jeho číslic. Rozdiel týchto dvoch trojmiestnych čísel je deliteľný 99, pretože $(a + 10b + 100c) - (c + 10b + 100a) = 99(c - a)$. Keďže $99 \nmid 369$, tak vieme, že Lindino číslo musí obsahovať 6 alebo 9.

V prípade, že číslo obsahuje 9 na prvej pozícii, potom jeho verzia dole hlavou bude obsahovať 6 na poslednej pozícii, a tak posledná číslica Lindinho čísla by bola 7, pretože rozdiel čísel je 369. Teda to nie je možné, pretože 7 nevieme otočiť hore hlavou. Tým istým spôsobom môžeme vylúčiť z pôvodného Lindinho čísla hodnotu 9 na poslednom mieste a hodnotu 6 na prvej a strednej pozícii. Posledné dve ostávajúce možnosti sú 9 na druhej pozícii a 6 na poslednej pozícii, pričom tieto dve hodnoty pripúšťajú jediné riešenie, a to 596.

**Úloha 27J / 17S.** Na ostrove Na-Boi žijú tri rodiny, z ktorých každá ma dvoch synov a dve dcéry. Koľkými spôsobmi môže týchto 12 ľudí vytvoriť 6 manželských párov, ak sú zakázané sobáše súrodencov?

*Výsledok.* 80

*Riešenie.* Označme rodiny ako $A$, $B$ a $C$. Ak si synovia z rodiny $A$ vezmú dve dcéry z nejakej inej rodiny (bez ujmy na všeobecnosti z rodiny $B$), potom dcéry z rodiny $A$ si musia vziať synov z rodiny $C$ (inak by si aspoň jeden syn z $C$ vzal svoju vlastnú sestru). Z toho vyplýva, že synovia z $B$ si vezmú dcéry z $C$. Tým získavame $2 \cdot 2^3 = 16$ spôsobov – existujú dva spôsoby popárovania rodín a potom každá dvojica dcér má dve možnosti pre vydaj za syna z prepojenej rodiny.

Ak sa na druhej strane synovia z $A$ rozhodnú oženiť sa za dcéry z rôznych rodín, ich sestry musia urobiť to isté, aby sa zabránilo tomu, že vznikne manželstvo medzi súrodencami. Obaja synovia dohromady majú na výber osem manželiek a to isté platí aj pre dcéry. Po popárovaní v rodinách $B$ a $C$ existuje práve jeden syn a jedna dcéra, ktorí ostali slobodní. To dáva jeden jediný spôsob ako dokončiť manželskú schému. Preto tento systém má $8 \cdot 8 = 64$ možností.

Došli sme k záveru, že existuje $16 + 64 = 80$ spôsobov, ako sa ľudia môžu vziať.

**Úloha 28J / 18S.** Janko a Marienka si upiekli veľmi veľkú pizzu, ktorú rozkrájali na 50 rovnako veľkých kúskov trojuholníkového tvaru. Na kúsky pizze poukladali $1, 2, 3, \ldots, 50$ olív postupne v smere hodinových ručičiek. Teraz chcú rozdeliť pizzu na dve rovnaké polovice rovným rezom tak, aby Janko dostal dvakrát toľko olív ako Marienka. Určte celkový počet olív na štyroch plátkoch priliehajúcich k rezu.

*Výsledok.* 68, 136

*Riešenie.* Poďme očíslovať plátky počtom olív, ktoré sú na nich položené. Všimnime si, že nemôžeme rezať pizzu medzi plátkom 1 a 50 (a teda medzi 25 a 26), pretože je jasné, že

$$2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 25) < 26 + 27 + \cdots + 50.$$

Preto možno predpokladať, že $n$, $n + 1$, $n + 25$, $n + 26$ sú čísla plátkov priľahlých k rezu, kde $1 \leq n \leq 24$. Súčet týchto čísel je $4n + 52$. Teraz počítame $(n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + 25) = 25n + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 = 25(n + 13)$ a $1 + 2 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 25 \cdot 51$. Potom máme dve možnosti:

$$25(n + 13) = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 17 \quad \text{alebo} \quad 25(n + 13) = \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot 51 = 25 \cdot 34.$$

Prvá možnosť je $n = 4$ a súčet je $4n + 52 = 68$. Z druhej možnosti získavame $n = 21$ a $4n + 52 = 136$. Celkovo existujú dve riešenia, a síce 68 a 136.

**Úloha 29J / 19S.** Nájdi všetky prvočísla $p$ s takou vlastnosťou, že $19p + 1$ je tretia mocnina celého čísla.

*Výsledok.* 421

*Riešenie.* Ak $p$ je prvočíslo spĺňajúce danú podmienku, potom existuje prirodzené číslo $k > 2$ a $k^3 = 19p + 1$. Takto dostávame rovnicu

$$19p = k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1).$$

Keďže $k > 2$, oba členy na pravej strane sú deliteľné $19p$. Keďže $19p$ je súčin dvoch prvočísel, dostávame buď $k - 1 = 19$ alebo $k^2 + k + 1 = 19$. V prvom prípade dostávame $k = 20$ a $p = 400 + 20 + 1 = 421$, čo je prvočíslo. V druhom prípade dostávame kvadratickú rovnicu $k^2 + k - 18 = 0$, ktorá nemá celočíselné riešenie. Preto $p = 421$ je jediné riešenie.

**Úloha 30J / 20S.** V rovnobežníku $ABCD$ leží bod $E$ na strane $AD$ tak, že $2 \cdot |AE| = |ED|$ a bod $F$ leží na strane $AB$ tak, že $2 \cdot |AF| = |FB|$. Úsečky $CF$ a $CE$ pretínajú uhlopriečku $BD$ v bodoch $G$ a $H$. Akú časť obsahu rovnobežníka $ABCD$ tvorí päťuholník $AFGHE$?

*Výsledok.* $\frac{7}{30}$

*Riešenie.* Obsah útvaru budeme označovať hranatými zátvorkami. Keďže trojuholníky $EHD$ a $CHB$ sú podobné, dostávame rovnosť

$$\frac{|BH|}{|HD|} = \frac{|BC|}{|ED|} = \frac{|AD|}{\frac{2}{3} \cdot |AD|} = \frac{3}{2}.$$

Z podobnosti trojuholníkov $FBG$ a $CDG$ dostávame, že $\frac{|DG|}{|GB|} = \frac{3}{2}$. Odtiaľ $|DH| = |BG| = \frac{2}{5} \cdot |DB|$ a $|HG| = \frac{1}{5} \cdot |DB|$. Vzhľadom k tomu, že

$$[ECD] = \frac{2}{3}[ACD] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}[ABCD] = [FBC]$$

dostávame, že

$$[AFGHE] = [AFCE] - [GCH] = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)[ABCD] = \frac{7}{30}[ABCD].$$

**Úloha 31J / 21S.** Nájdi najväčšie päťciferné číslo bez nulových číslic, ktoré spĺňa nasledujúce vlastnosti:

- Prvé tri cifry tvoria číslo, ktoré je 9-násobkom čísla tvoreného poslednými dvoma ciframi.
- Posledné tri cifry tvoria číslo, ktoré je 7-násobkom čísla tvoreného prvými dvoma ciframi.

*Výsledok.* 85595

*Riešenie.* Nech $\overline{abcde}$ je päťciferné číslo také, že $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{de}$ a $\overline{cde} = 7 \cdot \overline{ab}$. Potom máme

$$63 \cdot \overline{de} = 7 \cdot \overline{abc} = 70 \cdot \overline{ab} + 7c = 10 \cdot \overline{cde} + 7c = 1007c + 10 \cdot \overline{de},$$

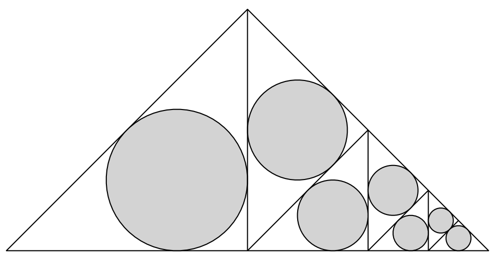
takže $\overline{de} = \frac{1007c}{53} = 19c$. Analogicky dostaneme $\overline{ab} = 17c$. Ak $c \geq 6$, potom čísla $17c$ a $19c$ sú väčšie ako 100. Z toho vyplýva, že maximálna možná hodnota $c$ je 5, teda maximálna možná hodnota $17119c$ je 85595.

**Úloha 32J / 22S.** Za kruhovým stolom sedí dvanásť bystrých mužov, ktorí so sebou majú deväť prázdnych kariet a tri špeciálne – označené $J$, $Q$ a $K$. Každý z nich náhodne dostal jednu z týchto dvanástich kariet. Každý sa pozrel na svoju kartu a potom ju odovzdal susedovi sediacemu po jeho pravej ruke a takto pokračovali ďalej. Po každom pozretí sa na kartu boli požiadaní, aby zdvihli ruku ak vedia, kto v danej chvíli drží ktorú špeciálnu kartu (ruky dvíhajú naraz). Ani jeden z nich nezdvihol ruku po tom, čo videl štyri karty. Presne jeden muž zdvihol ruku po tom, čo uvidel svoju piatu kartu. Následne $x$ mužov zdvihlo ruku po tom, čo uvideli šesť kariet a $y$ mužov po siedmich kartách. Určte $xy$.

*Výsledok.* 42

*Riešenie.* Prvý muž, ktorý zdvihol ruku bol prvý, kto videl všetky tri špeciálne karty. Tento muž musel dostať jednu špeciálnu kartu ako svoju piatu, pretože inak by mohol zdvihnúť ruku skôr. Okrem toho musel dostať jednu špeciálnu kartu na začiatku, pretože inak by jeho sused po ľavej ruke videl všetky špeciálne karty po predchádzajúcom kole. Označme prvú kartu ako $C_1$, piatu kartu ako $C_3$ a $C_2$ zostávajúcu špeciálnu kartu, ktorú muž dostal medzitým. Po ďalších pohľadoch na svoje karty si muži, ktorí dostali $C_2$ a aspoň jednu ďalšiu kartu, vedia alebo môžu odvodiť pozície aj označenia všetkých troch špeciálnych kariet – pozície $C_1$ a $C_3$ sú známe každému, ale ich označenia nie. Je ľahké vidieť, že existuje šesť takých mužov, ktorí videli šesť kariet a sedem mužov, ktorí videli sedem kariet, takže odpoveď je 42.

**Úloha 33J / 23S.** Do rovnoramenného pravouhlého trojuholníka s dĺžkou základne 1 je umiestnených sedem kruhov ako na obrázku:



Aký je celkový obsah kruhov?

*Výsledok.* $\pi\frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \pi\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4} = \pi\frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2} = \pi\frac{1}{4(3+2\sqrt{2})}$

*Riešenie.* Ak je rovnoramenný pravouhlý trojuholník rozdelený na dva rovnaké trojuholníky, potom sú podobné pôvodnému trojuholníku s pomerom $1 : \sqrt{2}$, a v takom pomere sú aj polomery vpísaných kružníc. Preto každá nová vpísaná kružnica má polovičný obsah pôvodnej. Inými slovami, celkový obsah vpísaných kružníc sa nezmení pri rozdeľovaní veľkých trojuholníkov. Teda stačí určiť obsah vpísanej kružnice veľkého trojuholníka, ktorej polomer počítame použitím rovnakých dotyčníc. Keďže dĺžka odvesny veľkého trojuholníka je rovná $\frac{\sqrt{2}}{2}$ podľa Pytagorovej vety a kolmice zo stredu odvesien tvoria štvorec, dostaneme, že polomer je $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$, takže obsah je rovný

$$\pi\frac{3-2\sqrt{2}}{4}.$$

**Úloha 34J / 24S.** Nájdite všetky prvočísla $p$ také, že $p + 11$ delí $p(p + 1)(p + 2)$.

*Výsledok.* 7, 11, 19, 79

*Riešenie.* Ak $p$ je prvočíslo, je buď rovné 11 (čo jasne spĺňa danú podmienku) alebo je nesúdeliteľné s $p+11$. V druhom prípade je výsledok deliteľný $p + 11$ práve vtedy, keď $(p + 1)(p + 2)$ je deliteľné $p + 11$. Jednotlivé zátvorky sú o 10 a o 9 menšie ako $p + 11$. Súčin zvyškov je $(-10) \cdot (-9)$, teda $p + 11 \mid 90$. To je splnené pre $p \in \{7, 19, 79\}$.

**Úloha 35J / 25S.** Žižiavky obyčajné (Porcellio scaber) majú štrnásť nôh. Matka žižiavka má veľké zásoby rovnakých ponožiek a topánok a pripravuje svoje deti na nastávajúce chladné obdobie. Vysvetľuje malej žižiavke Kubovi, že si môže dať ponožky a topánky na nohy v ľubovoľnom poradí, ale je treba mať na pamäti, že na každú jednu nohu je treba navliecť ponožku pred topánkou. Koľkými rôznymi postupmi sa môže malý Kubo obuť?

*Výsledok.* $\frac{28!}{2^{14}}$

*Riešenie.* Spôsob, akým si Kubo obuje nohy je reprezentovaný 28 kusmi skladajúcimi sa zo 14 ponožiek a 14 topánok. Ponožka patriaca ku konkrétnej nohe je v pozícii, ktorá predchádza topánke na tej istej nohe. Pre prvý pár ponožky a nohy existuje $\binom{28}{2}$ možností. Pre druhý pár existuje $28-2 = 26$ miest, teda $\binom{26}{2}$ možností. Pokračujúc týmto spôsobom nám zostáva len $\binom{2}{2} = 1$ pre posledný pár. Z tohto dôvodu je výsledok

$$\binom{28}{2} \cdot \binom{26}{2} \cdot \binom{24}{2} \cdots \binom{2}{2} = \frac{28!}{2^{14}}.$$

**Úloha 36J / 26S.** Nech $x$ je reálne číslo také, že $x^3 + 4x = 8$. Zistite hodnotu výrazu $x^7 + 64x^2$.

*Výsledok.* 128

*Riešenie.* Stačí $x^3 = 8 - 4x$ dosadiť do daného výrazu nasledovne

$$x^7 + 64x^2 = x \cdot (x^3)^2 + 64x^2 = x(8 - 4x)^2 + 64x^2 = 64x + 16x^3 = 16(x^3 + 4x) = 128.$$

**Úloha 37J / 27S.** Majme rovnoramenný trojuholník $ABC$ so základňou $AB$. Priesečník osi uhla $ACB$ so stranou $AB$ označme $D$ a priesečník osi uhla $BAC$ s $BC$ označme $E$. Nájdite veľkosť uhla $BAC$, ak $|AE| = 2 \cdot |CD|$.

*Výsledok.* 36°

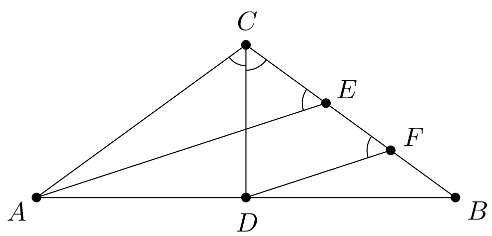
*Riešenie.* Nech $F$ je taký bod na $BC$, že $AE \parallel DF$. Potom $|DF| = \frac{1}{2}|AE| = |CD|$, takže trojuholník $FCD$ je rovnoramenný so základňou $FC$. Označme $\varphi = |\sphericalangle BAC|$. Potom

$$|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle DFC| = |\sphericalangle FCD| = |\sphericalangle DCA| = 90^\circ - \varphi.$$

Nakoniec keďže $|\sphericalangle CAE| = \frac{1}{2}\varphi$ máme (použitím $\triangle AEC$)

$$\frac{1}{2}\varphi + 3(90^\circ - \varphi) = 180^\circ,$$

takže $\varphi = 36^\circ$.



**Úloha 38J / 28S.** Majme postupnosť reálnych čísel $(a_n)$ takú, že $a_1 = 2015$ a $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 \cdot a_n$ pre každé $n \geq 1$. Nájdite $a_{2015}$.

*Výsledok.* $\frac{1}{1008}$

*Riešenie.* Ak odčítame vyjadrenia pre $n$ a $n-1$, dostaneme $a_n = n^2 \cdot a_n - (n-1)^2 \cdot a_{n-1}$, čo môžeme zjednodušiť na $a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$. Preto

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 = \frac{2a_1}{n(n+1)}.$$

Pre 2015 vyjde $a_{2015} = \frac{2 \cdot 2015}{2015 \cdot 2016} = \frac{1}{1008}$.

**Úloha 39J / 29S.** Ivka a Janka si vymysleli hru: Ofarbia steny dvoch 12-stenných kociek azúrovou, purpurovou a žltou farbou tak, že každá farba je aspoň na jednej stene každej z kociek. Navyše sú na prvej kocke práve štyri žlté steny. Ak hodia kockami a obe kocky ukazujú rovnakú farbu, Ivka vyhrá, inak vyhrá Janka. Predpokladajme, že farby sú rozdelené tak, že dievčatá majú rovnaké šance na výhru. Koľko stien purpurovej farby musí byť na druhej kocke?

*Výsledok.* 1, 9

*Riešenie.* Označme $a_1, p_1, z_1, a_2, p_2, z_2$ počet stien ofarbených jednotlivými farbami na kocke. Vieme, že $a_1+p_1+z_1 = 12$, $a_2+p_2+z_2 = 12$ a $z_1 = 4$. Navyše z celkového množstva $12^2 = 144$ možných výsledkov po hode kockami je polovica takých, že na oboch kockách padla rovnaká farba, a teda

$$a_1a_2 + p_1p_2 + z_1z_2 = 72.$$

Úpravou ľavej strany len pre neznáme $a_1$, $a_2$ a $p_2$ využitím vzťahov popísaných vyššie dostávame

$$a_1a_2 + (8 - a_1)p_2 + 4(12 - a_2 - p_2) = 72,$$

$$a_1a_2 - a_1p_2 - 4a_2 + 4p_2 + 48 = 72,$$

respektíve

$$(a_1 - 4)(a_2 - p_2) = 24.$$

Využitím ohraničení $-3 \leq a_1 - 4 \leq 3$ a $-9 \leq a_2 - p_2 \leq 9$ môžeme predpokladať, že $a_2 - p_2$ je buď 8 alebo $-8$. To spolu s $0 < z_2 = 12 - a_2 - p_2$ dáva, že $p_2$ je buď 1 alebo 9. Skúškou dostávame, že obe tieto možnosti môžu nastať.

**Úloha 40J / 30S.** Okolo veľkého okrúhleho stola sedí $n > 24$ žien, pričom každá hovorí iba pravdu alebo iba klame. Každá zo žien tvrdí nasledovné:

- Som pravdovravná.
- Tá, čo sedí o 24 miest ďalej po mojej pravici, je klamárka.

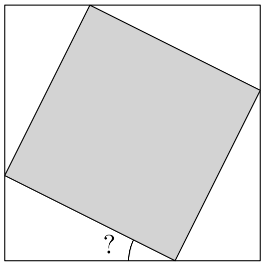
Nájdite najmenšie možné $n$, pre ktoré toto mohlo nastať.

*Výsledok.* 32

*Riešenie.* Vyberme nejakú ženu, potom tú o 24 miest ďalej po jej pravici, potom ďalšiu o 24 ďalej, atď. Po určitom počte krokov, povedzme $s$, sa dostaneme späť k pôvodnej žene. Toto $s$ je určite najmenšie kladné celé číslo také, že $24s$ je násobok $n$. Preto $s = n/d$, pričom $d$ je najväčší spoločný deliteľ $n$ a 24.

Všimnime si, že pravdovravnosť žien sa musí striedať. Presnejšie, žena je pravdovravná práve vtedy, keď žena sediaca o 24 miest ďalej po jej pravici je klamárka. Keby $s$ bolo nepárne, viedlo by to ku sporu. Preto $n$ musí byť deliteľné vyššou mocninou dvojky ako je číslo 24. Najmenšie také $n$ je 32. Ľahko overíme, že spĺňa všetky podmienky zadania.

**Úloha 41J / 31S.** Dva štvorce majú spoločný stred a vrcholy menšieho štvorca ležia na stranách väčšieho štvorca. Ak odstránime menší zo štvorcov, ostanú nám štyri zhodné trojuholníky, každý z nich s obsahom 1/12 väčšieho štvorca. Aká je veľkosť (v stupňoch) najmenšieho z vnútorných uhlov trojuholníka?



*Výsledok.* $15°$

*Riešenie.* Označme $a$, $b$ odvesny a $c$ preponu vo vytvorených trojuholníkoch a predpokladajme, že $a \leq b$. Jednoduchým výpočtom vidíme, že obsah menšieho štvorca sa rovná dvom tretinám obsahu väčšieho štvorca. Preto obsah jedného z trojuholníkov je jedna osmina obsahu menšieho štvorca, ktorý je

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{8}c^2.$$

Nech $\alpha$ je najmenší vnútorný uhol v trojuholníku. Potom $a = c \sin\alpha$ a $b = c\cos\alpha$, a tak

$$c^2 = 4ab = 4c^2 \sin\alpha\cos\alpha = 2c^2 \sin 2\alpha,$$

respektíve

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}.$$

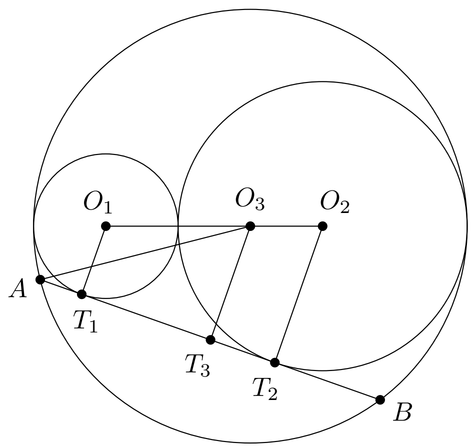
Keďže $\alpha \leq 45°$, z toho vyplýva, že $2\alpha = 30°$, a teda $\alpha = 15°$.

**Úloha 42J / 32S.** Kružnice $\omega_1$, $\omega_2$ s polomermi 1 a 2 sa vnútorne dotýkajú kružnice $\omega_3$ s polomerom 3. Kružnice $\omega_1$ a $\omega_2$ sa navyše dotýkajú zvonku. Body $A$, $B$ sú na kružnici $\omega_3$ umiestnené tak, že úsečka $AB$ je spoločnou dotyčnicou $\omega_1$ a $\omega_2$. Určte dĺžku úsečky $AB$.

*Výsledok.* $\frac{4}{3}\sqrt{14}$

*Riešenie.* Označme $O_1$, $O_2$, $O_3$ stredy kružníc $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, a nech $T_1$, $T_2$, $T_3$ sú päty kolmíc z $O_1$, $O_2$, $O_3$ na úsečku $AB$ (teda $T_1$ a $T_2$ sú dotykové body $AB$ s kružnicami $\omega_1$, $\omega_2$). Keďže $O_1T_1 \parallel O_2T_2 \parallel O_3T_3$, $|O_1T_1| = 1$, $|O_2T_2| = 2$ a $|O_1O_3| = 2|O_2O_3|$, kde $O_1$, $O_2$, $O_3$ ležia na jednej priamke, na základe podobnosti trojuholníkov dostávame, že $|O_3T_3| = \frac{5}{3}$. Použitím Pytagorovej vety pre trojuholník $AO_3T_3$ dostávame, že

$$|AB| = 2|AT_3| = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{14}.$$




**Úloha 43J / 33S.** Jedného dňa, Oidipus, neohrozený hrdina stretol sfingu, ktorá mu položila nasledujúci rébus: hľadá prirodzené dvojciferné číslo $S$. Oidipus mohol vybrať tri jednociferné čísla $a < b < c$ a opýtať sa, či je $S$ nimi deliteľné. Pre každé z týchto čísel dostal odpoveď (buď *áno* alebo *nie*). Oidipus začínal byť zúfalý, pretože existovali presne dve čísla spĺňajúce podmienky deliteľnosti. Potom mu sfinga povedala, že sa pomýlila pri deliteľnosti $b$. To priviedlo Oidipa k nájdeniu čísla $S$. Aká bola hodnota $S$?

*Výsledok.* 84

*Riešenie.* Existujú nepochybne tri dvojciferné čísla, ktoré spĺňajú obe odpovede týkajúce sa deliteľnosti $a$ a $c$ (dve, ktoré zodpovedali po sfinginej prvej odpovedi a jedno, ktoré zodpovedalo po sfinginej oprave odpovede). Navyše obe odpovede musia byť pozitívne, pretože negatívna odpoveď by viedla k viac ako dvom vhodným dvojciferným odpovediam. Preto tieto čísla sú násobkami $\mathrm{n}(a, c) = m$. Z toho vyplýva, že $25 \leq m \leq 33$, ale len dve čísla z tohto rozpätia majú najmenší spoločný násobok ako súčin dvoch nesúdeliteľných čísel, konkrétne $28 = \mathrm{n}(4, 7)$ a $30 = \mathrm{n}(5, 6)$. Keďže $c - a \geq 2$, teda máme $a = 4$ a $c = 7$. Takže ak $b = 5$, tak neexistujú dvojciferné čísla deliteľné $a$, $b$ a $c$ súčasne. V prípade, že $b = 6$, záporná odpoveď pre $b$ zodpovedá číslam 28 a 56, zatiaľ čo pozitívna odpoveď číslu $S = 84$.

**Úloha 44J / 34S.** Štyria ľudia jazdia po ceste tým istým smerom, každý nejakou konštantnou rýchlosťou. Prvý šoféruje auto, druhý motorku, tretí skúter a štvrtý ide na bicykli. Šofér auta stretol človeka na skútri o 12.00, cyklistu o 14.00 a motorkára o 16.00. Motorkár stretol človeka na skútri o 17.00 a cyklistu o 18.00. Kedy stretol cyklista človeka na skútri?

*Výsledok.* 15.20

*Riešenie.* Keďže relatívny čas akéhokoľvek pozorovateľa nezávisí od vybranej vzťažnej sústavy, môžeme predpokladať, že sa auto nepohybuje vôbec. Za tohto predpokladu motorka od svojho stretnutia s autom potrebovala jednu hodinu, aby sa stretla s človekom na skútri, zatiaľ čo človek na skútri potreboval päť hodín na prekonanie tej istej vzdialenosti, teda motorka bola päťkrát rýchlejšia. Podobnou úvahou môžeme odvodiť, že motorkár bol dvakrát rýchlejší ako cyklista, a teda pomer rýchlosti človeka na skútri a cyklistu bol $2 : 5$.

Ak človek na skútri potreboval $t$ hodín, aby sa od auta dostal na miesto stretnutia s cyklistom, potom cyklista potreboval $t-2$ hodín. Pomer týchto požadovaných časov sa rovná prevrátenej hodnote pomeru rýchlosti, teda

$$\frac{t-2}{t} = \frac{2}{5},$$

alebo $t = 10/3$. Nakoniec, s použitím skutočnosti, že človek na skútri stretol auto o 12.00 vieme odvodiť, že cyklistu stretol o 15.20.

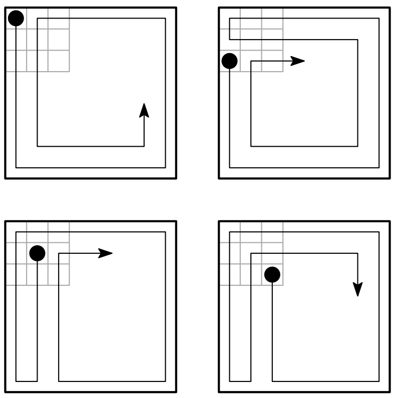
**Úloha 45J / 35S.** Podlaha miestnosti je pokrytá štvorcovým kobercom so stranou dĺžky 22 metrov. Robotický vysávač (robovač) má za úlohu tento koberec povysávať. Pre jeho pohodlie je koberec rozdelený na 484 rovnakých štvorcových políčok. Robovač, ktorý je rovnako široký ako políčko, sa pohybuje podľa nasledujúcich pravidiel:

- Ak raz povysával políčko, už po ňom nemôže prejsť znovu.
- Robovač sa pohybuje jedným smerom až kým nie je nútený zmeniť ho kvôli kraju koberca alebo už povysávanému políčku.
- Ak robovač musí zmeniť smer a má viacero možností, môže si vybrať, ktorú chce.

Na začiatku je robovač umiestnený na jednom políčku a môže si vybrať ľubovoľný povolený smer. Z koľkých štartovacích políčok vie robovač vyčistiť celý koberec, ak nemusí skončiť pri kraji?

*Výsledok.* 20

*Riešenie.* Ak robovač nezačína v jednom z rohových $3 \times 3$ štvorcov, vždy mu ostane časť koberca nevyčistená: keď robovač opustí okraj koberca (napr. najneskôr v svojom siedmom pohybe), rozdelí tým zvyšné nepovysávané políčka do dvoch oddelených oblastí. Môžeme jednoducho overiť, že podobne je to pre políčka so súradnicami $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$ a ich symetrie v ostatných $3 \times 3$ štvorcoch. Avšak pre políčka so súradnicami $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(3,1)$, $(1,3)$ a ich symetrie to ide. Preto máme spolu $4 \cdot 5 = 20$ vyhovujúcich štartovacích políčok.

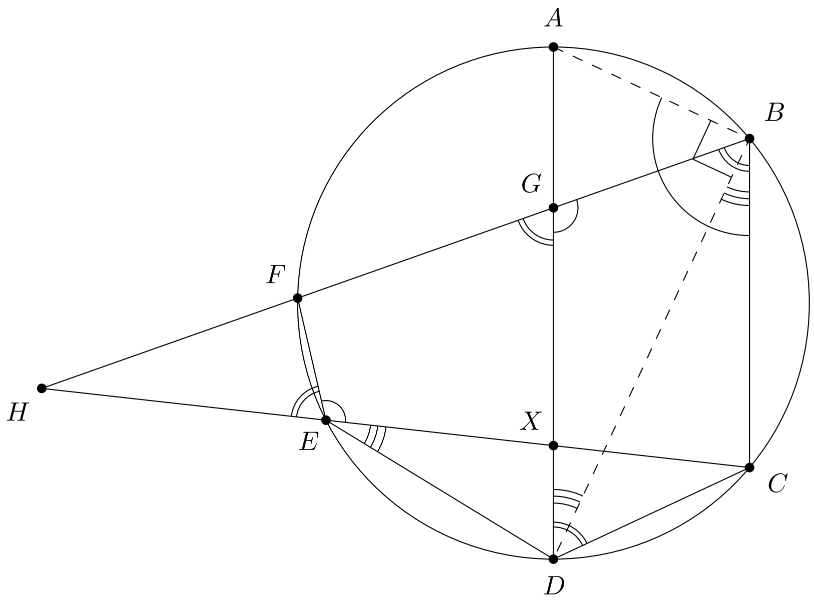


**Úloha 46J / 36S.** Nech body $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ ležia v smere hodinových ručičiek na kružnici $\omega$. Predpokladajme ďalej, že $AD$ je priemer kružnice $\omega$, $BF$ pretína $AD$ a $CE$ v bodoch $G$ a $H$, $|\sphericalangle FEH| = 56°$, $|\sphericalangle DGB| = 124°$ a $|\sphericalangle DEC| = 34°$. Určte veľkosť $\sphericalangle CEB$.

*Výsledok.* $22°$

*Riešenie.* Veta o odvodovom a stredovom uhle hovorí, že $|\sphericalangle CDB| = |\sphericalangle CEB|$, takže môžeme vypočítať $|\sphericalangle CDB|$. Označme $X$ ako prienik $AD$ a $CH$. Všimnime si, že $124° + 56° = 180°$ a $34° + 56° = 90°$. Keďže $EXGF$ leží na kružnici, tak platí, že $AD \parallel BC$. Trojuholník $ABD$ je pravouhlý a $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DBC|$, takže $|\sphericalangle ABC| = 124°$.

Nakoniec, $|\sphericalangle BDA| = |\sphericalangle DBC| = 34°$ a $|\sphericalangle CDA| = 180° - |\sphericalangle ABC| = 56°$ ($ADCB$ leží na kružnici), čo značí, že $|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle CDB| = 56° - 34° = 22°$.




**Úloha 47J / 37S.** Desať ľudí, päť žien a ich manželia, sa zúčastnilo na $E$ párty večierkoch. Vieme, že ani jeden manželský pár sa nezúčastnil na rovnakej párty. Ďalej vieme, že každý pár, ktorý nepozostáva z manželov (vrátane párov rovnakého pohlavia) sa zúčastnil na presne jednej párty a práve jedna osoba sa zúčastnila len na dvoch párty. Pre ktoré najmenšie $E$ to je možné?

*Výsledok.* 14

*Riešenie.* Označme páry $(a_1, a_2)$, $(b_1, b_2)$, $(c_1, c_2)$, $(d_1, d_2)$, $(e_1, e_2)$. Bez ujmy na všeobecnosti povedzme, že osoba, ktorá sa zúčastnila len na dvoch párty bude $a_1$ a že na prvej tejto párty sa zúčastnili aj $b_1$, $c_1$, $d_1$ a $e_1$, pričom na druhej párty sa zúčastnili ich polovičky. Na každej ďalšej párty sa mohli naraz zúčastniť najviac dvaja ľudia z $b_1, b_2, \dots, e_1, e_2$, takže sa muselo konať ešte aspoň 12 ďalších párty. Ak sa navyše $a_2$ zúčastní na štyroch disjunktných párty, nastáva presne situácia zo zadania. Preto je najmenšia možná hodnota $E = 14$.

**Úloha 48J / 38S.** Študenti dostali ako darček trojciferné číslo $\overline{abc}$, kde $0 < a < b < c$. Ich úlohou bolo vynásobiť ho číslom 6 a potom, aby to bolo zábavné, vymeniť cifry na mieste desiatok a stoviek. Alex to ale nezvládol a vymenil ich pred násobením. Výsledok ale ostal rovnaký! Nájdite $\overline{abc}$.

*Výsledok.* 678

*Riešenie.* Keďže $0 < a < b$, tak platí $b \geq 2$ a $6 \cdot \overline{bac} > 1200$, takže Alexov výsledok musel byť štvorciferné číslo, povedzme $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$. Na druhej strane vieme, že $6 \cdot \overline{abc} = \overline{dfeg}$. Odčítaním týchto dvoch rovností dostávame

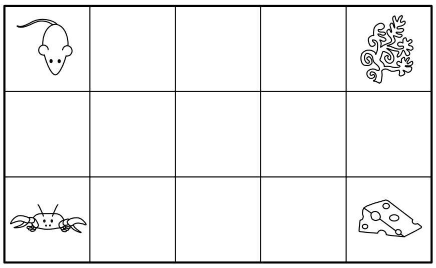
$$6(\overline{bac} - \overline{abc}) = \overline{defg} - \overline{dfeg}.$$

Preto buď $540(b - a) = 90(e - f)$ alebo $6(b - a) = e - f$. Keďže $e$, $f$ sú cifry, máme $e - f \leq 9$. Z toho vyplýva, že $e - f = 6$ a $b - a = 1$ ($b - a > 0$, pretože $b > a$). Dosadením $b = a + 1$ do $6 \cdot \overline{bac} = \overline{defg}$ dostávame

$$\overline{defg} = 6(100(a + 1) + 10a + c) = 660(a + 1) - 6(10 - c).$$

To znamená, že $\overline{defg}$ sa musí líšiť od nejakého násobku 660 o kladný násobok 6 menší alebo rovný 42. Spomeňme si, že $e - f = 6$ a $6 \mid \overline{defg}$ a uvažujme $a = 1, 2, \dots, 7$. Potom jediní kandidáti na naše číslo sú $\overline{defg}$: 1932, 1938, 2604, 3930, 3936, 4602, 4608. Len pre $\overline{defg} = 4608$ má číslo $\overline{bac} = \overline{defg}/6 = 768$ nenulové a navzájom rôzne cifry. Stačí overiť, že $6 \cdot \overline{abc} = 6 \cdot 678 = 4068 = \overline{dfeg}$.

**Úloha 49J / 39S.** Máme mriežku $5 \times 3$. Myš sediaca v ľavom hornom rohu sa chce dostať ku kúsku syra v pravom dolnom rohu zatiaľ, čo krab sediaci v ľavom dolnom rohu sa chce dostať k riasam v pravom hornom rohu. Presúvajú sa súčasne. Každú sekundu sa myš posunie o štvorec doprava alebo dolu a krab sa presunie o štvorec doprava alebo hore. Koľkými spôsobmi môžu zvieratá dosiahnuť svoj cieľ za predpokladu, že sa ani raz nestretnú?



*Výsledok.* 70

*Riešenie.* Zvieratá sa môžu stretnúť len v strednom riadku mriežky. Okrem toho, cesta každého zvieraťa je jednoznačne určená štvorcami, ktoré navštívi v strednom riadku mriežky. Ľahko vidno, že zvieratá sa nestretnú ak sa ich cesty v strednom riadku nepretínajú. Takže hľadáme počet dvojíc disjunktných častí stredného riadku.

Najskôr zrátajme prípad, kedy je aspoň jeden nepoužitý štvorec medzi týmito časťami. Potom počet párov vypočítame ako $2 \cdot \binom{6}{4}$, pretože jedno zo zvierat si vyberie štyri zo šiestich hrán štvorcov v strednom rade a potom zvolíme zviera, ktoré použije úsek ohraničený týmito hranami (druhé zviera využíva časť ohraničenú zvyšnými hranami). Ak medzi týmito časťami nie je medzera, dostávame $2 \cdot \binom{6}{3}$ disjunktných dvojíc, nakoľko časti sú popísané troma hranami.

Spolu máme $2 \cdot \binom{6}{4} + 2 \cdot \binom{6}{3} = 70$ možných ciest.

**Úloha 50J / 40S.** Určte počet kladných celých čísel $n \leq 1000$ takých, že číslo $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$ je deliteľom $n$.

Poznámka: Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje celú časť čísla $x$, t. j. najväčšie celé číslo neprevyšujúce $x$.

*Výsledok.* 172

*Riešenie.* Pozorujeme, že $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = k$ len vtedy, ak $k^3 \leq n \leq (k+1)^3 - 1$. Z $3k^2 + 3k + 1$ čísel v tomto ohraničení je každé $k$-te deliteľné $k$ počnúc $k^3$, čiže spolu je takýchto čísel $3k + 4$. Ostáva spočítať to pre všetky čísla $k$ také, že $(k+1)^3 - 1 \leq 1000$ (teda $k \leq 9$) a pridať jedno pre číslo 1000, ktoré taktiež spĺňa danú podmienku. Výsledný počet je teda

$$1 + \sum_{k=1}^{9} (3k + 4) = 1 + 9 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 172.$$

**Úloha 51J / 41S.** Nájdi všetky prirodzené čísla $m$ také, že korene rovnice

$$x^3 - 15\sqrt{2}x^2 + mx - 195\sqrt{2} = 0$$

sú strany pravouhlého trojuholníka.

*Výsledok.* 281/2

*Riešenie.* Nech $a$, $b$, $c$ sú korene danej rovnosti, ktoré sú súčasne dĺžky strán pravouhlého trojuholníka. Predpokladajme, bez ujmy na všeobecnosti, že $0 < a, b < c$. Preto podľa Pytagorovej vety platí rovnosť $a^2 + b^2 = c^2$. Podľa Vietových vzťahov (alebo úpravou na tvar $(x-a)(x-b)(x-c)$ a potom porovnaním koeficientov) dostávame

$$15\sqrt{2} = a + b + c, \quad m = ab + ac + bc, \quad 195\sqrt{2} = abc.$$

Umocnením oboch strán rovnice $15\sqrt{2} - c = a + b$ na druhú a jej úpravou dostaneme $450 - 30\sqrt{2}c = 2ab$. Vynásobením $c$ a použitím substitúcie $abc = 195\sqrt{2}$, dostaneme kvadratickú rovnicu

$$\sqrt{2}c^2 - 15c + 13\sqrt{2} = 0$$

s koreňmi $c_1 = \sqrt{2}$ a $c_2 = 13\sqrt{2}/2$. Vzhľadom na ohraničenia $0 < a$, $b < c$ a $abc = 195\sqrt{2}$ je riešením iba $c = 13\sqrt{2}/2$. Hľadané $m$ môžeme vypočítať dosadením do

$$m = ab + ac + bc = \frac{1}{2} \cdot ((a+b+c)^2 - 2c^2) = \frac{1}{2} \cdot 450 - c^2 = 281/2.$$

**Úloha 52J / 42S.** V košíku máme zelené a červené jablká, aspoň jedno červené a aspoň dve zelené. Pravdepodobnosť, že náhodne vybrané jablko je červené je 42-krát väčšia ako pravdepodobnosť, že dve náhodne vybrané jablká (bez toho, aby sme ich zamieňali) sú obe zelené. Koľko zelených a koľko červených jabĺk je v košíku?

*Výsledok.* 4 zelené a 21 červených

*Riešenie.* Označme $g$ počet zelených jabĺk a $r$ počet červených jabĺk. Zadanie môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{r}{g+r} = 42 \cdot \frac{g \cdot (g-1)}{(g+r)\cdot(g+r-1)},$$

a po úprave

$$r^2 + (g-1)r - 42g \cdot (g-1) = 0.$$

Pozrime sa na to, ako na kvadratickú rovnicu s premennou $r$ a parametrom $g$. Diskriminant

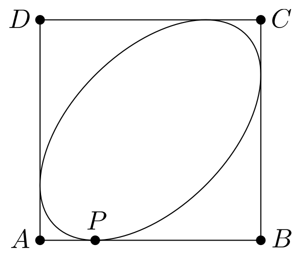
$$(g-1)^2 + 168g \cdot (g-1) = 169g^2 - 170g + 1$$

musí byť druhou mocninou celého čísla, v opačnom prípade by korene boli iracionálne. Vzhľadom k tomu, že $g \geq 2$, dostávame nerovnosti

$$(13g-6)^2 = 169g^2 - 156g + 36 > 169g^2 - 170g + 1 > 169g^2 - 208g + 64 = (13g-8)^2.$$

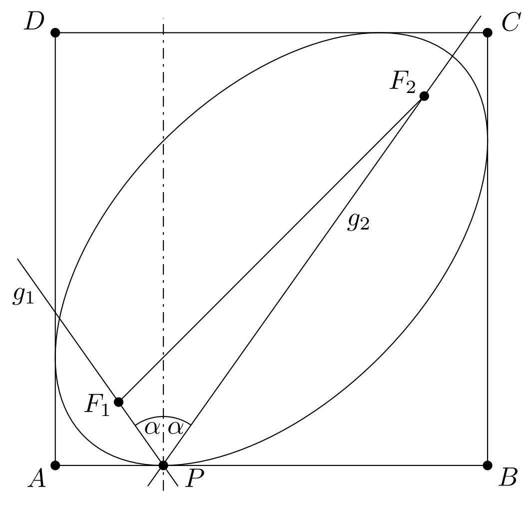
Odtiaľ dostávame, že $169g^2 - 170g + 1$ sa musí rovnať $(13g-7)^2$. Čím po úprave dostávame, že $12g = 48$, a teda $g = 4$. Potom korene rovnice sú $-24$ a $21$, ale keďže $r > 0$, jediným riešením je $r = 21$. V košíku je 21 červených a 4 zelené jablká.

**Úloha 53J / 43S.** Gilbert Bates, veľmi bohatý muž, si chce dať postaviť nový bazén vo svojej záhrade. Keďže má rád symetriu, záhradníkovi prikázal postaviť bazén v tvare elipsy, ktorý je umiestnený vo štvorci 10 m $\times$ 10 m $ABCD$. Tento bazén sa má dotýkať všetkých štyroch strán štvorca, konkrétne na strane $AB$ v bode $P$, ktorý je vzdialený 2.5 m od bodu $A$. Záhradník, ktorý veľmi dobre vie ako vytvoriť elipsu ak má uvedené ohniská a bod ležiaci na elipse, potrebuje už len vedieť vzdialenosť ohnísk tejto elipsy. Môžete mu pomôcť vypočítať vzdialenosť ohnísk v metroch?




*Výsledok.* 10

*Riešenie.* Vyriešime túto úlohu všeobecne. Nech $ABCD$ je štvorec so stranou dĺžky 1 a polohou bodu $A$ v $(0,0)$. Bod $P$ je na $AB$ a má súradnice $(b,0)$, kde $0 < b < \frac{1}{2}$. Ak ohnisko $F_1$ má súradnice $(f,f)$, potom ohnisko $F_2$ má súradnice $(1-f, 1-f)$ (obe ohniská ležia na uhlopriečke $AC$ symetricky vzhľadom na druhú uhlopriečku).




Priamka $g_1$ prechádzajúca cez $P$ a $F_1$ je vyjadrená rovnicou

$$y = (x-b) \cdot \frac{f}{f-b}$$

a priamka $g_2$ prechádzajúca bodom $P$ a $F_2$ je vyjadrená rovnicou

$$y = (x-b) \cdot \frac{f-1}{b+f-1}.$$

Keďže priamka prechádzajúca bodom $P$ kolmá na dotyčnicu $AB$ rozpoľuje $\sphericalangle F_2PF_1$, gradient (vektor prvej derivácie) priamky $g_2$ je opačný ku gradientu priamky $g_1$. Z toho dostávame

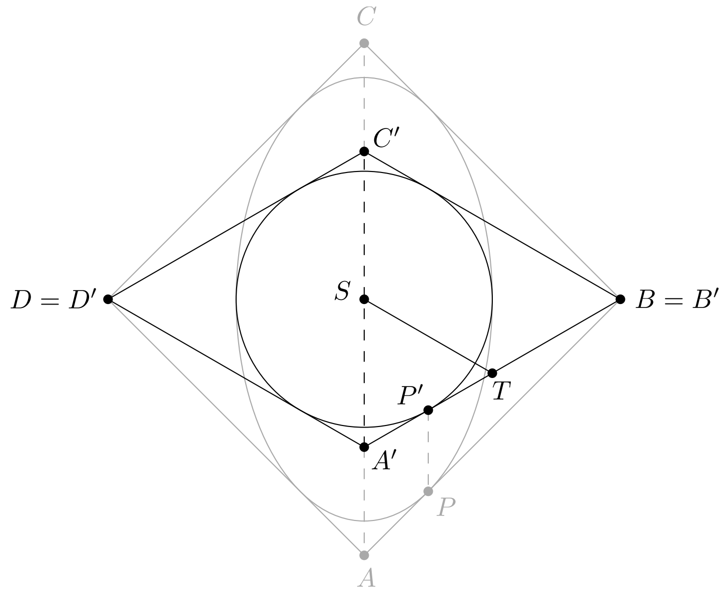
$$\frac{f}{f-b} = (-1) \cdot \frac{f-1}{b+f-1},$$

čo je možné zjednodušiť na

$$f^2 - f + \frac{b}{2} = 0.$$

Táto kvadratická rovnosť má 2 riešenia $f_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-2b}\right)$, zodpovedajúce ohniskám elipsy. Vzdialenosť ohnísk, ktorú môžeme vypočítať pomocou Pytagorovej vety, zodpovedá $\sqrt{2-4b}$. Keďže $b = \frac{1}{4}$ a dĺžka strany je 10, vzdialenosť ohnísk je $|F_1F_2| = 10$.

*Iné riešenie.* Poďme zmrštiť štvorec aj elipsu pozdĺž $AC$ tak, že sa elipsa stane kruhom a označíme si nové body. Ďalej, nech $S$ je stredom $AC$ a $T$ stredom $A'B'$.




Keďže $|A'P'| = \frac{1}{4}|A'B'|$, máme $|A'P'| = |P'T|$, teda $|SA'| = |ST|$. Z toho vyplýva, že $|A'C'| = |B'C'|$ a trojuholník $A'B'C'$ je rovnostranný. Preto je pomer zmrštenia

$$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Je jednoduché vypočítať, že polomer kruhu (ktorý sa zhoduje s dĺžkou $b$ vedľajšej polosi elipsy) sa rovná $\frac{1}{4}|AC|$. Dĺžka $a$ hlavnej polosi sa získa vydelením vedľajšej polosi pomerom zmrštenia. Poznáme dĺžky $a$ a $b$, ostáva spočítať excentricitu pomocou vzorca $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ a vynásobiť ju dvoma, aby sme dostali vzdialenosť ohnísk.

**Úloha 54J / 44S.** Pre postupnosť $(a_n)$ platí, že $a_1 = 1$ a $a_n = \lfloor \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \rfloor$ pre $n > 1$. Určte $a_{1000}$.

Poznámka: Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje celú časť čísla $x$, t. j. najväčšie celé číslo neprevyšujúce $x$.

*Výsledok.* 495

*Riešenie.* Vypísaním prvých pár členov postupnosti $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, \ldots)$ vidíme, že číslo 1 sa opakuje 4-krát, zatiaľčo ostatné čísla iba 2- alebo 3-krát. Ukážeme, že 3-krát sa opakujú len celočíselné mocniny dvojky.

Predpokladajme, že máme vypísanú postupnosť až po prvý výskyt $n$ $(n > 1)$ a postupnosť sa chová tak, ako sme popísali vyššie. Nech $k$ je najväčšie číslo také, že $2^k < n$. Potom súčet všetkých napísaných členov postupnosti je rovný

$$s_1 = (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 2 + \cdots + n - 1) + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^k) + 1 = n^2 + 2^{k+1}.$$

Vzhľadom k tomu, že $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k < 2n < 2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$, tak dostávame $s_1 < (n+1)^2$. Z toho vyplýva, že ďalší člen postupnosti je $\lfloor \sqrt{s_1} \rfloor = n$.

Určme ďalší člen postupnosti. Suma členov postupnosti od začiatku až po tento člen je $s_2 = s_1 + n = n^2 + n + 2^{k+1}$. Ak $2^{k+1} < n + 1$ s $s_2 < (n+1)^2$, preto ten ďalší člen je $n$. Avšak $k$ je najväčšie číslo spĺňajúce podmienku $2^k < n$, a teda platí $2^{k+1} \geq n$. Preto tento prípad nastane iba vtedy, ak $2^{k+1} = n$. Ak $n$ nie je mocninou 2, potom ďalší člen postupnosti je $n + 1$, pretože $2^{k+1} < 2n < 3n + 4$, čo je ekvivalentné s $n^2 + n + 2^{k+1} < (n+2)^2$.

Ostáva ukázať, že ak $n = 2^{k+1}$, potom $n + 1$ bude v postupnosti po troch $n$. Ak spočítame nasledujúci súčet $s_3 = s_2 + n = n^2 + 2n + 2^{k+1} = n^2 + 3n$, dostávame $(n+1)^2 < s_3 < (n+2)^2$, teda indukčný krok je kompletný a dostávame $a_{1000} = 495$ (keďže $500 = a_{1010} = a_{1009}$).

**Úloha 55J / 45S.** Určte počet všetkých takých tabuliek $4 \times 4$ vyplnených nezápornými celými číslami, že platí

- každý riadok a každý stĺpec obsahuje najviac dve nenulové čísla,
- súčet čísel v každom riadku a v každom stĺpci je 3.

*Výsledok.* 576

*Riešenie.* Všimnime si, že každú takúto tabuľku vieme dostať súčtom dvoch tabuliek, pričom prvá má práve jednu 1 v každom riadku a každom stĺpci a druhá má práve jednu 2 v každom riadku a každom stĺpci. Naopak, ak máme takéto dve tabuľky, ich súčtom dostaneme tabuľku spĺňajúcu naše podmienky. Takže dokopy máme $(4!)^2 = 576$ rôznych tabuliek.