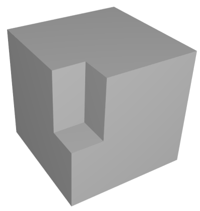
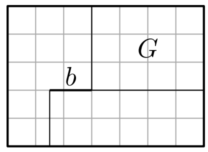
Úloha 1. Majme balvan v tvare kocky s objemom $216\,\mathrm{m}^3$. Aký je povrch balvana v m^2 potom, čo z neho vysekneme blok s rozmermi $1\,\mathrm{m} \times 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ tak, ako je zobrazené na obrázku?



Výsledok. 216

Riešenie. Keďže $6^3 = 216$, strana kocky je $6\,\mathrm{m}$. Vyseknutý blok nezmení veľkosť povrchu kocky, a teda povrch kocky je $6 \cdot 6^2 = 216\,\mathrm{m}^2$.

Úloha 2. Dvaja priatelia, Peťo a Tomáš, vyhrali jackpot a kúpili si krásny obdĺžnikový pozemok s rozmermi $35\,\mathrm{m} \times 25\,\mathrm{m}$. Chceli na ňom postaviť dvojdom a mať pri ňom spoločnú záhradu G s rozlohou $300\,\mathrm{m}^2$. Pôdorys záhrady a domov je na obrázku. (Vzdialenosť medzi dvomi susednými čiarami siete, v ktorej je zakreslený pôdorys záhrady a domov je $5\,\mathrm{m}$).



Aká dlhá musí byť stena b z jedného domu do druhého aby plochy domov boli rovnaké?

Výsledok. $8.75\,\mathrm{m}$

Riešenie. Plocha jedného domu je polovica z $35\,\mathrm{m} \cdot 25\,\mathrm{m} - 300\,\mathrm{m}^2 = 575\,\mathrm{m}^2$, teda $287,5\,\mathrm{m}^2$. Keďže jeden z rozmerov pôdorysu domu je $10\,\mathrm{m}$, druhý rozmer je $28,75\,\mathrm{m}$. A teda $b = 8,75\,\mathrm{m}$.

Úloha 3. Malá Janka chce ísť na pláž. K dispozícií má nasledovné rozlíšiteľné plážové outfity: 5 plaviek, 3 slamené klobúky, 4 slnečné okuliare a 5 tričiek. V súlade s pravidlami pláže, musí mať na sebe plavky. Nosenie slnečných okuliarov, klobúka a trička nie je povinné. Avšak na sebe môže mať najviac jeden kus z každého. Koľko je rôznych outfitov, v ktorých Janka môže vyjsť na pláž?

Výsledok. 600

Riešenie. Janka si musí vybrať medzi možnosťou nemať na hlave klobúk vôbec, mať na hlave prvý klobúk, druhý, alebo tretí klobúk, čo dáva spolu 4 možností súhrnne pre klobúky. Rovnako tak existuje 5 možností pre slnečné okuliare a 6 možností nosenia trička. Vzhľadom k tomu, že Janka musí mať vždy nejaké plavky, spolu to je $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 600$ možností, v čom môže vyjsť na pláž.

Úloha 4. Katka strávila dovolenku v dažďovom pralese. Každý deň buď pršalo iba dopoludnia, iba popoludní, alebo pršalo celý deň. Katka mala počas dovolenky 13 dní, keď nepršalo po celý deň. Počas 11 dní pršalo dopoludnia a 12 dní pršalo popoludní. Ako dlho bola Katka na dovolenke?

Výsledok. 18 dní

Riešenie. Označme v počet dní Katkiných prázdnin. Potom $v - 11$ je počet dní keď neprší dopoludnia a podobne $v - 12$ je počet dní keď neprší popoludní. Keďže počas Katkiných prázdnin nebol deň kedy nepršalo, tak

$$(v - 11) + (v - 12) = 13,$$

respektíve $v = 18$.

Úloha 5. Nájdite najmenšie nezáporné celočíselné riešenie rovnice $n - 2 \cdot \mathrm{Q}(n) = 2016$, kde $\mathrm{Q}(n)$ označuje ciferný súčet čísla n.

Výsledok. 2034

Riešenie. Číslo $n - \mathrm{Q}(n)$ je vždy deliteľné 9. Keďže číslo 2016 je deliteľné 9, tak aj $\mathrm{Q}(n)$ a aj n musí byť deliteľné 9. Hľadáme najmenšie číslo, tak zjavne nájdeme také, že $n < 3000$, a teda $Q(n) \leq 2 + 9 + 9 + 9$. Odtiaľ dostávame $n = 2016 + 2\,\mathrm{Q}(n) \leq 2074$. Jediné celočíselné riešenie je 2034.

Úloha 6. Koľko kladných celých čísel má vlastnosť, že jeho prvá cifra (zľava) je rovná počtu cifier daného čísla?

Výsledok. 111 111 111

Riešenie. Ak n je nenulové číslo, potom je presne 10^{n-1} čísel začínajúcich n. Ide o čísla medzi $\overline{n0\dots0}$ a $\overline{n9\dots9}$. Spolu teda máme

$$1 + 10 + \dots + 100\,000\,000 = 111\,111\,111$$

čísel spĺňajúcich zadanie.

Úloha 7. Dlažba sa skladá z dlaždíc rôznych tvarov, z ktorých jedna má tvar pravidelného n-uholníka. Ak túto dlaždicu vytiahneme a otočíme o 48° okolo jej stredu, tak zapasuje presne na pôvodné miesto. Aké je najmenšie n, pre ktoré je to možné?

Výsledok. 15

Riešenie. Pravidelný n-uholník zachováme po rotácii vtedy, ak ho otočíme o násobok uhla ktorý je medzi stredom a dvoma susediacimi vrcholmi n-uholníka. Tento uhol je $360°/n$, takže hľadáme najmenšie celé číslo n také, že

$$\frac{48}{\frac{360}{n}} = \frac{2}{15}n$$

je celé číslo. Najmenšie také n je $n = 15$.

Úloha 8. Deň nazývame *šťastný*, ak jeho dátum v tvare *DD.MM.RRRR* (DD označuje deň, MM označuje mesiac a RRRR označuje rok) pozostáva z ôsmych rôznych číslic. Ak je deň alebo mesiac číslo menšie ako 10, doplní sa nulou na dvojciferné číslo. Napríklad 26.04.1785 bol šťastný deň. Kedy najbližšie, od dnes, bude šťastný deň?

Výsledok. 17.06.2345

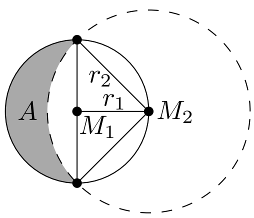
Riešenie. Mesiac šťastného dňa je buď 12, alebo obsahuje nulu, takže rok je viac ako 3000 alebo neobsahuje nulu vo svojom zápise. Uvažujme druhý prípad, teda mesiac obsahuje nulu a rok začína dvojkou. Prvá cifra dňa by mohla byť 0, 1, 2, alebo 3, ale 0 sme použili v mesiaci a 2 v roku, preto to bude 1, alebo 3. Ak by bola prvá cifra dňa 3, druhá musí byť 1 a najmenší kandidát na rok je až 2456. Nech je teda prvá cifra dňa 1, čomu prislúcha rok 2345 a prvý možný mesiac 06. Ostáva doplniť druhú cifru dňa, a keďže dátum ma byť čo najmenší, deň bude 17.

Úloha 9. Koľko rôznych rovín obsahuje práve štyri vrcholy daného kvádra?

Výsledok. 12

Riešenie. Máme 6 rovín, ktoré obsahujú steny kvádra. Ďalej pre každú dvojicu protiľahlých stien, máme dve roviny kolmé na tieto steny, ktoré obsahujú ich stenové uhlopriečky. Spolu je to 12 rovín.

Úloha 10. Malá Sandra chce nakresliť prekrásny polmesiac len pomocou pravítka a kružidla. Najprv nakreslí kruh so stredom M_1 a polomerom $r_1 = 3$ cm. Potom zapichne kružidlo do bodu M_2 na obvode kruhu a nakreslí druhý kruh s polomerom r_2, ktorý pretína prvý kruh v protiľahlých bodoch. Úsečka spájajúca tieto body je priemerom prvého kruhu cez bod M_1, ako je zobrazené na obrázku.



Aký obsah má polmesiac A v cm^2?

Výsledok. 9

Riešenie. Aby sme získali obsah A, musíme odčítať obsah kruhového odseku (so stredom M_2, polomerom r_2) od obsahu polkruhu (so stredom M_1, polomerom r_1). Pre obsah odseku vypočítame najprv obsah štvrťkruhu s polomerom r_2 a odčítame obsah rovnoramenného pravouhlého trojuholníka s odvesnou r_2. Využitím faktu, že $r_2^2 = 2r_1^2$ (Pytagorova veta), potom odvodíme, že hľadaný obsah je

$$\frac{\pi r_1^2}{2} - \left(\frac{\pi r_2^2}{4} - r_1^2\right) = r_1^2 = 9\,\text{cm}^2.$$

Úloha 11. Sluhovia kráľa Chobotnicu majú šesť, sedem, alebo osem chápadiel. Tí, ktorí majú sedem chápadiel vždy klamú, zatiaľ čo tí, ktorí majú šesť alebo osem chápadiel vždy vravia pravdu. Jedného dňa kráľ Chobotnica zavolal štyroch svojich sluhov a spýtal sa ich, koľko chápadiel majú oni štyria spolu. Prvý sluha odpovedal, že celkovo majú spolu 25, ďalší tvrdil 26, tretí povedal 27 a posledný vyhlásil, že 28. Koľko chápadiel majú kráľovi pravdovravní sluhovia (z týchto štyroch) dokopy?

Výsledok. 6

Riešenie. Iba jedna z odpovedí môže byť správna, takže sú tu buď traja alebo štyria klamári medzi sluhami. Avšak, ak by boli všetci štyria klamári, tak by mali 28 chápadiel celkovo. To by ale posledný sluha neklamal, čo je spor. Takže tí, čo klamú majú 21 chápadiel dokopy. Ak by mal jediný pravdovravný sluha osem chápadiel, tak by bolo celkovo 29 chápadiel, čo nebola ani jedna z odpovedí. Z toho vieme vydedukovať, že pravdovravný sluha mal šesť chápadiel. (a bol tretí, ktorý odpovedal na otázku o počte chápadiel).

Úloha 12. V obchode predávajú tabuľky mliečnej, bielej a tmavej čokolády za rovnakú cenu. Jeden deň v obchode zarobili 270 eur za predaj mliečnej čokolády, 189 eur za predaj bielej čokolády a 216 eur za predaj tmavej čokolády. Aké najmenšie množstvo tabuliek čokolády mohli v danom obchode v ten deň predať?

Výsledok. 25

Riešenie. Cena jednej tabuľky čokolády je spoločný deliteľ súm, čo v obchode zarobili za predaj jednotlivých druhov čokolády. Aby tabuliek predali čo najmenej, cena jednej tabuľky musí byť čo najväčšia, teda to musí byť najväčší spoločný deliteľ. Keďže $\mathrm{NSD}(270, 189, 216) = 27$, môžeme počet predaných tabuliek vypočítať ako

$$\frac{270}{27} + \frac{189}{27} + \frac{216}{27} = 25.$$

Úloha 13. Otec piatich detí chce kúpiť pečivo pre svoju rodinu na čajový večierok. Po zlých skúsenostiach vie, že potrebuje pre svoje deti buď päť rovnakých, alebo päť rôznych druhov pečiva. Jedného dňa povedal svojej najmladšej dcére Anne: „Choď do cukrárne a od predavačky si pýtaj x náhodných kúskov pečiva! Po tvojom návrate domov, dostane každé dieťa jeden kus pečiva a zvyšné kusy budú pre mamu a otca.“ Za predpokladu, že obchod predáva viac ako päť druhov pečiva a je vždy dobre zásobené každým druhom pečiva, aké číslo x musí otec zvoliť, aby medzi deťmi zaručene nevznikli hádky kvôli pečivu a zároveň kúpil čo najmenej pečiva?

Výsledok. 17

Riešenie. Pokiaľ by Anna doniesla 16 alebo menej kúskov pečiva z ktorého si majú deti odobrať námatkovo po jednom kuse, môže sa stať že medzi týmito pečivami budú napr. 4 jablkové šatôčky, 4 čučoriedkové muffiny, 4 pudingové buchty a 4 tvarohové koláče, prípadne z niektorých aj menej kusov. V takomto prípade tam nebude ani 5 rôznych druhov pečiva, ale ani 5 rovnakých druhov pečiva. Ak prinesie 17 náhodných kusov, tak ak tam bude existovať päť alebo viac rôznych druhov pečiva v nejakých množstvách, tak je dobre. V opačnom prípade sú tam maximálne štyri rôzne typy pečiva, čo tiež vyhovuje, nakoľko aspoň z jedného druhu pečiva tam bude minimálne päť kusov. Teda otec navrhol Anne požiadať predavačku o 17 náhodne vybraných kúskov pečiva.

Úloha 14. Určte pomer obsahu kruhu k obsahu štvorca, ak ich obvody majú rovnakú dĺžku.

Výsledok. $4 : \pi$

Riešenie. Nech r je polomer kruhu a a je dĺžka strany štvorca. Keďže $2\pi r = 4a$, vypočítame pomer obsahov ako

$$\frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{2r \cdot \pi r}{a \cdot 2a} = \frac{2r \cdot 2a}{a \cdot \pi r} = \frac{4}{\pi}.$$

Úloha 15. Vo Februári sa Paľo rozhodol navštíviť Kokosové ostrovy svojou súkromnou stíhačkou. Vzlietol od svojho sídla v Európe o 10.00 stredoeurópskeho času (SEČ) a pristál na Kokosových ostrovoch nasledujúci deň o 5.30 miestneho času (CCT). Keď sa vracal domov, vzlietol o 8.30 CCT a pristál v Európe o 17.00 SEČ ten istý deň. Oba lety trvali Paľovi rovnako dlho. Aký bol čas na kokosových ostrovoch, keď sa Paľo vrátil domov?

Výsledok. 22.30

Riešenie. Nech d je dĺžka letu a s je rozdiel medzi časom v Európe a časom na Kokosových ostrovoch (obe veličiny v hodinách). Vzťahy zo zadania si vieme prepísať do sústavy rovníc

$$\begin{aligned} d + s &= 19{,}5, \\ d - s &= 8{,}5 \end{aligned}$$

s riešením $d = 14$, $s = 5{,}5$. Z toho usúdime, že sa Paľo vrátil domov o 22.30 CCT.

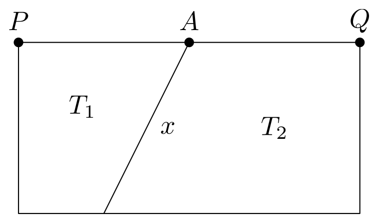
Poznámka: Kokosové ostrovy používajú časovú zónu GMT+6.30.

Úloha 16. Čísla 14, 20 a n spĺňajú nasledovnú podmienku: Keď vynásobíme ľubovoľné dve z nich, výsledok je deliteľný tretím číslom. Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré je splnená uvedená podmienka.

Výsledok. 70, 140, 280

Riešenie. Keďže n musí deliť $14 \cdot 20 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$, v prvočíselnom rozklade čísla n sa môžu vyskytnúť iba prvočísla 2, 5, a 7 s tým, že čísla 5 a 7 sa môžu vyskytnúť najviac raz a číslo 2 najviac trikrát. Z toho, že $14 \mid 20n$ vidíme, že n je násobok 7, a podobne z toho, že $20 \mid 14n$, dostávame $10 \mid n$, takže $70 \mid n$. Ľahko overíme, že všetky možné čísla 70, 140, 280 vyhovujú podmienke zo zadania.

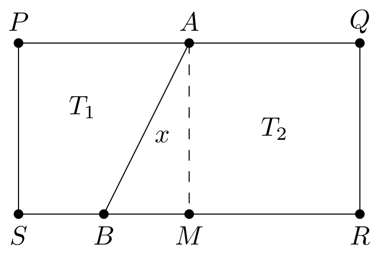
Úloha 17. Obdĺžnik je rozdelený na dva lichobežníky deliacou čiarou x ako na obrázku. Vzdialenosť PA je 10 cm a AQ je 8 cm. Obsah lichobežníka T_1 je 90 cm^2 a obsah lichobežníka T_2 je 180 cm^2.



Aká je dĺžka deliacej čiary x v cm?

Výsledok. 17

Riešenie. Označme R, S zvyšné dva vrcholy obdĺžnika a B druhý priesečník deliacej čiary x s obdĺžnikom. Ďalej označme M bod na SR, ktorý spĺňa podmienku $|SM| = |PA| = 10$.



Keďže $|PQ| = 18$ a obsah obdĺžnika $PQRS$ je $180 + 90 = 270$, znamená to, že $|PS| = |QR| = 270/18 = 15$. Vzorec pre obsah lichobežníka T_2 hovorí, že

$$180 = \frac{1}{2}(|BR| + |AQ|) \cdot |QR|$$

teda $|BR| = 16$. Dostávame, že $|BM| = |BR| - |MR| = 8$ a využitím Pytagorovej vety dostávame, že

$$x = \sqrt{|AM|^2 + |BM|^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Úloha 18. Betka zbierala jahody vo svojej záhradke. Chcela ich rozdeliť medzi svojich štyroch synov tak, že každý dostane aspoň 3 jahody a Vlado dostane viac ako Bohuš, Bohuš dostane viac ako Fero a Fero dostane viac ako Marek. Každý zo synov vie svoj počet jahôd, celkový počet jahôd ktoré sa delili a vyššie spomínané podmienky rozdelenia jahôd. Ako môže Betka rozdeliť jahody za predpokladu, že chce rozdeliť čo najmenej jahôd a žiaden zo synov nemá vedieť celé rozdelenie ako Betka jahody delila?

Výsledok. $(M, F, B, V) = (3, 5, 6, 8)$

Riešenie.

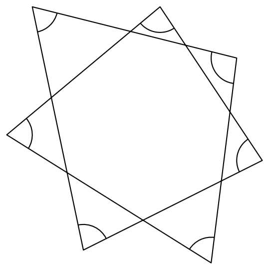
Bohuš, Fero a Marek musia dostať spolu aspoň 14 jahôd, lebo inak by Vlado vedel celé rozloženie $((3, 4, 5, V)$, resp. $(3, 4, 6, V))$. Keby Vlado dostal 7 alebo menej jahôd, tak by vedel, že počty jahôd ostatných troch sú tri rôzne čísla od 3 do 6. A z celkového počtu jahôd by už ľahko vypočítal, ktoré to sú. Preto Vlado musí dostať aspoň 8 jahôd. To znamená, že najmenej musí Betka rozdeliť 22 jahôd. Aby to mohlo byť práve 22, do úvahy pripadajú len rozdelenia $(3, 4, 7, 8)$ a $(3, 5, 6, 8)$. V prvom prípade to vie zistiť Bohuš, ale v druhom to nevie nikto, preto $(3, 5, 6, 8)$ je hľadanou odpoveďou.

Úloha 19. Postupne v smere hodinových ručičiek pozdĺž obvodu kruhu napíšeme všetky celé čísla od 1 do 1 000 Potom označíme niekoľko čísel: Začneme číslom 1 a následne v smere hodinových ručičiek označíme každé 15-te číslo (t. j. 16, 31 atď.). Týmto spôsobom označujeme čísla dovtedy, kým nie sme nútení označiť číslo, ktoré sme už označili. Koľko čísel ostane neoznačených po tomto procese?

Výsledok. 800

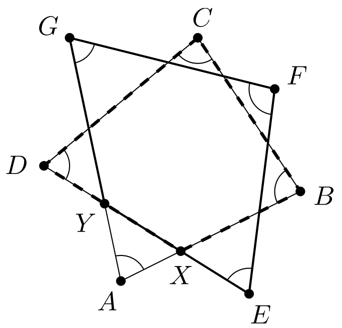
Riešenie. V prvom prechode označíme všetky čísla v tvare $15k+1$ (pre nejaké celé čísla k) od čísla 1 po číslo 991. V nasledujúcom prechode označujeme čísla od 6 po 996 v tvare $15k+6$. Nakoniec v treťom prechode označujeme čísla v tvare $15k+11$ od 11 po 986, čo je posledné číslo, čo označíme (ďalšie číslo, ktoré by sme označovali by bolo číslo 1 a to už označené je). Všimnime si, že sme označili všetky čísla v tvare $5k+1$, ktoré zahŕňajú presne pätinu všetkých čísel na kruhu. Z toho dostávame, že $4/5 \cdot 1000 = 800$ čísel ostalo neoznačených.

Úloha 20. Nájdite súčet siedmych vyznačených vnútorných uhlov tejto 7-cípej hviezdy (v stupňoch)!



Výsledok. 540°

Riešenie. Označme jednotlivé cípy hviezd ako $A, B, \ldots, G$ (pozri obrázok), navyše označme X, Y postupne priesečníky úsečky DE s úsečkami AB a AG.



Nech S je výsledný súčet zo zadania úlohy. Keďže súčet vnútorných uhlov v štvoruholníkoch $XBCD$ a $YEFG$ je 360°, dostávame, že

$$S + |\angle BXY| + |\angle XYG| - |\angle XAY| = 2 \cdot 360^\circ.$$

Avšak, $|\angle BXY| = 180^\circ - |\angle AXY|$ a $|\angle XYG| = 180^\circ - |\angle XYA|$, takže

$$|\angle BXY| + |\angle XYG| - |\angle XAY| = 360^\circ - (|\angle AXY| + |\angle XYA| + |\angle XAY|) = 180^\circ.$$

To znamená, že $S = 540^\circ$.

Úloha 21. Žiaci dostali nasledujúcu úlohu. Mali spočítať aritmetický priemer čísel 1, 3, 6, 7, 8 a 10. Avšak Lucia zvolila zlý postup: Najprv zobrala dve čísla a vypočítala ich aritmetický priemer. Potom zobrala výsledok a ďalšie z čísel a vypočítala ich aritmetický priemer. Takto postupovala kým nepoužila všetky čísla. Čisla pritom brala v ľubovoľnom poradí. Aká je najväčšia hodnota chyby (t.j. rozdiel medzi výsledkom ktorý dostala Lucia a správnym výsledkom) ktorý Lucia mohla dostať?

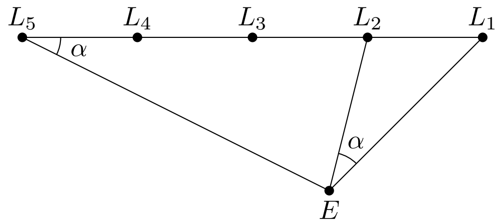
Výsledok. 17/6

Riešenie. Uvedomme si, že Luciin postup bol nasledovný. Zobrala v nejakom poradí určené čísla, označíme ich v poradí v akom ich používala ako $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$, a spočítala nasledovné

$$S = \frac{a_1}{2^5} + \frac{a_2}{2^5} + \frac{a_3}{2^4} + \frac{a_4}{2^3} + \frac{a_5}{2^2} + \frac{a_6}{2^1}.$$

Zo všetkých možných usporiadaní najvyššia hodnota Luciinho aritmetického priemeru je v prípade vzostupného usporiadania, pretože najväčšie číslo je vydelené najmenšou mocninou 2, druhé najväčšie číslo druhou najmenšou mocninou dvojky atď. Naopak najmenšia hodnota S je ak sú čísla usporiadané v zostupnom poradí. Takže najväčšia chyba nastane pre jednu z týchto extremálnych možností. Aritmetický priemer týchto čísel je 35/6. V prípade, že usporiadanie čísel je vzostupne, dostaneme $S = 67/8$, čím dostaneme chybu 61/24. V prípade, že usporiadanie je zostupné, dostaneme $S = 3$ s chybou 17/6, čo je viac a teda najväčšia hodnota chyby je 17/6

Úloha 22. Pozdĺž jednej strany cesty je päť pouličných lámp L_1, L_2, L_3, L_4, a L_5 ležiacich na priamke a rovnomerne rozmiestnených každých 12 m. Na druhej strane cesty je obchod so zmrzlinou. Ak Júlia stojí pred vchodom E zmrzlinového obchodu, vidí z tohto bodu lampy L_1 a L_2 pod uhlom $\alpha = 27°$. Ak stojí pri lampe L_5, vidí lampu L_1 a vchod E tiež pod uhlom 27°.



Aká je vzdialenosť od lampy L_1 k vchodu E?

Výsledok. 24 m

Riešenie. Trojuholníky EL_1L_2 a EL_1L_5 sú podobné, lebo α a uhol L_5L_1E sú vnútornými uhlami v oboch trojuholníkoch. Preto môžeme písať

$$\frac{|EL_1|}{|L_2||L_1|} = \frac{|L_5||L_1|}{|EL_1|}, \quad \text{respektíve} \quad |EL_1|^2 = |L_2||L_1| \cdot |L_5||L_1| = 12 \cdot 48 = 576,$$

z čoho dostaneme požadovanú vzdialenosť $|EL_1| = 24\,\text{m}$.

Úloha 23. Dominika si vybrala dve prirodzené čísla z čísel od 1 to 17 (zahŕňajúce aj 1 a 17) a vynásobila ich. Na prekvapenie, výsledok ktorý dostala bol rovný súčtu zvyšných 15-tich čísel. Aké dve čísla si Dominika vybrala?

Výsledok. 10 a 13

Riešenie. Označme a a b čísla ktoré si Dominika vybrala. Vieme, že súčet prvých 17-tich čísel je 153 a teda našou úlohou je vyriešiť rovnicu $153 - (a + b) = ab$. Úpravami a pridaním 1 na obe strany rovnice dostávame $154 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Využitím toho, že $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$ a $2 \le (a + 1), (b + 1) \le 18$ dostávame jediný vhodný rozklad a to $154 = 11 \cdot 14$. A tak Dominikine čísla sú 10 a 13.

Úloha 24. Koľko rôznych 6-tíc (a, b, c, d, e, f) kladných celých čísel spĺňa podmienky $a > b > c > d > e > f$ a zároveň $a + f = b + e = c + d = 30$?

Výsledok. $\binom{14}{3} = 364$

Riešenie. Vyjadrime si čísla ako

$$(a, b, c, d, e, f) = (15 + x, 15 + y, 15 + z, 15 - z, 15 - y, 15 - x),$$

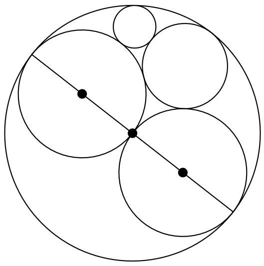
kde $0 \le x, y, z < 15$. Podmienka $a > b > c > d > e > f$ je ekvivalentná podmienke $x > y > z > 0$, takže 6-tica je jednoznačne určená výberom troch kladných celých čísel menších ako 15. Z toho dostávame, že rôznych 6-tíc je $\binom{14}{3} = 364$.

Úloha 25. Časovaná bomba je vybavená displejom zobrazujúcim čas pred výbuchom v minútach a sekundách. Odpočítavanie začne na čase 50:00. Žiarovka blikne, ak počet zostávajúcich minút sa rovná počtu zostávajúcich sekúnd zobrazených na displeji (napr. 15:15), alebo keď sa štyri číslice zobrazené na displeji dajú prečítať rovnako odpredu i odzadu (napr. čas 15:51). Bombu môžeme zneškodniť keď žiarovka blikne po 70. raz. Aký čas bude na displeji bomby v tej chvíli?

Výsledok. 03:03

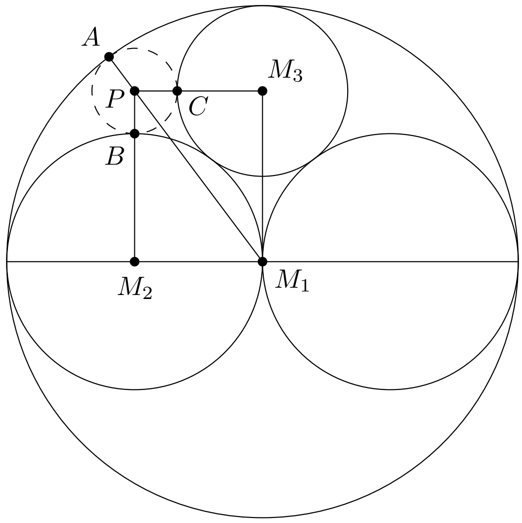
Riešenie. Počet minút je rovný počtu sekúnd raz počas každej minúty, takže za 50 minút sa to stane 50-krát. Stav, kedy sa čísla na displeji čítajú rovnako odpredu aj odzadu, nastane tiež raz počas minúty, ale len počas takej minúty, ktorá na mieste jednotiek má číslo najviac 5. Počas 50 minút tento stav nastane 30-krát. V piatich prípadoch tieto dva stavy nastanú naraz: $00{:}00, 11{:}11, \ldots, 44{:}44$. Takže kým bomba vybuchne, žiarovka blikne celkom $50 + 30 - 5 = 75$-krát (vrátane času 00:00). Bombu môžeme zneškodniť, keď ostáva päť bliknutí žiarovky (00:00, 01:01, 01:10, 02:02, 02:20), teda vtedy, keď displej ukazuje 03:03.

Úloha 26. Päť kružníc sa vzájomne dotýka tak ako je znázornené na obrázku. Nájdite polomer najmenšej kružnice ak polomer najväčšej kružnice je 2 a zvyšné dve kružnice s vyznačenými stredmi majú polomer 1.



Výsledok. $\frac{1}{3}$

Riešenie. Označme M_1, M_2 a M_3 stredy kružníc tak ako na obrázku a r_3 označme polomer druhej najmenšej kružnice.



Vzhľadom k symetrickosti celého obrázku $M_1M_2 \perp M_1M_3$ a s využitím Pytagorovej vety dostávame, že $r_3 = \frac{2}{3}$ na základe rovnosti

$$|M_1||M_2|^2 + |M_1||M_3|^2 = |M_2||M_3|^2, \quad \text{respektíve} \quad 1 + (2 - r_3)^2 = (1 + r_3)^2.$$

Nech P je bod, ktorý doplní stredy kružníc M_1, M_2 a M_3 na obdĺžnik. Označme A, B a C postupne priesečníky priamok PM_1, PM_2 a PM_3 s kružnicami ako na obrázku. Keďže $M_2M_1M_3P$ je obdĺžnik dostávame, že $|PB| = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$, $PC = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ a $|PA| = 2 - M_2M_3 = 2 - (1 + r_3) = \frac{1}{3}$. Takže P je vzdialené$\frac{1}{3}$ od každého z troch bodov A, B a C. Vzhľadom na tento fakt tieto body ležia na kružnici so stredom v bode P a polomerom $\frac{1}{3}$. Keďže PM_1, PM_2 a PM_3 sú priamky, body A, B a C sú dotykové body k príslušným kružniciam a kružnica so stredom v bode P s polomerom $\frac{1}{3}$ je najmenšia z kružníc na obrázku.

Úloha 27. V kasíne sedí niekoľko ľudí okolo veľkého stola a hrá ruletu. Keď Matúš opustí stôl, odnáša si výhru vo výške 16 000 a priemerný zostatok zvyšných hráčov, ktorí ostanú pri stole, sa zníži o 1000 eur. Znovu sa zníži o 1000 eur, keď sa pridajú do hry dvaja hráči Rišo a Dorka, každý so vstupným vkladom po 2000 eur. Koľko hráčov sedelo okolo stola, pokiaľ pri ňom sedel aj Matúš?

Výsledok. 9

Riešenie. Nech n je počet ľudí okolo stola na začiatku, keď hral aj Matúš a x označuje priemerný obnos peňazí ktorý mal každý z hráčov. Na základe predpokladov zo zadania dostávame dve rovnice:

$$\frac{nx - 16\,000}{n-1} = x - 1\,000 \qquad \text{a} \qquad \frac{nx - 16\,000 + 2 \cdot 2\,000}{n+1} = x - 2 \cdot 1\,000$$

Ich úpravami dostaneme

$$x = 17\,000 - 1\,000n \qquad \text{a} \qquad 2\,000n - 10\,000 = x,$$

a z toho dostávame, že $n = 9$. Pokiaľ Matúš hral za stolom v kasíne, okolo stola bolo spolu s ním deväť ľudí.

Úloha 28. V kocke $7 \times 7 \times 7$, sú každé dve susedné jednotkové kocky oddelené zatvorenými dverami. Chceme otvoriť niekoľko dvier tak, aby sa z každej jednotkovej kocky dalo dostať do aspoň jednej vonkajšej jednotkovej kocky. Aký najmenší počet dverí musíme otvoriť?

Výsledok. 125

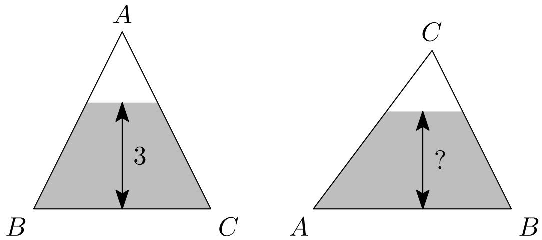
Riešenie. Na začiatku máme 7^3 jednotkových kociek. Odstránením jednej priehradky spojíme dve jednotkové kocky a počet izolovaných oblastí klesne o jedna. Na konci chceme mať najviac $7^3 - 5^3$ izolovaných oblastí (čo je počet vonkajších jednotkových kociek). Z toho dostávame, že potrebujeme odstrániť najmenej $5^3 = 125$ priehradiek. Ľahko vidieť, že odstránenie 125 priehradiek nám stačí.

Úloha 29. Je známe, že $20{*}{*}{*}16$ je 7-ciferná druhá mocnina prirodzeného čísla. Aké tri cifry majú byť namiesto hviezdičiek?

Výsledok. 909

Riešenie. Označme a^2 mocninu prirodzeného čísla, ktorá končí $\ldots 16$. To znamená, že $a^2 - 16 = (a-4)(a+4)$ je deliteľné 100 a ak $a = 2b$ tak $(b-2)(b+2)$ je deliteľné 25. Takže $b = 25n \pm 2$ a z toho plynie, že $a = 50n \pm 4$. Keďže $1\,404^2 < (1,414 \cdot 1\,000)^2 < (1\,000\sqrt{2})^2 = 2\,000\,000$ a $1\,454^2 > 1\,450^2 = 2\,102\,500 > 2\,100\,000$, jediným riešením je možnosť $a = 1\,446$, a z toho plynúce $a^2 = 2\,090\,916$.

Úloha 30. Trojuholník ABC s $|AB| = |AC| = 5\,\mathrm{m}$ a $BC = 6\,\mathrm{m}$ je čiastočne naplnený vodou. Keď trojuholník leží na strane BC, voda siaha do výšky $3\,\mathrm{m}$. Do akej výšky siaha voda ak trojuholník leží na strane AB?



Výsledok. 18/5

Riešenie. Označme D stred strany BC. Trojuholník ABD je pravouhlý a z Pytagorovej vety $|AD| = 4$. Časť trojuholníka nevyplnená vodou je trojuholník podobný trojuholníku ABC s pomerom 1/4. Keďže pomer obsahov (vyplnenej a nevyplnenej časti trojuholníka) ostáva i po otočení nemenný, analogická podobnosť platí i po rotácií. Voda je opäť v 3/4 výšky a tak stačí vypočítať výšku v_{AB} na stranu AB. Obsah trojuholníka ABC je $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BC = 12$, preto $v_{AB} = 2 \cdot 12/AB = 24/5$. Voda teda siaha do výšky $3/4 \cdot 24/5 = 18/5$.

Úloha 31. Majme šesť škatuliek očíslovaných od 1 do 6 a 17 broskýň rozdelených nejako v týchto škatuľkách. V jednom ťahu smieme urobiť nasledovné: Ak sa v n-tej krabici nachádza práve n broskýň, zjeme jednu z nich a zvyšných $n-1$ broskýň rozdelíme po jednej do krabíc 1 až $n-1$. Aké je rozloženie broskýň za predpokladu, že vieme postupne zjesť všetky broskyne?

Výsledok. 1, 1, 3, 2, 4, 6

Riešenie. K riešeniu úlohy pristúpme popísaním krokov od konca. Výsledné rozdelenie do krabíc je $(0,0,0,0,0,0)$, teda ak chceme aby boli všetky broskyne zjedené, predchádzajúci stav musí byť $(1,0,0,0,0,0)$, ktorému zase predchádza stav $(0,2,0,0,0,0)$ atď. Takýmto spôsobom skonštruujeme rozdelenie broskýň

$$\ldots (0,2,0,0,0,0),\ (1,2,0,0,0,0),\ (0,1,3,0,0,0),\ (1,1,3,0,0,0),\ \ldots$$

ktoré končí rozdelením $(1,1,3,2,4,6)$. Podľa tohto rozdelenia máme v 6 škatuľkách spolu 17 broskýň a aj postup ako budeme vyberať jednotlivé škatuľky z ktorých budeme broskyne konzumovať.

Úloha 32. V lyžiarskom stredisku je prevádzkovaný dvojmiestny lyžiarsky vlek. Cestu hore na svah na ňom plánuje 74 ľudí, zatiaľ čo 26 cestujúcich čaká už v hornej stanici na cestu dole. Na poludnie začne vlek premávať a nasadne doň v oboch staniciach prvá dvojica ľudí. Ďalší postupne nastupujú. O 12.16 ľudia sediaci na prvých sedadlách smerom hore míňajú posledné obsadené sedadlá, ktoré šli dole. O 12.22, ľudia na prvých obsadených sedadlách, ktoré šli smerom dole míňajú posledné obsadené sedadlá ktoré idú smerom hore. Vzdialenosť medzi každými dvoma dvojsedadlami na lanovke je rovnaká a lanovka udržuje konštantnú rýchlosť. Obsadené sú vždy obe sedadlá. Ako dlho trvá jazda z dolnej stanice do hornej (v minútach)?

Výsledok. 26

Riešenie. Vzdialenosť medzi prvou a poslednou hore idúcou dvojsedačkou je trikrát väčšia ako vzdialenosť medzi prvou a poslednou dvojsedačkou idúcou dole. Doba medzi dvoma momentami popísanými v zadaní je dvojnásobok času ktorý uplynie medzi stretnutím prvej dvojsedačky idúcej zdola s prvou dvojsedačkou idúcou zhora a času kedy sa minú posledná obsadená dvojsedačka idúca zhora s poslednou obsadenou dvojsedačkou idúcou zdola. Predné stoličky sa stretli v 12.13 (presne uprostred výťahu), a preto je čas potrebný na prejsť celú vleku je 26 minút.

Úloha 33. Nech $ABCD$ je kosoštvorec a body M, N, rôzne od bodov A, B, C, ležia postupne na úsečkách AB, BC tak, že DMN je rovnostranný trojuholník a $AD = MD$. Určte veľkosť uhla ABC (v stupňoch).

Výsledok. $100°$

Riešenie. Keďže $|CD| = |AD| = |MD| = |ND|$, tak trojuholníky AMD a NCD sú rovnoramenné so základňami AM a NC. Označme $\theta = |\angle DAB|$. Potom $|\angle ABC| = |\angle ADC| = 180° - \theta$. S využitím toho, že

$$|\angle DAM| = |\angle AMD| = |\angle DNC| = |\angle NCD| = \theta,$$

dostávame

$$|\angle ADM| = |\angle NDC| = |180°| - 2\theta$$

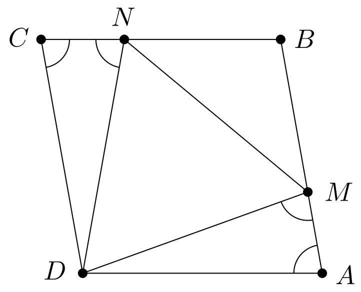
a zároveň

$$|\angle ADC| = |\angle ADM| + |\angle MDN| + |\angle NDC| = 420° - 4\theta.$$

Spojením oboch vzťahov dostávame

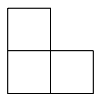
$$420° - 4\theta = 180° - \theta$$

alebo po úprave $\theta = 80°$, takže $|\angle ABC| = 100°$.



Úloha 34. Koľkými spôsobmi môžeme zafarbiť políčka tabuľky 2×7 zelenou a žltou farbou tak, aby sa v tabuľke nenachádzalo ani zelené, ani žlté L-ko?

Poznámka: L-ko je ľubovoľne natočený nasledujúci útvar:



Výsledok. 130

Riešenie. Ak nejaký stĺpec tabuľky je jednofarebný, tak susedný stĺpec musí byť zafarbený druhou farbou, ďalší stĺpec musí byť zafarbený zas prvou farbou atď. Takýmto spôsobom vieme tabuľku zafarbiť dvoma spôsobmi podľa toho, ktorou farbou sme zafarbili prvý stĺpec.

Z predchádzajúcej úvahy taktiež vyplýva, že ak jeden stĺpec zafarbíme oboma farbami, tak všetky zvyšné stĺpce musia byť tiež zafarbené oboma farbami. Ľahko vidieť, že v každom stĺpci môžeme dve farby rozmiestniť nezávisle na ostatných stĺpcoch. Každé také zafarbenie bude vyhovovať zadaniu, takže takýchto zafarbení máme $2^7 = 128$.

Spolu máme $2 + 128 = 130$ zafarbení tabuľky.

Úloha 35. Mišo je vášnivý zberateľ diamantov, ale vlastní zatiaľ menej ako 200 diamantov. Rozdelil všetky svoje diamanty na niekoľko (aspoň na dve) kôpok tak, aby

- každé dve kôpky obsahovali rôzny počet diamantov,
- žiadna z kôpok neobsahovala práve dva diamanty,
- pre každú z kôpok platilo: ak ju rozdelíme na dve menšie kôpky, tak aspoň jedna z nových kôpok bude obsahovať rovnako veľa diamantov ako niektorá z pôvodných kôpok.

Aký najväčší počet diamantov môže Mišo vlastniť?

Poznámka: Kôpka pozostáva s nenulového počtu diamantov.

Výsledok. 196

Riešenie. Predpokladajme, že máme rozdelenie diamantov na kôpky podľa zadania. Nech m je počet diamantov na najmenšej kôpke. Ak by $m \geq 3$, tak môžeme najmenšiu kôpku rozdeliť na kôpky (rôznych) veľkostí 1 a $m-1$, z ktorých žiadna nemá rovnakú veľkosť ako niektorá pôvodná. Preto musí platiť $m \leq 2$, ale keďže podľa zadania žiadna kôpka neobsahuje práve dva diamanty, tak nám ostáva $m = 1$.

Ďalej ukážeme, že na druhej najmenšej kôpke musia byť 3 diamanty. Keďže 2 diamanty tam byť nemôžu, stačí nám vylúčiť prípad, keď obsahuje $n \geq 4$ diamanty. Avšak to nie je možné kvôli rozdeleniu na kôpky s 2 a $(n-2)$ diamantmi.

Tieto úvahy zovšeobecníme, a matematickou indukciou dokážeme, že ak na k $(k > 1)$ najmenších kôpkach je postupne po $1, 3, \ldots, 2k-1$ diamantoch, tak na $(k+1)$-vej najmenšej kôpke (ak taká existuje) je $2k+1$ diamantov. Nech p je počet diamantov na $(k+1)$-vej najmenšej kôpke. Zjavne p musí byť nepárne, lebo inak by sme ju mohli rozdeliť na dve kôpky párnej veľkosti. Ak $p \geq 2k+3$, tak rozdelenie $p = 2 + (p-2)$ vedie ku sporu. Ostáva nám tak jediná možnosť $p = 2k+1$, o ktorej ľahko vidieť, že spĺňa podmienky zo zadania.

Ukázali sme teda, že počet Mišových diamantov musí byť tvaru $1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$. Najväčší štvorec menší ako 200 je $14^2 = 196$, čo je najväčší počet diamantov, ktorý môže Mišo môže vlastniť.

Úloha 36. Pripomeňme si, že v hre Kameň, papier, nožnice máme tri symboly: K – kameň, P – papier a N – nožnice, pre ktoré platí $N > P$, $P > K$, $K > N$ a $K = K$, $P = P$, $N = N$, kde $A > B$ znamená „A poráža B“ a $A = B$ znamená „A hralo proti B, hra skončila remízou“. Turnaj v hre Dvojruký Kameň, papier, nožnice bez opakovania medzi hráčmi P_1 a P_2 pozostáva z 9 hier. V každej hre si každý hráč vyberie dvojicu (ℓ_i, r_i), kde ℓ_i, resp. r_i je symbol, ktorý hráč P_i ukáže na pravej, resp. ľavej ruke. Počas celého turnaja si musí každý hráč vybrať každú dvojicu symbolov práve raz. Následne sa zvlášť vyhodnotia symboly hráčov na ľavých rukách a symboly na pravých rukách (podľa pravidiel hry Kameň, papier, nožnice). Hráč dostane za každú výhru 2 body, za každú remízu 1 bod a za každú prehru 0 bodov. V jednej hre sa teda celkom rozdelia 4 body. Predpokladajte, že obaja hráči volia dvojice symbolov náhodne. Aká je pravdepodobnosť, že každá z deviatich hier v turnaji skončí remízou (t. j. so skóre 2:2)?

Výsledok. $3!^3/9! = 1/1680$

Riešenie. Definujme tri množiny po troch pároch symbolov:

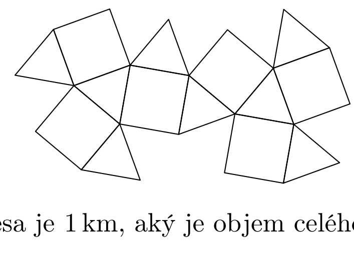
$$D_K = \{(K,K),(P,N),(N,P)\}, \quad D_P = \{(P,P),(N,K),(K,N)\}, \quad D_N = \{(N,N),(K,P),(P,K)\}.$$

Všimnime si, že hra v turnaji skončí remízou práve vtedy, keď hráči zahrajú proti sebe dva páry z rovnakej množiny z D_K, D_P, D_N.

Všetky možné priebehy turnaja sú tvorené všetkými dvojicami permutácií prvkov množiny $D_K \cup D_P \cup D_N$. Všetky hry skončia remízou práve vtedy, keď prvky každej z množín D_K, D_P, D_N sú umiestnené na rovnakých miestach v permutáciách hráčov P_1 a P_2. Zoberme ľubovoľnú permutáciu určujúcu poradie ťahov hráča P_1 v jednotlivých hrách. Počet permutácií ťahov hráča P_2, ktoré vedú k remízam vo všetkých hrách je rovný $3!^3$, a to bez ohľadu na to, ktorú permutáciu dvojíc hral hráč P_1. Preto pravdepodobnosť, že všetky hry skočia remízou, je

$$\frac{3!^3}{9!} = \frac{1}{1680}.$$

Úloha 37. Plášť telesa je zložený z ôsmych rovnostranných trojuholníkov a šiestich štvorcov, ako je vyznačené na obrázku:



Predpokladajte, že dĺžka každej z hrán telesa je 1 km, aký je objem celého telesa (v km^3)?

Výsledok. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$

Riešenie. Popísané teleso získame z kocky nasledovným spôsobom: Každý roh kocky odstránime tak, že rez ide stredmi hrán susediacich s odstraňovaním vrcholom. Hrana kocky má dĺžku $\sqrt{2}$, teda jej objem je $2\sqrt{2}$. Odstránené rohy predstavujú osem pyramíd s podstavou tvorenou rovnostranným trojuholníkom a stenami tvorenými pravouhlými rovnoramennými trojuholníkmi s ramenami dĺžky $\sqrt{2}/2$. Vzhľadom k tomu, že pravý uhol zvierajú ramená rovnoramenného trojuholníka, výška má tiež rovnakú dĺžku $\sqrt{2}/2$. Objem jednej z pyramíd je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}/2)^2 \cdot (\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}/24$ a objem celého telesa je $2\sqrt{2} - 8 \cdot \sqrt{2}/24 = 5\sqrt{2}/3$.

Úloha 38. Nájdite jediného trojciferného prvočíselného deliteľa čísla 999 999 995 904.

Výsledok. 601

Riešenie. Číslo si vieme prepísať do tvaru

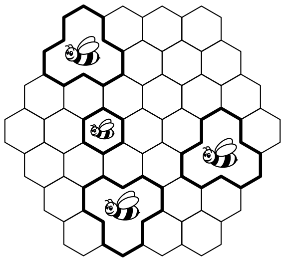
$$999\,999\,995\,904 = 10^{12} - 2^{12} = 2^{12}(5^{12} - 1)$$

kde

$$5^{12} - 1 = (5-1)(5+1)(5^2+1)(5^2-5+1)(5^2+5+1)(5^4-5^2+1).$$

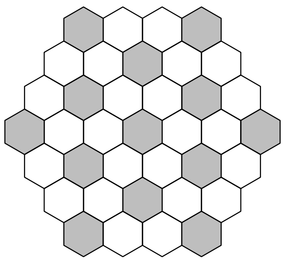
Len posledná zo zátvoriek je hodnotou väčšia ako 100. Keďže vieme, že trojciferný prvočíselný deliteľ existuje a $5^4 - 5^2 + 1 = 601$ nie je deliteľné žiadnym z čísel 2, 3, 5, tak je prvočíslo a teda aj nami hľadané číslo.

Úloha 39. Trinásť včiel: jedna malá včela a dvanásť veľkých včiel žije v 37-bunkovom včeľom pláste. Veľká včela využíva na svoj život 3 susedné bunky včelieho plástu a malá včela žije v jednej bunke včelieho plástu (tak ako je vyznačené na obrázku). Koľkými spôsobmi môžeme 37-bunkový plást rozdeliť tak, aby každá zo včiel mala svoje bývanie podľa zadaných podmienok?



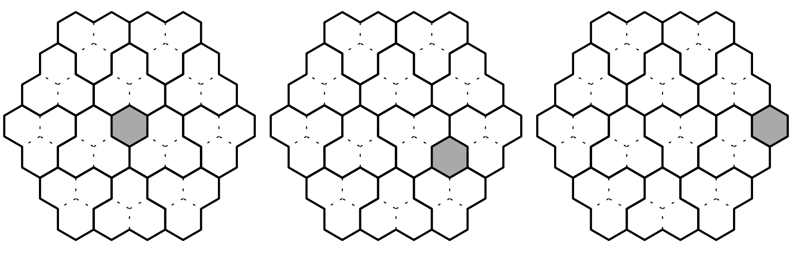
Výsledok. 20

Riešenie. Ofarbíme 13 buniek plástu tak ako na obrázku:



Každá z trojbuniek (troch susedných buniek) obsahuje práve jednu zafarbenú bunku, a teda malá včela bude bývať tiež v zafarbenej bunke.

Ak bunka pre malú včelu bude v strede nášho plastu, máme len dve možnosti rozdelenia buniek pre 12 včiel (jedna z možností je na obrázku a druhá vznikne otočením o 60 stupňov v niektorom smere). Pre každú zo šiestich zafarbených buniek ktoré sú v "strede" existuje práve jeden spôsob, ako rozmiestniť trojbunky pre veľké včely. A nakoniec pre okrajové zafarbené bunky sú práve dva spôsoby ako rozdeliť zostávajúce bunky pre veľké včely.

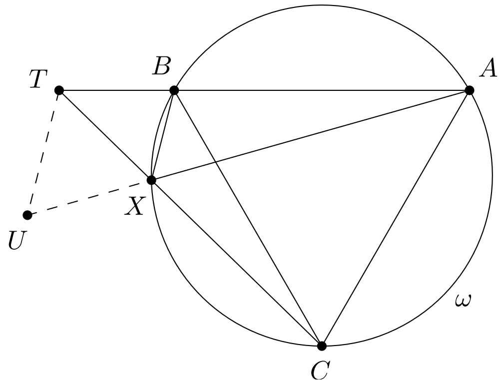


Spolu to dáva celkovo $2 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 20$ spôsobov rozdelenia včelieho plástu podľa podmienok zadania.

Úloha 40. Rovnostranný trojuholník ABC je vpísaný do kružnice ω. Bod X leží na kratšom oblúku BC kružnice ω a T je priesečník AB a CX. Ak $|AX| = 5$ a $|TX| = 3$, určte $|BX|$.

Výsledok. 15/8

Riešenie. Keďže $|\angle AXB| = |\angle ACB| = 60°$ a $|\angle AXC| = |\angle ABC| = 60°$, tak $|\angle BXT| = 180° - |\angle AXB| - |\angle AXC| = 60°$. Označme U bod na AX taký, že $TU \parallel BX$.



Potom TUX je rovnostranný trojuholník a $\triangle TUA \sim \triangle BXA$. Odtiaľ máme, že

$$|BX| = \frac{|TU|}{|AU|} \cdot |AX| = \frac{|TX| \cdot |AX|}{|TX| + |AX|} = \frac{15}{8}.$$

Úloha 41. Nech ABC je rovnostranný trojuholník. Vnútorný bod P trojuholníka ABC sa nazýva *žiariaci*, ak existuje práve 27 polpriamok, ktoré vychádzajú z bodu P a rozdeľujú trojuholník ABC na 27 menších trojuholníkov rovnakého obsahu. Určte počet žiariacich bodov v trojuholníku ABC.

Výsledok. $\binom{26}{2} = 325$

Riešenie. Polpriamky PA, PB, PC sú určite medzi 27-mimi polpriamkami, ktoré vychádzajú zo žiariaceho bodu P: Ak by neboli, dostali by sme v rozdelení štvoruholník. Rozdeľme obvod trojuholníka ABC na 27 častí tak, aby každá strana bola rozdelená na časti rovnakej dĺžky. Takých rozdelení je celkom $\binom{26}{2} = 325$, totiž ak bod A zvolíme za prvý deliaci bod, body B, C môžeme voľne vybrať zo zvyšných 26-tich bodov. Na koniec si všimnime, že každé také rozdelenie zodpovedá práve jednému žiariacemu bodu a naopak. Zjavne polpriamky z každého žiariaceho bodu nám určia jedno také rozdelenie. Naopak, ak máme počty častí a, b, c, na ktoré je každá strana trojuholníka ABC rozdelená, stačí nám za bod P položiť jediný bod v trojuholníku ABC, ktorého vzdialenosti od strán BC, CA, AB sú v pomere $a : b : c$. Priamočiarym výpočtom ľahko overíme, že bod P je naozaj žiariaci bod, ktorého lúče delia strany trojuholníka ABC požadovaným spôsobom.

Úloha 42. Koľko kladných deliteľov čísla 2016^2 menších ako 2016 nie je deliteľom čísla 2016?

Výsledok. 47

Riešenie. Z prvočíselného rozkladu čísla $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ dostávame prvočíselný rozklad čísla $2016^2 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Takže 2016^2 má $11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$ kladných deliteľov z ktorých $\frac{1}{2} \cdot (165 - 1) = 82$ sú menšie ako 2016 — nerátajúc 2016. Deliteľov si rozdelíme do dvojíc (x, y) tak, že $x \cdot y = 2016^2$ a $x < 2016 < y$. Poznamenajme, že 2016 má $6 \cdot 3 \cdot 2 - 1 = 35$ deliteľov menších ako 2016 ktoré sú taktiež deliteľmi 2016^2. Hľadané číslo spĺňajúce zadanie je $82 - 35 = 47$.

Úloha 43. Nech

$$Z_n = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}.$$

Vypočítajte $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{2016}$.

Výsledok. $\frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1)$

Riešenie. Všimnime si, že pre $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} &= \frac{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})((\sqrt{2n+1})^2 + (\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1}) + (\sqrt{2n-1})^2)}{(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})} \\ &= \frac{1}{2}((\sqrt{2n+1})^3 - (\sqrt{2n-1})^3).\end{aligned}$$

Dostávame teda

$$\begin{aligned}Z_1 + \cdots + Z_{2016} &= \frac{1}{2}\big((\sqrt{3})^3 - (\sqrt{1})^3 + (\sqrt{5})^3 - (\sqrt{3})^3 + \cdots + (\sqrt{4033})^3 - (\sqrt{4031})^3\big) \\ &= \frac{1}{2}(4033\sqrt{4033} - 1).\end{aligned}$$

Úloha 44. Z celých čísel $a_0, a_1, a_2 \ldots$ vytvoríme postupnosť nasledovným spôsobom: Ak a_i je deliteľné tromi, tak $a_{i+1} = a_i/3$; v opačnom prípade $a_{i+1} = a_i + 1$. Pre koľko rôznych kladných celých čísel a_0 dosiahne táto postupnosť hodnotu 1 prvýkrát práve v 11-tom kroku (t.j. $a_{11} = 1$, ale $a_0, a_1, \ldots, a_{10} \neq 1$)?

Výsledok. 423

Riešenie. Číslo 1 môžeme dostať len z 3, ktorú zas môžeme dostať len z 2 alebo 9. Ďalej číslo 9 môžeme dostať len z 8 alebo 27; 2 môžeme dostať z 1 alebo 6, z čoho len 6 vyhovuje zadaniu, keďže nechceme dostať číslo 1 skôr. Poďme na to všeobecne a označme P_n množinu kladných celých čísel takých, že postupnosť zo zadania dosiahne 1 práve v n-tom člene práve vtedy, keď $a_0 \in P_n$. Ľahko vidieť, že pre $n \geq 3$ dostaneme množinu P_{n+1} tak, že zoberieme čísla $3x$ pre každé $x \in P_n$ a tiež čísla $x - 1$ pre každé $x \in P_n$ také, že $x - 1$ nie je deliteľné tromi.

Nech p_n je počet prvkov množiny P_n a nech f_n, g_n, resp. h_n označuje počet prvkov množiny P_n, ktoré sú tvaru $3k$, $3k + 1$, resp. $3k + 2$. Všimnite si, že pre $n \geq 3$ sú všetky prvky P_n väčšie než 3, a teda

- $f_{n+1} = p_n$, keďže pre každé $x \in P_n$ existuje $3x \in P_{n+1}$,
- $g_{n+1} = h_n$, keďže pre každé $x \in P_n$, ktoré je tvaru $3k + 2$, existuje $x - 1 = 3k + 1 \in P_{n+1}$ a
- $h_{n+1} = f_n$ z podobných dôvodov.

Odtiaľ dostávame

$$p_n = f_n + g_n + h_n = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3}$$

pre $n \geq 4$. Z počiatočných úvah získame, že $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ a $p_3 = 3$, a teda nasledujúce členy možno dopočítať pomocou uvedenej rekurencie. Požadovaný výsledok je $p_{11} = 423$.

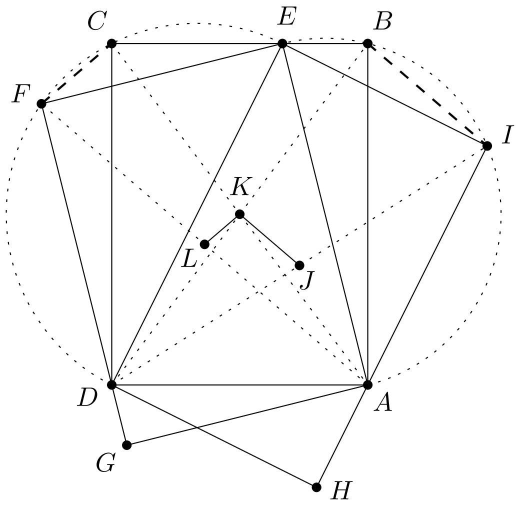
Úloha 45. Nech $ABCD$, $AEFG$ a $EDHI$ sú obdĺžniky so stredmi postupne K, L a J. Predpokladajme, že body A, D, E sú postupne vnútornými bodmi úsečiek HI, FG, BC a $|\angle AED| = 53°$. Určte v stupňoch veľkosť uhla JKL.

Výsledok. 74°

Riešenie. Keďže KJ je stredná priečka trojuholníka BID, platí $KJ \parallel BI$ a podobne tiež $KL \parallel CF$. Takže $|\angle JKL| = |\angle IBA| + |\angle DCF|$. Keďže $|\angle AIE| = |\angle ABE| = 90°$, štvoruholník $BIAE$ je tetivový. Preto platí

$$|\angle IBA| = |\angle IEA| = 90° - |\angle AED| = 37°.$$

Rovnakým spôsobom s využitím tetivového štvoruholníka $CFDE$ určíme $|\angle DCF| = 37°$, teda $|\angle JKL| = 74°$.



Úloha 46. Kubo zobral niekoľko (nie nutne rôznych) čísel z množiny $\{-1, 0, 1, 2\}$ tak, že ich súčet bol 19 a súčet ich druhých mocnín bol 99. Akú najväčšiu hodnotu mohol nadobudnúť súčet tretích mocnín vybraných čísel?

Výsledok. 133

Riešenie. Predpokladajme, že Kubo zobral presne a, b, resp. c čísel rovných -1, 1, resp. 2 (čísla rovné 0 zjavne nehrajú žiadnu úlohu). Podmienku zo zadania môžeme prepísať ako

$$\begin{aligned} -a + b + 2c &= 19, \\ a + b + 4c &= 99. \end{aligned}$$

Naším cieľom je maximalizovať $-a + b + 8c = 19 + 6c$. Avšak sčítaním oboch rovníc dostaneme, že $6c = 118 - 2b$, takže $c \leq 19$. Hodnotu $c = 19$ vieme dostať položením $a = 21$, $b = 2$, takže hľadané maximum súčtu tretích mocnín je $19 + 6 \cdot 19 = 133$.

Úloha 47. Nájdite najväčšie 9-ciferné číslo spĺňajúce nasledujúce vlastnosti:

- všetky jeho cifry sú rôzne;
- pre každé $k = 1, 2, \ldots, 9$ platí, že keď vyškrtneme jeho k-tu cifru (zľava), dostaneme 8-ciferné číslo deliteľné číslom k.

Výsledok. 876 513 240

Riešenie. Nech A_k označuje k-tu cifru hľadaného čísla, takže hľadané číslo je $\overline{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9}$. Celkom máme 10 možných cifier, takže presne jedna cifra, označme ju d, nie je použitá v desiatkovom zápise požadovaného čísla. Nech N_k je číslo vzniknuté vyškrtnutím k-tej cifry.

Vieme, že N_2 je párne, takže $2 \mid A_9$. Ďalej vieme, že číslo N_5 je deliteľné piatimi, takže aj A_9 je deliteľné piatimi. To znamená, že $A_9 = 0$.

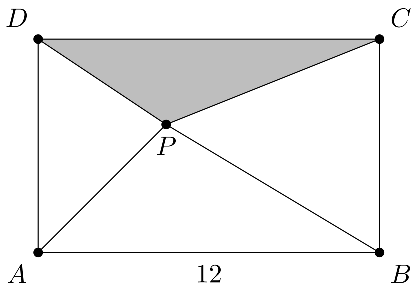
Číslo N_9 je deliteľné 9-timi, takže ciferný súčet čísla N_9, ktorý má hodnotu $1+2+3+4+5+6+7+8+9-d = 45-d$, je deliteľný 9-timi, z čoho dostávame $d = 9$.

Čísla N_8 a N_4 sú deliteľné 4-mi, čo znamená, že cifry A_7, A_8 sú párne. Naviac, číslo N_8 je deliteľné 8-mim, takže dvojciferné číslo $\overline{A_6A_7}$ je deliteľné 4-mi. Taktiež čísla N_3 a N_6 sú deliteľné 3-mi a taktiež aj ciferný súčet hľadaného čísla je deliteľný 3-mi. Z toho vyplýva $\{A_3, A_6\} = \{3, 6\}$.

Keďže hľadáme najväčšie číslo, položme $A_1 = 8$, $A_3 = 6$, $A_6 = 3$. Potom nám ostane $\{A_7, A_8\} = \{2, 4\}$, ale keďže $4 \mid \overline{A_6A_7}$, tak $A_7 = 2$ a $A_8 = 4$.

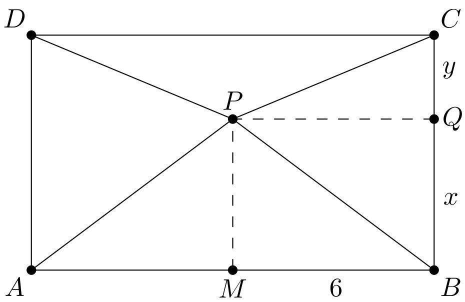
Stačí skontrolovať, že umiestnením zvyšných cifier v klesajúcom poradí dostaneme číslo 876513240, ktoré spĺňa zvyšnú podmienku zo zadania, teda že číslo $N_7 = 87651340$ je deliteľné 7-mimi.

Úloha 48. Bod P leží vnútri obdĺžnika $ABCD$ so stranou $|AB| = 12$. Každý z trojuholníkov ABP, BCP, DAP má svoj obvod číselne rovnaký ako svoju plochu. Aký je obvod trojuholníka CDP?



Výsledok. 25

Riešenie. Všimnite si, že trojuholník má svoju plochu rovnú obvodu práve vtedy, keď polomer jeho vpísanej kružnice je 2. Preto trojuholníky BCP a ADP sú zhodné; totiž ak bod P je bližšie k strane AD než k BC, tak polomer kružnice vpísanej trojuholníku ADP je menší ako polomer kružnice vpísanej trojuholníku BCP. To znamená, že bod P leží na jednej z osí symetrie obdĺžnika $ABCD$.



Nech Q je kolmý priemet bodu P na stranu BC, M je stred úsečky AB a položme $x = |BQ|$, $y = |CQ|$. Obsah trojuholníka ABP je teda $6x$ a s využitím Pytagorovej vety v trojuholníku MBP vyjadríme $|BP| = \sqrt{x^2+6^2}$. Rovnosť plochy a obvodu trojuholníka ABP si vieme prepísať do rovnice

$$6x = 12 + 2\sqrt{x^2+6^2}$$

s jediným kladným riešením $x = 9/2$.

Hodnotu y môžeme nájsť podobne: využijeme, že $|BP| = 15/2$ a $|CP| = \sqrt{y^2+6^2}$, takže z podmienky pre trojuholník BCP dostaneme rovnicu

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(y + \frac{9}{2}\right) = y + \frac{9}{2} + \frac{15}{2} + \sqrt{y^2+6^2}$$

s jediným kladným riešením $y = 5/2$.

Z toho dopočítame $|CP| = 13/2$ a obvod trojuholníka CDP nám vyjde 25.

Úloha 49. Na tabuli je napísaná dvojica celých čísel $(0, 0)$. V každom kroku ju nahradíme nasledovným spôsobom: Ak je na tabuli dvojica (a, b), nahradíme ju dvojicou $(a + b + c, b + c)$, kde buď $c = 247$, alebo $c = -118$. (číslo c si môžeme vybrať v každom kroku). Nájdite najmenší nenulový počet krokov, po ktorých sa na tabuli môže objaviť dvojica $(0, b)$ pre nejaké celé číslo b.

Výsledok. 145

Riešenie. Nech c_i označuje číslo c, ktoré sme použili v i-tom kroku. Po n krokoch, číslo a (t. j. prvé číslo v dvojici) bude $a = nc_1 + (n-1)c_2 + \cdots + c_n$. Stanovme n a nech $s = n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$, kde $\varepsilon_i = 1$, ak $c_i = 247$ a $\varepsilon_i = 0$, ak $c_i = -118$. Definujme t podobným spôsobom s tým, že $\varepsilon_i = 1$ práve vtedy, keď $c_i = -118$. Nepochybne $a = 247s - 118t$, takže podmienka $a = 0$ implikuje $247s = 118t$, avšak čísla 247 a 118 sú nesúdeliteľné takže existuje celé k také, že $s = 118k$ a $t = 247k$. Z toho vyplýva, že

$$365k = s + t = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

a keďže $365 = 5 \cdot 73$, dostávame, že n je aspoň $2 \cdot 73 - 1 = 145$.

Ostáva ukázať, že pre $n = 145$ existujú také čísla c_i, že $247s = 118t$. Nech m je najmenšie kladné číslo, pre ktoré platí

$$1 + 2 + \cdots + m \geq \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n);$$

teraz položme $c_i = -118$ pre $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{r\}$ a $c_i = 247$ vo zvyšných prípadoch, kde

$$r = 1 + 2 + \cdots + m - \frac{247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n).$$

(Číselne $m = 120$ a $r = 97$.) Týmto spôsobom dostaneme presne

$$247s = 118t = \frac{118 \cdot 247}{365} \cdot (1 + 2 + \cdots + n),$$

čo sme chceli dostať.

Úloha 50. Jeden *cikcak* pozostáva z dvoch rovnobežných opačne orientovaných polpriamok, ktorých počiatočné body sú spojené úsečkou. Aký je najväčší počet oblastí, na ktoré môžeme rozdeliť rovinu desiatimi cikcakmi?

Výsledok. 416

Riešenie. Každé dva cikcaky sa pretínajú najviac v deviatich bodoch a ľubovoľný počet cikcakov vieme jednoducho v rovine rozmiestniť tak, aby sa každé dva cikcaky pretínali v práve deviatich bodoch (a zároveň aby každý bod bol priesečníkom najviac dvoch čiar). Uvažujme postupné ukladanie cikcakov. Ak uložíme n-tý cikcak, bude rozdelený $9(n-1)$ priesečníkmi s $n-1$ už uloženými cikcakmi na $9(n-1)+1$ úsekov. Každý úsek rozdelí už existujúcu oblasť na dve. Z toho vyplýva, že pre najväčší počet oblastí určených n cikcakmi, ktorý označíme ako Z_n, platí $Z_1 = 2$ a $Z_n = Z_{n-1} + 9n - 8$ pre $n \geq 2$. Z toho už ľahko odvodíme všeobecný vzťah

$$Z_n = \frac{9}{2}n^2 - \frac{7}{2}n + 1.$$

Konkrétne pre $n = 10$ dostaneme $Z_{10} = 416$.

Úloha 51. Majme štvorsten v ktorom každá jeho stena je trojuholník s dĺžkami strán 1, $\sqrt{2}$, a c a polomer gule opísanej tomuto štvorstenu je $5/6$. Určte c.

Výsledok. $\sqrt{23}/3$

Riešenie. Ukážeme všeobecnejší výsledok: Ak každá stena štvorstenu je trojuholník so stranami a, b, c a polomer gule opísanej štvorstenu je r, tak platí $a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2$. Výsledok našej konkrétnej úlohy získame len dosadením hodnôt zo zadania.

Vpíšme daný štvorsten do kvádra s dĺžkami hrán x, y, z. Hrany štvorstenu sú potom stenové uhlopriečky kvádra, preto podľa Pytagorovej vety platí

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + z^2 = b^2 \quad \text{a} \quad y^2 + z^2 = c^2.$$

Naviac, guľa opísaná štvorstenu je zhodná s guľou opísanou kvádru, ktorej priemer je telesová uhlopriečka kvádra. Preto

$$(2r)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

z čoho po úprave dostaneme dokazovaný vzťah.

Úloha 52. Barman Milan pripravuje veľkú uvítaciu párty. Uložil do radu 2016 kokteilových pohárov, v každom z nich bol lahodný višňový kokteil. Pre dokončenie príprav je jeho úlohou prikryť jeden pohár strieborným viečkom, položiť sochu na vrch vrchnáka a rozdeliť nepárny počet višní do nezakrytých pohárov, do každého pohára najviac jednu višňu. Koľko rôznych rozmiestnení višní a viečka môže Milan dosiahnuť, ak má byť viac višní napravo od viečka ako naľavo?

Výsledok. $2016 \cdot 2^{2013}$

Riešenie. Najprv uvažujme bez ďalších obmedzení všetky možné rozmiestnenia viečka a višní, v ktorých je v každom odkrytom pohári najviac jedna višňa. Celkovo je 2016 spôsobov uloženia viečka a pre každý z nich máme 2^{2015} možností ako rozmiestniť do nezakrytých pohárov najviac jednu višňu, čo je spolu $2016 \cdot 2^{2015}$ rozmiestnení. S využitím binomickej vety

$$0 = (-1+1)^{2016} = \sum_{i=0}^{2016} \binom{2016}{i} (-1)^i = \sum_{i=0}^{1008} \binom{2016}{2i} - \sum_{i=1}^{1008} \binom{2016}{2i-1}$$

zistíme, že počet rozmiestnení, ktoré majú párny počet višní, je rovnaký ako počet rozmiestnení s nepárnym počtom višní. Preto množina M všetkých rozmiestnení viečka a nepárneho počtu višní obsahuje $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2015} = 2016 \cdot 2^{2014}$ prvkov.

Ďalej si všimnime, že ak zoberieme ľubovoľné rozmiestnenie viečka a višní z množiny M a toto rozmiestnenie zrkadlovo prevrátime, dostaneme ďalšie rozmiestnenie z množiny M. Ak pôvodné rozmiestnenie obsahovalo n_1 višní naľavo od viečka a n_2 višní napravo, zrkadlovo prevrátené rozmiestnenie bude mať n_2 višní naľavo a n_1 višní napravo od viečka. Keďže počet višní je nepárny, tak čísla n_1 a n_2 sú rôzne, a teda naozaj ide o dve rôzne rozmiestnenia. Navyše práve jedno z nich bude mať viac višní napravo od viečka. To nám umožňuje rozdeliť všetky rozmiestnenia z množiny M do párov, kde každý pár bude obsahovať dve rozmiestnenia, ktoré sú navzájom symetrické. Keďže každý pár obsahuje práve jedno rozmiestnenie, v ktorom je viac višní napravo od viečka, tak všetkých takých rozmiestnení je $\frac{1}{2} \cdot 2016 \cdot 2^{2014} = 2016 \cdot 2^{2013}$.

Úloha 53. Máme danú drevenú kocku, ktorej povrch je natretý na zeleno. Ďalej máme 33 navzájom rôznych rovín, z ktorých sa každá rovina nachádza medzi nejakými dvoma protiľahlými stenami kocky a je s nimi rovnobežná. Týchto 33 rovín delí kocku na niekoľko menších kvádrov. Počet kvádrov, ktoré majú aspoň jednu stenu zelenú, je rovnaký ako počet kvádrov, ktoré nemajú žiadnu stenu zelenú. Určte celkový počet kvádrov, na ktoré je kocka rozdelená.

Výsledok. 1260 alebo 1344

Riešenie. Ľahko vidieť, že v každom z troch možných smerov musia byť aspoň štyri roviny (ak by v nejakom smere bolo menej ako päť vrstiev kvádrov, tak by počet kvádrov so zelenou stenou bol väčší ako počet kvádrov bez zelenej steny). Označme teda počet rovín v jednotlivých smeroch postupne $a+3$, $b+3$, $c+3$, kde a, b, c sú kladné celé čísla. Z toho, že $(a+3)+(b+3)+(c+3) = 33$, vyplýva $a+b+c = 24$.

Počet všetkých kvádrov je $(a+4)(b+4)(c+4)$ a počet kvádrov bez zelenej steny je $(a+2)(b+2)(c+2)$. Počet kvádrov so zelenou stenou je teda rozdiel týchto hodnôt. Preto podmienku zo zadania si môžeme prepísať ako

$$(a+4)(b+4)(c+4) = 2(a+2)(b+2)(c+2),$$

z čoho po roznásobení, dosadení $a+b+c = 24$ a úprave dostaneme $abc = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Keďže $a+b+c$ je párne, tak buď (1) práve jedno, alebo (2) všetky tri čísla a, b, c sú párne.

V prípade (1), jedno z čísel a, b, c (bez ujmy na všeobecnosti a) musí byť deliteľné 16-timi a keďže $a+b+c = 24 < 2\cdot 16$, dostávame $a = 16$. Z toho vyplýva, že $b+c = 8$ a $bc = 15$, takže $\{b,c\} = \{3,5\}$. Nakoniec môžeme spočítať celkový počet kvádrov: $(a+4)(b+4)(c+4) = 20 \cdot 7 \cdot 9 = 1260$.

V prípade (2) musí bez ujmy na všeobecnosti platiť $a = 4x$, $b = 2y$, $c = 2z$ kde $xyz = 15$ a $2x+y+z = 12$. Jediná možnosť, kedy to môže nastať, je pre $x = 3$ a $\{y,z\} = \{1,5\}$, čo vedie k celkovému počtu častí $(a+4)(b+4)(c+4) = 16 \cdot 6 \cdot 14 = 1344$.

Úloha 54. Majme dané prirodzené číslo n, nech $p(n)$ je súčin nenulových cifier čísla n. Nájdite najväčšieho prvočíselného deliteľa čísla $p(1) + \cdots + p(999)$.

Výsledok. 103

Riešenie. Nech $S = p(1) + \cdots + p(999)$. Rozšírením $A = (0+1+2+\cdots+9)(0+1+2+\cdots+9)(0+1+2+\cdots+9)$ môžeme vidieť, že A by bol výsledok, ak by sme násobili aj nulovými ciframi. Potom je $S = (1+1+2+\cdots+9)(1+1+2+\cdots+9)(1+1+2+\cdots+9) - 1$, pretože máme extra 1 za člen $p(0)$, ktorú nechceme rátať. Takže

$$S = 46^3 - 1 = (46-1)(46^2+46+1) = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103$$

a z toho už vieme vyčítať výsledok.

Úloha 55. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť kladných celých čísel taká, že $9 \mid a_{3k-2}$, $14 \mid a_{3k-1}$ a $19 \mid a_{3k}$ pre všetky kladné celé čísla k. Nájdite najmenšiu možnú hodnotu a_{2016}.

Výsledok. 14478

Riešenie. Môžeme predpokladať, že pre všetky celé čísla $n > 1$ je hodnota a_n najmenšie celé číslo väčšie ako a_{n-1}, ktoré spĺňa podmienku zo zadania. Všimnite si, že pre dané a_{3k} existujú len dve možnosti pre a_{3k+3}: buď $a_{3k+3} = a_{3k} + 19$, alebo $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$. Druhá možnosť nastane práve vtedy, keď existujú celé čísla c, d, $5 \le d \le c \le 9$ také, že $9 \mid a_{3k} + c$ a $14 \mid a_{3k} + d$, totiž vtedy platí $a_{3k+1} = a_{3k} + c$ a $a_{3k+2} = a_{3k} + 14 + d \ge a_{3k} + 19$.

Existuje celkom $\binom{6}{2} = 15$ dvojíc celých čísel (c, d) spĺňajúcich $5 \le d \le c \le 9$. Keďže čísla 9, 14 a 19 sú po dvoch nesúdeliteľné, Čínska zvyšková veta zaručuje, že pre každú takú dvojicu (c, d) existuje práve jedno nezáporné cele číslo a_{3k} menšie ako $9 \cdot 14 \cdot 19$ také, že $19 \mid a_{3k}$, $9 \mid a_{3k} + c$ a $14 \mid a_{3k} + d$. Preto existuje práve 15 členov a_{3k} menších ako $9 \cdot 14 \cdot 19$, pre ktoré $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$. Ľahko vidieť, že rozdiel žiadnych dvoch takých členov nie je 19 a že $9 \cdot 14 \cdot 19 - 19$ nie je také číslo, čo znamená, že $a_{3\ell} = 9 \cdot 14 \cdot 19$ pre nejaké ℓ. Zo skutočnosti, že $a_{3k+3} = a_{3k} + 38$ nastane práve 15-krát môžeme usúdiť, že $\ell = 9 \cdot 14 - 15 = 111$.

Pre členy postupnosti a_n, ktoré nasledujú za členom a_{333}, sú ich zvyšky po delení 9, 14 a 19 rovnaké ako pre členy a_{n-333}. Takže tak získavame vzťah $a_{n+333} = a_n + 9 \cdot 14 \cdot 19$. Ľahko vypočítame, že $a_{18} = 114$, a tak

$$a_{2016} = a_{6 \cdot 333 + 18} = 6 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19 + 114 = 14478.$$

Úloha 56. Nech P je vnútorný bod trojuholníka ABC. Body D, E, F ležia postupne na úsečkách BC, CA, AB tak, že priamky AD, BE, CF sa pretínajú v bode P. Ak viete, že $|PA| = 6$, $|PB| = 9$, $|PD| = 6$, $|PE| = 3$ a $|CF| = 20$, vypočítajte obsah trojuholníka ABC.

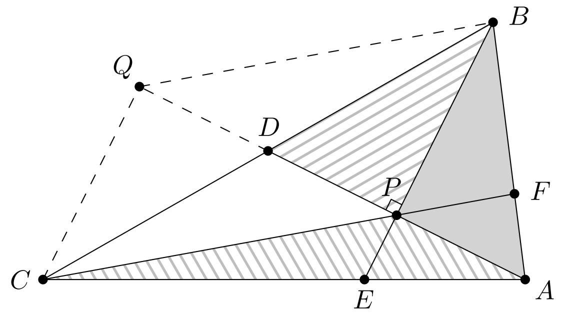
Výsledok. 108

Riešenie. Nech $[XYZ]$ označuje obsah trojuholníka XYZ. Z rovnosti $|AP| = |DP|$ získame rovnosti $[ABP] = [BDP]$ a $[APC] = [DCP]$. Ďalej z rovnosti $3|EP| = |BP|$ vyplýva, že $3[APE] = [ABP]$ a

$$3[CEP] = [BCP] = [BDP] + [DCP] = 3[APE] + [APE] + [CEP],$$

a tak $[CEP] = 2[APE]$. Z toho dostávame, že $[ABP] = [BDP] = [APC] = [DCP]$; z toho vyplýva, že $|BD| = |CD|$.

Položme $k = |FP| : |CP|$. Potom z rovností $|AP| = |DP|$ a $|\angle APF| = |\angle CPD|$ vyplýva $[AFP] = k[DCP]$; podobne dostaneme $[FBP] = 3k[CEP]$. Sčítaním týchto rovností a s využitím predchádzajúcich rovností dostaneme po úpravách rovnosť $[ABP] = 9k[APE]$, z ktorej vyplýva $k = 1/3$. Preto $|FP| = 5$ a $|CP| = 15$. Ak trojuholník CPB doplníme do rovnobežníka $CPBQ$, môžeme si všimnúť, že $|BP|^2 + |PQ|^2 = |BQ|^2$, z čoho vyplýva, že $|\angle DPB| = 90°$.



Z toho môžeme usúdiť, že

$$[ABC] = 4[BDP] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 108.$$

Úloha 57. Nájdite posledné dve cifry pred desatinnou čiarkou čísla $(7 + \sqrt{44})^{2016}$.

Výsledok. 05

Riešenie. Najskôr si všimnime, že číslo $7 - \sqrt{44}$ je ostro medzi 0 a 1. To isté platí aj pre číslo $(7 - \sqrt{44})^{2016}$. Navyše, číslo $(7+\sqrt{44})^{2016} + (7-\sqrt{44})^{2016}$ je celé, čo ľahko vidieť z Binomickej vety (nepárne mocniny $\sqrt{44}$ sa odčítajú). Preto platí

$$\lfloor (7 + \sqrt{44})^{2016} \rfloor = (7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016} - 1.$$

S využitím toho, že $12^2 \equiv 44 \pmod{100}$, dostaneme

$$(7 + \sqrt{44})^{2016} + (7 - \sqrt{44})^{2016} \equiv (7 + 12)^{2016} + (7 - 12)^{2016} \pmod{100},$$

takže nám stačí nájsť posledné dve cifry čísel 19^{2016} a 5^{2016}. Druhé číslo končí na 25, nakoľko $5^3 \equiv 5^2 \pmod{100}$. Pri prvom čísle znovu využijeme Binomickú vetu a získame

$$(20-1)^{2016} \equiv \binom{2016}{2015} \cdot 20^1 \cdot (-1)^{2015} + \binom{2016}{2016}(-1)^{2016} \equiv -19 \pmod{100}$$

(všetky ostatné členy binomického rozvoja sú deliteľné 20^2). Takže hľadané posledné dve cifry sú $-19+25-1=05$.

Iné riešenie. Ako v predchádzajúcom riešení, budeme hľadať posledné dve cifry čísla $(7+\sqrt{44})^{2016}+(7-\sqrt{44})^{2016}$. Keďže čísla $7+\sqrt{44}$, $7-\sqrt{44}$ sú korene kvadratickej rovnice $x^2-14x+5=0$, pre postupnosti $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$, ktoré sú definované ako $\alpha_n=(7+\sqrt{44})^n$ a $\beta_n=(7-\sqrt{44})^n$, platí rekurentný vzťah $\alpha_{n+2}-14\alpha_{n+1}+5\alpha_n=0$ a rovnaký pre β_n. Navyše, rovnaký vzťah platí aj pre ich súčet $\gamma_n=(7+\sqrt{44})^n+(7-\sqrt{44})^n$. Naším cieľom je vypočítať γ_{2016} mod 100.

Položme $\tilde{\gamma}_n=\gamma_n \bmod 100$. Postupnosť $\{\tilde{\gamma}_n\}_{n\geq 0}$ je jednoznačne určená rekurentným vzťahom $\tilde{\gamma}_{n+2}=(14\tilde{\gamma}_{n+1}-5\tilde{\gamma}_n) \bmod 100$ a jej počiatočnými hodnotami $\tilde{\gamma}_0=2$, $\tilde{\gamma}_1=14$. Ďalej, keďže $\tilde{\gamma}_n$ môže nadobúdať len konečne veľa hodnôt a každý člen závisí len od dvoch predchádzajúcich, musí byť táto postupnosť periodická. Vypočítaním niekoľkých začiatočných hodnôt,

$$2, 14, 86, 34, 46, 74, 6, 14, 66, 54, 26, 94, 86, 34, \ldots,$$

vidíme, že počnúc členom $\tilde{\gamma}_2$ je postupnosť periodická s periódou 10. Preto $\tilde{\gamma}_{2016}=\tilde{\gamma}_6=6$. Keďže hľadané číslo je o 1 menšie, hľadané posledné dvojčíslie je 05.