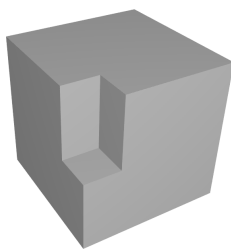


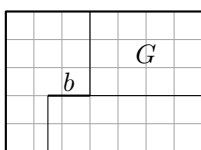
Zadanie 1. Dany jest gład w kształcie sześcianu o objętości 216 m^3 . Jakie będzie pole powierzchni tego gładu po odłupaniu od niego prostopadłościennego kawałka o wymiarach $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$, tak jak na poniższym rysunku?



Wynik. 216 m^2

Rozwiązanie. Skoro $6^3 = 216$, to długość krawędzi sześcianu wynosi 6 m . Odłupanie kawałka nie zmienia pola powierzchni gładu, więc wynosi ono $6 \cdot 6^2 = 216 \text{ m}^2$.

Zadanie 2. Paweł i Gaweł wygrali w totolotka i zakupili ładną prostokątną działkę budowlaną o wymiarach 35 m na 25 m . Zamierzają wybudować dwa przylegające do siebie domy i współdzielić ogród G o powierzchni 300 m^2 . Plan obiektu jest przedstawiony na obrazku:



(Odległość między dwiema sąsiednimi liniami siatki wynosi 5 m .) Jak daleko ściana b musi wystawać z jednej części obiektu i zachodzić w drugą część, aby pola powierzchni obu części były równe?

Wynik. 8.75 m

Rozwiązanie. Pole powierzchni jednego domu jest równe połowie $35 \text{ m} \cdot 25 \text{ m} - 300 \text{ m}^2 = 575 \text{ m}^2$, czyli 287.5 m^2 . Skoro długość jednego boku prostokątnego domu jest równa 10 m , to drugi bok musi mieć długość 28.75 m . Stąd otrzymujemy $b = 8.75 \text{ m}$.

Zadanie 3. Marek chce wybrać się na plażę. Ma on w swojej szafie następujące (rozróżnialne) stroje: 5 par kąpielówek, 3 kapelusze słomkowe, 4 pary okularów przeciwsłonecznych oraz 5 podkoszulków. Regulamin plaży wymaga założenia kąpielówek, jednak noszenie kapeluszy, okularów przeciwsłonecznych i podkoszulków nie jest obowiązkowe. Wiadomo więc, że Marek założy dokładnie jedno kąpielówki, a także po co najwyżej jednej z pozostałych części stroju. Na ile sposobów Marek może przygotować strój zgodnie z powyższymi warunkami?

Wynik. 600

Rozwiązanie. Zauważmy, że niezakożenie pewnej części stroju możemy traktować jako dodatkową możliwość. Jeśli chodzi o kapelusze słomkowe, Marek może nie założyć żadnego lub wybrać jedną z trzech możliwości, co daje w sumie cztery opcje. Dla okularów przeciwsłonecznych dostajemy pięć możliwości, a dla podkoszulków — sześć. Marek musi wybrać jedną z pięciu par kąpielówek, zatem łączna liczba możliwości to $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 600$.

Zadanie 4. Laura spędziła swoje wakacje w lesie deszczowym. Każdego dnia deszcz padał albo tylko rano, albo tylko po południu, albo przez cały dzień. W ciągu wakacji Laury było dokładnie 13 dni, w które nie padało przez cały dzień, dokładnie 11 deszczowych poranków oraz dokładnie 12 deszczowych popołudni. Ile dni trwały wakacje Laury?

Wynik. 18 dni

Rozwiązanie. Niech v będzie szukaną liczbą dni trwania wakacji. Wówczas $v - 11$ jest liczbą dni, w które deszcz nie padał rano, zaś $v - 12$ jest liczbą dni, w które deszcz nie padał po południu. Skoro nie było żadnego w pełni słonecznego dnia, to

$$(v - 11) + (v - 12) = 13,$$

skąd $v = 18$.

Zadanie 5. Wyznacz najmniejszą nieujemną liczbę całkowitą n taką, że $n - 2 \cdot Q(n) = 2016$, gdzie $Q(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n .

Wynik. 2034

Rozwiązanie. Zauważmy, że liczba $n - Q(n)$ jest podzielna przez 9, a ponieważ 2016 jest liczbą podzielną przez 9, więc $Q(n)$ jest liczbą podzielną przez 9 — to oznacza, że n również. Oczywiście $n < 3000$, stąd $Q(n) \leq 2 + 9 + 9 + 9$, zatem $n = 2016 + 2Q(n) \leq 2074$. Łatwo zauważyć, że 2034 jest najmniejszą liczbą spełniającą powyższe warunki.

Zadanie 6. Ile liczb całkowitych dodatnich k ma tę własność, że pierwsza cyfra liczby k jest równa liczbie cyfr liczby k (w zapisie dziesiętnym)?

Wynik. 111 111 111

Rozwiązanie. Jeżeli n jest cyfrą różną od zera, to jest dokładnie 10^{n-1} liczb rozpoczynających się cyfrą n i mających własność opisaną w treści zadania, konkretnie są to liczby od $\overline{n0\dots0}$ do $\overline{n9\dots9}$ włącznie. Stąd wnosimy, że łącznie istnieje dokładnie

$$1 + 10 + \dots + 100\,000\,000 = 111\,111\,111$$

takich liczb.

Zadanie 7. Chodnik składa się z wielu płytek, z których pewna ma kształt n -kąta foremnego i jest ze wszystkich stron otoczona przez inne płytki. Płytkę tą po obrocie wokół swojego środka o 48° przechodzi sama na siebie. Wyznacz minimalne n , dla którego jest to możliwe.

Wynik. 15

Rozwiązanie. Obrót zachowuje n -kąć foremny wtedy, kiedy kąt obrotu jest całkowitą wielokrotnością kąta pomiędzy odcinkami łączącymi dwa sąsiednie wierzchołki ze środkiem n -kąta. Ten kąt jest równy $360^\circ/n$, więc szukamy najmniejszego dodatniego n takiego, że liczba:

$$\frac{48}{\frac{360}{n}} = \frac{2}{15}n$$

jest całkowita. Zatem szukane n jest równe 15.

Zadanie 8. Dzień nazwiemy *szczęśliwym*, jeżeli jego zapis w formacie $DD.MM.RRRR$ zawiera osiem parami różnych cyfr, gdzie DD oznacza dzień, MM miesiąc, a $RRRR$ — rok oraz dla dni i miesięcy o numerach mniejszych od 10 za pierwszą cyfrę przyjmujemy zero. Przykładowo 26.04.1785 był dniem szczęśliwym. Kiedy nadejdzie najbliższy (licząc od dzisiaj) szczęśliwy dzień?

Wynik. 17.06.2345

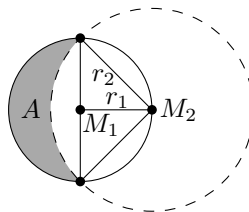
Rozwiązanie. Numer miesiąca każdego szczęśliwego dnia zawiera zero lub jest równy 12, więc numer roku nie zawiera zera lub przekracza 3000. Rozważmy pierwszy z tych przypadków. Skoro pierwszą z cyfr DD może być tylko 0, 1, 2, 3, to najmniejszym możliwym rokiem jest 2145. Jednak wówczas numer dnia musiałby być równy 30, co nie jest możliwe, gdyż cyfra zero musi wystąpić w numerze miesiąca. Kolejnym możliwym rokiem jest 2345 i okazuje się, że w roku tym jest dzień szczęśliwy. Pierwszą cyfrą numeru dnia musi być 1, skąd pierwszym możliwym numerem miesiąca jest 06. Przyjmując za numer dnia 17, otrzymujemy pełną datę najbliższego szczęśliwego dnia.

Zadanie 9. Znajdź liczbę różnych płaszczyzn zawierających dokładnie cztery wierzchołki prostopadłościanu.

Wynik. 12

Rozwiązanie. Sześć płaszczyzn zawierających ściany prostopadłościanu spełnia zadane warunki. Co więcej, dla każdej pary przeciwległych ścian są dokładnie dwie płaszczyzny prostopadłe do tych ścian i zawierające po jednej przekątnej każdej z nich. Łącznie uzyskujemy 12 płaszczyzn.

Zadanie 10. Mała Kasia chce narysować piękny półksiężyc używając cyrkla i linijki. Najpierw rysuje okrąg o środku w M_1 i promieniu $r_1 = 3$ cm. Potem wbija cyrkiel w punkt M_2 leżący na tym okręgu i rysuje drugi okrąg o promieniu r_2 , który przecina pierwszy okrąg w końcach średnicy przechodzącej przez M_1 , tak jak na rysunku poniżej:



Jakie jest pole półksiężca A w cm^2 ?

Wynik. 9

Rozwiązanie. Aby uzyskać pole A , możemy odjąć pole odcinka koła (o środku w M_2 i promieniu r_2) od pola półkola (o środku w M_1 i promieniu r_1). Żeby otrzymać pole odcinka obliczamy pole ćwiartki koła o promieniu r_2 i odejmujemy pole trójkąta prostokątnego równoramiennego o ramieniu r_2 . Korzystając z faktu, że $r_2^2 = 2r_1^2$ (z twierdzenia Pitagorasa), wnoszujemy, że poszukiwane pole jest równe:

$$\frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{4} - r_1^2 \right) = r_1^2 = 9 \text{ cm}^2.$$

Zadanie 11. Każdy ze służących Królowej Ośmiornicy ma sześć, siedem lub osiem nóg. Wszyscy służący mający siedem nóg zawsze kłamią, a wszyscy mający ich sześć lub osiem zawsze mówią prawdę. Pewnego dnia Królowa Ośmiornica przywołała czterech ze swych służących i zapytała ich, ile nóg łącznie ma cała ich czwórka. Pierwszy ze służących odpowiedział, że liczba ta jest równa 25, drugi udzielił odpowiedzi 26, trzeci stwierdził, że 27, a ostatni — że 28. Jaka jest łączna liczba nóg prawdopodobnych służących Królowej Ośmiornicy (spośród tych czterech)?

Wynik. 6

Rozwiązanie. Co najwyżej jedna z czterech udzielonych odpowiedzi mogła być poprawna, więc wśród służących jest dokładnie trzech lub dokładnie czterech kłamców. Jednak gdyby wszyscy czterej byli kłamcami, mieliby w sumie 28 nóg, co oznaczałoby, że ostatni z nich nie skłamał. Uzyskana sprzeczność oznacza, że kłamliwi służący mają w sumie 21 nóg. Gdyby prawdziwny służący miał 8 nóg, łączna liczba nóg byłaby równa 29, a taka odpowiedź nie padła. Wobec tego prawdziwny służący ma 6 nóg (i udzielił trzeciej z opisanych w treści zadania odpowiedzi).

Zadanie 12. W pewnym sklepie sprzedawane są tabliczki mlecznej, białej oraz gorzkiej czekolady, wszystkie po tej samej cenie. Pewnego dnia przychód sklepu ze sprzedaży mlecznej czekolady wyniósł 270, ze sprzedaży białej — 189, zaś ze sprzedaży gorzkiej — 216. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba tabliczek sprzedanych tego dnia w tym sklepie?

Wynik. 25

Rozwiązanie. Cena jednej tabliczki jest wspólnym dzielnikiem trzech liczb podanych w treści zadania. Aby liczba tabliczek była najmniejsza z możliwych, cena musi być jak największa, czyli być największym wspólnym dzielnikiem danych trzech liczb. Skoro $\text{NWD}(270, 189, 216) = 27$, to łączna liczba sprzedanych tabliczek wynosi

$$\frac{270}{27} + \frac{189}{27} + \frac{216}{27} = 25.$$

Zadanie 13. Ojciec piątki dzieci chce przygotować ciasteczka na podwieczorek dla pięciorga dzieci. Nauczony bolesnym doświadczeniem wie, że musi rozdać ciasteczka tego samego typu albo wszystkie różne. W przeciwnym razie jego dzieci ciężko się pokłócą. Pewnego dnia po długich dyskusjach o typach ciasteczek, nie mogąc dojść do zgody, zirytowany powiedział do najmłodszej córki Ani: „Pójdiesz do cukierni i poprosisz o x losowo wybranych ciasteczek. Kiedy wrócisz do domu, każde dziecko dostanie ciasteczko, a reszta zostanie dla mamy i taty.” Zakładając, że cukiernia jest zaopatrzona w więcej niż pięć typów ciasteczek, jaką liczbę x wybrał ojciec, by mieć pewność, że będzie mógł rozdać ciasteczka, a jednocześnie zapłacić jak najmniej?

Wynik. 17

Rozwiązanie. Jeśli Ania zamówiłaby 16 lub mniej ciasteczek, to mogłoby się zdarzyć, że otrzymałaby ciasteczka czterech rodzajów, a w tym nie więcej niż 4 ciasteczka każdego rodzaju. Wówczas tata nie mógłby rozdać ciasteczek nie wywołując kłótni. Na przykład gdyby przyniosła 4 eklerki, 4 jagodowe babeczki, 4 drożdżówki i 4 kremówki lub jeszcze mniej któregoś rodzaju, to tacie nie uda się spokojny podwieczorek. Natomiast jeśli Ania przyniesie 17 ciasteczek, to albo będzie przynajmniej 5 różnych ciasteczek, albo 5 ciasteczek tego samego typu.

Zadanie 14. Ile wynosi stosunek pola koła do pola kwadratu, jeżeli wiadomo, że ich obwody są równe?

Wynik. $4 : \pi$

Rozwiązanie. Niech r oznacza promień danego koła, natomiast a będzie długością boku kwadratu. Na podstawie warunków zdania widzimy, że $2\pi r = 4a$, stąd

$$\frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{2r \cdot \pi r}{a \cdot 2a} = \frac{2r \cdot 2a}{a \cdot \pi r} = \frac{4}{\pi}.$$

Zadanie 15. W lutym Paweł wybrał się na Wyspy Kokosowe (terytorium zależne Australii na Oceanie Indyjskim) swoim prywatnym odrzutowcem. Wystartował ze swojej posesji w Europie o 10:00 czasu środkowoeuropejskiego (CET), a wylądował na wyspach następnego dnia o 5:30 czasu lokalnego (CCT). Wracając do domu wystartował o 8:30 czasu lokalnego (CCT), a wylądował o 17:00 czasu środkowoeuropejskiego (CET), tego samego dnia. Zakładając, że oba loty trwały tak samo długo, która godzina była na Wyspach Kokosowych, gdy Paweł lądował w domu?

Wynik. 22:30

Rozwiązanie. Niech d oznacza długość jednego lotu, a s różnicę czasu między Europą a Wyspami Kokosowymi w godzinach. Możemy rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned}d + s &= 19.5, \\d - s &= 8.5\end{aligned}$$

otrzymując $d = 14$, $s = 5.5$. Zatem Paweł powrócił do siebie o 22:30 czasu kokosowego (CCT).

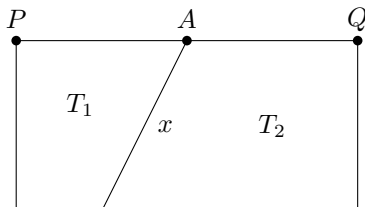
Wyspy Kokosowe rzeczywiście używają strefy czasowej GMT+6:30, czyli mają zegary przesunięte o 5,5 godziny względem naszych.

Zadanie 16. Liczby 14, 20 oraz n spełniają następujący warunek: Iloczyn dowolnych dwóch z nich jest podzielny przez trzecią. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których powyższy warunek jest spełniony.

Wynik. 70, 140, 280

Rozwiązanie. Na mocy warunków zadania wiemy, że n dzieli $14 \cdot 20 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$, skąd w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n występują jedynie liczby 2, 5 i 7, przy czym 5 i 7 występują co najwyżej raz, natomiast 2 co najwyżej trzy razy. Ponieważ $14 \mid 20n$, więc n jest wielokrotnością 7. Korzystając z podzielności $20 \mid 14n$, wnioskujemy, że $10 \mid n$. Łącząc powyższe spostrzeżenia, otrzymujemy $70 \mid n$. Pozostaje zauważyć, że jedynymi liczbami spełniającymi powyższe warunki są 70, 140 i 280.

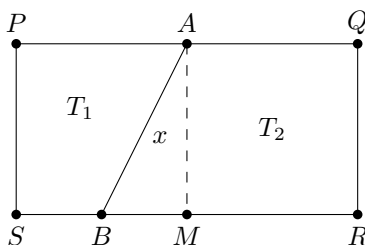
Zadanie 17. Prostokąt jest podzielony na dwa trapezy wzdłuż odcinka o długości x , tak jak pokazano na rysunku. Długości odcinków PA i AQ wynoszą odpowiednio 10 cm i 8 cm. Pole trapezu T_1 jest równe 90 cm^2 , natomiast pole trapezu T_2 wynosi 180 cm^2 .



Ile wynosi długość odcinka x w cm?

Wynik. 17

Rozwiązanie. Oznaczmy przez R i S pozostałe dwa wierzchołki danego prostokąta. Niech B będzie drugim końcem odcinka o długości x oraz niech M będzie takim punktem na SR , że $SM = PA = 10$.



Pole prostokąta $PQRS$ wynosi $180 + 90 = 270$ oraz $PQ = 18$, więc $PS = QR = 270/18 = 15$. Na podstawie wzoru na pole trapezu wiemy, że

$$180 = \frac{1}{2}(BR + AQ) \cdot QR,$$

więc $BR = 16$. Z równości $BM = BR - MR = 8$ oraz twierdzenia Pitagorasa wnosimy, że

$$x = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Zadanie 18. Elżbieta zebrała truskawki z ogródka. Chce teraz rozdać część z nich swoim czterem synom w taki sposób, by każdy z nich otrzymał co najmniej trzy owoce, a ponadto Dominik dostał ich więcej od Czesława, Czesław od Bartka, a Bartek od Adama. Po rozdaniu truskawek, każdy z synów wie, ile sam ich dostał, ile w sumie truskawek zostało rozdanych, a także zna przedstawione powyżej warunki. W jaki sposób Elżbieta powinna rozdać owoce, aby oddać ich jak najmniej, a także by żaden z synów nie mógł ze stuprocentową pewnością ustalić, ile truskawek dostał każdy z nich?

Wynik. $(A, B, C, D) = (3, 5, 6, 8)$

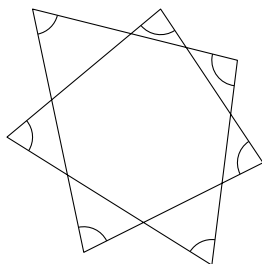
Rozwiązanie. Bartek musi otrzymać co najmniej pięć truskawek, bo inaczej wiedziałby, że Adam dostał dokładnie trzy. Najmniejsza możliwa konfiguracja uwzględniająca ten fakt, $(3, 5, 6, 7)$, nie spełnia warunków zadania (Dominik może wywnioskować liczby rozdanych truskawek), sprawdźmy więc te z dołożoną jedną truskawką. Są dwie takie konfiguracje: $(4, 5, 6, 7)$ i $(3, 5, 6, 8)$. Pierwsza z nich nie spełnia warunków (podobnie jak poprzednio, Dominik ma pełną informację), zaś w przypadku drugiej można łatwo sprawdzić, że żaden z braci nie jest w stanie ustalić dokładnej konfiguracji. Zatem $(3, 5, 6, 8)$ jest szukaną odpowiedzią.

Zadanie 19. Na okręgu napisane są, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, kolejne liczby całkowite od 1 do 1000. Począwszy od 1, zaznaczamy co piętnastą napisaną liczbę idąc zgodnie z ruchem wskazówek zegara (tzn. 1, 16, 31, itd.). Postępujemy tak aż do momentu, kiedy będziemy musieli zaznaczyć liczbę, która już była zaznaczona. Jak wiele liczb pozostanie niezaznaczonych po wykonaniu tej procedury?

Wynik. 800

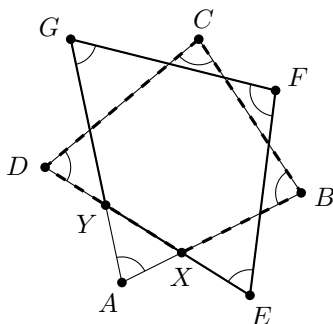
Rozwiązanie. Podczas pierwszego przejścia okręgu zaznaczamy wszystkie liczby postaci $15k + 1$ (dla k całkowitego z odpowiedniego zakresu), zaczynając na 1 i kończąc na 991. Kolejny przebieg zaczyna się liczbą 6, a kończy liczbą 996 — zaznaczamy liczby postaci $15k + 6$. W trzecim przejściu zaczniemy na 11, a skończymy na 986, która będzie ostatnią zaznaczoną liczbą (odwiedzamy liczby postaci $15k + 11$). Zauważmy, że po tej procedurze zaznaczymy dokładnie liczby postaci $5k + 1$, które stanowią jedną piątą liczb napisanych na okręgu. Zatem $4/5 \cdot 1000 = 800$ liczb pozostanie niezaznaczonych.

Zadanie 20. Wyznacz sumę miar siedmiu kątów zaznaczonych na poniższym rysunku (w stopniach).



Wynik. 540°

Rozwiązanie. Oznaczmy wierzchołki naszego wielokąta przez $A, B, \dots, G$ (jak pokazano na rysunku). Niech DE przecina AB i AG w punktach odpowiednio X i Y .



Niech S oznacza szukaną sumę. Ponieważ suma kątów wewnętrznych w obu czworokątach $XBCD$ oraz $YFEG$ jest równa 360° , więc

$$S + \angle BXY + \angle XYG - \angle XAY = 2 \cdot 360^\circ.$$

Jednakże $\angle BXY = 180^\circ - \angle AXY$ oraz $\angle XYG = 180^\circ - \angle XYA$, skąd

$$\angle BXY + \angle XYG - \angle XAY = 360^\circ - (\angle AXY + \angle XYA + \angle XAY) = 180^\circ.$$

Oznacza to, że $S = 540^\circ$.

Zadanie 21. Uczniowie pewnej klasy jako zadanie domowe mieli policzyć średnią arytmetyczną liczb 1, 3, 6, 7, 8 i 10. Niestety, Lucyna zastosowała niepoprawną metodę jego rozwiązania: najpierw wybrała dwie spośród danych liczb i policzyła ich średnią arytmetyczną. Następnie policzyła średnią z tej średniej i którejś z pozostałych liczb i powtarzała ten krok, aż użyte zostały wszystkie spośród początkowych liczb. Jaki jest największy błąd bezwzględny (tzn. wartość bezwzględna różnicy uzyskanego i poprawnego wyniku), jaki mogła otrzymać?

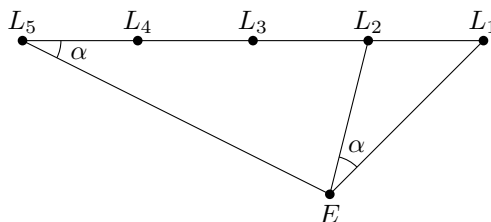
Wynik. $17/6$

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że postępowanie Lucyny można sprowadzić do wybrania pewnego ustawienia danych liczb, powiedzmy $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, i obliczenia wartości

$$S = \frac{a_1}{25} + \frac{a_2}{25} + \frac{a_3}{24} + \frac{a_4}{23} + \frac{a_5}{22} + \frac{a_6}{21}.$$

Największa możliwa wartość S jest osiągnięta dla porządku rosnącego (ponieważ największa liczba jest dzielona przez najmniejszą, druga największa przez drugą najmniejszą itd.). Analogicznie, najmniejsza wartość S jest osiągnięta dla ustawienia malejącego. Oczywiście, największy błąd jest osiągany dla którejś z tych skrajnych wartości. Średnia arytmetyczna danych liczb wynosi $35/6$. Dla porządku rosnącego dostajemy $S = 67/8$, co daje błąd $61/24$. Dla ustawienia malejącego otrzymujemy $S = 3$, co daje błąd $17/6$, który jest też ostatecznym wynikiem.

Zadanie 22. Po jednej stronie prostej ulicy znajduje się pięć latarni L_1, L_2, L_3, L_4 i L_5 w równych dwunastometrowych odstępach. Po przeciwnej stronie stoi sklep z lodami. Wejście do sklepu oznaczone jest punktem E . Kąt trójkąta EL_1L_2 leżący naprzeciw boku L_1L_2 ma miarę $\alpha = 27^\circ$. Kąt trójkąta EL_1L_5 leżący naprzeciw EL_1 ma taką samą miarę $\alpha = 27^\circ$.



Ile wynosi odległość od L_1 do E ?

Wynik. 24 m

Rozwiązanie. Trójkąty EL_1L_2 i EL_1L_5 są podobne, gdyż oba zawierają kąty równe α i $\angle L_5L_1E$. Mamy stąd

$$\frac{EL_1}{L_2L_1} = \frac{L_5L_1}{EL_1}, \quad \text{więc} \quad EL_1^2 = L_2L_1 \cdot L_5L_1 = 12 \cdot 48 = 576,$$

zatem szukana długość odcinka EL_1 wynosi 24 m.

Zadanie 23. Klara wylosowała dwie różne liczby naturalne spośród liczb od 1 do 17 (włącznie), a następnie pomnożyła je. Niespodziewanie, otrzymany iloczyn okazał się być równy sumie pozostałych piętnastu liczb. Znajdź dwie liczby, które wylosowała Klara.

Wynik. 10 i 13

Rozwiązanie. Oznaczmy przez a i b liczby spełniające podane warunki. Skoro suma pierwszych siedemnastu liczb naturalnych wynosi 153, to trzeba rozwiązać równanie $153 - (a + b) = ab$. Zmieniając kolejność wyrazów i dodając do obu stron równania liczbę 1, otrzymujemy $154 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Skoro $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ i $2 \leq (a + 1), (b + 1) \leq 18$, to jedyny możliwy rozkład na czynniki to $154 = 11 \cdot 14$. Dlatego szukanymi liczbami są 10 i 13.

Zadanie 24. Wyznacz ile jest szóstek (a, b, c, d, e, f) liczb całkowitych dodatnich takich, że $a > b > c > d > e > f$ oraz $a + f = b + e = c + d = 30$?

Wynik. $\binom{14}{3} = 364$

Rozwiązanie. Zapiszmy dowolną szóstkę jako

$$(a, b, c, d, e, f) = (15 + x, 15 + y, 15 + z, 15 - z, 15 - y, 15 - x),$$

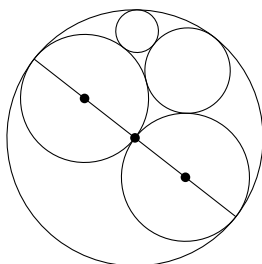
gdzie $0 \leq x, y, z < 15$. Warunek $a > b > c > d > e > f$ jest równoważny zależności $x > y > z > 0$, więc każda szóstka jest wyznaczona jednoznacznie przez wybór trzech liczb całkowitych dodatnich mniejszych od 15, którego możemy dokonać na $\binom{14}{3} = 364$ sposobów.

Zadanie 25. Bomba zegarowa jest wyposażona w wyświetlacz elektroniczny pokazujący czas do wybuchu w minutach i sekundach. Odliczanie rozpoczęło się od wartości 50:00 na wyświetlaczu. Światelko zapala się, gdy na wyświetlaczu liczba minut jest równa liczbie sekund (np. 15:15) lub gdy możemy czytać cyfry w odwróconej kolejności nie zmieniając wyniku (np. 15:51). Możemy rozbroić bombę w momencie, gdy światelko zapali się po raz 70. Jaki czas będzie wtedy pokazywał wyświetlacz?

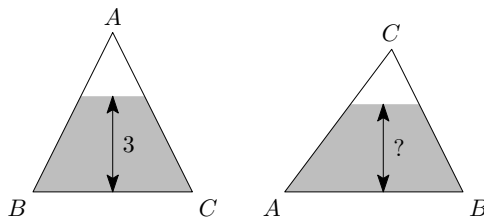
Wynik. 03:03

Rozwiązanie. Liczba minut jest równa liczbie sekund raz w każdej minucie, więc zdarzy się to 50 razy, a możliwość czytania od końca pojawia się raz w każdej minucie z cyfrą jedności mniejszą od 6, a więc 30 razy. Ponadto pięciokrotnie mamy jednocześnie oba powody świecenia (00:00, 11:11, ..., 44:44). Zatem światelko zapala się łącznie 75 razy (wliczając moment wybuchu). Moment na rozbrojenie bomby jest odpowiedni, gdy pozostanie jeszcze 5 mrugnięć (00:00, 01:01, 01:10, 02:02, 02:20), a więc, gdy wyświetlone jest 03:03.

Zadanie 26. Danych jest pięć stycznych okręgów jak pokazano na rysunku. Znajdź promień najmniejszego okręgu, jeśli promień największego okręgu wynosi 2, natomiast promienie dwóch okręgów z zaznaczonymi środkami są równe 1.



Zadanie 30. Trójkąt ABC , w którym $AB = AC = 5$ m oraz $BC = 6$ m, jest częściowo wypełniony wodą. Gdy trójkąt leży na boku BC , poziom powierzchni wody znajduje się 3 m ponad bokiem. Na jakiej wysokości w metrach znajduje się powierzchnia wody, gdy trójkąt leży na boku AB ?



Wynik. $18/5$

Rozwiązanie. Niech D będzie środkiem BC , wtedy $\triangle ABD$ jest trójkątem prostokątnym, zatem z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $AD = 4$. Część trójkąta niewypelniona przez wodę jest więc trójkątem podobnym do $\triangle ABC$ ze skalą podobieństwa $1/4$. Skoro stosunek pól (niewypelnionej części i całego trójkąta) zachowuje się po obrocie trójkąta, takie samo podobieństwo musi zachodzić również w nowej sytuacji. Zatem poziom wody leży zawsze w $3/4$ wysokości, więc wystarczy obliczyć długość wysokości opuszczonej na AB . Wiedząc, że pole $\triangle ABC$ jest równe $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = 12$, otrzymujemy $h_{AB} = 2 \cdot 12/AB = 24/5$. Dochodzimy do wniosku, że wysokość powierzchni wody jest równa $3/4 \cdot 24/5 = 18/5$.

Zadanie 31. Mamy 6 pudełek ponumerowanych od 1 do 6, w których umieszczono łącznie 17 brzoskwiń. Możemy wykonywać ruchy zgodnie z następującą zasadą: Jeśli jest dokładnie n brzoskwiń w pudełku o numerze n , to możemy zjeść jedną brzoskwinie, a pozostałe $n - 1$ rozłożyć po jednej w pudełkach od 1 do $n - 1$. Jak rozmieszczono 17 brzoskwiń, aby możliwe było zjedzenie wszystkich zgodnie z powyższą zasadą?

Wynik. 1, 1, 3, 2, 4, 6

Rozwiązanie. Prześledźmy rozmieszczenie od końca: Stan $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, tj. gdy wszystkie brzoskwinie są zjedzone, mógł być osiągnięty jedynie z $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, który mógł powstać wyłącznie z $(0, 2, 0, 0, 0, 0)$ i tak dalej.

W ten sposób otrzymujemy jednoznaczny ciąg rozmieszczeń

$$\dots (0, 2, 0, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 3, 0, 0, 0), (1, 1, 3, 0, 0, 0), \dots$$

który kończy się na $(1, 1, 3, 2, 4, 6)$, gdy mamy 17 brzoskwiń.

Zadanie 32. Prosty wyciąg krzesełkowy z dwuosobowymi siedzeniami pracuje na stoku. 74 osoby planują wjazd na górę, podczas gdy 26 osób czeka u góry, aby zjechać w dół. Dokładnie w południe para osób siada na krzeselko na obu przystankach. Następnie pozostali pasażerowie kolejno siadają na kolejne krzeselka. O 12:16 pierwsze krzeselko jadących do góry mija ostatnie zapełnione krzeselko podróżujących w dół, a o 12:22 pierwsze krzeselko jadących w dół mija ostatnie zajęte krzeselko jadących w górę. Odległość pomiędzy każdymi dwoma krzeselkami jest taka sama, a wyciąg pracuje ze stałą szybkością oraz wszyscy pasażerowie jadą parami. Jak długo trwa podróż z dolnego przystanku wyciągu do góry (w minutach)?

Wynik. 26

Rozwiązanie. Po pierwsze zauważmy, że w dół chce jechać 13 par, a więc mamy 12 odległości między krzeselkami, a w górę 37 par, czyli 36 odcinków między krzeselkami — trzykrotnie więcej. Stąd czas pomiędzy podanymi w zadaniu momentami jest dwukrotnie dłuższy od czasu między momentem spotkania pierwszych zapełnionych krzesełek do 12:16. Stąd wnosimy, że pierwsze zapełnione krzeselka spotkały się o 12:13, a było to dokładnie w połowie drogi, a więc czas podróży wynosi 26 minut.

Zadanie 33. W rombie $ABCD$ punkty M i N różne od punktów A , B i C leżą na odcinkach odpowiednio AB , BC tak, że trójkąt DMN jest równoboczny oraz $AD = MD$. Znajdź $\angle ABC$ (w stopniach).

Wynik. 100°

Rozwiązanie. Ponieważ $CD = AD = MD = ND$, więc trójkąty AMD i NCD są równoramienne o podstawach odpowiednio AM i NC .

Niech $\theta = \angle DAB$; wtedy $\angle ABC = \angle ADC = 180^\circ - \theta$. Jednakże

$$\angle DAM = \angle AMD = \angle DNC = \angle NCD = \theta,$$

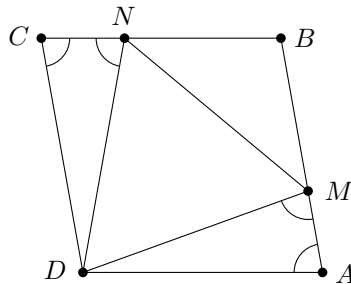
wiec

$$\angle ADM = \angle NDC = 180^\circ - 2\theta$$

i

$$\angle ADC = \angle ADM + \angle MDN + \angle NDC = 420^\circ - 4\theta.$$

Otrzymujemy więc, że $420^\circ - 4\theta = 180^\circ - \theta$ lub $\theta = 80^\circ$, zatem $\angle ABC = 100^\circ$.



Zadanie 34. Każde pole szachownicy 2×7 kolorujemy na żółto lub zielono. Ile jest możliwych kolorowań szachownicy takich, że na szachownicy nie występuje żółty lub zielony L-trimino?

L-trimino jest poniższym (lub obróconym) kształtem:



Wynik. 130

Rozwiązanie. Jeśli któraś kolumna szachownicy jest jednokolorowa, to wtedy sąsiednie kolumny muszą mieć inny kolor, a następne kolumny muszą mieć ten sam kolor co pierwsza itd., więc są dwie możliwości pokolorowania szachownicy w ten sposób, w zależności od koloru użytego do pokolorowania pierwszej kolumny.

Z drugiej strony, z poprzedniego akapitu wynika, że jeśli jest kolumna pokolorowana obydwojema kolorami, to do pokolorowania każdej kolumny zostały użyte oba kolory. Łatwo zauważyć, że w tym przypadku nie ma znaczenia który kolor będzie na górze, a który na dole, bo każde takie kolorowanie będzie spełniało warunki zadania, więc jest $2^7 = 128$ takich kolorowań.

W sumie jest $2 + 128 = 130$ możliwych kolorowań szachownicy.

Zadanie 35. Michał jest zapalonym zbieraczem diamentów, ale na razie posiada ich mniej niż 200. Podzielił je na kilka stosów (przynajmniej dwa), w taki sposób, że:

- każde dwa stosy składają się z różnej liczby diamentów,
- w żadnym stosie nie ma dokładnie dwóch diamentów,
- jeśli którykolwiek stos podzielimy na dwa mniejsze, to przynajmniej jeden z nich będzie zawierał tyle samo diamentów, co już istniejący.

Jaka jest największa liczba diamentów, które może posiadać Michał?

Stos składa się z niezerowej liczby diamentów.

Wynik. 196

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że mamy podział na stosy zgodny z opisem w zadaniu. Niech m oznacza liczbę diamentów w najmniejszym stosie. Jeśli $m \geq 3$, to można go podzielić na dwie mniejsze o wielkościach 1 i $m - 1$, różnych od już istniejących. A zatem $m = 1$, bo nie ma stosu, w którym są dokładnie 2 diamenty.

Kolejny najmniejszy stos musi zawierać dokładnie 3 diamenty. Gdyby bowiem zawierał ich $n \geq 4$, to rozmiary 2 i $n - 2$ byłyby wolne.

Dalej rozumiemy przez indukcję: jeśli stosy o wielkościach $1, 3, \dots, 2k - 1$ ($k > 1$) stanowią k najmniejszych stosów, to kolejny najmniejszy (jeśli istnieje) musi zawierać $2k + 1$ diamentów. Niech p oznacza rozmiar tego stosu. Gdyby p było parzyste, to można taki stos podzielić na mniejsze o parzystych rozmiarach. Jeśli zaś $p \geq 2k + 3$, to podział $p = 2 + (p - 2)$ również da dwa rozmiary, które wcześniej nie występowały. Natomiast widzimy, że $p = 2k + 1$ spełnia warunki zadania.

Stąd wnosimy, że liczba diamentów Michała musi być postaci: $1 + 3 + \dots + (2k - 1) = k^2$. Największy kwadrat, który jest mniejszy niż 200, to $14^2 = 196$, a więc tyle diamentów posiada Michał.

Zadanie 36. W grze w „papier, kamień, nożyce” można pokazać trzy symbole: P — papier, K — kamień oraz N — nożyce, które są powiązane zależnościami $N > P$, $P > K$, $K > N$ oraz $K = K$, $P = P$, $N = N$, przy czym $A > B$ oznacza „ A pokonuje B ”, zaś $A = B$ oznacza „gdy A i B są grane przeciwko sobie, runda kończy się remisem”. Turniej Dwuręcznego Marynarza Bez Powtórzeń między graczami G_1 i G_2 składa się z 9 rund opisanych powyżej. W każdej rundzie każdy z graczy wybiera parę (ℓ_i, p_i) , gdzie ℓ_i oraz p_i oznaczają odpowiednio symbole pokazane przez lewą oraz prawą dłoń gracza G_i . Podczas całego turnieju każdy z graczy musi wybrać każdą z możliwych par dokładnie raz. W każdej rundzie między graczy rozdzielane są dokładnie 4 punkty w następujący sposób: dla każdej pary grających ze sobą dłoni (lewe/prawe) zwycięzca dostaje 2 punkty a przegrany 0 punktów lub obaj gracze dostają po jednym punkcie jeśli jest remis (na danej parze dłoni). Przypuśćmy, że gracze wykonują ruchy losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z 9 rund turnieju zakończy się remisem (tzn. z wynikiem 2:2)?

Wynik. $3!^3/9! = 1/1680$

Rozwiązanie. Rozważmy trzy zbiory, z których każdy zawiera trzy z możliwych do zagrania par w jednej rundzie:

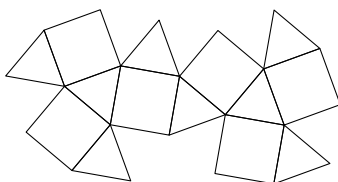
$$R_P = \{(P, P), (K, N), (N, K)\}, \quad R_K = \{(K, K), (N, P), (P, N)\},$$

$$R_N = \{(N, N), (P, K), (K, P)\}.$$

Zauważmy, że pojedyncza runda turnieju kończy się remisem wtedy i tylko wtedy, gdy dwie pary należące do tego samego zbioru spośród R_P , R_K , R_N są grane przeciwko sobie. Każdy z możliwych przebiegów całego turnieju można zakodować (wzajemnie jednoznacznie) przez parę permutacji elementów zbioru $R_P \cup R_K \cup R_N$; pierwsza permutacja odpowiada wyborom gracza G_1 w kolejnych turach, zaś druga — wyborom gracza G_2 . Wszystkie rundy kończą się remisem wtedy i tylko wtedy, gdy elementy każdego ze zbiorów R_P , R_K , R_N zajmują te same trzy pozycje w permutacjach graczy G_1 oraz G_2 , czyli pary z poszczególnych zbiorów były grane w tych samych turach. Rozważmy dowolną permutację oznaczającą kolejność ruchów gracza G_1 w kolejnych turach. Liczba ułożeń ruchów G_2 w całym turnieju, prowadzących do remisu w każdej z rund, jest równa $3!^3$, niezależnie od wybranej permutacji gracza G_1 . Stąd wynika, że szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{3!^3}{9!} = \frac{1}{1680}.$$

Zadanie 37. Dana jest bryła, której siatka zawiera osiem trójkątów równobocznych i sześć kwadratów, tak jak na poniższym rysunku:



Zakładając, że długość każdej z krawędzi wynosi 1 km, jaka jest objętość bryły (w km^3)?

Wynik. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$

Rozwiązanie. Bryłę tę można otrzymać z sześcianu w następujący sposób: ścinamy każdy wierzchołek płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi przyległych do usuwanego wierzchołka. Długość krawędzi tego sześcianu wynosi $\sqrt{2}$, więc jego objętość to $2\sqrt{2}$. Każdy z usuniętych kawałków to ostrosłup trójkątny, którego podstawą jest trójkąt równoramienny prostokątny o długości przyprostokątnej równej $\sqrt{2}/2$. Wysokość ostrosłupa również wynosi $\sqrt{2}/2$. Zatem jego objętość to $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}/2)^2 \cdot (\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/24$, a objętość całej bryły jest równa $2\sqrt{2} - 8 \cdot \sqrt{2}/24 = 5\sqrt{2}/3$.

Zadanie 38. Znajdź jedyny trzycyfrowy dzielnik pierwszy liczby 999 999 995 904.

Wynik. 601

Rozwiązanie. Zauważmy, że

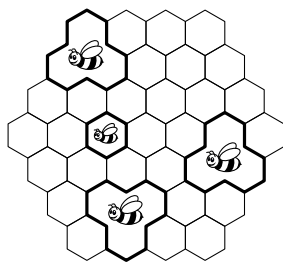
$$999\,999\,995\,904 = 10^{12} - 2^{12} = 2^{12}(5^{12} - 1)$$

oraz

$$5^{12} - 1 = (5 - 1)(5 + 1)(5^2 + 1)(5^2 - 5 + 1)(5^2 + 5 + 1)(5^4 - 5^2 + 1),$$

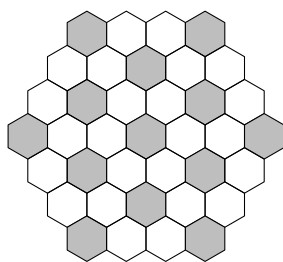
ale tylko ostatni czynnik jest większy od 100. Skoro wiemy, że trzycyfrowy dzielnik pierwszy istnieje i $5^4 - 5^2 + 1 = 601$ na pewno nie jest podzielne przez 2, 3 i 5, to jest liczbą pierwszą, więc jest poszukiwanym dzielnikiem.

Zadanie 39. Trzynastcie pszczoł: pszczołka Maja i dwanaście dużych pszczoł mieszka w plastrze miodu składającym się z 37 komórek. Każda duża pszczoła zajmuje trzy parami sąsiednie komórki, a Maja zajmuje dokładnie jedną komórkę (tak, jak na rysunku). Na ile sposobów możemy podzielić plaster miodu na 13 rozłącznych części, tak żeby każda pszczoła zajęła dokładnie jedną część?



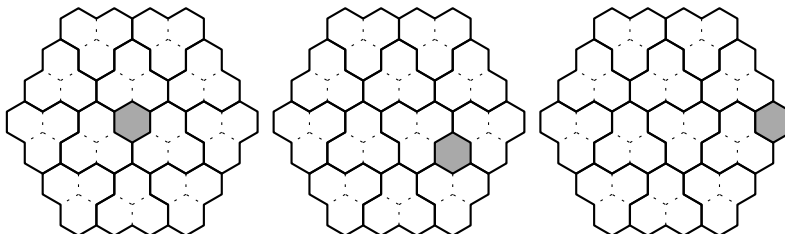
Wynik. 20

Rozwiązanie. Pokolorujmy 13 komórek na szaro, tak jak na obrazku:



Każda trzykomórkowa część musi zawierać dokładnie jedną szarą komórkę, więc Maja musi zająć jedno z szarych pól.

Jeśli byłaby to środkowa komórka, to resztę pól można by podzielić na dokładnie dwa sposoby na 12 części wydzielonych dla dużych pszczoł (jeden z nich jest pokazany na rysunku, a drugi powstaje z pierwszego przez obrót o 60° stopni). Dla każdej ze „środkowych” komórek istnieje dokładnie jeden sposób, żeby pomieścić duże pszczoły w plastrze. Wreszcie, dla każdej ze skrajnych szarych komórek są dokładnie dwa sposoby na podzielenie pozostałych pól na części składające się z trzech komórek (tak jak na rysunku poniżej oraz symetrycznie).

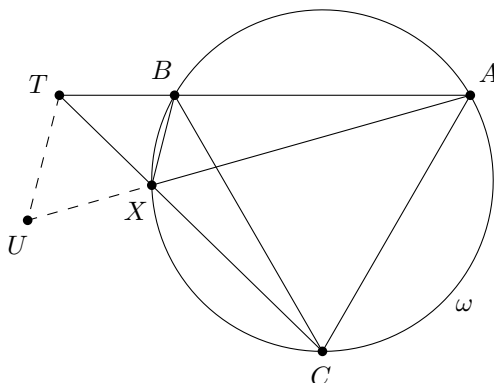


W sumie uzyskujemy $2 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 20$ sposobów na podział plastra zgodnie z założeniami.

Zadanie 40. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg ω . Punkt X leży na krótszym łuku BC okręgu ω , proste AB i CX przecinają się w punkcie T . Ile wynosi długość odcinka BX , jeśli $AX = 5$ oraz $TX = 3$?

Wynik. $15/8$

Rozwiązanie. Wiemy, że $\angle AXB = \angle ACB = 60^\circ$ oraz $\angle AXC = \angle ABC = 60^\circ$, a więc $\angle BXT = 180^\circ - \angle AXB - \angle AXC = 60^\circ$. Niech U będzie punktem leżącym na prostej AX takim, że $TU \parallel BX$.



Wtedy TUX jest trójkątem równobocznym i $\triangle TUA \sim \triangle BXA$. Zatem otrzymujemy:

$$BX = \frac{TU}{AU} \cdot AX = \frac{TX \cdot AX}{TX + AX} = \frac{15}{8}.$$

Zadanie 41. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym. Punkt P leżący we wnętrzu trójkąta ABC nazywamy *błyszczącym*, jeśli możemy znaleźć 27 półprostych o początku w P przecinających boki trójkąta ABC tak, że ten trójkąt będzie podzielony przez te półproste na 27 mniejszych trójkątów o równym polu. Wyznacz liczbę błyszczących punktów wewnątrz trójkąta ABC .

Wynik. $\binom{26}{2} = 325$

Rozwiązanie. Zauważmy, że PA, PB, PC znajdują się wśród 27 półprostych wypuszczonych z P : w przeciwnym przypadku, otrzymalibyśmy czworokąt, co prowadziłoby do sprzeczności. Podzielmy obwód $\triangle ABC$ na 27 odcinków takich, że każdy bok jest podzielony na odcinki o równej długości; w sumie jest $\binom{26}{2} = 325$ takich podziałów, skoro jeśli wybierzemy A jako pierwszy punkt podziału, możemy wybrać B i C z pozostałych 26 punktów. Wreszcie zauważmy, że każdy taki podział odpowiada dokładnie jednemu błyszczącemu punktowi. Każdy błyszczący punkt wyznacza przez wychodzące z niego półproste taki podział obwodu. Z drugiej strony, jeśli podzielimy odpowiednie boki na a, b, c odcinków, to wystarczy wziąć jako P jedyny punkt wewnątrz $\triangle ABC$ taki, że odległości P od boków BC, CA, AB są w stosunku $a : b : c$. Proste obliczenia pokazują, że P jest rzeczywiście błyszczącym punktem, a półproste z niego wychodzące dzielą $\triangle ABC$ zgodnie z zadaniem podziałem.

Zadanie 42. Ile jest dodatnich dzielników 2016^2 mniejszych od 2016, które nie są dzielnikami 2016?

Wynik. 47

Rozwiązanie. Rozkładając na czynniki pierwsze liczbę $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, uzyskujemy rozkład $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Zatem 2016^2 ma $11 \cdot 5 \cdot 3 = 156$ dodatnich dzielników, z których $\frac{1}{2} \cdot (165 - 1) = 82$ są mniejsze niż 2016, ponieważ dzielniki 2016^2 — wyłączając 2016 — możemy podzielić na pary (x, y) takie, że $x \cdot y = 2016^2$ i $x < 2016 < y$. Zauważmy, że 2016 ma $6 \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 35$ dzielników mniejszych od 2016, które oczywiście są również dzielnikami 2016^2 . Stąd szukana liczba dzielników jest równa $82 - 35 = 47$.

Zadanie 43. Niech

$$Z_n = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}.$$

Oblicz $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_{2016}$.

Wynik. $\frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1)$

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} &= \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})((\sqrt{2n+1})^2 + \sqrt{2n+1}\sqrt{2n-1} + (\sqrt{2n-1})^2)}{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \\ &= \frac{1}{2}((\sqrt{2n+1})^3 - (\sqrt{2n-1})^3). \end{aligned}$$

Zatem,

$$\begin{aligned} Z_1 + \dots + Z_{2016} &= \frac{1}{2}((\sqrt{3})^3 - (\sqrt{1})^3 + (\sqrt{5})^3 - (\sqrt{3})^3 + \dots + (\sqrt{4033})^3 - (\sqrt{4031})^3) \\ &= \frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1). \end{aligned}$$

Zadanie 44. Ciąg liczb całkowitych $a_0, a_1, a_2, \dots$ konstruujemy zgodnie z zasadą: Jeśli a_i jest podzielne przez 3, to $a_{i+1} = a_i/3$, w przeciwnym wypadku $a_{i+1} = a_i + 1$. Dla ilu całkowitych dodatnich wyrazów początkowych a_0 ciąg osiąga wartość 1 pierwszy raz dokładnie po 11 krokach (tj. $a_{11} = 1$, ale $a_0, a_1, \dots, a_{10} \neq 1$)?

Wynik. 423

Rozwiązanie. Liczba 1 może być w jednym kroku osiągnięta wyłącznie z liczby 3, która z kolei może powstać z 2 lub 9. 2 może powstać z 1 albo z 6, ale 1 nie chcemy liczyć. Liczba 9 mogła powstać z 8 lub 27. Niech P_n oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich takich, że ciąg a_n osiąga 1 dokładnie w n krokach wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \in P_n$.

Niech p_n oznacza liczbę elementów P_n . Ponadto oznaczmy przez x_n, y_n, z_n liczby elementów P_n , które dają resztę z dzielenia przez 3 odpowiednio 0, 1, 2.

Zauważmy, że aby otrzymać P_{n+1} ze zbioru P_n dla $n \geq 3$ bierzemy $3x$ dla każdego x ze zbioru P_n oraz $x-1$ dla każdego x ze zbioru P_n takiego, że $x-1$ nie dzieli się przez 3. Zauważmy, że wszystkie elementy P_n dla $n \geq 3$ są większe od 3. Mamy zatem

- $x_{n+1} = p_n$, bo dla każdego $x \in P_n$ mamy $3x \in P_{n+1}$,
- $y_{n+1} = z_n$, bo liczby postaci $3k + 1$ w P_{n+1} powstają dokładnie z liczb postaci $3k + 2$ w P_n oraz
- $z_{n+1} = x_n$ z podobnego powodu.

Mamy zatem

$$p_n = x_n + y_n + z_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3} \text{ dla } n \geq 4.$$

Początkowe rachunki dają $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$, a kolejne wyrazy obliczamy łatwo ze znalezionej zależności rekurencyjnej, otrzymując $p_{11} = 423$.

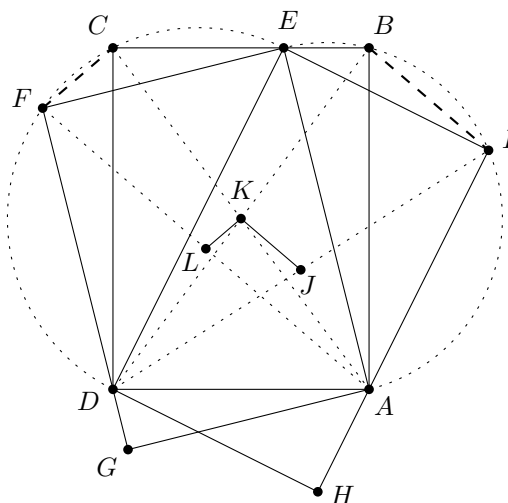
Zadanie 45. Niech $ABCD$, $AEFG$ i $EDHI$ będą prostokątami, których środkami są odpowiednio punkty K , L , J . Załóżmy, że A leży na HI , D leży na FG , E leży na BC oraz $\angle AED = 53^\circ$. Podaj miarę $\angle JKL$ (w stopniach).

Wynik. 74°

Rozwiązanie. Ponieważ K jest środkiem BD i J jest środkiem DI , więc $KJ \parallel BI$ i podobnie $KL \parallel CF$. Zatem $\angle JKL = \angle IBA + \angle DCF$. Skoro $\angle AIE = \angle ABE = 90^\circ$, to na czworokącie $BIAE$ można opisać okrąg. Dalej,

$$\angle IBA = \angle IEA = 90^\circ - \angle AED = 37^\circ.$$

Analogicznie $\angle DCF = 37^\circ$, zatem $\angle JKL = 74^\circ$.



Zadanie 46. Jakub wybrał pewną liczbę (niekoniecznie różnych) liczb pochodzących ze zbioru $\{-1, 0, 1, 2\}$ w taki sposób, że ich suma jest równa 19, a suma ich kwadratów jest równa 99. Jaka jest największa możliwa wartość sumy sześciątów liczb wybranych przez Jakuba?

Wynik. 133

Rozwiązanie. Załóżmy, że Jakub wybrał dokładnie a liczb równych -1 , b liczb równych 1 , c liczb równych 2 (oczywiście liczby równe 0 nie grają żadnej roli). Warunki z treści zadania można zapisać jako

$$\begin{aligned} -a + b + 2c &= 19, \\ a + b + 4c &= 99. \end{aligned}$$

Naszym celem jest zmaksymalizowanie wartości $-a + b + 8c = 19 + 6c$. Dodając wyżej zapisane równości, otrzymujemy zależność $6c = 118 - 2b$, z której wynika, że $c \leq 19$. Wartość $c = 19$ możemy otrzymać ustalając $a = 21$ i $b = 2$, zatem szukane maksimum jest równe $19 + 6 \cdot 19 = 133$.

Zadanie 47. Podaj największą liczbę dziewięciocyfrową taką, że

- wszystkie jej cyfry są różne
- dla $k = 1, 2, \dots, 9$, jeśli wykreślimy k -tą cyfrę, to otrzymamy liczbę ośmiocyfrową podzielną przez k .

Wynik. 876 513 240

Rozwiązanie. Oznaczmy k -tą cyfrę szukanej liczby przez A_k , a przez N_k liczbę ośmiocyfrową powstałą przez wykreślenie A_k . Szukana liczba to zatem $\overline{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9}$. Niech d będzie jedyną cyfrą, która nie występuje w szukanej liczbie.

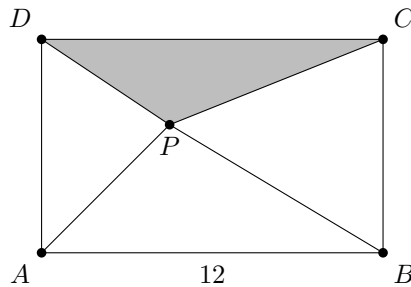
Ponieważ N_2 jest parzysta, a N_5 dzieli się przez 5, więc $A_9 = 0$.

Liczba N_9 jest podzielna przez 9, a więc również $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + A_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 - d = 45 - d$ dzieli się przez 9. Stąd $d = 9$. Z podzielności przez 3 liczb N_3 i N_6 wynika też, że $\{A_3, A_6\} = \{3, 6\}$.

Liczby N_8 i N_4 są podzielne przez 4, więc cyfry A_7 i A_8 muszą być parzyste, a ponadto pierwsza z tych liczb dzieli się przez 8, a więc dwucyfrowa liczba $\overline{A_6A_7}$ jest podzielna przez 4.

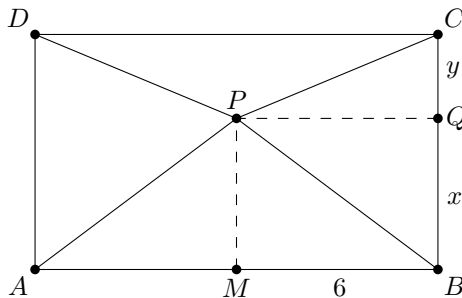
Mając powyższe na uwadze i chcąc uzyskać jak największą liczbę możemy przyjąć $A_1 = 8$, $A_3 = 6$, $A_6 = 3$. Wówczas $\{A_7, A_8\} = \{2, 4\}$ i ze względu na podzielność $4 \mid \overline{A_6A_7}$ musimy ustawić je w porządku $A_7 = 2$ i $A_8 = 4$. Teraz sprawdzamy, że wpisując pozostałe cyfry poczynając od największej otrzymujemy liczbę 876513240, która spełnia ostatni warunek, tj. podzielność $N_7 = 87651340$ przez 7.

Zadanie 48. Punkt P leży wewnątrz prostokąta $ABCD$ w którym $AB = 12$. Każdy z trójkątów ABP , BCP , DAP ma obwód równy swojemu polu. Ile wynosi obwód trójkąta CDP ?



Wynik. 25

Rozwiązanie. Zauważmy, że pole i obwód w danym trójkącie są równe wtedy i tylko wtedy, gdy promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Zatem trójkąty BCP i ADP są przystające. Istotnie, jeśli punkt P jest bliżej boku AD niż BC , to promień okręgu wpisanego w trójkąt ADP jest mniejszy niż promień okręgu wpisanego w trójkąt BCP . Oznacza to, że punkt P leży na jednej z osi symetrii prostokąta $ABCD$.



Niech Q będzie rzutem prostokątnym punktu P na BC i niech M będzie środkiem odcinka AB . Połóżmy $x = BQ$, $y = CQ$. Pole trójkąta ABP wynosi $6x$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie MBP , wnioskujemy, że $BP = \sqrt{x^2 + 6^2}$. Równość pola i obwodu w trójkącie ABP przyjmuje postać

$$6x = 12 + 2\sqrt{x^2 + 6^2},$$

więc $x = 9/2$.

Wartość y znajdujemy analogicznie. Mamy $BP = 15/2$ oraz $CP = \sqrt{y^2 + 6^2}$, więc równość pola i obwodu trójkąta BCP implikuje, że

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(y + \frac{9}{2}\right) = y + \frac{9}{2} + \frac{15}{2} + \sqrt{y^2 + 6^2},$$

stąd $y = 5/2$.

Ostatecznie widzimy, że $CP = 13/2$, więc obwód trójkąta CDP jest równy 25.

Zadanie 49. Para $(0, 0)$ jest napisana na tablicy. W każdym kroku zamieniamy ją w następujący sposób: Pozostałą na tablicy parę (a, b) zamieniamy na $(a + b + c, b + c)$, gdzie $c = 247$ lub $c = -118$ (możemy wybrać c w każdym kroku). Wyznacz najmniejszą niezerową liczbę kroków po których na tablicy zostanie para postaci $(0, b)$ dla pewnej liczby całkowitej b .

Wynik. 145

Rozwiązanie. Niech c_i oznacza liczbę ze zbioru $\{247, -118\}$ użytą jako c w kroku numer i . Po n krokach liczba a , czyli pierwsza współrzędna uzyskanej pary, będzie równa dokładnie $a = nc_1 + (n-1)c_2 + \dots + c_n$. Ustalmy n i niech $s = n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$, gdzie $\varepsilon_i = 1$ jeśli $c_i = 247$ oraz $\varepsilon_i = 0$ w przeciwnym razie. Definiujemy t w analogiczny sposób tzn. $\varepsilon_i = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i = -118$. Oczywiście $a = 247s - 118t$, więc równość $a = 0$ oznacza, że $247s = 118t$, a ponieważ liczby 247 i 118 są względnie pierwsze, więc istnieje liczba całkowita k taka, że $s = 118k$ oraz $t = 247k$. Oznacza to, że

$$365k = s + t = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Z równości $365 = 5 \cdot 73$ widzimy, że $n \geq 2 \cdot 73 - 1 = 145$. Pozostaje pokazać, że istnieją liczby c_i takie, że $247s = 118t$ z $n = 145$. W tym celu oznaczmy przez m najmniejszą liczbę całkowitą taką, że

$$1 + 2 + \dots + m \geq \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \dots + n)$$

oraz połączmy $c_i = -118$ dla $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{r\}$ i $c_i = 247$ w przeciwnym razie, gdzie

$$r = 1 + 2 + \dots + m - \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \dots + n)$$

(tak naprawdę $m = 120$ and $r = 97$.) W ten sposób dostaniemy pożądane równości

$$247s = 118t = \frac{118 \cdot 247}{365} \cdot (1 + 2 + \dots + n).$$

Zadanie 50. Zygzak składa się z dwóch równoległych półprostych o przeciwnych zwrotach i odcinka łączącego ich początki. Na ile maksymalnie części może podzielić płaszczyznę dziesięć zygzaków?

Wynik. 416

Rozwiązanie. Każde dwa zygzaki mogą się przecinać w co najwyżej dziewięciu punktach. Przy każdej liczbie zygzaków łatwo możemy uzyskać konfigurację, w której każde dwa zygzaki przecinają się dokładnie w dziewięciu punktach i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Rozważmy dokładanie zygzaków jeden po drugim: n -ty w kolejności dodawania zygzak jest podzielony przez $9(n-1)$ punktów przecięcia z $n-1$ już istniejącymi zygzakami na $9(n-1) + 1$ odcinków, z których każdy dzieli istniejący już wcześniej region na dwie części. Zatem największa liczba regionów, które można uzyskać używając n zygzaków, Z_n , spełnia $Z_1 = 2$ i $Z_n = Z_{n-1} + 9n - 8$ dla $n \geq 2$. Ogólny wzór $Z_n = \frac{9}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 2$ łatwo wynika z indukcji matematycznej, w szczególności $Z_{10} = 416$.

Zadanie 51. Każda ze ścian pewnego czworościanu jest trójkątem o bokach długości 1, $\sqrt{2}$ oraz c , zaś promień sfery opisanej na tym czworościanie jest równy $5/6$. Znajdź c .

Wynik. $\sqrt{23}/3$

Rozwiązanie. Udowodnimy następujący, ogólny fakt: Jeżeli każda ze ścian czworościanu jest trójkątem o bokach długości a, b, c , zaś promień sfery opisanej na czworościanie jest równy r , to $a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$. Żądany wynik otrzymujemy po bezpośrednim zastosowaniu tego faktu dla danych z treści zadania.

Wpiszmy czworościan w prostopadłościan o krawędziach długości p, q, r w taki sposób, aby krawędzie czworościanu były przekątnymi ścian prostopadłościanu. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy więc

$$p^2 + q^2 = a^2, \quad p^2 + r^2 = b^2 \quad \text{oraz} \quad q^2 + r^2 = c^2.$$

Co więcej, sfera opisana na czworościanie jest tożsama ze sferą opisaną na prostopadłościanie, której średnicą jest przekątna prostopadłościanu. Wobec tego

$$(2r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

co po obustronnym pomnożeniu przez 2 daje postulowaną równość.

Zadanie 52. Przygotowując wielkie przyjęcie powitalne, kamerdyner Jarek ustawił w rzędzie 2016 kieliszków koktajlowych, z których każdy zawiera przepyszny koktajl wiśniowy. Aby zakończyć przygotowania, Jarek musi jeszcze przykryć jeden z kieliszków srebrnym wieczkiem przyozdobionym statuetką, a następnie rozdzielić nieparzystą liczbę wisienek do nieprzykrytych kieliszków, w każdym umieszczając co najwyżej jedną. Ile jest możliwych rozmieszczeń wieczka oraz wisienek, jeżeli po prawej stronie kieliszka z wieczkiem ma być w sumie więcej wisienek niż po jego lewej stronie?

Wynik. $2016 \cdot 2^{2013}$

Rozwiązanie. Rozważmy najpierw wszystkie możliwe rozmieszczenia wieczka i pewnej liczby wisienek (co najwyżej jednej w każdym nieprzykrytym kieliszku) bez narzucania dodatkowych warunków. Jest 2016 możliwych położeń wieczka oraz 2^{2015} możliwości dodania wisienek do pozostałych 2015 kieliszków, co daje łączną liczbę $2016 \cdot 2^{2015}$ rozmieszczeń. Następujące rozwinięcie wzoru dwumianowego

$$0 = (-1 + 1)^{2016} = \sum_{i=0}^{2016} \binom{2016}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{1008} \binom{2016}{2i} - \sum_{i=1}^{1008} \binom{2016}{2i-1}$$

pokazuje, że liczba rozmieszczeń, w których jest parzysta liczba wisienek jest równa liczbie rozmieszczeń, w których jest nieparzysta liczba wisienek. Stąd wniosek, że zbiór M wszystkich rozmieszczeń wieczka oraz nieparzystej liczby wisienek ma $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2015} = 2016 \cdot 2^{2014}$ elementów.

Zauważmy teraz, że każdemu elementowi (n_1, n_2) zbioru M , reprezentującemu ułożenie n_1 wisienek po lewej stronie od kieliszka z wieczkiem oraz n_2 wisienek po prawej stronie, odpowiada dokładnie jeden element M , który można zakodować jako (n_2, n_1) , otrzymywany przez obrót stołu z kieliszkami o 180° . Te ułożenia są z pewnością różne, gdyż $n_1 \neq n_2$ wobec nieparzystości sumy $n_1 + n_2$. Co więcej, w każdej ze skojarzonych powyżej par rozmieszczeń jest dokładnie jedno spełniające warunek zadania, aby po lewej stronie od kieliszka z wieczkiem było mniej wisienek niż po prawej stronie, gdyż jedna z liczb n_1, n_2 jest ściśle większa od drugiej. Stąd otrzymujemy odpowiedź $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2015} = 2016 \cdot 2^{2014}$.

Zadanie 53. Powierzchnia drewnianego sześciianu pomalowana jest na zielono. Wiemy, że 33 różne płaszczyzny, z których każda położona jest między dwiema przeciwległymi ścianami sześciianu i do nich równoległa, rozcinają sześciian na małe prostopadłościennne klocki w taki sposób, że liczba klocków z co najmniej jedną ścianą zieloną jest równa liczbie klocków bez żadnej zielonej ściany. Wyznacz wszystkie możliwe łączne liczby klocków, na które podzielony jest sześciian.

Wynik. 1260 lub 1344

Rozwiązanie. Zauważmy, że w każdym z trzech możliwych kierunków muszą być co najmniej cztery płaszczyzny (gdyby w pewnym kierunku było mniej niż pięć warstw klocków, liczba klocków z co najmniej jedną ścianą zieloną byłaby ściśle większa od liczby klocków znajdujących się całkowicie wewnątrz sześciianu). Możemy więc oznaczyć liczby płaszczyzn w poszczególnych kierunkach przez $a + 3, b + 3, c + 3$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi. Otrzymujemy wówczas $(a + 3) + (b + 3) + (c + 3) = 33$, skąd $a + b + c = 24$.

Warunek zadania możemy przepisać jako

$$(a + 4)(b + 4)(c + 4) = 2(a + 2)(b + 2)(c + 2),$$

co po uproszczeniu prowadzi do równości $abc = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Skoro $a + b + c$ jest liczbą parzystą, to albo (1) dokładnie jedna, albo (2) wszystkie trzy spośród liczb a, b, c są parzyste.

W przypadku (1) jedna z liczb a, b, c (bez straty ogólności przyjmijmy, że liczbą tą jest a) musi być podzielna przez 16, a skoro $a + b + c = 24 < 2 \cdot 16$, to $a = 16$. Wynika stąd, że $b + c = 8$ oraz $bc = 15$, skąd $\{b, c\} = \{3, 5\}$. Łączna liczba klocków w tym przypadku jest więc równa $(a + 4)(b + 4)(c + 4) = 20 \cdot 7 \cdot 9 = 1260$.

W przypadku (2) mamy bez straty ogólności $a = 4x, b = 2y, c = 2z$, gdzie $xyz = 15$ oraz $2x + y + z = 12$. Łatwo przekonujemy się, że jedyną możliwością jest $x = 3, \{y, z\} = \{1, 5\}$, co daje $(a + 4)(b + 4)(c + 4) = 16 \cdot 6 \cdot 14 = 1344$.

Zadanie 54. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n , niech $p(n)$ oznacza iloczyn jej niezerowych cyfr. Wyznacz największy dzielnik pierwszy liczby $p(1) + \dots + p(999)$.

Wynik. 103

Rozwiązanie. Niech $A = (0 + 1 + 2 + \dots + 9)(0 + 1 + 2 + \dots + 9)(0 + 1 + 2 + \dots + 9)$. Widzimy, że A byłoby sumą z treści zadania, gdybyśmy domnażali również cyfry równe 0. Modyfikując lekko ten pomysł, można zauważyć że suma jest równa

$$S = (1 + 1 + 2 + \dots + 9)(1 + 1 + 2 + \dots + 9)(1 + 1 + 2 + \dots + 9) - 1$$

(odejmujemy jedynkę, którą niepotrzebnie policzyliśmy dla liczby 0). Licząc dalej, otrzymujemy

$$S = 46^3 - 1 = (46 - 1)(46^2 + 46 + 1) = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103.$$

Zadanie 55. Niech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb całkowitych dodatnich takim, że $9 \mid a_{3k-2}$, $14 \mid a_{3k-1}$ oraz $19 \mid a_{3k}$ dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich k . Znajdź najmniejszą możliwą wartość a_{2016} .

Wynik. 14478

Rozwiązanie. Możemy założyć, że dla wszystkich n , a_n jest najmniejszą liczbą całkowitą większą od a_{n-1} , która spełnia warunki podzielności z treści zadania. Zauważmy, że dla danego a_{3k} są tylko dwie możliwe wartości a_{3k+3} : albo $a_{3k+3} = a_{3k} + 19$, albo $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$. Ta ostatnia możliwość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby całkowite c, d , $5 \leq d \leq c \leq 9$, że $9 \mid a_{3k} + c$ oraz $14 \mid a_{3k} + d$, skoro wtedy $a_{3k+1} = a_{3k} + c$ oraz $a_{3k+2} = a_{3k} + 14 + d \geq a_{3k} + 19$.

Jest dokładnie $\binom{6}{2} = 15$ par liczb (c, d) spełniających $5 \leq d \leq c \leq 9$. Ponieważ liczby 9, 14 oraz 19 są parami względnie pierwsze, więc chińskie twierdzenie o resztach gwarantuje nam, że dla każdej takiej pary (c, d) istnieje dokładnie jedna liczba całkowita nieujemna a_{3k} mniejsza od $9 \cdot 14 \cdot 19$ taka, że $19 \mid a_{3k}$, $9 \mid a_{3k} + c$ oraz $14 \mid a_{3k} + d$. Zatem jest dokładnie 15 liczb a_{3k} mniejszych od $9 \cdot 14 \cdot 19$, dla których $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$. Łatwo zauważyć, że różnica każdych dwóch takich liczb nie jest równa 19 oraz $9 \cdot 14 \cdot 19 - 19$ nie jest taką liczbą, więc $a_{3\ell} = 9 \cdot 14 \cdot 19$ dla pewnego ℓ . Z faktu, że $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$ zachodzi dokładnie 15 razy wnioskujemy $\ell = 9 \cdot 14 - 15 = 111$.

Dla wyrazów a_n przekraczających a_{333} , reszty z dzielenia przez 9, 14 i 19 są takie same jak dla a_{n-333} , więc otrzymujemy równość $a_{n+333} = a_n + 9 \cdot 14 \cdot 19$. Łatwo możemy obliczyć, że $a_{18} = 114$, zatem

$$a_{2016} = a_{6 \cdot 333 + 18} = 6 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19 + 114 = 14478.$$

Zadanie 56. Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC . Punkty D, E, F leżą odpowiednio na odcinkach BC, CA, AB tak, że proste AD, BE, CF przecinają się w P . Znajdź pole trójkąta ABC , jeśli $PA = 6$, $PB = 9$, $PD = 6$, $PE = 3$ i $CF = 20$.

Wynik. 108

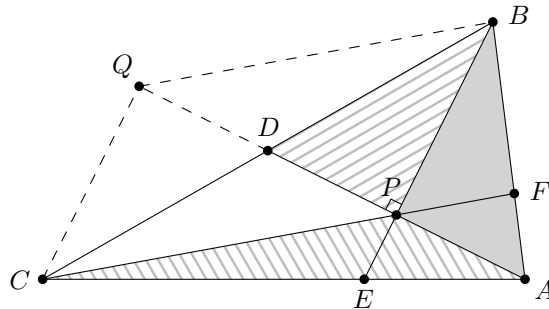
Rozwiązanie. Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ . Wiemy, że $AP = DP$, a więc $[ABP] = [BDP]$ i $[APC] = [DCP]$. Dalej, z $3EP = BP$ wynika $3[APE] = [ABP]$ oraz

$$3[CEP] = [BCP] = [BDP] + [DCP] = 3[APE] + [APE] + [CEP],$$

zatem $[CEP] = 2[APE]$. Widzimy, że $[ABP] = [BDP] = [APC] = [DCP]$, w szczególności $BD = CD$. Zauważmy, że

$$\frac{DP}{AD} + \frac{EP}{BE} + \frac{FP}{CF} = \frac{[BCP] + [ACP] + [ABP]}{[ABC]} = 1,$$

zatem $FP = 5$ i w konsekwencji $CP = 15$. Zauważmy, że jeśli dopełnimy trójkąt CPB do równoległoboku $CPBQ$, to $BP^2 + PQ^2 = BQ^2$, więc $\angle DPB = 90^\circ$.



Dochodzimy do wniosku, że:

$$[ABC] = 4[BDP] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 108.$$

Zadanie 57. Wyznacz ostatnie dwie cyfry przed przecinkiem liczby $(7 + \sqrt{44})^{2016}$.

Wynik. 05

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że liczba $7 - \sqrt{44}$ jest ściśle większa od 0 oraz ściśle mniejsza od 1, a zatem taką samą własność ma liczba $(7 - \sqrt{44})^{2016}$. Co więcej, liczba $(7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016}$ jest całkowita, o czym możemy przekonać się korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona (nieparzyste potęgi $\sqrt{44}$ się redukują), a zatem

$$\lfloor (7 + \sqrt{44})^{2016} \rfloor = (7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016} - 1.$$

Korzystając z faktu, że $12^2 \equiv 44 \pmod{100}$, otrzymujemy

$$(7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016} \equiv (7 + 12)^{2016} + (7 - 12)^{2016} \pmod{100},$$

więc wystarczy znaleźć dwie ostatnie cyfry każdej z liczb 19^{2016} oraz 5^{2016} . W przypadku drugiej z nich, cyfry te to 25, gdyż $5^3 \equiv 5^2 \pmod{100}$. Aby uporać się z pierwszą z tych liczb, ponownie korzystamy ze wzoru dwumianowego, otrzymując

$$(20 - 1)^{2016} \equiv \binom{2016}{2015} \cdot 20^1 \cdot (-1)^{2015} + \binom{2016}{2016} (-1)^{2016} \equiv -19 \pmod{100}$$

(wszystkie składniki oprócz ostatnich dwóch są podzielne przez 20^2). Ostatecznie wnosimy, że szukanymi dwiema cyframi są $-19 + 25 - 1 = 05$.

Alternatywne rozwiązanie. Podobnie jak w poprzednim sposobie rozwiązania, zajmijmy się szukaniem ostatnich dwóch cyfr liczby $(7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016}$. Ponieważ $7 + \sqrt{44}$ oraz $7 - \sqrt{44}$ to pierwiastki równania kwadratowego $x^2 - 14x + 5 = 0$, więc ciągi $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ oraz $(\beta_n)_{n \geq 0}$, zdefiniowane jako $\alpha_n = (7 + \sqrt{44})^n$ oraz $\beta_n = (7 - \sqrt{44})^n$, spełniają zależności rekurencyjne: $\alpha_{n+2} - 14\alpha_{n+1} + 5\alpha_n = 0$ oraz analogiczną dla β_n . Co więcej, ta sama zależność zachodzi dla ciągu sum odpowiednich wyrazów tych ciągów $\gamma_n = (7 + \sqrt{44})^n + (7 - \sqrt{44})^n$. Naszym celem jest wyznaczenie $\gamma_{2016} \pmod{100}$.

Przyjmijmy oznaczenie $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n \pmod{100}$. Ciąg $(\tilde{\gamma}_n)_{n \geq 0}$ jest jednoznacznie określony przez zależność rekurencyjną $\tilde{\gamma}_{n+2} = (14\tilde{\gamma}_{n+1} - 5\tilde{\gamma}_n) \pmod{100}$ oraz wartości początkowe $\tilde{\gamma}_0 = 2$, $\tilde{\gamma}_1 = 14$. Ponadto, skoro $\tilde{\gamma}_n$ przyjmuje tylko skończenie wiele wartości, a jego każdy wyraz zależy tylko od dwóch poprzednich, ciąg ten musi być okresowy. Obliczając kilkanaście początkowych wyrazów tego ciągu:

$$2, 14, 86, 34, 46, 74, 6, 14, 66, 54, 26, 94, 86, 34, \dots,$$

zauważamy, że od $\tilde{\gamma}_2$ otrzymujemy ciąg okresowy z okresem 10. Stąd mamy $\tilde{\gamma}_{2016} = \tilde{\gamma}_6 = 6$, a skoro szukana liczba jest o jeden mniejsza, otrzymujemy odpowiedź 05.