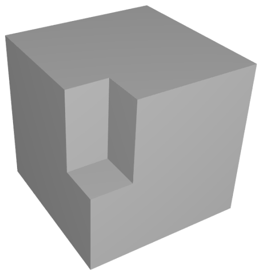
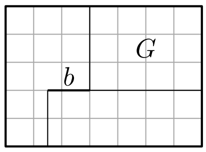
Úloha 1. E.T. měl balvan ve tvaru krychle, jehož objem byl $216\,\mathrm{m}^3$, a vysekl z něj kvádr o rozměrech $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ způsobem ukázaným na obrázku. Jaký má nyní balvan povrch (v m^2)?



Výsledek. 216

Řešení. Protože $6^3 = 216$, měla původní krychle hranu 6 m. Vytnutím příslušného kusu se povrch nezmění, takže hledaná plocha je $6 \cdot 6^2 = 216\,\mathrm{m}^2$.

Úloha 2. Dva přátelé, David a Štěpán, vyhráli jackpot a koupili si krásnou obdélníkovou parcelu o rozměrech $35\,\mathrm{m} \times 25\,\mathrm{m}$. Chtějí si na ní postavit dvojdomek se společnou zahradou G o ploše $300\,\mathrm{m}^2$. Půdorys parcely je znázorněn na obrázku:



(Vzdálenost sousedních čar čtvercové sítě je 5 m.) Jak daleko musí zeď b zasahovat z jedné poloviny dvojdomku do druhé, aby měly obě části stejnou plochu?

Výsledek. 8,75 m

Řešení. Výměra jedné části domu je polovina z $35\,\mathrm{m} \cdot 25\,\mathrm{m} - 300\,\mathrm{m}^2 = 575\,\mathrm{m}^2$, tedy $287{,}5\,\mathrm{m}^2$. Protože jedna strana obdélníkové části domu má délku 10 m, její druhá strana musí mít 28,75 m. Přesah tedy činí $b = 8{,}75\,\mathrm{m}$.

Úloha 3. Malý Rado se chce vypravit na pláž. Doma vyhrabal patery různé plavky, tři slamáky, čtvero slunečních brýlí a pět triček. Aby na pláži nevzbudil pohoršení, musí si obléct plavky (právě jedny). Brýle, slamák ani tričko nikterak povinné nejsou, od každého z těchto doplňků si může vzít nanejvýš jeden kus. Kolika různými způsoby se Rado může obléci, aniž by vzbudil pohoršení?

Výsledek. 600

Řešení. Všimněme si, že možnost nevzít si některý z doplňků je možné považovat za další typ tohoto doplňku. Co se týče klobouků, má Rado tyto možnosti: nevzít si žádný, vzít si první, vzít si druhý a vzít si třetí, což mu dohromady dává čtyři volby. Podobně má pět možností výběru slamáku a šest možností výběru trička. K tomu si musí vzít jeden z pěti kusů plavek. Dohromady se tedy může obléci $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 600$ různými způsoby, aniž by vzbudil pohoršení.

Úloha 4. Martina strávila prázdniny v deštném pralese. Každý den pršelo – buď ráno, nebo odpoledne, nebo celý den. Dohromady prožila 13 dní, kdy nepršelo celou dobu. Ranní déšť ji zastihl jedenáctkrát a odpolední dvanáctkrát. Jak dlouhé byly Martininy prázdniny?

Výsledek. 18 dní

Řešení. Počet dní prázdnin označme v. Martina zažila $v - 11$ dnů bez ranního deště a $v - 12$ bez odpoledního. Protože žádný den neminul úplně bez deště, dostáváme vztah

$$(v - 11) + (v - 12) = 13,$$

a tedy $v = 18$.

Úloha 5. Najděte nejmenší nezáporné celočíselné řešení rovnice $n - 2 \cdot \mathrm{Q}(n) = 2016$, kde $\mathrm{Q}(n)$ označuje ciferný součet čísla n.

Výsledek. 2034

Řešení. Číslo $n - \mathrm{Q}(n)$ je vždy dělitelné devítkou. Protože je devítkou dělitelné i 2016, musí jí být dělitelné rovněž $\mathrm{Q}(n)$, a tedy také n. Zjevně $n < 3000$, takže $Q(n) \leq 2 + 9 + 9 + 9$, z čehož vyplývá nerovnost $n = 2016 + 2\,\mathrm{Q}(n) \leq 2074$. Nyní už není těžké najít jediné řešení, kterým je 2034.

Úloha 6. Kolik existuje kladných celých čísel, jejichž první číslice (tj. ta nejvíce vlevo) se rovná počtu jejich cifer?

Výsledek. 111 111 111

Řešení. Pro každou nenulovou číslici n existuje právě 10^{n-1} čísel začínajících n splňujících podmínku zadání – jsou to čísla mezi $\overline{n0\ldots0}$ a $\overline{n9\ldots9}$. Dohromady je tedy hledaných čísel

$$1 + 10 + \cdots + 100\,000\,000 = 111\,111\,111.$$

Úloha 7. Chodník se skládá z mnoha dlaždic. Jedna z nich má tvar pravidelného n-úhelníka a je ze všech stran obklopena ostatními dlaždicemi. Když dlaždici otočíme o 48° kolem jejího středu, přesně zapadne do své původní polohy. Jaká je nejmenší možná hodnota n?

Výsledek. 15

Řešení. Pravidelný n-úhelník zůstane při rotaci nezměněn právě tehdy, když otáčíme o násobek úhlu mezi úsečkami spojujícími jeho střed s dvojicí sousedních vrcholů. Tento úhel je $360^\circ/n$, takže se snažíme najít nejmenší n, pro něž je

$$\frac{48}{\frac{360}{n}} = \frac{2}{15}n$$

celé číslo. Odpovědí je $n = 15$.

Úloha 8. O dnu budeme říkat, že je *šťastný*, jestliže se jeho datum zapsané v podobě *DD.MM.RRRR* skládá z osmi různých cifer – zde *DD* určuje den, *MM* měsíc a *RRRR* rok, přičemž pokud je číslo udávající den nebo měsíc menší než deset, přidáváme před něj nulu. Například 26.04.1785 byl šťastný den. Jaký je nejbližší šťastný den (ode dneška)?

Výsledek. 17. června 2345

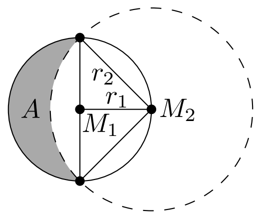
Řešení. Ve šťastný den musí číslo udávající měsíc buď obsahovat nulu, nebo být rovno 12, takže pokud by rok obsahoval nulu, musel by být vyšší než 3000. Podívejme se na případ, kdy rok nulu neobsahuje a začíná dvojkou. Kdyby letopočet obsahoval jedničku, měsíc by začínal nulou a nezbylo by nám žádné číslo pro den. Nejbližším možným rokem je tedy rok 2345. Ukážeme, že v tomto roce nastane šťastný den. První cifra tohoto dne musí být 0 nebo 1, takže první možný měsíc je 06. Nyní už snadno určíme, že nejbližším šťastným dnem je 17.06.2345.

Úloha 9. Kuba má kvádr. Zajímalo by ho, kolik rovin obsahuje právě čtyři jeho vrcholy. Poraďte mu.

Výsledek. 12

Řešení. Zaprvé jde o šest rovin obsahujících jednotlivé stěny kvádru, zadruhé pro každou dvojici protějších stěn nalezneme dvě roviny, které jsou k oběma kolmé a obsahují jejich úhlopříčky. Dohromady je tudíž hledaných rovin 12.

Úloha 10. Míša se rozhodla nakreslit pomocí pravítka a kružítka dobře vypadající půlměsíc. Začala nakreslením kružnice se středem M_1 a poloměrem $r_1 = 3$ cm. Potom zabodla kružítko do bodu M_2 ležícího na kružnici a nakreslila druhou kružnici o poloměru r_2, která protla původní kružnici v protilehlých bodech ležících na průměru procházejícím M_1, jak ukazuje obrázek.



Jakou plochu má půlměsíc A v cm^2?

Výsledek. 9

Řešení. Abychom získali plochu půlměsíce, odečteme plochu kruhové úseče se středem M_2 a poloměrem r_2 od plochy půlkruhu se středem M_1 a poloměrem r_1. Plochu kruhové úseče dostaneme ze čtvrtiny plochy kruhu o poloměru r_2 odečtením plochy rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s délkou odvěsny r_2. Využijeme-li rovnost $r_2^2 = 2r_1^2$ získanou z Pythagorovy věty, nalezneme hledanou plochu

$$\frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{4} - r_1^2\right) = r_1^2 = 9\,\mathrm{cm}^2.$$

Úloha 11. Královna chobotnic má čtyři služebnice, z nichž každá má šest, sedm, nebo osm chapadel. Ty, které mají sedm chapadel, stále lžou, zatímco ty se šesti nebo osmi chapadly mluví vždy pravdu. Jednoho dne královna chobotnic svolala všechny své služebnice a zeptala se jich, kolik mají dohromady chapadel. První odpověděla, že 25, druhá tvrdila, že 26, třetí řekla 27 a poslední 28. Kolik chapadel mají dohromady pravdomluvné služebnice?

Výsledek. 6

Řešení. Z odpovědí může být pravdivá nanejvýš jedna, takže mezi služebnicemi jsou tři nebo čtyři lhářky. Kdyby ale byly čtyři, měly by dohromady 28 chapadel, takže by poslední z nich mluvila pravdu – což nesmí. Proto jsou lhářky tři a mají dohromady 21 chapadel. Kdyby jich jediná pravdomluvná měla osm, celkový počet by byl 29. Proto jich má jen šest (a na otázku odpovídala jako třetí).

Úloha 12. V supermarketu prodávají mléčnou, bílou a hořkou čokoládu, všechny za stejnou cenu. Jednoho krásného dne činila tržba za prodanou mléčnou čokoládu 270,–, za bílou čokoládu 189,– a za hořkou 216,–. Kolik nejméně tabulek čokolády se ten den mohlo prodat?

Výsledek. 25

Řešení. Cena jedné tabulky čokolády musí být společným dělitelem všech tří částek. Aby bylo prodaných tabulek co nejméně, musí být jejich cena co největší, hledáme tedy největšího společného dělitele. Protože $\mathrm{NSD}(270, 189, 216) = 27$, spočítáme, že prodaných tabulek bylo nejméně

$$\frac{270}{27} + \frac{189}{27} + \frac{216}{27} = 25.$$

Úloha 13. Otec pěti dětí chce svojí rodině nakoupit zákusky ke svačině. Léta bolestných zkušeností ho naučila, že musí dětem sehnat buď pět stejných, nebo pět vzájemně různých zákusků, jinak se jeho ratolesti do krve pohádají. Po dlouhé diskuzi, během níž se ani trochu nepodařilo domluvit, jaké zákusky by se měly nakoupit, naštvaně poručil svojí nejmladší dceři Aničce: „Půjdeš do cukrárny a řekneš prodavačce, ať ti dá x kousků náhodně! Až se vrátíš, každé z vás dětí dostane jeden zákusek a všechny ostatní budou pro mě a pro maminku!“ Víme, že v cukrárně vedou alespoň pět druhů zákusků a vždycky mají ode všech dostatečné množství. Jaké číslo x otec vybral, aby vynaložil co nejméně peněz a zároveň se jeho děti v žádném případě nepohádaly?

Výsledek. 17

Řešení. Kdyby Anička objednala 16 zákusků, mohly by se děti pohádat: Mohla by totiž třeba dostat čtyři laskonky, čtyři větrníky, čtyři včelí úly a čtyři indiánky, takže by neměla ani pět různých druhů, ani od žádného druhu pět nebo víc kousků. Stejný problém by samozřejmě mohl nastat při koupení menšího množství. Co se stane, když koupí 17 zákusků? Je možné, že dostane pět nebo více různých druhů, a v takovém případě budou děti spokojené. V opačném případě dostane nanejvýš čtyři druhy; pokud by ale od žádného z nich nedostala pět nebo víc kousků, měla by dohromady maximálně $4 \cdot 4 = 16$ zákusků, což není možné. Proto otec Aničku poslal pro 17 náhodně vybraných zákusků.

Úloha 14. Jaký je poměr obsahu kruhu ku obsahu čtverce, mají-li stejný obvod?

Výsledek. $4 : \pi$

Řešení. Označme poloměr kruhu jako r a délku strany čtverce jako a. Díky vztahu $2\pi r = 4a$ spočítáme požadovaný poměr jako

$$\frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{2r \cdot \pi r}{a \cdot 2a} = \frac{2r \cdot 2a}{a \cdot \pi r} = \frac{4}{\pi}.$$

Úloha 15. V únoru se Olin rozhodl provětrat svůj soukromý tryskáč a navštívit Kokosové ostrovy. Ze svého evropského sídla odletěl v 10:00 středoevropského času (SEČ) a přistál na ostrovech následující den v 5:30 tamního času (KČ). Domů odlétal v 8:30 KČ a přistál stejného dne v 17:00 SEČ. Předpokládejme, že oba lety trvaly stejně dlouho. Kolik bylo hodin na Kokosových ostrovech, když se Olin vrátil domů?

Výsledek. 22:30

Řešení. Označme délku letu d a časový rozdíl mezi Evropou a Kokosovými ostrovy s (oboje v hodinách). Úloha nám poskytuje soustavu rovnic

$$\begin{aligned} d + s &= 19{,}5, \\ d - s &= 8{,}5. \end{aligned}$$

Z jejího řešení $d = 14$, $s = 5{,}5$ zjistíme, že když se Olin vrátil domů, bylo na Kokosových ostrovech 22:30.

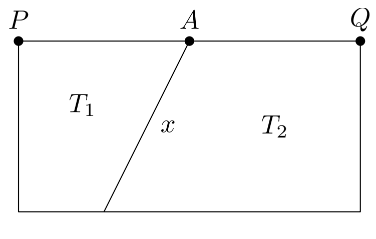
Poznámka: Kokosové ostrovy se skutečně nacházejí v časové zóně posunuté oproti greenwichskému času o +6:30 (jen zkratka KČ je smyšlená).

Úloha 16. Trojice čísel 14, 20, n má následující vlastnost: Součin každých dvou z nich je dělitelný tím třetím. Najděte všechna kladná celá čísla n, pro něž je tato podmínka splněna.

Výsledek. 70, 140, 280

Řešení. Číslo n je dělitelem $14 \cdot 20 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$, takže se v jeho rozkladu mohou vyskytnout jedině prvočísla 2, 5 a 7, přičemž dvojka bude nanejvýš ve třetí mocnině a pětka se sedmičkou nanejvýš v první mocnině. Podmínka $14 \mid 20n$ znamená, že je n násobkem 7; podobně z předpokladu $20 \mid 14n$ získáváme $10 \mid n$. Dohromady platí $70 \mid n$. Je snadné ověřit, že všechna čísla, která připadají v úvahu, tj. 70, 140 a 280, zadání vyhovují.

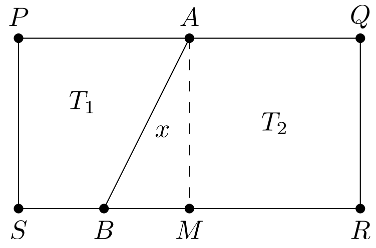
Úloha 17. Úsečka x dělí obdélník na dva lichoběžníky způsobem ukázaným na obrázku. Vzdálenost $|PA|$ je rovna 10 cm a $|AQ|$ je 8 cm. Lichoběžník T_1 má plochu $90\,\mathrm{cm}^2$, lichoběžník T_2 plochu $180\,\mathrm{cm}^2$.



Jaká je délka úsečky x v cm?

Výsledek. 17

Řešení. Zbylé dva vrcholy obdélníka označme R, S a druhý konec úsečky x označme B. Dále nalezněme na SR takový bod M, aby platilo $|SM| = |PA| = 10$.



Protože $|PQ| = 18$ a plocha obdélníka $PQRS$ je $180 + 90 = 270$, musí platit $|PS| = |QR| = 270/18 = 15$. Ze vzorce pro výpočet obsahu lichoběžníka T_2 dostáváme

$$180 = \frac{1}{2}(|BR| + |AQ|) \cdot |QR|,$$

tedy $|BR| = 16$. Proto platí $|BM| = |BR| - |MR| = 8$ a užitím Pythagorovy věty dostáváme

$$x = \sqrt{|AM|^2 + |BM|^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Úloha 18. Paní Leontýna natrhala na zahradě jahody. Chce je rozdat svým čtyřem synům tak, aby každý z nich dostal alespoň tři, přičemž Vilibald jich dostane více než Bonifác, Bonifác více než Ferdinand a Ferdinand více než Mikuláš. Každý ze synů bude znát počet svých jahod, celkové množství rozdělených jahod i podmínky, které si jejich mamá vymyslela. Jak má Leontýna rozdělit jahody, aby jich využila co nejméně a zároveň aby žádný z chlapců neznal celé rozdělení?

Výsledek. $(M, F, B, V) = (3, 5, 6, 8)$

Řešení. Abychom pracovali s menšími čísly, budeme říkat, že některému z chlapců *přebývá* n jahod, když jich dostal $n + 3$. Potom budeme místo požadavku, aby měl každý alespoň tři jahody, pracovat s podmínkou, že každému přebývá nezáporný počet jahod. Rozborem případů ukážeme, že pokud přebývá dohromady méně než 10 jahod, bude Vilibald znát počet jahod všech svých bratrů.

Vilibaldovi musejí samozřejmě přebývat alespoň tři jahody. Jsou-li právě tři, existuje jediné přípustné rozdělení přebývajících jahod $(0, 1, 2, 3)$. Kdyby byly čtyři, pak má každé z přípustných rozdělení $(0, 1, 2, 4)$, $(0, 1, 3, 4)$, $(0, 2, 3, 4)$ a $(1, 2, 3, 4)$ jiný součet, takže Vilibald ze znalosti součtu vydedukuje, kolik má který z jeho bratrů jahod. Pokud bude mít Vilibald pět jahod, je nejmenším možným součtem osmička odpovídající jediné distribuci $(0, 1, 2, 5)$, takže osm je také nevyhovující součet; bude-li přebývajících jahod dohromady devět, také neexistuje jiná distribuce než $(0, 1, 3, 5)$. A když bude Vilibaldovi přebývat jahod šest, je nejmenším přípustným součtem devítka, jenže rozdělení je zase jediné možné, $(0, 1, 2, 6)$. Nižšího součtu než desítky proto opravdu nelze dosáhnout tak, aby byly všechny podmínky splněny.

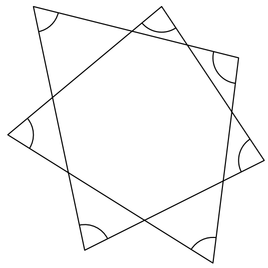
Na druhé straně rozdělení přebývajících jahod $(0, 2, 3, 5)$ splňuje všechny podmínky; Vilibald s Mikulášem si mohou myslet, že bylo použito rozdělení $(0, 1, 4, 5)$, zatímco Bonifác a Ferdinandem ho nedokážou rozlišit od $(1, 2, 3, 4)$. Ještě je potřeba ukázat, že žádné další rozdělení se součtem deset podmínkám nevyhovuje, aby bylo řešení jednoznačné; taková rozdělení jsou pouze $(0, 1, 2, 7)$, $(0, 1, 3, 6)$, $(0, 1, 4, 5)$ a $(1, 2, 3, 4)$. První, druhé a čtvrté by prokoukl Vilibald, třetí Bonifác.

Úloha 19. Na obvod kruhu napíšeme po směru hodinových ručiček všechna přirozená čísla od 1 do 1000 ve vzestupném pořadí. Následně budeme některá z čísel označovat: Začneme jedničkou a pak označíme každé patnácté číslo (tj. 16, 31 atd.). Pokračujeme tak dlouho, dokud neoznačíme některé číslo podruhé. Kolik čísel zůstane neoznačených, když skončíme?

Výsledek. 800

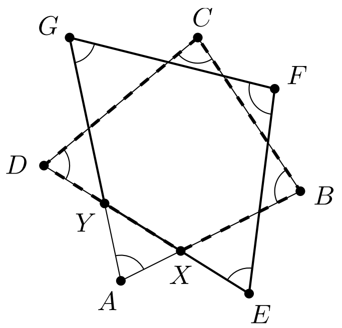
Řešení. Při prvním oběhu označíme všechna čísla ve tvaru $15k + 1$ (kde k je celé číslo) počínaje 1 a konče 991. Další oběh začíná 6 a končí 996, přičemž jsou označena čísla tvaru $15k + 6$. Při posledním průchodu je první na řadě 11 a poslední 986 (vyznačíme čísla typu $15k + 11$), což je poslední číslo, které vůbec označíme. Celkově byla označena všechna čísla ve tvaru $5k + 1$ a ta zahrnují právě pětinu čísel napsaných na kružnici. Proto zůstane $4/5 \cdot 1000 = 800$ neoznačených čísel.

Úloha 20. Zjistěte součet velikostí sedmi označených vnitřních úhlů této sedmicípé hvězdy (ve stupních).



Výsledek. 540°

Řešení. Označme vrcholy v cípech postupně $A, B, \dots, G$ jako na obrázku. Nechť je dále X, resp. Y, průsečík DE s AB, resp. AG.



Hledaný součet označme S. Protože oba čtyřúhelníky $XBCD$ a $YEFG$ mají součet vnitřních úhlů 360°, dostáváme

$$S + |\sphericalangle BXY| + |\sphericalangle XYG| - |\sphericalangle XAY| = 2 \cdot 360°.$$

Zároveň $|\sphericalangle BXY| = 180° - |\sphericalangle AXY|$ a $|\sphericalangle XYG| = 180° - |\sphericalangle XYA|$, takže

$$|\sphericalangle BXY| + |\sphericalangle XYG| - |\sphericalangle XAY| = 360° - (|\sphericalangle AXY| + |\sphericalangle XYA| + |\sphericalangle XAY|) = 180°.$$

Z toho vyplývá, že $S = 540°$.

Úloha 21. Žáci dostali za úkol spočítat aritmetický průměr čísel 1, 3, 6, 7, 8 a 10. Pepíček ale zvolil špatný přístup: Nejdřív si vybral některá dvě čísla a spočítal jejich průměr. Potom vzal výsledek a některé další číslo a zase vypočítal aritmetický průměr. Tak pokračoval, dokud nevyužil všechna čísla. Jaké největší absolutní hodnoty chyby (tj. absolutní hodnoty rozdílu svého a správného výsledku) tak mohl dosáhnout?

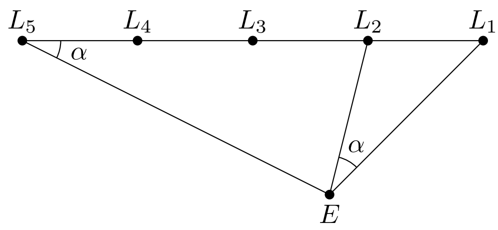
Výsledek. 17/6

Řešení. Snadnými úpravami zjistíme, že Pepíčkův postup ve skutečnosti odpovídá tomu, že vezme nějaké uspořádání čísel, řekněme $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, a spočte

$$S = \frac{a_1}{2^5} + \frac{a_2}{2^5} + \frac{a_3}{2^4} + \frac{a_4}{2^3} + \frac{a_5}{2^2} + \frac{a_6}{2^1}.$$

Největší hodnotě S odpovídá vzestupné uspořádání, protože největší číslo dělíme tím nejmenším, druhé největší druhým nejmenším atd. Nejmenší hodnoty S naopak Pepíček dosáhne při využití sestupného uspořádání. K největší chybě očividně dojde při jednom z těchto krajních uspořádání. Správný aritmetický průměr má hodnotu 35/6. S využitím rostoucího uspořádáním dostaneme $S = 67/8$, což vede k chybě 61/24. Klesající uspořádání vede k výsledku $S = 3$ a chybě 17/6, která je větší než 61/24, a je tedy hledaným výsledkem.

Úloha 22. Na jedné straně rovné silnice je pět pouličních lamp L_1, L_2, L_3, L_4 a L_5 uspořádaných s jednotným rozestupem 12 m v jedné přímce. Na druhé straně silnice stojí stánek se zmrzlinou. Když Honza postává u vchodu do obchodu v bodě E, vidí úsek mezi lampami L_1 a L_2 pod úhlem $\alpha = 27°$. Pokud si stoupne k lampě L_5, vidí úsek mezi body L_1 a E rovněž pod úhlem $27°$.



Jak daleko jsou od sebe L_1 a E?

Výsledek. 24 m

Řešení. Trojúhelníky EL_1L_2 a EL_1L_5 jsou podobné, protože v obou najdeme vnitřní úhly α a $\sphericalangle L_5L_1E$. Díky tomu dostáváme

$$\frac{|EL_1|}{|L_2L_1|} = \frac{|L_5L_1|}{|EL_1|}, \quad \text{a tedy} \quad |EL_1|^2 = |L_2L_1| \cdot |L_5L_1| = 12 \cdot 48 = 576,$$

z čehož spočítáme uvedenou vzdálenost jako $|EL_1| = 24\,\mathrm{m}$.

Úloha 23. Šavlík si vybral dvě různá celá čísla od 1 do 17 (včetně) a vynásobil je. Kupodivu se ukázalo, že výsledný součin je rovný součtu zbylých patnácti čísel. Nalezněte Šavlíkovu dvojici čísel.

Výsledek. 10 a 13

Řešení. Šavlíkova čísla nazvěme a a b. Protože součet prvních sedmnácti čísel je $\frac{17(17+1)}{2} = 153$, máme řešit rovnici $153 - (a+b) = ab$. Přičtením jedničky k oběma stranám a přeuspořádáním členů dostáváme ekvivalentní rovnici $154 = ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$. Protože $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ a $2 \le (a+1), (b+1) \le 18$, je jediným použitelným rozkladem $154 = 11 \cdot 14$. Hledanými čísly jsou tedy 10 a 13.

Úloha 24. Kolik šestic kladných celých čísel (a, b, c, d, e, f) splňuje $a > b > c > d > e > f$ a zároveň $a + f = b + e = c + d = 30$?

Výsledek. $\binom{14}{3} = 364$

Řešení. Šestice splňující požadavky můžeme jednoznačným způsobem zapsat jako

$$(a, b, c, d, e, f) = (15 + x, 15 + y, 15 + z, 15 - z, 15 - y, 15 - x),$$

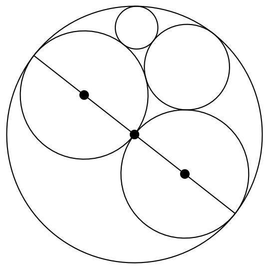
kde $0 \le x, y, z < 15$. Podmínka $a > b > c > d > e > f$ je ekvivalentní $x > y > z > 0$, takže je každá šestice jednoznačně určena trojicí kladných celých čísel menších než 15 (která potom uspořádáme). Proto je takových šestic $\binom{14}{3} = 364$.

Úloha 25. K časované bombě je připojený displej ukazující čas zbývající do výbuchu (v minutách a vteřinách). Na začátku odpočtu je na displeji 50:00. Žárovka blikne, kdykoliv je zobrazovaný počet minut rovný počtu vteřin (např. 15:15) nebo když je číslo na displeji stejné při čtení zleva i zprava (např. 15:51). V okamžiku, kdy žárovka blikne posedmdesáté, můžeme bombu zneškodnit. Jaký čas bude v tu chvíli na displeji?

Výsledek. 03:03

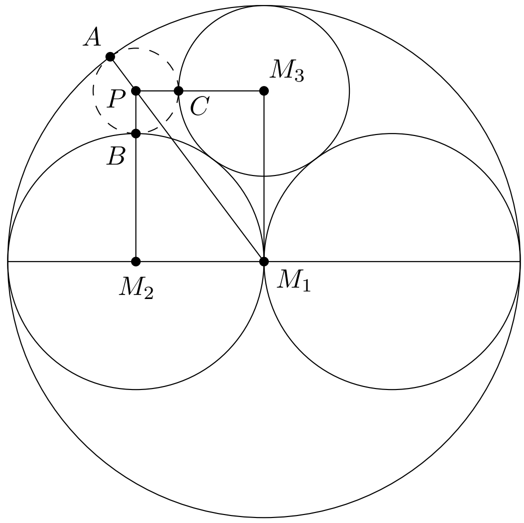
Řešení. Počet zbývajících sekund se počtu minut rovná v každé minutě právě jednou, takže během 50 minut k tomu dojde padesátkrát. To, že se číslo na displeji čte z obou stran stejně, nastane právě jednou v každé minutě, která nemá na místě jednotek číslo větší než pět; dohromady se to tedy stane třicetkrát. V pěti případech nastanou obě události zároveň: $00{:}00, 11{:}11, \ldots, 44{:}44$. Před výbuchem bomby tedy žárovka blikne $50 + 30 - 5 = 75$krát (počítáme i bliknutí v čase 00:00); ke zneškodnění bomby dojde ve chvíli, kdy zbývá už jen pět bliknutí (00:00, 01:01, 01:10, 02:02 a 02:20), tj. když je na displeji číslo 03:03.

Úloha 26. Pět kruhů se vzájemně dotýká způsobem znázorněným na obrázku. Určete poloměr nejmenšího kruhu, jestliže velký kruh má poloměr 2 a zbylé dva kruhy s vyznačenými středy mají poloměr 1.



Výsledek. $\frac{1}{3}$

Řešení. Označme podle obrázku středy kruhů jako M_1, M_2 a M_3 a poloměr druhého nejmenšího kruhu jako r_3.



Díky symetrii celé konstelace musí platit $M_1M_2 \perp M_1M_3$, což nám umožňuje sestavit podle Pythagorovy věty pro trojúhelník $M_1M_2M_3$ rovnost

$$1 + (2 - r_3)^2 = (1 + r_3)^2,$$

z níž dostaneme $r_3 = \frac{2}{3}$. Jako P označme bod, který spolu s M_1, M_2 a M_3 tvoří obdélník. Body, v nichž polopřímky M_1P, M_2P a M_3P protnou své „mateřské“ kružnice, nazvěme A, B a C. Protože $M_2M_1M_3P$ je obdélník, spočítáme $|PB| = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$, $|PC| = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ a $|PA| = 2 - |M_2M_3| = 2 - (1 + r_3) = \frac{1}{3}$. Z toho vidíme, že bod P je od všech tří bodů A, B a C vzdálen $\frac{1}{3}$. Řečené body tedy leží na kružnici se středem P o poloměru $\frac{1}{3}$. Díky tomu, že M_1P, M_2P a M_3P jsou polopřímky, představují A, B a C body dotyku příslušných kružnic s kružnicí se středem P a poloměrem $\frac{1}{3}$, takže tato kružnice je původní malou kružnicí ze zadání.

Úloha 27. V kasinu sedělo kolem velkého stolu několik hráčů rulety. Když se zvedl Vejtek a s ním i jeho 16 000 euro, průměrná hotovost připadající na jednoho hráče poklesla o 1 000 euro. O dalších 1 000 pak klesla, když si přisedli gambleři Marta a Tonda, každý vybavený pouhými 2 000 euro. Kolik hráčů sedělo u stolu, když ještě Vejtek hrál?

Výsledek. 9

Řešení. Hledaný počet hráčů předtím, než se Vejtek zvedl, označme n a nechť x označuje tehdejší průměrnou hotovost jednoho hráče. Zadání můžeme přepsat do podoby následujících dvou rovnic:

$$\frac{nx - 16\,000}{n-1} = x - 1\,000 \qquad \text{a} \qquad \frac{nx - 16\,000 + 2 \cdot 2\,000}{n+1} = x - 2 \cdot 1\,000.$$

Po roznásobení a přeuspořádání každé rovnice dostáváme tvar

$$x = 17\,000 - 1\,000n \qquad \text{a} \qquad 2\,000n - 10\,000 = x,$$

z něhož už snadno vidíme $n = 9$. Než tedy Vejtek odešel, sedělo kolem stolu devět hráčů.

Úloha 28. V krychli $7 \times 7 \times 7$ je každá dvojice sousedících krychliček jednotkového objemu oddělená přepážkou. Odebráním několika přepážek chceme dosáhnout toho, že bude každá krychlička spojená s alespoň jednou z krychliček na povrchu. Jaké nejmenší množství přepážek je třeba odebrat?

Výsledek. 125

Řešení. Na začátku je krychliček 7^3. Odstraněním jedné přepážky snížíme počet vzájemně oddělených částí krychle o jedna. Na konci se smí krychle skládat nanejvýš ze $7^3 - 5^3$ oddělených částí (to je totiž počet vnějších krychliček). Proto je potřeba odstranit alespoň $5^3 = 125$ přepážek. Zároveň je snadno vidět, že 125 už stačí.

Úloha 29. Víme, že 20∗∗∗16 je sedmiciferné číslo, které je druhou mocninou nějakého celého čísla. Které tři cifry chybějí?

Výsledek. 909

Řešení. Nechť je a^2 čtverec celého čísla končící 16. Potom je

$$a^2 - 16 = (a-4)(a+4)$$

dělitelné 100, takže $a = 2b$ a $(b-2)(b+2)$ je dělitelné 25. Proto musí platit $b = 25n \pm 2$, a tedy $a = 50n \pm 4$. Jelikož

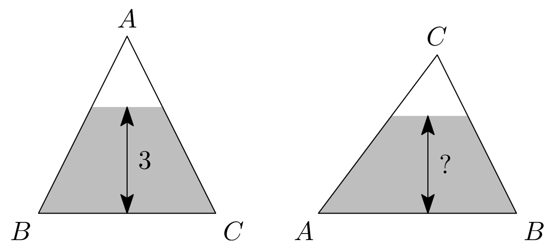
$$1404^2 < (1{,}414 \cdot 1000)^2 < (1000\sqrt{2})^2 = 2000000$$

a

$$1454^2 > 1450^2 = 2102500 > 2100000,$$

je jedinou možností $a = 1446$, což nám dává $a^2 = 2090916$.

Úloha 30. Trojúhelník ABC s délkami stran $|AB| = |AC| = 5\,\text{m}$ a $|BC| = 6\,\text{m}$ je částečně napuštěný vodou. Když trojúhelník leží na straně BC, je hladina ve výšce 3 m nad touto stranou. Pokud bude trojúhelník spočívat na straně AB, jaká bude výška vodou naplněné části? Uvádějte v metrech.



Výsledek. 18/5

Řešení. Když označíme střed strany BC jako D, je ABD pravoúhlý trojúhelník, takže z Pythagorovy věty vyplývá $|AD| = 4$. Část trojúhelníka, v níž není voda, je podobná trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $1/4$. Protože poměr velikostí ploch naplněné a nenaplněné části musí po otočení trojúhelníka zůstat zachován, musí platit obdobná podobnost celku s prázdnou částí i v nové poloze. Hladina je tedy opět ve 3/4 výšky, takže nám stačí umět vyjádřit výšku na AB. Protože plocha trojúhelníka ABC je $\frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |BC| = 12$, vychází $v_{AB} = 2 \cdot 12/|AB| = 24/5$. Plocha naplněná vodou má tedy výšku $3/4 \cdot 24/5 = 18/5$.

Úloha 31. Máme šest beden označených 1 až 6 a v nich nějak rozdělených 17 broskví. Jediný krok, který smíme udělat, je následující: Jestliže je v n-té bedně právě n broskví, jednu sníme a zbylých $n-1$ rozdělíme po jedné do beden 1 až $n-1$. Jak jsou broskve rozdělené, jestliže víme, že nám jejich rozložení umožňuje postupně sníst všechny?

Výsledek. $1, 1, 3, 2, 4, 6$

Řešení. Při hledání vhodného rozdělení budeme postupovat pozpátku. Závěrečného stavu $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, kdy jsme snědli všechny broskve, můžeme dosáhnout jen ze stavu $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, který zase mohl vzniknout jedině z $(0, 2, 0, 0, 0, 0)$ atd. Tímto způsobem sestavíme řetězec stavů, který nám jednoznačně říká, jak jsme museli postupovat, abychom směli sníst všechny broskve. Tento řetězec

$$\ldots (0, 2, 0, 0, 0, 0),\ (1, 2, 0, 0, 0, 0),\ (0, 1, 3, 0, 0, 0),\ (1, 1, 3, 0, 0, 0),\ \ldots$$

končí $(1, 1, 3, 2, 4, 6)$, což je hledané rozložení sedmnácti broskví.

Úloha 32. Na vrchol hory vede jednoduchá lanovka s pevně připojenými dvojicemi sedadel. Celkem 74 lidí chce vyjet nahoru, zatímco 26 pasažérů čeká u horní stanice na cestu zpět. Přesně v poledne se mechanismus spustí a na obou stanicích nasedne do lanovky první dvojice; ostatní cestující pak plynule nastupují, kdykoli přijede další sedačka. Ve 12:16 se dvojsedačka vezoucí první dva cestující vzhůru setká s poslední obsazenou dvojsedačkou směřující dolů. Ve 12:22 naopak sedačka vezoucí první dvojici směrem dolů mine poslední obsazenou sedačku směřující na vrchol. Sedačky jsou podél lana rozmístěny rovnoměrně (tj. ve stejných vzájemných vzdálenostech), lanovka se pohybuje stálou rychlostí a všichni cestující jezdí ve dvojicích. Kolik minut trvá jízda ze spodní stanice do horní?

Výsledek. 26

Řešení. Vzdálenost mezi první a poslední obsazenou sedačkou směřující vzhůru je trojnásobkem vzdálenosti první a poslední obsazené sedačky směřující dolů: Označíme-li totiž vzdálenost mezi dvěma sedačkami d, pak 74 lidí obsadí 37 sedaček a mezi první a poslední je vzdálenost $36d$; podobně sedačky jedoucí dolů tvoří úsek délky $12d$. Z toho můžeme usoudit, že doba, jež uplyne mezi dvěma okamžiky popsanými v zadání, je dvojnásobkem času, který uplyne mezi setkáním prvních sedaček v obou směrech a setkáním přední sedačky jedoucí vzhůru s poslední naloženou sedačkou směřující dolů. Proto se přední sedačky setkaly ve 12:13. Protože jedou stejně rychle, musely se potkat přesně uprostřed, takže čas potřebný k absolvování celé trasy je 26 minut.

Úloha 33. Mějme kosočtverec $ABCD$ a body M, N ležící na úsečkách AB, BC různé od A, B, C takové, že DMN je rovnostranný trojúhelník a $|AD| = |MD|$. Určete velikost úhlu ABC (ve stupních).

Výsledek. 100°

Řešení. Protože $|CD| = |AD| = |MD| = |ND|$, jsou trojúhelníky AMD a NCD rovnoramenné se základnami AM a NC. Označíme-li $\theta = |\sphericalangle DAB|$, pak máme $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADC| = 180^\circ - \theta$. Na druhé straně můžeme také z rovností

$$|\sphericalangle DAM| = |\sphericalangle AMD| = |\sphericalangle DNC| = |\sphericalangle NCD| = \theta$$

odvodit

$$|\sphericalangle ADM| = |\sphericalangle NDC| = 180^\circ - 2\theta$$

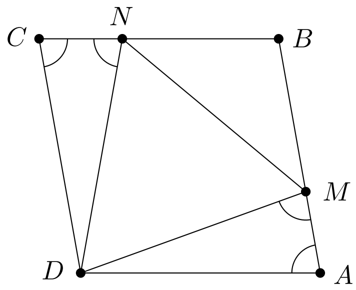
a pokračovat

$$|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle ADM| + |\sphericalangle MDN| + |\sphericalangle NDC| = 420^\circ - 4\theta.$$

Zjistili jsme tedy, že

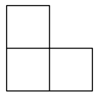
$$420^\circ - 4\theta = 180^\circ - \theta,$$

z čehož vyjde $\theta = 80^\circ$. Odtud už je jen krůček k rovnosti $|\sphericalangle ABC| = 100^\circ$.



Úloha 34. Kolika způsoby je možné obarvit políčka tabulky 2×7 žlutě a zeleně tak, aby v žádném místě nevzniklo ani zelené, ani žluté L-trimino?

Poznámka: L-trimino je následující tvar (případně otočený o nějaký násobek pravého úhlu):



Výsledek. 130

Řešení. Pokud je některý ze sloupečků jednobarevný, pak musejí mít oba s ním sousedící sloupce opačnou barvu, jejich sousedé musejí mít zase původní barvu atd. Dohromady tedy existují dvě obarvení tohoto typu rozlišená tím, kterou barvu zvolíme pro první sloupeček.

Na druhé straně platí, že pokud jsou v některém sloupečku použity obě barvy, pak musejí být použity obě i ve všech ostatních sloupcích. Pokud máme takové obarvení, snadno vidíme, že ať už jsou barvy mezi horní a dolní sloupeček rozdělené jakkoli, nikdy nemůže vzniknout zakázané trimino. Existuje tedy $2^7 = 128$ obarvení tohoto typu.

Dohromady lze tabulku obarvit $2 + 128 = 130$ různými způsoby.

Úloha 35. Filip je nadšeným sběratelem diamantů, ale zatím jich vlastní méně než 200. Aby se jimi mohl lépe kochat, rozdělil všechny své diamanty do několika (nejméně dvou) hromádek tak, že

- každá hromádka se skládá z jiného počtu diamantů,
- na žádné hromádce nejsou právě dva diamanty,
- pro každou hromádku platí, že kdykoli by byla rozdělena na dvě menší části, skládala by se alespoň jedna z nich ze stejného počtu diamantů jako některá z nerozdělených hromádek.

Jaké největší množství diamantů může Filip vlastnit?

Poznámka: Hromádka musí vždy obsahovat alespoň jeden diamant.

Výsledek. 196

Řešení. Podívejme se, jaké další vlastnosti musí mít rozdělení na hromádky, aby splňovalo požadavky úlohy. Počet diamantů na nejmenší hromádce označme m. Kdyby bylo $m \geq 2$, mohla by tato nejmenší hromádka být rozdělena na hromádky o velikostech 1 a $m - 1$, z nichž ani jedna není stejně velká jako některá z již existujících hromádek. Proto $m = 1$.

Dále ukažme, že druhá nejmenší hromádka obsahuje tři diamanty. Protože nemůže obsahovat dva, chceme ukázat, že se neskládá z $n \geq 4$ diamantů. To je ale skutečně vyloučeno díky rozdělení $n = 2 + (n - 2)$.

Nakonec dokážeme, že pokud má k nejmenších hromádek velikosti $1, 3, \ldots, 2k - 1$ $(k > 1)$, potom se $(k+1)$-tá nejmenší hromádka (existuje-li) skládá z $2k+1$ diamantů. Označme tedy velikost této hromádky jako p. Zjevně musí být p liché, jinak by bylo možno hromádku rozdělit na dvě menší sudé části. Kdyby bylo $p \geq 2k + 3$, pak dojdeme ke sporu díky rozdělení $p = 2 + (p - 2)$. Indukcí tedy dokážeme, že pokud má Filip diamanty rozdělené na n hromádek, pak musejí mít po řadě velikosti $1, 3, \ldots, 2n - 1$. Každé takovéto rozdělení už požadované podmínky splňuje, protože rozdělením kterékoli hromádky vznikne jedna hromádka liché velikosti s menším počtem diamantů.

Filip tedy dohromady vlastní $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ diamantů pro nějaké vhodné n. Největší čtverec menší než 200 je $14^2 = 196$, což je také řešení úlohy.

Úloha 36. Ve hře *kámen, nůžky, papír* máme tři možné symboly: kámen K, nůžky N a papír P. Přitom $K > N$, $N > P$, $P > K$ a $K = K$, $N = N$, $P = P$, kde $A > B$ značí, že A vítězí nad B, a $A = B$ znamená remízu. Turnaj v *obouruční hře kámen, nůžky, papír bez opakování* sestává z devíti her, které proti sobě hrají dva hráči oběma rukama současně, a to levou proti levé a pravou proti pravé. Za vítězství získává hráč 2 body, za remízu 1 a za prohru 0 bodů. V jedné hře se tedy mezi hráče rozdělí celkem čtyři body. Během turnaje musí každý hráč zahrát každou možnou (uspořádanou) dvojici symbolů právě jednou. Jaká je pravděpodobnost, že všech devět her turnaje skončí skórem 2:2, volí-li oba hráči dvojice symbolů náhodně?

Výsledek. $3!^3/9! = 1/1680$

Řešení. Definujme tři množiny, z nichž každá obsahuje tři páry symbolů:

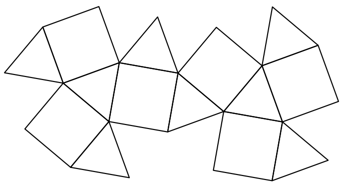
$$D_K = \{(K,K),(P,N),(N,P)\},$$
$$D_N = \{(N,N),(K,P),(P,K)\},$$
$$D_P = \{(P,P),(N,K),(K,N)\}.$$

Všimněme si, že jednotlivá hra turnaje skončí nerozhodně, právě když hráči proti sobě zahrají dva páry symbolů obsažené ve stejné množině – jedné z D_K, D_N, D_P.

Možné průběhy celého turnaje představují všechny dvojice permutací množiny $D_K \cup D_N \cup D_P$. Všechny hry turnaje skončí nerozhodně právě tehdy, když se prvky každé z množin D_K, D_N, D_P vyskytují na stejných třech pozicích v permutaci hráče H_1 a permutaci hráče H_2. Uvažme libovolnou permutaci – ta nechť představuje pořadí dvojic symbolů, které v jednotlivých hrách postupně hraje hráč H_1. Počet možných pořadí dvojic symbolů hraných hráčem H_2, které vedou k tomu, že každá hra dopadne nerozhodně, je roven $3!^3$, a to bez ohledu na zvolenou permutaci hráče H_1. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\frac{3!^3}{9!} = \frac{1}{1680}.$$

Úloha 37. Síť tělesa sestává z osmi rovnostranných trojúhelníků a šesti čtverců jako na obrázku.



Je-li délka každé hrany 1 km, jaký je objem tělesa (v km^3)?

Výsledek. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$

Řešení. Uvedené těleso můžeme získat z krychle odříznutím jejích rohů tak, aby řez procházel vždy středy hran vycházejících z odstraňovaného vrcholu. Délka hrany takové krychle je $\sqrt{2}$, její objem je tedy $2\sqrt{2}$. Celkem takto odřízneme osm jehlanů, z nichž každý má základnu tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnou délky $\sqrt{2}/2$ a výšku taktéž $\sqrt{2}/2$. Objem jednoho takového odříznutého rohu je tedy $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}/2)^2 \cdot (\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/24$ a objem daného tělesa je pak $2\sqrt{2} - 8 \cdot \sqrt{2}/24 = 5\sqrt{2}/3$.

Úloha 38. Najděte jediného trojciferného prvočíselného dělitele čísla

$$999\,999\,995\,904.$$

Výsledek. 601

Řešení. Povšimněme si, že

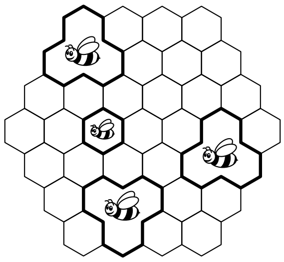
$$999\,999\,995\,904 = 10^{12} - 2^{12} = 2^{12}(5^{12} - 1)$$

a

$$5^{12} - 1 = (5-1)(5+1)(5^2+1)(5^2-5+1)(5^2+5+1)(5^4-5^2+1),$$

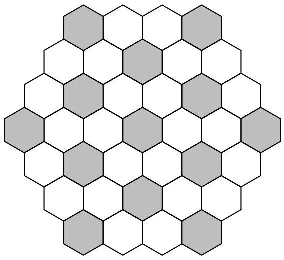
přičemž pouze poslední činitel je větší než 100. Protože ze zadání víme, že trojciferný prvočíselný dělitel existuje a $5^4 - 5^2 + 1 = 601$ zjevně není dělitelné 2, 3 ani 5, musí to být prvočíslo, a tedy kýžený výsledek.

Úloha 39. Třináct včel – jedna malá a dvanáct velkých – žije v plástvi o 37 buňkách. Každá velká včela zabere tři po dvou sousední buňky, zatímco malá včela obsadí jen jednu buňku (viz obrázek). Kolika způsoby může být plástev rozdělena na třináct nepřekrývajících se sektorů tak, aby je mohlo všech třináct včel obsadit v souladu s popsanými požadavky?

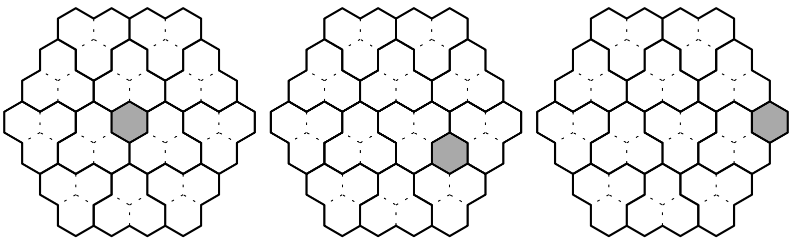


Výsledek. 20

Řešení. Uvažme třináct buněk naznačených šedě na obrázku níže:



Každý tříbuňkový sektor obsahuje právě jednu šedou buňku, a tudíž musí být buňka pro malou včelu jedna z šedých. Pokud je to ta uprostřed plástve, pak jsou právě dva způsoby, jak rozdělit zbytek plástve na dvanáct sektorů určených pro velké včely (jeden je naznačen na obrázku, druhý dostaneme otočením prvního o 60°). Pro každou ze šesti „prostředních" šedých buněk existuje právě jeden způsob, jak rozmístit velké včely do zbytku plástve. A konečně pro každou ze šesti krajních šedých buněk máme právě dvě možnosti rozdělení zbývajících buněk na tříbuňkové sektory (jednu naznačenou na obrázku a druhou zrcadlově převrácenou podle vodorovné osy).

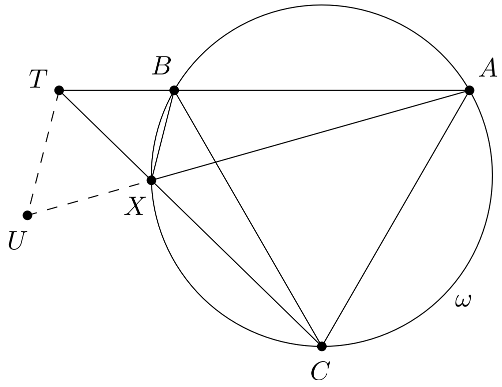


Dohromady tedy existuje $2 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 20$ způsobů, jak rozdělit plástev podle zadaných požadavků.

Úloha 40. Do kružnice ω je vepsán rovnostranný trojúhelník ABC. Na kratším oblouku BC kružnice ω zvolme bod X a označme T průsečík AB s CX. Je-li $|AX| = 5$ a $|TX| = 3$, určete $|BX|$.

Výsledek. 15/8

Řešení. Protože $|\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle ACB| = 60°$ a $|\sphericalangle AXC| = |\sphericalangle ABC| = 60°$, je $|\sphericalangle BXT| = 180° - |\sphericalangle AXB| - |\sphericalangle AXC| = 60°$. Označme U bod na AX takový, že $TU \parallel BX$.



Pak TUX je rovnostranný trojúhelník a $\triangle TUA \sim \triangle BXA$. Dostáváme tudíž

$$|BX| = \frac{|TU|}{|AU|} \cdot |AX| = \frac{|TX| \cdot |AX|}{|TX| + |AX|} = \frac{15}{8}.$$

Úloha 41. Uvažme rovnostranný trojúhelník ABC. Vnitřní bod P trojúhelníka ABC nazveme *zářivým*, pokud lze najít přesně 27 paprsků vycházejících z P a protínajících strany trojúhelníka ABC takových, že trojúhelník je těmito paprsky rozdělen na 27 menších trojúhelníků stejného obsahu. Určete počet zářivých bodů v trojúhelníku ABC.

Výsledek. $\binom{26}{2} = 325$

Řešení. Je zřejmé, že PA, PB a PC musí být mezi oněmi 27 paprsky vycházejícími z P – kdyby ne, získali bychom čtyřúhelník, což je ve sporu se zadáním. Rozdělme obvod trojúhelníku ABC na 27 úseček tak, aby každá jeho strana byla rozdělena na úsečky stejné délky; celkem existuje $\binom{26}{2} = 325$ takových dělení, neboť zafixujeme-li A jako první dělicí bod, můžeme pak již B a C vybrat libovolně ze zbylých 26. Nakonec si povšimněme, že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi všemi takovými děleními a všemi zářivými body v trojúhelníku ABC. Zřejmě totiž každý zářivý bod (resp. paprsky z něho vycházející) dává takové dělení. Jsou-li naopak dány počty a, b, c úseček, na které jsou rozděleny příslušné strany, najdeme jediný bod P uvnitř $\triangle ABC$ takový, že jeho vzdálenosti od stran BC, CA, AB jsou v poměru $a : b : c$. Přímočarým výpočtem ověříme, že P je skutečně zářivý bod, z něhož vycházející paprsky dělící $\triangle ABC$ vedou do bodů daného dělení.

Úloha 42. Kolik kladných dělitelů čísla 2016^2 menších než 2016 nedělí číslo 2016?

Výsledek. 47

Řešení. Z prvočíselného rozkladu $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ dostáváme $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Číslo 2016^2 má tedy $11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$ kladných dělitelů, z nichž $\frac{1}{2} \cdot (165 - 1) = 82$ je menších než 2016 – vyjma 2016 můžeme všechny dělitele rozdělit do párů (x, y) splňujících $x \cdot y = 2016^2$ a $x < 2016 < y$. Číslo 2016 má $6 \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 35$ dělitelů menších než 2016 a tito dělitelé přirozeně dělí i 2016^2. Hledaný počet dělitelů je tudíž roven $82 - 35 = 47$.

Úloha 43. Nechť

$$Z_n = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n - 1} + \sqrt{2n + 1}}.$$

Spočtěte $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{2016}$.

Výsledek. $\frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1)$

Řešení. Všimněme si, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}\frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n - 1} + \sqrt{2n + 1}} &= \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})((\sqrt{2n+1})^2 + (\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1}) + (\sqrt{2n-1})^2)}{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \\ &= \frac{1}{2}((\sqrt{2n+1})^3 - (\sqrt{2n-1})^3).\end{aligned}$$

Proto

$$\begin{aligned}Z_1 + \cdots + Z_{2016} &= \frac{1}{2}\big((\sqrt{3})^3 - (\sqrt{1})^3 + (\sqrt{5})^3 - (\sqrt{3})^3 + \cdots + (\sqrt{4033})^3 - (\sqrt{4031})^3\big)\\ &= \frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1).\end{aligned}$$

Úloha 44. Posloupnost celých čísel $a_0, a_1, a_2 \dots$ je konstruována následujícím způsobem: Je-li a_i dělitelné třemi, položíme $a_{i+1} = a_i/3$, v opačném případě položíme $a_{i+1} = a_i + 1$. Pro kolik různých nezáporných celých čísel a_0 dosáhne tato posloupnost poprvé hodnoty 1 po přesně jedenácti krocích (tj. $a_{11} = 1$, ale $a_0, a_1, \dots, a_{10} \neq 1$)?

Výsledek. 423

Řešení. Čísla 1 je možné dosáhnout pouze z čísla 3, které pro změnu můžeme dostat z 2 nebo 9. Číslo 9 může vzniknout z 8 nebo 27 a číslo 2 je dosažitelné z 1 nebo 6, ovšem pouze 6 je přípustná s ohledem na zadání problému. Zkonstruujme nyní další předchůdce: Nechť P_n je množina nezáporných celých čísel taková, že posloupnost ze zadání dosáhne 1 po přesně n krocích, právě když $a_0 \in P_n$. Všechny prvky množiny P_{n+1} pro $n \geq 3$ najdeme tak, že vezmeme $3x$ za každé $x \in P_n$ a dále $x - 1$ pro každé $x \in P_n$, pro něž $x - 1$ není násobkem tří.

Buď p_n počet prvků množiny P_n a označme dále f_n, g_n, resp. h_n počty prvků množiny P_n tvaru $3k$, $3k + 1$, resp. $3k + 2$. Všimněme si, že pro $n \geq 3$ jsou všechna čísla v množině P_n větší než 3, a tudíž

- $f_{n+1} = p_n$, neboť pro každé $x \in P_n$ máme $3x \in P_{n+1}$,
- $g_{n+1} = h_n$, neboť pro každé $x \in P_n$ tvaru $3k + 2$ máme $x - 1 = 3k + 1 \in P_{n+1}$, a
- $h_{n+1} = f_n$ z podobných důvodů.

Dostáváme tak

$$p_n = f_n + g_n + h_n = p_{n-1} + p_{n-3} + p_{n-2}$$

pro $n \geq 4$. Úvodní výpočty dávají $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ a $p_3 = 3$ a následující členy můžeme spočítat přímočarým použitím výše nalezeného rekurentního vztahu. Kýžený výsledek je $p_{11} = 423$.

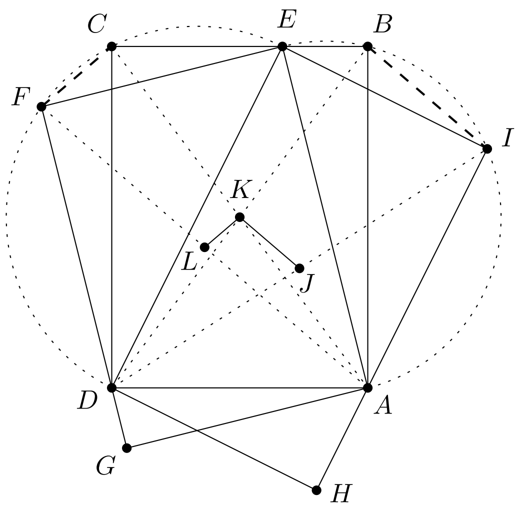
Úloha 45. Nechť $ABCD$, $AEFG$ a $EDHI$ jsou obdélníky se středy po řadě K, L a J. Předpokládejme dále, že A, D, E jsou po řadě vnitřní body úseček HI, FG, BC a že $|\sphericalangle AED| = 53°$. Určete velikost $\sphericalangle JKL$ (ve stupních).

Výsledek. 74°

Řešení. Protože KJ je střední příčkou trojúhelníku DIB, je $KJ \parallel BI$. Podobně nahlédneme $KL \parallel CF$. Tedy $|\sphericalangle JKL| = |\sphericalangle IBA| + |\sphericalangle DCF|$, a protože $|\sphericalangle AIE| = |\sphericalangle ABE| = 90°$, je čtyřúhelník $EAIB$ tětivový. Odtud

$$|\sphericalangle IBA| = |\sphericalangle IEA| = 90° - |\sphericalangle AED| = 37°.$$

Stejným způsobem dostaneme $|\sphericalangle DCF| = 37°$, tedy $|\sphericalangle JKL| = 74°$.



Úloha 46. Bára si vybrala několik (ne nutně různých) čísel z množiny $\{-1, 0, 1, 2\}$ takovým způsobem, že jejich součet je roven 19 a součet jejich druhých mocnin je 99. Jaké největší hodnoty může nabývat součet třetích mocnin Bářiných čísel?

Výsledek. 133

Řešení. Předpokládejme, že mezi Bářinými čísly je právě a, b, resp. c čísel rovných -1, 1, resp. 2 (ta, která se rovnají 0, zřejmě nehrají roli). Podmínky ze zadání se nyní dají zapsat jako

$$-a + b + 2c = 19,$$
$$a + b + 4c = 99.$$

Naším cílem je maximalizovat výraz $-a+b+8c = 19+6c$. Sečtením dvou výše uvedených rovností ovšem zjistíme, že $6c = 118 - 2b$, tedy $c \leq 19$. Hodnoty $c = 19$ můžeme dosáhnout volbou $a = 21$, $b = 2$, takže hledané maximum je $19 + 6 \cdot 19 = 133$.

Úloha 47. Najděte největší devíticiferné číslo s následujícími vlastnostmi:

- žádná číslice se v něm nevyskytuje více než jednou,
- vyškrtneme-li jeho k-tou cifru (pro $k = 1, 2, \dots, 9$), dostaneme osmiciferné číslo dělitelné k.

Výsledek. 876 513 240

Řešení. Označíme-li k-tou cifru hledaného čísla jako A_k, můžeme číslo samotné zapsat ve tvaru

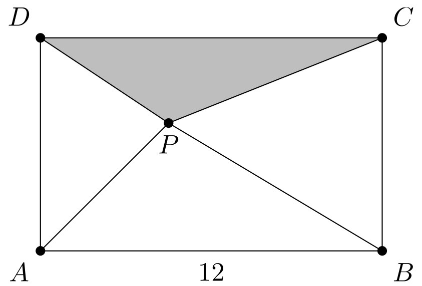
$$\overline{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9}.$$

Zřejmě existuje právě jedna číslice, která v dekadickém zápise hledaného čísla chybí – označme ji d. Dále nechť N_k značí osmiciferné číslo, které vznikne z hledaného čísla vyškrtnutím k-té cifry.

Jelikož N_2 je sudé, musí platit $2 \mid A_9$, a protože N_5 je dělitelné pěti, platí také $5 \mid A_9$. Z toho vyplývá, že A_9 je nula. Číslo N_9 je dělitelné devíti, a tedy i jeho ciferný součet musí být dělitelný devíti, jinak řečeno $9 \mid 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - d = 45 - d$. Tedy d je devítka. Čísla N_8 a N_4 jsou dělitelná čtyřmi, a proto jsou cifry A_7 a A_8 obě sudé. Kromě toho je N_8 dělitelné osmi, takže dvojčíslí $\overline{A_6 A_7}$ je dělitelné čtyřmi. Čísla N_3 a N_6 jsou dělitelná třemi, stejně jako ciferný součet hledaného čísla. Z toho plyne, že $\{A_3, A_6\} = \{3, 6\}$.

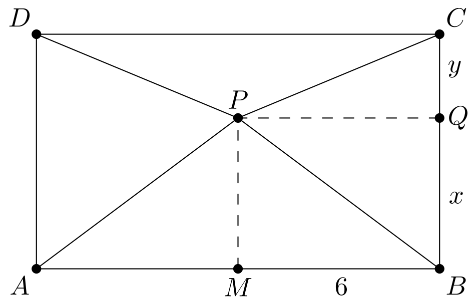
Hledáme největší číslo splňující zadané vlastnosti. Předpokládejme proto, že $A_1 = 8$, $A_3 = 6$ a $A_6 = 3$. Potom nutně $\{A_7, A_8\} = \{2, 4\}$, a protože $4 \mid \overline{A_6 A_7}$, dostáváme $A_7 = 2$ a $A_8 = 4$. Nyní stačí ověřit, že pokud zbylé číslice doplníme v sestupném pořadí na dosud neobsazené pozice, pak bude mít vzniklé číslo 876513240 všechny požadované vlastnosti ($N_7 = 87651340$ je skutečně dělitelné sedmi).

Úloha 48. Je dán obdélník $ABCD$ se stranou AB délky 12 a bod P ležící uvnitř tohoto obdélníka. Pro každý z trojúhelníků ABP, BCP a DAP platí, že jeho obvod je roven jeho obsahu. Jaký je obvod trojúhelníka CDP?



Výsledek. 25

Řešení. Rovnost mezi obsahem a obvodem trojúhelníka nastává právě tehdy, když má kružnice trojúhelníku vepsaná poloměr 2. Kdyby bod P ležel blíž k AD než k BC, byl by poloměr kružnice vepsané trojúhelníku DAP menší než poloměr kružnice vepsané trojúhelníku BCP. Podobný problém by nastal, kdyby byl P blíž k BC než AD. To znamená, že P leží na ose stran AB a CD.



Nechť Q značí kolmou projekci bodu P na přímku BC, M střed úsečky AB, x délku úsečky BQ a y délku úsečky CQ. Potom je obsah trojúhelníka ABP roven $6x$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku MBP plyne, že $|BP| = \sqrt{x^2 + 6^2}$. Z rovnosti mezi obvodem a obsahem trojúhelníka ABP pak dostaneme rovnici

$$6x = 12 + 2\sqrt{x^2 + 6^2}$$

s jediným řešením $x = 9/2$.

Délku y nalezneme podobně. Víme, že $|BP| = 15/2$ a $|CP| = \sqrt{y^2 + 6^2}$, a z rovnosti mezi obvodem a obsahem trojúhelníka BCP obdržíme rovnici

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(y + \frac{9}{2}\right) = y + \frac{9}{2} + \frac{15}{2} + \sqrt{y^2 + 6^2}$$

s jediným kladným řešením $y = 5/2$.

Dosazením dostáváme $|CP| = 13/2 = |DP|$, takže obvod trojúhelníka CDP je 25.

Úloha 49. Na tabuli je napsaná (uspořádaná) dvojice čísel $(0, 0)$. V každém kroku smažeme aktuální dvojici (a, b) a napíšeme místo ní dvojici $(a + b + c, b + c)$, kde c je rovno buď 247, nebo -118 (z těchto dvou hodnot si můžeme v každém kroku vybrat). Najděte nejmenší nenulový počet kroků, po kterém se na tabuli může objevit dvojice $(0, b)$ pro nějaké b.

Výsledek. 145

Řešení. Označme c_i volbu c v i-tém kroku. Po n krocích je první číslo z dvojice $a = nc_1 + (n-1)c_2 + \cdots + c_n$. Zafixujme n a definujme $s = n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$, kde $\varepsilon_i = 1$, pokud $c_i = 247$, a $\varepsilon_i = 0$ jinak. Analogicky definujme $t = n\delta_1 + (n-1)\delta_2 + \cdots + \delta_n$, kde $\delta_i = 1$, pokud $c_i = -118$, a $\delta_i = 0$ jinak. Pak $a = 247s - 118t$ a podmínka $a = 0$ dává, že $247s = 118t$. Jelikož 247 a 118 jsou nesoudělná, existuje celé číslo k takové, že $s = 118k$ a $t = 247k$. Úpravou předchozích rovností dostaneme

$$365k = s + t = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

a protože $365 = 5 \cdot 73$, po vyzkoušení dvou nevyhovujících případů zjistíme, že n musí být rovno alespoň $2 \cdot 73 - 1 = 145$.

Ukážeme, že pro $n = 145$ existují čísla c_i taková, že $247s = 118t$. Nechť m je nejmenší přirozené číslo splňující nerovnost

$$1 + 2 + \cdots + m \geq \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n).$$

Položme $c_i = -118$ pro $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$, kde

$$r = 1 + 2 + \cdots + m - \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n),$$

a $c_i = 247$ jinak. (Platí $m = 120$ a $r = 97$.) Takto dostaneme přesně

$$247s = 118t = \frac{118 \cdot 247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n).$$

Úloha 50. *Cikcak* je lomená čára, která vznikne ze dvou rovnoběžných polopřímek opačného směru spojením jejich počátečních bodů. Na kolik nejvíce oblastí může deset cikcaků rozdělit rovinu?

Výsledek. 416

Řešení. Každé dva cikcaky se mohou protnout nejvýše v devíti bodech (když pomineme zjevně nevýhodný případ, kdy se některé dvě polopřímky překrývají). Do roviny lze navíc umístit libovolný počet cikcaků tak, aby se každé dva z nich protínaly právě v devíti bodech a žádné tři neměly společný bod. Představme si nyní, že máme v rovině takto umístěno $n-1$ cikcaků a přidáváme k nim n-tý. Tento je $9(n-1)$ průsečíky rozdělen na $9(n-1)+1$ částí, z nichž každá dělí některou již existující oblast na dvě nové. Dostáváme tedy rekurentní vztah pro maximální počet oblastí Z_n, na které může n cikcaků rozdělit rovinu: $Z_1 = 2$ a $Z_n = Z_{n-1} + 9n - 8$ pro $n \geq 2$. Indukcí snadno odvodíme explicitní vyjádření $Z_n = \frac{9}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 1$. Dosazením dostáváme kýžený výsledek $Z_{10} = 416$.

Úloha 51. Mějme čtyřstěn, jehož každá stěna je trojúhelník se stranami délek 1, $\sqrt{2}$ a c. Poloměr sféry opsané tomuto čtyřstěnu je $5/6$. Najděte c.

Výsledek. $\sqrt{23}/3$

Řešení. Dokážeme obecnější tvrzení – pokud je každá stěna čtyřstěnu trojúhelník se stranami délek a, b, c a poloměr sféry opsané čtyřstěnu je ϱ, pak $a^2 + b^2 + c^2 = 8\varrho^2$. Řešení úlohy dostaneme dosazením do tohoto vzorce.

Opišme čtyřstěnu kvádr s hranami délek p, q, r takový, že hrany čtyřstěnu jsou jeho stěnové úhlopříčky. Z Pythagorovy věty plyne, že

$$p^2 + q^2 = a^2, \quad p^2 + r^2 = b^2 \quad \text{a} \quad q^2 + r^2 = c^2.$$

Sféra opsaná čtyřstěnu navíc splývá se sférou opsanou kvádru, jejímž průměrem je tělesová úhlopříčka kvádru. Tudíž

$$(2\varrho)^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

což po úpravě dává dokazovanou rovnost.

Úloha 52. Na uvítací přípitek vyrovnal vrchní číšník do řady 2016 sklenek s vynikajícím višňovým koktejlem. Pikolík dostal za úkol jednu z nich překrýt stříbrným táckem, na něj postavit sošku a do ostatních rozmístit lichý počet višní tak, aby v každé sklence byla nejvýše jedna. Navíc mělo napravo od sklenky překryté táckem skončit více višní než nalevo od ní. Kolika způsoby to pikolík může provést?

Výsledek. $2016 \cdot 2^{2013}$

Řešení. Nejprve spočtěme všechny možnosti umístění tácku a nejvýše jedné višně do každé nezakryté sklenice, aniž bychom si kladli další podmínky. Těchto je evidentně $2016 \cdot 2^{2015}$. Dále máme

$$0 = (-1+1)^{2016} = \sum_{i=0}^{2016} \binom{2016}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{1008} \binom{2016}{2i} - \sum_{i=1}^{1008} \binom{2016}{2i-1},$$

což ukazuje, že počet rozmístění zahrnujících sudý počet višní je stejný jako počet rozmístění s lichým počtem višní, konkrétně $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2015} = 2016 \cdot 2^{2014}$. Nyní si všimněme, že ke každému rozmístění existuje rozmístění zrcadlově převrácené. V případě lichého počtu višní jsou tato dvě rozmístění vždy různá, neboť počet višní nalevo od tácku je jiný než počet višní napravo od něj. Z každé dvojice rozmístění vyhovuje podmínkám ze zadání zřejmě právě jedno. Řešení je tedy $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2014} = 2016 \cdot 2^{2013}$.

Úloha 53. Jirka měl dřevěnou krychli. Protože nebyl spokojen s její barvou, rozhodl se ji natřít nazeleno. Ani to ho ale neuspokojilo, a tak si usmyslel, že ji rozřeže na malé kvádry. Vybral si proto 33 různých rovin, z nichž každá se nacházela mezi některými dvěma protilehlými stěnami krychle a byla s nimi rovnoběžná, a provedl podél nich řezy. Když se krychle rozpadla, spočítal všechny kvádry s alespoň jednou zelenou stěnou a s údivem zjistil, že je jich stejně jako kvádrů, které nemají žádnou zelenou stěnu. Na kolik kvádrů mohl krychli rozřezat?

Výsledek. 1260 nebo 1344 (dvě řešení)

Řešení. Snadno nahlédneme, že Jirka musel vybrat alespoň čtyři roviny v každém ze tří možných směrů. Kdyby jich totiž byl v některém směru vybral méně, byl by počet kvádrů s alespoň jednou zelenou stěnou větší než počet kvádrů bez zelené stěny. Označme počet rovin v jednotlivých směrech jako $a+3$, $b+3$, $c+3$, kde a, b, c jsou kladná celá čísla. Platí $(a+3)+(b+3)+(c+3)=33$, takže $a+b+c=24$.

Podmínku ze zadání úlohy lze přepsat jako

$$(a+4)(b+4)(c+4)=2(a+2)(b+2)(c+2),$$

což po zjednodušení dává $abc=240=2^4\cdot 3\cdot 5$. Jelikož $a+b+c$ je sudé číslo, musí být buď všechna tři čísla sudá, nebo BÚNO a sudé a b, c lichá. V prvním případě je BÚNO $a=4x$, $b=2y$, $c=2z$, přičemž $xyz=15$ a $2x+y+z=12$. Tedy $x=3$, $\{y,z\}=\{1,5\}$, což dává celkový počet kvádrů $(a+4)(b+4)(c+4)=16\cdot 6\cdot 14=1344$.

Ve druhém případě je a dělitelné šestnácti, a protože $a+b+c=24<2\cdot 16$, je nutně $a=16$. Tedy $b+c=8$ a $bc=15$, odkud máme $\{b,c\}=\{3,5\}$. Celkový počet kvádrů je v tomto případě $(a+4)(b+4)(c+4)=20\cdot 7\cdot 9=1260$.

Úloha 54. Pro přirozené číslo n definujme $p(n)$ jako součin všech nenulových cifer čísla n. Najděte největšího prvočíselného dělitele čísla $p(1)+\cdots+p(999)$.

Výsledek. 103

Řešení. Položme $S=p(1)+\cdots+p(999)$. Kdyby bylo $p(n)$ definováno jako součin všech cifer, výsledek by byl

$$(0+1+2+\cdots+9)(0+1+2+\cdots+9)(0+1+2+\cdots+9),$$

což snadno nahlédneme po roznásobení závorek. Tedy

$$S=(1+1+2+\cdots+9)(1+1+2+\cdots+9)(1+1+2+\cdots+9)-1,$$

protože započítáváme jedničku navíc. Po úpravě dostaneme

$$S=46^3-1=(46-1)(46^2+46+1)=3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 103,$$

odkud dostáváme výsledek 103.

Úloha 55. Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost kladných celých čísel taková, že $9\mid a_{3k-2}$, $14\mid a_{3k-1}$ a $19\mid a_{3k}$ pro každé přirozené číslo k. Najděte nejmenší možnou hodnotu a_{2016}.

Výsledek. 14478

Řešení. Můžeme předpokládat, že pro všechna n je hodnota a_n nejmenší přirozené číslo větší než a_{n-1}, které splňuje odpovídající podmínku dělitelnosti. Pokud je člen a_{3k} dán, pak a_{3k+3} nabývá buď hodnoty $a_{3k}+19$, nebo $a_{3k}+38$. Druhá z možností nastává právě tehdy, když existují čísla c a d taková, že $5\le d\le c\le 9$ a $9\mid a_{3k}+c$, $14\mid a_{3k}+d$. Pak totiž $a_{3k+1}=a_{3k}+c$ a $a_{3k+2}=a_{3k}+14+d\ge a_{3k}+19$.

Dvojic (c,d) splňujících podmínku $5\le d\le c\le 9$ je $\binom{6}{2}=15$. Protože čísla 9, 14 a 19 jsou po dvou nesoudělná, plyne z Čínské zbytkové věty, že pro každý takový pár (c,d) existuje právě jedno nezáporné celé číslo a_{3k} menší než $9\cdot 14\cdot 19$ takové, že $19\mid a_{3k}$, $9\mid a_{3k}+c$ a $14\mid a_{3k}+d$. Máme tudíž přesně patnáct hodnot a_{3k} menších než $9\cdot 14\cdot 19$, pro které $a_{3k+3}=a_{3k}+38$. Zřejmě není rozdíl žádných dvou z těchto hodnot roven 19 a žádná z těchto hodnot není $9\cdot 14\cdot 19-19$, proto $9\cdot 14\cdot 19=a_{3\ell}$ pro nějaké ℓ. Z faktu, že rovnost $a_{3k+3}=a_{3k}+38$ nastává právě patnáctkrát, odvodíme $\ell=9\cdot 14-15=111$.

Pro každý člen a_n větší než a_{333} jsou zbytky modulo 9, 14 a 19 stejné jako odpovídající zbytky pro a_{n-333}, proto $a_{n+333}=a_n+9\cdot 14\cdot 19$. Dále lze snadno spočítat, že $a_{18}=114$. Dohromady máme

$$a_{2016}=a_{6\cdot 333+18}=6\cdot 9\cdot 14\cdot 19+114=14478.$$

Úloha 56. Uvnitř trojúhelníka ABC se nachází bod P. Průsečíky přímek AP, BP a CP s protilehlými stranami označme postupně D, E a F. Spočtěte obsah trojúhelníka ABC, pokud víte, že $|PA| = 6$, $|PB| = 9$, $|PD| = 6$, $|PE| = 3$ a $|CF| = 20$.

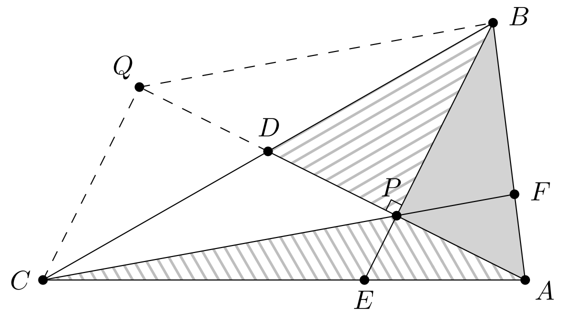
Výsledek. 108

Řešení. Označme $[XYZ]$ obsah trojúhelníka XYZ. Z rovnosti $|AP| = |DP|$ plyne, že $[ABP] = [BDP]$ a $[APC] = [DCP]$. Dále $3|EP| = |BP|$ znamená, že $3[APE] = [ABP]$ a

$$3[CEP] = [BCP] = [BDP] + [DCP] = 3[APE] + [APE] + [CEP].$$

Úpravou posledního vztahu dostaneme $[CEP] = 2[APE]$. Z předchozích rovností vyplývá $[ABP] = [BDP] = [APC] = [DCP]$, speciálně $|BD| = |CD|$.

Nechť k značí poměr $|FP| : |CP|$. Pak z rovností $|AP| = |DP|$ a $|\sphericalangle APF| = |\sphericalangle CPD|$ máme $[AFP] = k[DCP]$ a podobně $[FBP] = 3k[CEP]$. Uvážíme-li již známé poměry, dostaneme $k = 1/3$, a tudíž $|FP| = 5$, $|CP| = 15$. Doplněním trojúhelníka CPB na rovnoběžník $CPBQ$ získáme vztah $|BP|^2 + |PQ|^2 = |BQ|^2$, z něhož plyne, že úhel DPB je pravý.



Hledaný obsah spočítáme jako

$$[ABC] = 4[BDP] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 108.$$

Úloha 57. Najděte poslední dvojčíslí před desetinnou čárkou čísla $(7 + \sqrt{44})^{2016}$.

Výsledek. 05

Řešení. Začněme pozorováním, že $0 < 7 - \sqrt{44} < 1$, a tedy také $0 < (7 - \sqrt{44})^{2016} < 1$. Číslo $(7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016}$ je celé, jak je vidět z binomického rozvoje dvojčlenů $7 + \sqrt{44}$ a $7 - \sqrt{44}$ (liché mocniny čísla $\sqrt{44}$ se odečtou). Proto

$$\lfloor (7 + \sqrt{44})^{2016} \rfloor = (7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016} - 1.$$

Jelikož $12^2 \equiv 44 \pmod{100}$, můžeme psát

$$(7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016} \equiv (7 + 12)^{2016} + (7 - 12)^{2016} \pmod{100}.$$

Abychom našli požadované dvojčíslí, stačí nalézt poslední dvě cifry čísel 19^{2016} a 5^{2016}. Ve druhém případě je to 25, protože $5^3 \equiv 5^2 \pmod{100}$. V prvním případě použijeme binomickou větu:

$$(20 - 1)^{2016} \equiv \binom{2016}{2015} \cdot 20^1 \cdot (-1)^{2015} + \binom{2016}{2016} (-1)^{2016} \equiv -19 \pmod{100},$$

protože všechny členy v binomickém rozvoji kromě posledních dvou jsou dělitelné 400. Z výše uvedeného dostáváme, že hledané dvojčíslí je $-19 + 25 - 1 = 05$.

Jiné řešení. Vzhledem k tomu, že čísla $7+\sqrt{44}$ a $7-\sqrt{44}$ jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 14x + 5 = 0$, lze posloupnosti $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ a $(\beta_n)_{n\geq 0}$ definované jako $\alpha_n = (7 + \sqrt{44})^n$ a $\beta_n = (7 - \sqrt{44})^n$ zapsat rekurentními vzorci

$$\alpha_{n+2} - 14\alpha_{n+1} + 5\alpha_n = 0 \quad \text{a} \quad \beta_{n+2} - 14\beta_{n+1} + 5\beta_n = 0.$$

Totéž platí pro jejich součet $\gamma_n = (7+\sqrt{44})^n + (7-\sqrt{44})^n$. Naším cílem je spočítat $\gamma_{2016} \bmod 100$.

Označme $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n \bmod 100$. Posloupnost $(\tilde{\gamma}_n)_{n\geq 0}$ je jednoznačně určena vztahem $\tilde{\gamma}_{n+2} = (14\tilde{\gamma}_{n+1} - 5\tilde{\gamma}_n) \bmod 100$ a hodnotami prvních dvou členů $\tilde{\gamma}_0 = 2$ a $\tilde{\gamma}_1 = 14$. Dále platí, že posloupnost je periodická, protože $\tilde{\gamma}_n$ nabývá konečně mnoha hodnot a každý člen závisí na dvou předchozích (kromě prvních dvou členů, které jsou dány). Spočteme několik prvních členů této posloupnosti:

$$2, 14, 86, 34, 46, 74, 6, 14, 66, 54, 26, 94, 86, 34, \ldots.$$

Posloupnost je tedy periodická od $\tilde{\gamma}_2$ dále a její perioda má délku 10. Proto $\tilde{\gamma}_{2016} = \tilde{\gamma}_6 = 6$. Z prvního odstavce předchozího řešení plyne, že hledané číslo je rovno $\tilde{\gamma}_{2016} - 1 = 5$, a tudíž je jeho poslední dvojčíslí 05.