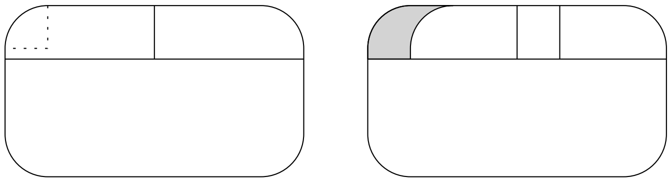
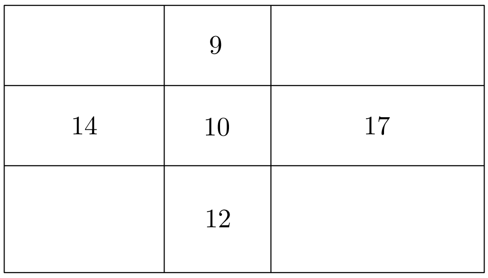
Úloha 1. Okna ve starší tramvaji vypadají jako na obrázku. Všechny zaoblené rohy jsou tvořeny oblouky kružnice o poloměru 10 cm. Posuvné okénko je pootevřené na 10 cm, jak je znázorněno na druhém obrázku. Výška posuvného okénka je 13 cm. Jaký obsah v cm^2 má vzniklý otvor?



Výsledek. 130

Řešení. Otvor má stejný obsah jako plocha, kde pohyblivá část okénka překrývá sousední pevnou část, což je obdélník o rozměrech $10\,\mathrm{cm} \times 13\,\mathrm{cm}$.

Úloha 2. Obdélník je rozdělen na devět obdélníčků, jak znázorňuje obrázek. Do některých obdélníčků je vepsán jejich obvod. Určete obvod velkého obdélníku.



Výsledek. 42

Řešení. Z obrázku vidíme, že obvod obdélníku dostaneme sečtením obvodů čtyř krajních obdélníčků se zadaným obvodem a odečtením obvodu prostředního obdélníčku. Výsledek je tedy

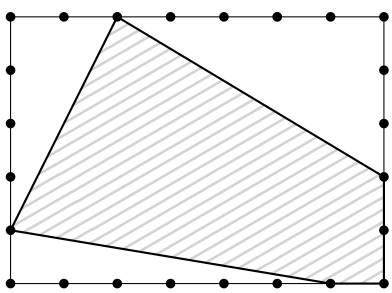
$$14 + 9 + 17 + 12 - 10 = 42.$$

Úloha 3. Kuba odstranil ze čtyřciferného prvočísla jednu cifru a dostal tak 630. Které prvočíslo to bylo?

Výsledek. 6301

Řešení. Protože poslední cifra Kubova prvočísla nemůže být sudé číslo, musí být ono prvočíslo tvaru $630*$. Poslední cifrou nemůže být ani 5, neboť pak by číslo bylo dělitelné pěti. Zbývají tedy možnosti 1, 3, 7 a 9. Protože je však 630 dělitelné třemi, cifry 3 a 9 nepřicházejí v úvahu. Ani 7 nevyhovuje, neboť 7 dělí 630, a tudíž i 6307. Původní číslo tedy bylo 6301.

Úloha 4. Uhlobaron Ptáček si nechal postavit velmi moderní pětiúhelníkový dům na obdélníkovém pozemku o stranách 35 m a 25 m. Půdorys domu je do pozemku zasazen jako na obrázku (sousední body na hranici jsou od sebe vzdáleny 5 m.) Jakou poměrnou část obsahu celého pozemku tvoří zastavěná plocha?

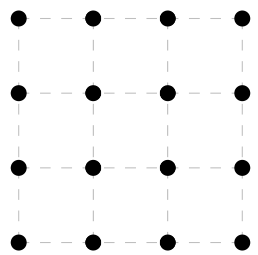


Výsledek. $\frac{41}{70}$

Řešení. Protože nás zajímají pouze poměry obsahů, můžeme si pro zjednodušení výpočtů zvolit 5 m za jednotku. Sečtením obsahů tří pravoúhlých trojúhelníků představujících nezastavěnou plochu se dopracujeme k výsledku

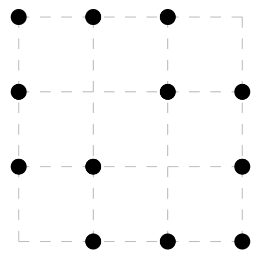
$$1 - \frac{1}{7 \cdot 5}\left(\frac{5 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2}\right) = \frac{41}{70}.$$

Úloha 5. Čtvercová mřížka tvořená 16 body, kterou vidíme na obrázku, obsahuje vrcholy devíti čtverců 1×1, čtyř čtverců 2×2 a jednoho čtverce 3×3, celkem tedy 14 čtverců, jejichž strany jsou rovnoběžné se stranami mřížky. Jaký nejmenší počet bodů lze z mřížky odebrat, aby po jejich odstranění každému ze 14 čtverců scházel nejméně jeden vrchol?



Výsledek. 4

Řešení. Odebrat čtyři body je nutné, neboť čtyři čtverce 1×1 v rozích mřížky nemají žádný společný vrchol. Příkladem čtyř bodů, které odstranit stačí, jsou dva protilehlé rohy mřížky a dva vnitřní body na druhé úhlopříčce.



Úloha 6. Určete poslední číslici součtu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2017^2.$$

Výsledek. 5

Řešení. Číslice na místě jednotek se u čtverců přirozených čísel pravidelně opakuje s periodou 10. Máme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385,$$

poslední číslice tohoto čísla je 5. Proto poslední číslicí čísla $1^2 + 2^2 + \cdots + 2010^2$ je 5, neboť $201 \cdot 5 = 1005$. Navíc poslední číslice součtu $2011^2 + 2012^2 + \cdots + 2017^2$ je 0. Dohromady dostáváme, že hledaná číslice je 5.

Úloha 7. Vyjádřete podíl

$$\frac{0{,}\overline{2}}{0{,}\overline{24}}$$

jako zlomek $\frac{a}{b}$ v základním tvaru s přirozenými čísly a a b.

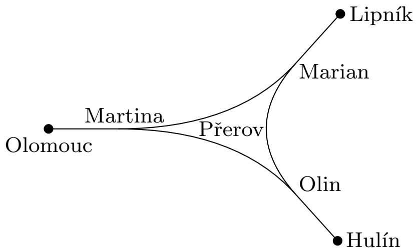
Poznámka: Horní pruh značí periodický desetinný rozvoj, kupříkladu $0{,}\overline{123} = 0{,}123123\ldots$

Výsledek. $\frac{11}{12}$

Řešení. Daný podíl se dá přepsat následujícím způsobem:

$$\frac{0{,}\overline{2}}{0{,}\overline{24}} = \frac{0{,}\overline{22}}{0{,}\overline{24}} = \frac{22 \cdot 0{,}\overline{01}}{24 \cdot 0{,}\overline{01}} = \frac{11}{12}.$$

Úloha 8. Přerovský železniční uzel má tvar trojúhelníku. Olin, Martina a Marian provádějí špionáž a sledují všechny vlaky, které projíždějí Přerovem. Svá pozorovací stanoviště mají pečlivě ukryta v blízkosti trati postupně ve směru na Hulín, na Olomouc a na Lipník. Během jednoho dne Olin napočítal 190, Martina 208 a Marian 72 vlaků. Kolik vlaků jelo ten den mezi Olomoucí a Hulínem, pokud víme, že žádný vlak nevyjíždí z Přerova, nekončí v něm, ani se v něm nemůže otočit a vrátit se zpět?



Výsledek. 163

Řešení. Označme o, l, h postupně počty vlaků, které projely mezi Lipníkem a Hulínem, Hulínem a Olomoucí a Olomoucí a Lipníkem. Olin na svém stanovišti viděl všechny vlaky, které projely mezi Hulínem a zbylými dvěma městy, tedy $190 = o + l$. Analogicky platí $208 = l + h$ a $72 = o + h$. Sečtením prvních dvou rovnic a odečtením třetí dostaneme $2l = 190 + 208 - 72$. Po úpravě vyjde $l = 163$.

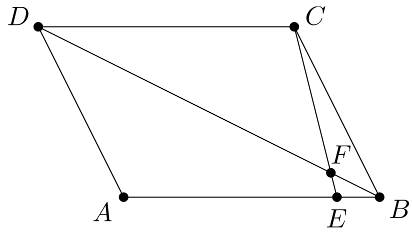
Úloha 9. Najděte všechna přirozená čísla $x < 10\,000$ taková, že x je čtvrtou mocninou nějakého sudého čísla a zároveň můžeme zpřeházením cifer x dostat čtvrtou mocninu některého lichého čísla. Cifry přitom nesmíme přehazovat tak, aby výsledné číslo začínalo nulou.

Výsledek. 256

Řešení. Předpokládejme, že x je rovno a^4 pro nějaké sudé číslo a a b^4 je čtvrtá mocnina lichého čísla, kterou dostaneme vhodným zpřeházením cifer x.

Víme, že $10\,000 = 10^4$, takže a i b jsou menší než 10. Snadno zjistíme, že čtvrté mocniny sudých jednociferných čísel končí vždy šestkou. Jediné dvě čtvrté mocniny lichých jednociferných čísel obsahující číslici 6 jsou $5^4 = 625$ a $9^4 = 6\,561$. V prvním případě je jediná vyhovující možnost $x = 4^4 = 256$. Ve druhém případě si můžeme všimnout, že libovolné číslo vzniklé permutací cifer 9^4 bude dělitelné třemi (ciferný součet zůstává stejný), nutně tedy $a = 6$. Ale $6^4 = 1296$ a $9^4 = 6561$. Tato dvě čísla nejsou složená ze stejných cifer, a proto je 256 jediným řešením.

Úloha 10. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Nechť E je bod na straně AB splňující $|EB| = \frac{1}{5}\,|AE|$ a nechť úsečka CE protíná úhlopříčku BD v bodě F. Určete poměr $|BF| : |BD|$.



Výsledek. 1 : 7

Řešení. Trojúhelníky EBF a CDF jsou podobné s koeficientem podobnosti $|BE| : |CD| = 1 : 6$. Stejný poměr mají i délky $|BF|$ a $|DF|$, takže $|BF| : |BD| = 1 : 7$.

Úloha 11. Ve velké stáji je sto boxů, které jsou označené čísly 1 až 100. V jednom boxu mohou být jeden, dva, nebo tři koně. Je známo, že v boxech 1 až 52 je dohromady 56 koní a v boxech 51 až 100 je jich celkem 150. Kolik koní je dohromady ve stáji?

Výsledek. 200

Řešení. Vzhledem k tomu, že v jednom boxu mohou být nejvýše tři koně, musejí být v každém z boxů 51 až 100 právě tři. Počet koní v prvních padesáti boxech je tedy roven $56 - 2 \cdot 3 = 50$ a celkově je ve stáji $50 + 150 = 200$ koní.

Úloha 12. Lucien napsal na tabuli červenou barvou číslo 3 a zelenou číslo 2. Pak vždy, když se mu aktuální čísla omrzela, obě smazal a místo nich napsal červeně jejich součet a zeleně absolutní hodnotu jejich rozdílu. Jaké bylo 2017. červené číslo, které se objevilo na tabuli?

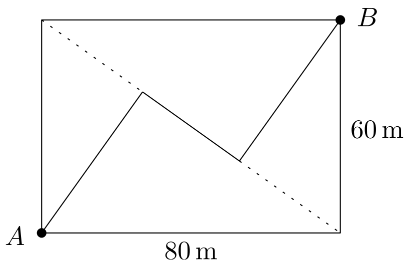
Výsledek. $3 \cdot 2^{1008}$

Řešení. Všimněme si, že z čísel na tabuli bude vždy červené větší než zelené. Pokud označíme n-té červené číslo jako c_n a n-té zelené číslo jako z_n, pak platí $c_{n+1} = c_n + z_n$ a $z_{n+1} = c_n - z_n$, z čehož pro následující čísla odvodíme vztah

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= c_{n+1} + z_{n+1} = 2c_n, \\ z_{n+2} &= c_{n+1} - z_{n+1} = 2z_n. \end{aligned}$$

Červené i zelené číslo se tedy po každých dvou krocích zdvojnásobí. Mezi prvním a 2017. číslem je právě 2016 kroků, proto je hledané číslo rovno $3 \cdot 2^{1008}$.

Úloha 13. Červená Karkulka stojí v rohu A obdélníkového arboreta. Po svých předchozích zkušenostech v něm nechce trávit více času, než je nezbytně nutné, a ráda by se co nejrychleji dostala do protějšího rohu B. Má dvě možnosti: buď jít podél hranice a urazit 140 metrů, nebo jít klikatou cestičkou s dvěma pravoúhlými zatáčkami, jak je nakresleno na obrázku. Pomozte Karkulce rozhodnout se, kudy jít, a vyjádřete délku klikaté cestičky v metrech.



Výsledek. 124

Řešení. Všimněme si, že prvním a třetím úsekem cesty jsou výšky v trojúhelnících tvořených stranami obdélníku a zakreslenou úhlopříčkou. Z Pythagorovy věty plyne, že délka úhlopříčky uvažovaného obdélníku je $\sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ metrů. Délku čárkované úsečky na úhlopříčce obdélníku můžeme spočítat například pomocí Eukleidovy věty o odvěsně jako $60^2/100 = 36$ metrů. Zřejmě jsou délky obou čárkovaných úseček na úhlopříčce stejné, a délka cesty vedoucí po diagonále je tedy $100 - 2 \cdot 36 = 28$ metrů. Následně například z Eukleidovy věty o výšce dostaneme, že délka zbylých dvou úseků cesty je $\sqrt{36 \cdot 64} = 48$ metrů. Celá cesta má pak délku $2 \cdot 48 + 28 = 124$ metrů.

Úloha 14. Osmiciferný palindrom je číslo tvaru $\overline{abcddcba}$, přičemž cifry a, b, c a d nemusejí být nutně různé. Kolik osmiciferných palindromů má tu vlastnost, že z nich lze vynecháním několika cifer získat číslo 2017?

Výsledek. 8

Řešení. Vzhledem k tomu, že číslo 2017 je tvořeno čtyřmi různými číslicemi, musejí být cifry a, b, c a d navzájem různé a každou z nich musíme vynechat právě jednou. Podle toho, kterou z číslic a jsme z palindromu vynechali, musí být a buď první, nebo poslední cifra čísla 2017.

Jak pro $a = 2$, tak pro $a = 7$ se problém redukuje na šesticiferný palindrom. Například v případě $a = 2$ pak vyvstává otázka, z kolika šesticiferných palindromů lze odebráním několika cifer dostat „číslo" 017. Znovu máme na výběr ze dvou možností a v rámci každé z nich řešíme stejný problém pro čtyřciferné palindromy a jedno z dvojčíslí 01 nebo 17. Poté máme opět dvě možnosti. V kroku následujícím už ale máme pouze jednu, protože dvojciferný palindrom, ze kterého má vzniknout daná cifra, je daný jednoznačně. Dohromady je to $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ možností.

Úloha 15. Pro přirozené číslo n označme $\mathrm{S}(n)$ součet jeho cifer a $\mathrm{P}(n)$ jejich součin. Kolik existuje přirozených čísel n takových, že $n = \mathrm{S}(n) + \mathrm{P}(n)$?

Výsledek. 9

Řešení. Pro jednociferná přirozená čísla n platí, že $\mathrm{S}(n) + \mathrm{P}(n) = 2n > n$; můžeme je tedy vyloučit. Nyní nechť $m \geq 1$ a $n = a_m 10^m + \cdots + a_0$ pro nenulové a_m. Pak platí série odhadů

$$\begin{aligned} n - \mathrm{S}(n) - \mathrm{P}(n) &= a_m 10^m + \cdots + a_0 - (a_m + \cdots + a_0) - a_m \cdots a_0 \\ &= (10^m - 1 - a_{m-1} \cdots a_0) a_m + (10^{m-1} - 1) a_{m-1} + \cdots + 9a_1 \\ &\geq (10^m - 1 - 9^m) a_m \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Rovnost může zřejmě nastat pouze pro $m = 1$, tedy pro dvojciferná čísla. Pro $m = 1$ máme

$$10a_1 + a_0 = n = \mathrm{S}(n) + \mathrm{P}(n) = a_1 + a_0 + a_1 a_0,$$

odkud dostáváme $a_0 = 9$. Existuje právě devět dvojciferných čísel, která končí na devítku.

Úloha 16. Na slovenském Ministerstvu švihlé chůze mají 100 zaměstnanců. Vedoucí oddělení bere měsíčně 5 000 €, řadový pracovník 1 000 € a brigádník 50 €. Celkově vydá ministerstvo na platech 100 000 €. Určete, kolik vedoucích oddělení ministerstvo má, pokud víte, že zaměstnává alespoň jednoho vedoucího oddělení, alespoň jednoho řadového pracovníka a alespoň jednoho brigádníka.

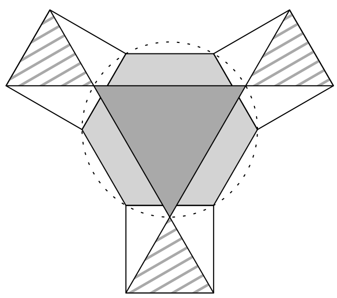
Výsledek. 19

Řešení. Označme x, y a z postupně počty vedoucích oddělení, řadových pracovníků a brigádníků. Ze zadání dostáváme následující soustavu rovnic v přirozených číslech:

$$x + y + z = 100, \tag{1}$$
$$5\,000x + 1\,000y + 50z = 100\,000. \tag{2}$$

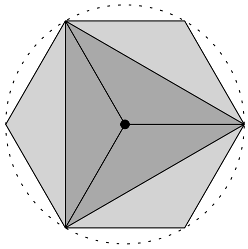
Vyjádřením z z rovnice (2) a dosazením do rovnice (1) získáme vztah $z = 2000 - 20y - 100x$. Pravá strana je dělitelná dvaceti, a proto $z = 20k$ pro nějaké přirozené k. Dosazením do vztahu a vydělením dvaceti pak obdržíme rovnost $5x + y + k = 100$. Odečteme-li rovnici (1), dostaneme $4x = 19k$. Čísla 4 a 19 jsou nesoudělná, proto je x násobkem devatenácti. Protože jsou x, y, z kladná čísla, plyne z (2), že $x < 20$. Z předchozích dvou pozorování dostáváme, že $x = 19$. Soustava má tudíž jediné řešení $(x, y, z) = (19, 1, 80)$.

Úloha 17. Mozaika na obrázku je tvořena pravidelnými mnohoúhelníky. Šestiúhelník a šedý trojúhelník jsou vepsány do stejné kružnice a obsah každého ze tří vyšrafovaných trojúhelníků je 17. Určete obsah šedého trojúhelníku.



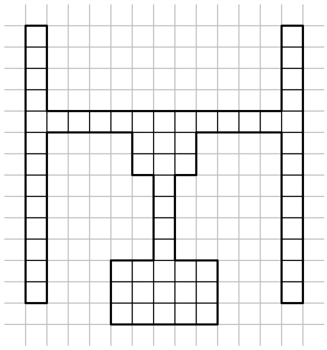
Výsledek. 51

Řešení. Otočíme-li šedý trojúhelník o 30° kolem středu kružnice, jeho vrcholy splynou s vrcholy šestiúhelníku. Z obrázku níže je patrné, že poměr obsahů trojúhelníku a šestiúhelníku je 1 : 2.



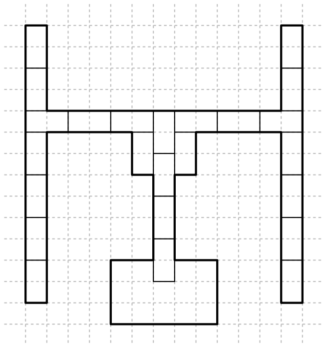
Dále víme, že vyšrafované trojúhelníky jsou rovnostranné a délka jejich strany je rovna délce strany šestiúhelníku, tedy obsah šestiúhelníku je šestinásobkem obsahu vyšrafovaného trojúhelníku. Obsah šedého trojúhelníku (jakožto polovina obsahu šestiúhelníku) je pak $3 \cdot 17 = 51$.

Úloha 18. Připravuje se rekonstrukce Masarykova nádraží, v rámci níž bude položena zcela nová dlažba. Před nástupišti by se měly nacházet barevné obrazce, které budou mít tvar jako na obrázku a budou vydlážděny dlaždicemi 1×2. Kolika způsoby lze jeden takový obrazec vydláždit? Dlaždice jsou všechny stejné a dvě vydláždění považujeme za různá, pokud je na jednom z nich spára v místě, kde na druhém je dlaždice.

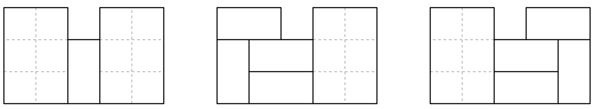


Výsledek. 15

Řešení. Začneme-li dláždit od „úzkých částí", zjistíme, že dláždění je určené jednoznačně až na spodní obdélník 3×5:

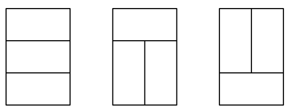


Máme dohromady tři možnosti, jak tento obdélník dodláždit. Buď položíme další dlaždici ve stejném směru jako tu, jež do obdélníku přečnívá, a zbudou nám dva menší obdélníky 3×2 (obrázek (1)), nebo ji položíme kolmo (obrázky (2) a (3)). V těchto případech máme dláždění dáno jednoznačně až na jeden menší obdélník 3×2.



(1) (2) (3)

Snadno spočítáme, že oblast 3×2 může být vydlážděna právě třemi způsoby, tedy dohromady máme $3 \cdot 3 = 9$ způsobů, jak dokončit dláždění v prvním případě, a po třech způsobech dodláždění zbylých dvou případů. Celkem máme $9 + 3 + 3 = 15$ možných způsobů, jak vydláždit směrovky.



Úloha 19. Jirka si hrál s celým kladným číslem n. Na začátku si vybral nějakého jeho kladného dělitele, vynásobil ho čtyřmi a výsledek odečetl od n. Dostal tak číslo 2017. Najděte všechny možné hodnoty čísla n.

Výsledek. 2021, 10085

Řešení. Pro vybraného dělitele d čísla n platí $n = kd$, kde k je nějaké celé číslo. Zadání úlohy převedeme na rovnici

$$kd - 4d = (k - 4)d = 2017.$$

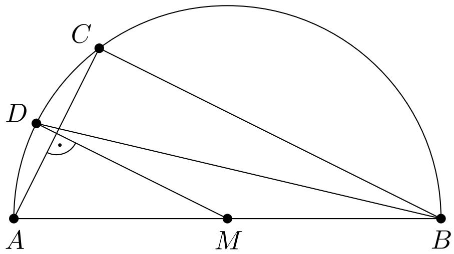
Protože 2017 je prvočíslo, připadá v úvahu jen $d = 1$ nebo $d = 2017$. V prvním případě dostaneme $n = k = 2017 + 4 = 2021$. Ve druhém případě pak $k = 5$, a tedy $n = 2017 \cdot 5 = 10085$.

Úloha 20. Anička s Davidem jsou dobří kamarádi a pokaždé, když sedí vedle sebe, si začnou povídat. Paní učitelka chce posadit pět dětí, mezi nimi i Aničku a Davida, na pět židlí rozmístěných kolem kulatého stolu, aby mohly společně pracovat na projektu. Nechce, aby Anička s Davidem seděli vedle sebe a vyrušovali. Kolika způsoby může děti rozesadit? Rozesazení, která se liší natočením, považujeme za různá.

Výsledek. 60

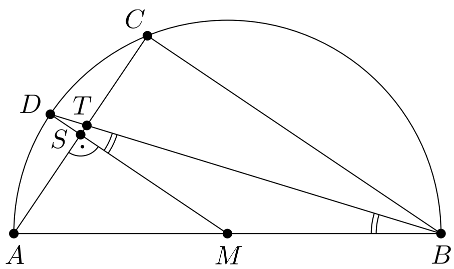
Řešení. Posadí-li se ke stolu Anička (na jednu z pěti židlí), pak má paní učitelka jen dvě možnosti, kam posadit Davida. To dává dohromady $5 \cdot 2$ možností. Vzhledem k tomu, že pro každou z nich můžeme ostatní děti rozesadit $3!$ způsoby, dostáváme celkem $5 \cdot 2 \cdot 3! = 60$ možností.

Úloha 21. Na obrázku je AB průměrem kružnice se středem v M. Pro body C a D na kružnici platí, že $AC \perp DM$ a $|\sphericalangle MAC| = 56°$. Určete (ve stupních) velikost ostrého úhlu mezi přímkami AC a BD.



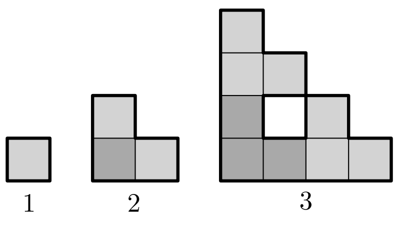
Výsledek. 73°

Řešení. Označme S a T postupně průsečíky přímek AC a DM a přímek AC a BD.



Jelikož $|\sphericalangle MAC| = 56°$ a $AC \perp DM$, je $|\sphericalangle SMA| = 180° - 56° - 90° = 34°$. Navíc $|\sphericalangle BMD| = 180° - |\sphericalangle SMA| = 146°$. Víme, že DM a BM jsou poloměry kružnice, a tedy je trojúhelník BDM rovnoramenný a $|\sphericalangle MDB| = 17°$. Naším cílem je najít $|\sphericalangle CTB| = |\sphericalangle STD|$. Druhý z úhlů můžeme spočítat z pravoúhlého trojúhelníku DST, pokud víme, že $|\sphericalangle SDT| = |\sphericalangle MDB|$. Výpočtem dostaneme, že $|\sphericalangle CTB| = 73°$.

Úloha 22. Tvoříme posloupnost obrazců. Prvním obrazcem je čtvereček 1×1 a každý další vznikne slepením tří kopií předchozího obrazce (podél strany jednoho z jednotkových čtverečků), jak je znázorněno na obrázku. Jaká je délka zvýrazněné hranice šestého obrazce?



Výsledek. 488

Řešení. Označme f_n délku zvýrazněné hranice n-tého obrazce. Všimněme si, že $n+1$-tém kroku k sobě lepíme tři n-té obrazce podél dvou hraničních úseček délky jedna, které potom už nejsou součátí hranice. Tedy $f_{n+1} = 3 \cdot f_n - 2 \cdot 2$ pro všechna $n > 1$ a zároveň $f_1 = 4$. Snadno dopočítáme $f_6 = 488$.

Úloha 23. Kolem velikého kulatého stolu s 2017 židlemi sedí andělé a démoni (každá židle je obsazena jedním z nich). Démoni vždy lžou a andělé vždy mluví pravdu. Každý u stolu řekl, že sedí mezi andělem a démonem. Z blíže nespecifikovaného důvodu se právě jeden anděl spletl. Kolik andělů sedí u stolu?

Výsledek. 1345

Řešení. Na začátku si všimněme, že žádní dva démoni nesedí vedle sebe. Pokud by tomu tak bylo, musel by z každé strany této dvojice sedět démon. Dalším použitím stejného argumentu pak dostáváme, že u stolu sedí pouze démoni. To není pravda, protože u stolu sedí alespoň jeden anděl.

Pokud na chvíli zapomeneme na anděla, který se spletl, sedí každý anděl vedle démona a jiného anděla. Celé osazenstvo je tedy možné rozdělit na trojice anděl-anděl-démon. Anděla, který se spletl, můžeme buď posadit mezi dva anděly, nebo spolu s jedním dalším démonem vtěsnat mezi anděla a démona.

V prvním případě je zbytek počtu účastníků po dělení třemi 1 a ve druhém 2. Vzhledem k tomu, že 2017 dává zbytek jedna, musí nastat první varianta a andělů je celkem $\frac{2}{3} \cdot 2016 + 1 = 1345$.

Úloha 24. Najděte všechna kladná reálná čísla x splňující

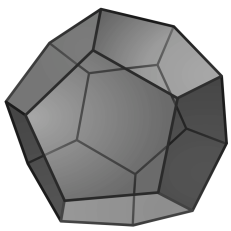
$$x^{2017x} = (2017x)^x.$$

Výsledek. $\sqrt[2016]{2017}$

Řešení. Protože x je nezáporné, můžeme celou rovnici umocnit na $\frac{1}{x}$. Tím dostaneme rovnici $x^{2017} = 2017x$ neboli $x^{2016} = 2017$. Řešením je proto $x = \sqrt[2016]{2017}$.

Úloha 25. Vasil musí za trest obarvit hrany pravidelného dvanáctistěnu. Má to ale háček – žádnou hranu nesmí obarvit vícekrát a jednou barvou může malovat vždy jen jedním tahem po hranách, které spolu sousedí nějakým vrcholem. Když se pak dostane do nějakého vrcholu, z nějž vedou jen obarvené hrany, nebo když se prostě rozhodne skončit, musí si vzít fix nějaké barvy, kterou ještě nepoužil, a začít nový tah. Kolik nejméně barev potřebuje k obarvení všech hran?

Poznámka: Pravidelný dvanáctistěn je pravidelné trojrozměrné těleso s dvanácti pětiúhelníkovými stěnami jako na obrázku:

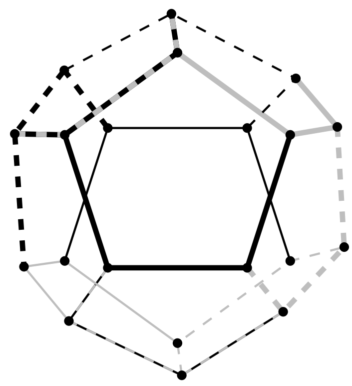


Výsledek. 10

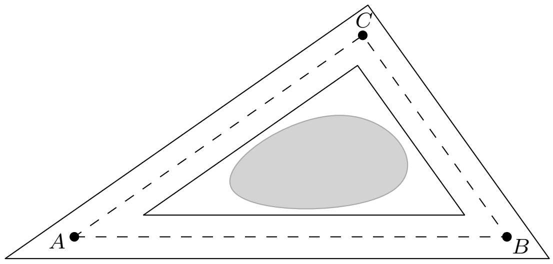
Řešení. Pravidelný dvanáctistěn má dvacet vrcholů a v každém se stýkají tři hrany. Nakresleme si graf, v němž vrcholy a hrany reprezentují vrcholy a hrany dvanáctistěnu.

Pokaždé, když Vasil mění barvu, odstraňme z grafu všechny obarvené hrany. Všimněme si, že pokud Vasil vybarví hrany v uzavřeném cyklu, pak zůstane parita počtu hran vycházejících z každého vrcholu stejná. Jsou-li naopak počáteční a koncový vrchol odebíraného úseku různé, pak se změní parita počtu hran vycházejících z těchto dvou vrcholů. Vzhledem k tomu, že do každého vrcholu vedou tři hrany, musí být každý vrchol alespoň jednou počáteční nebo koncový, tedy barev musí být alespoň deset.

Deset barev stačí, jak ukazuje následující obrázek:

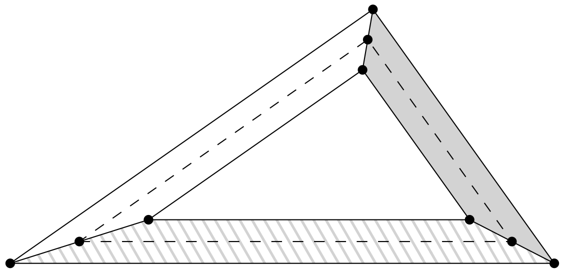


Úloha 26. Zahradní architekt Pepa má v plánu si okolo jezírka postavit trojúhelníkový chodníček. Jeho střed bude určen trojúhelníkem ABC o stranách délek $a = 80\,\mathrm{m}$, $b = 100\,\mathrm{m}$ a $c = 120\,\mathrm{m}$. Okraje chodníčku mají být se stranami trojúhelníka rovnoběžné a vzdálené od nich 1 m. Kolik m^3 štěrku bude Pepa potřebovat, pokud chce chodníček pokrýt 4 cm vysokou vrstvou štěrku?



Výsledek. 24

Řešení. Chodníček můžeme rozdělit na tři lichoběžníky s výškou 2 m a středními příčkami postupně a, b a c.



Obsah lichoběžníku lze vyjádřit jako součin délky střední příčky a výšky. Plocha chodníčku je tedy

$$2 \cdot (80 + 100 + 120)\,\mathrm{m}^2 = 2 \cdot 300\,\mathrm{m}^2 = 600\,\mathrm{m}^2.$$

Objem potřebného štěrku spočítáme jako součin plochy chodníčku a tloušťky vrstvy, kterou na něj chceme nasypat, což je $600\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}04\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{m}^3$.

Úloha 27. Najděte všechny čtyřciferné čtverce tvaru $\overline{xxyy}$, kde x a y jsou ne nutně různé číslice. Poznámka: Čtvercem zde rozumíme druhou mocninu kladného celého čísla.

Výsledek. 7744

Řešení. Označme hledané čtyřciferné číslo N. Potom

$$N = 1000x + 100x + 10y + y = 11(100x + y),$$

takže N je dělitelné jedenácti. Vzhledem k tomu, že N je čtverec, musí být dělitelné dokonce 11^2 a můžeme ho zapsat ve tvaru $N = 11^2k^2$, kde k je nějaké přirozené číslo. Při tomto značení platí, že $100x + y = 11k^2$. Levá strana uvedené rovnosti je trojciferné číslo $\overline{x0y}$. K tomu, aby na pozici desítek mohla vyjít nula, musí být k^2 dvojciferný čtverec s ciferným součtem 10. Jediný takový čtverec je $8^2 = 64$. Dosazením dostaneme $100x + y = 11 \cdot 8^2$ a $N = 11^2 \cdot 8^2 = 88^2 = 7744$.

Úloha 28. Na Matějské pouti probíhá loterie. Ve čtyřech identických bednách se nachází celkem 18 bílých a 14 černých míčků. Soutěžící si vybere jednu z těchto čtyř beden a z ní vytáhne jeden míček. Pokud je vytažený míček bílý, soutěžící vyhrál, a pokud je černý, prohrál.

Je-li například rozložení míčků $(6,6)$, $(5,3)$, $(4,0)$, $(3,5)$, kde dvojice (b,c) označuje postupně počet bílých a černých míčků v bedně, potom je šance na výhru $\frac{5}{8}$.

Každý 1000. účastník loterie hraje superhru. Na začátku může míčky sám rozdělit do čtyř beden tak, aby byl v každé z nich alespoň jeden. Bedny jsou poté zamíchány, takže není možné určit, která je která, a účastník si vytáhne míček stejným způsobem jako výše. Jaká je největší možná šance na výhru v superhře?

Výsledek. $\frac{51}{58}$

Řešení. Nechť je 1000. účastník loterie Emil. Pokud Emil rozloží míčky tak, že do tří beden dá po jednom bílém míčku a zbytek nechá v poslední bedně, tj. $(1,0)$, $(1,0)$, $(1,0)$, $(15,14)$, pak je jeho šance na výhru $\frac{1}{4}(1+1+1+\frac{15}{29})=\frac{51}{58}$.

Pravděpodobnost, že Emil prohraje, je rovna součtu pravděpodobností, že si vytáhne jednotlivé černé míčky. Pravděpodobnost, že černý míček bude vytažen, je nejmenší, pokud je v krabici s co největším počtem míčků. Z toho vyplývá, že výše uvedené rozložení míčků dává Emilovi skutečně největší šanci na výhru.

Úloha 29. Motorová vozidla se na závodech pohybují konstantní rychlostí. Okolo stojícího diváka projel autobus, po t hodinách kamion a po dalších t hodinách motocykl. O něco dále na trati projela kolem jiného fanouška tato tři vozidla ve stejných intervalech, ale v jiném pořadí, a to autobus, motocykl, kamion. Jaká je rychlost autobusu v km/h, jestliže kamion jede rychlostí 60 km/h a motocykl rychlostí 120 km/h?

Výsledek. 80

Řešení. Motocykl projel okolo prvního fanouška t hodin po kamionu a okolo druhého t hodin před ním. Motocykl tedy ujede vzdálenost mezi diváky o $2t$ hodin rychleji než kamion. Ze zadání víme, že motocykl se pohybuje dvakrát rychleji než kamion, takže vzdálenost mezi diváky ujede za polovinu času. Kamionu trvá $4t$ hodin, než se od prvního fanouška dostane ke druhému, zatímco motocyklu jen $2t$ hodin.

Autobus minul prvního diváka o t hodin dříve a druhého o $2t$ hodin dříve než kamion. Protože kamionu zabere cesta mezi fanoušky $4t$ hodin, ujede autobus stejnou vzdálenost za $3t$ hodin. Rychlost autobusu tedy dosahuje $\frac{4}{3}$ rychlosti kamionu, což je 80 km/h.

Úloha 30. Najděte všechny způsoby, jak se dají do obdélníčků v níže uvedeném výroku vepsat přirozená čísla tak, aby byl pravdivý: „V tomto výroku je $\boxed{}$% číslic větších než 4, $\boxed{}$% číslic menších než 5 a $\boxed{}$% číslic rovných 4 nebo 5“.

Výsledek. 50, 50, 60

Řešení. Je zřejmé, že ve výroku nemůže být více než deset číslic. S ohledem na již známé číslice si pak všimneme, že čísla vyplněná do prvních dvou obdélníčků musejí být alespoň 20 a číslo vyplněné do toho třetího nejméně 40. Celkový počet číslic je tudíž 10 a všechna čísla v obdélníčcích proto musejí končit nulou. Můžeme si je tedy označit po řadě $\overline{a0}$, $\overline{b0}$ a $\overline{c0}$, přičemž a, b a c jsou cifry splňující $a+b=10$.

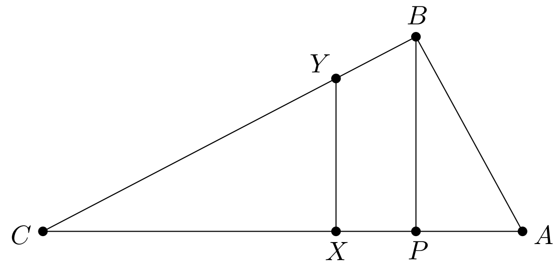
Poněvadž se mezi číslicemi vyskytují minimálně dvě větší než 4 a minimálně pět menších či rovných 4, platí $5 \geq a \geq 2$. Navíc alespoň jedna z cifer a a b je větší než 4, a tedy dokonce $5 \geq a \geq 3$.

Z toho, že máme již čtyři číslice rovny buď 4, nebo 5, plyne $c \geq 4$. Protože definice $\overline{c0}$ % vylučuje případ $c=4$, musí být $c \geq 5$, odkud plyne $5 \geq a \geq 4$. V případě, že $a=4$, dostáváme $b=6$, pak ale pro žádné $c \geq 5$ není možné dostat pravdivý výrok, jak požaduje zadání. Pokud však $a=5$, pak $b=5$ a výrok je pravdivý pro $c=6$.

Úloha 31. Vaškův dobytek se pase na trojúhelníkové louce ABC. Protože jeho strakaté krávy se nesnesou s těmi jednobarevnými, postavil Vašek dvacet metrů dlouhý plot kolmý na stranu AC, který začíná v bodě P na této straně a končí v bodě B, jímž louku rozdělil na dva menší pravoúhlé trojúhelníky. To však záhy vyvolalo protesty strakatých krav (pasoucích se v části s bodem A), které poukázaly na to, že $|AP|:|PC|=2:7$, a požadovaly spravedlivější dělení. Vašek tedy nahradil plot novým, jenž je rovnoběžný s tím starým a má oba konce na hranici louky, avšak dělí tuto louku na dvě části o stejném obsahu. Jaká je délka nového plotu v metrech?

Výsledek. $30\sqrt{\frac{2}{7}}$

Řešení. Protože trojúhelník PBC má větší obsah než trojúhelník PAB, je konec nového plotu na straně AC (označme jej X) vnitřním bodem úsečky CP a druhý konec (označme jej Y) leží na straně BC. Trojúhelníky PBC a XYC jsou podobné, proto $|XY| : |XC| = |PB| : |PC|$.



Protože obsah trojúhelníku XYC je polovinou obsahu trojúhelníku ABC, platí

$$\frac{1}{2} \cdot |XY| \cdot |XC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot |AC|$$

neboli

$$|XY|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|XY|}{|XC|} \cdot |PB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot |PB|^2 \cdot \frac{|AP| + |PC|}{|PC|},$$

a tudíž

$$|XY| = |PB| \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|AP|}{|PC|}\right)} = 30\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Úloha 32. Na tabuli bylo napsáno pět reálných čísel (ne nutně různých). Honza postupně prošel všechny dvojice čísel a pro každou spočítal její součet. Pak napsal na tabuli všech deset výsledků

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

a původní čísla smazal. Určete všechny možné hodnoty součinu smazaných čísel.

Výsledek. -144

Řešení. Označme původní čísla na tabuli jako $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Podíváme-li se na oněch deset součtů, nejmenší z nich musí být $a + b = 1$, druhý nejmenší $a + c = 2$, největší $d + e = 10$ a druhý největší $c + e = 9$. Sečtením všech deseti součtů dostaneme

$$4(a + b + c + d + e) = 1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 56,$$

takže $a + b + c + d + e = 14$. Z uvedených vztahů získáme nejprve $c = 14 - 1 - 10 = 3$ a následně $a = 2 - c = -1$, $b = 1 - a = 2$, $e = 9 - c = 6$ a $d = 10 - e = 4$. Pro tuto pětici snadno ověříme, že ostatních šest součtů vychází správně. Hledaný součin je tedy $-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = -144$.

Úloha 33. Zapište 333 jako součet druhých mocnin několika různých lichých přirozených čísel.

Výsledek. $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2$

Řešení. Protože $17^2 = 289 < 333 < 361 = 19^2$, mohou v součtu figurovat pouze sčítance $1^2, 3^2, \ldots, 17^2$ (celkem devět různých čísel). Všimněme si, že čtverec kteréhokoliv lichého čísla dává po dělení osmi zbytek 1. Protože zbytek 333 po dělení osmi je 5, musí být použito právě pět sčítanců.

Sčítanec 17^2 nelze využít, protože $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 17^2 > 333$. Podívejme se na ostatní sčítance modulo 5. Dva z nich jsou pěti dělitelné (5^2 a 15^2), tři dávají zbytek 1 (1^2, 9^2, 11^2) a zbylé tři zbytek 4 (3^2, 7^2, 13^2). Protože 333 dává zbytek 3, připadají v úvahu dvě možnosti. Buď můžeme sečíst všechna čísla se zbytkem 0 a 1 (příslušný součet je ale větší než 333), nebo můžeme sečíst všechna čísla se zbytkem 4, přičíst jedno se zbytkem 0 a jedno se zbytkem 1. Snadno vidíme, že součty obsahující 11^2 či 15^2 jsou moc velké. Ze zbývajících dvou případů dává požadovaný součet 333 jen pětice $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2$.

Úloha 34. ET popadl tři reálná čísla a, b, c a definoval operaci $\odot$ jako $x \odot y = ax + by + cxy$. Aby zahnal nudu, spočítal si, že $1 \odot 2 = 3$ a $2 \odot 3 = 4$. Po dalším pachtění zjistil, že existuje nenulové reálné číslo u splňující $z \odot u = z$ pro každé reálné z. Jaká je hodnota u?

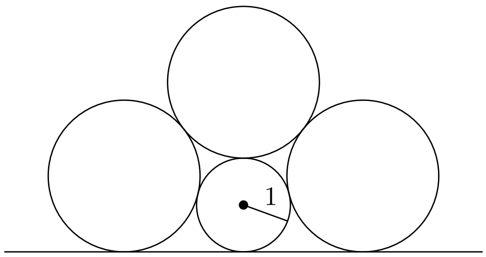
Výsledek. 4

Řešení. Ze vztahu $0 = 0 \odot u = bu$ zjišťujeme, že $b = 0$ (protože u je nenulové). Proto můžeme zadané rovnosti přepsat jako

$$
\begin{aligned}
a + 2c &= 3,\\
2a + 6c &= 4,
\end{aligned}
$$

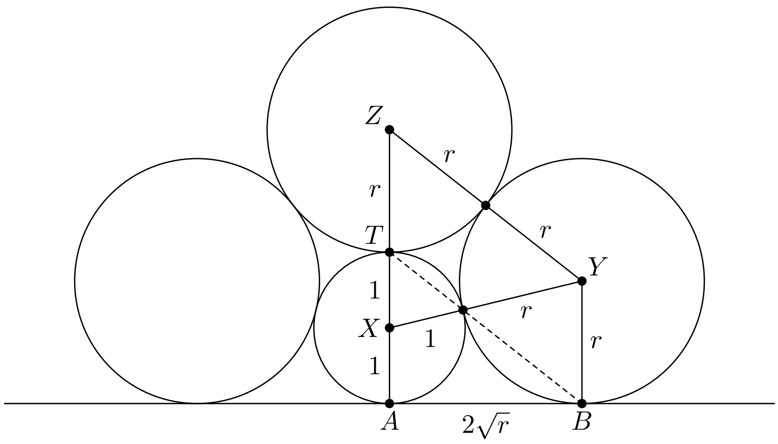
což je soustava rovnic s řešením $a = 5$, $c = -1$. Nakonec ze vztahu $1 = 1 \odot u = 5 - u$ odvodíme $u = 4$.

Úloha 35. Tři kružnice o poloměru r, jedna kružnice o poloměru 1 a jedna přímka se vzájemně dotýkají způsobem naznačeným na obrázku. Určete hodnotu r.



Výsledek. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Řešení. Po vzoru obrázku označíme jisté body dotyku jako A, B a T a středy kružnic jako X, Y a Z.



Z Pythagorovy věty vyplývá

$$|AB|^2 = |XY|^2 - (|BY| - |AX|)^2 = (r+1)^2 - (r-1)^2 = 4r.$$

Úsečky BY a TZ jsou rovnoběžné a mají obě délku r, takže čtyřúhelník $BYZT$ je rovnoběžník, z čehož odvodíme $|BT| = |YZ| = 2r$. Získané rovnosti dosadíme do vztahu $|AB|^2 + |AT|^2 = |BT|^2$, plynoucího z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABT, a dostaneme $4r + 2^2 = (2r)^2$. Po vykrácení vyjde kvadratická rovnice

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

jejímž jediným kladným kořenem je $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Úloha 36. Na zeď matfyzáckých kolejí někdo nasprejoval pět (ne nutně různých) reálných čísel, jejichž součet byl 20. Karel postupně sečetl každou dvojici čísel a výsledek vždy zaokrouhlil dolů (tj. vzal největší celé číslo nepřesahující výsledek), čímž dostal deset celých čísel. Nakonec sečetl všechna tato nová čísla. Jakou nejmenší hodnotu součtu tak Karel mohl dostat?

Výsledek. 72

Řešení. Čísla na zdi označme $a_1, \ldots, a_5$. Hledáme nejmenší možnou hodnotu

$$W = \sum_{1 \le i < j \le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ značí značí dolní celou část x neboli největší celé číslo nepřesahující x. Tento výraz můžeme přepsat jako

$$\sum_{1 \le i < j \le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor = \sum_{1 \le i < j \le 5} (a_i + a_j) - \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\} = 80 - \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\},$$

kde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ vyjadřuje desetinnou část x. Naším cílem je tedy maximalizovat součet

$$S = \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\}.$$

Ten můžeme přepsat jako

$$\sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+1}\} + \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+2}\},$$

pokud doplníme $a_6 = a_1$ a $a_7 = a_2$. Dále z rovností

$$S_1 = \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+1}\} = 40 - \sum_{i=1}^{5} \lfloor a_i + a_{i+1} \rfloor,$$
$$S_2 = \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+2}\} = 40 - \sum_{i=1}^{5} \lfloor a_i + a_{i+2} \rfloor$$

plyne, že S_1, S_2 jsou celá čísla. Navíc je každé součtem pěti čísel menších než 1, takže jsou obě nejvýše 4. Tedy $S \le 8$. Pro původní součet dostaneme $W \ge 72$, přičemž rovnost získáme volbou $\{a_1\} = \{a_2\} = \{a_3\} = \{a_4\} = \{a_5\} = 0{,}4$.

Úloha 37. Pro složené kladné celé číslo n označme $\xi(n)$ součet jeho tří nejmenších dělitelů a $\vartheta(n)$ součet jeho dvou největších dělitelů. Najděte všechna složená čísla n, pro něž platí $\vartheta(n) = (\xi(n))^4$.

Poznámka: Za dělitele n považujeme všechna kladná celá čísla k, pro která je n/k opět celé číslo.

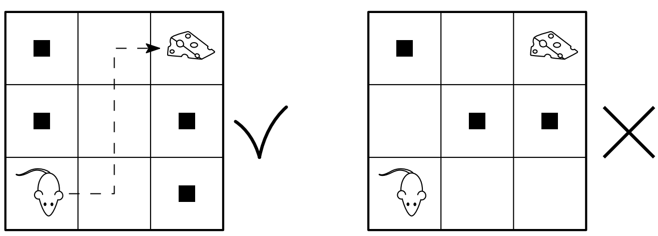
Výsledek. 864

Řešení. Nejmenším dělitelem n je 1. Druhého a třetího nejmenšího dělitele n označme postupně p a q (takto bude p prvočíslo a q buď prvočíslo, nebo $q = p^2$). Pak $\xi(n) = 1 + p + q$ a $\vartheta(n) = n + n/p$. Po vynásobení p můžeme podmínku ze zadání přepsat jako

$$n(p + 1) = p(1 + p + q)^4.$$

Pravá strana je dělitelná $p + 1$, a protože p a $p + 1$ jsou nesoudělná, platí $p + 1 \mid (1 + p + q)^4$. Kdyby p, q byla obě lichá, bylo by $p + 1$ sudé a $(1 + p + q)^4$ liché, což není možné. Proto $p = 2$ (2 musí dělit n a p je nejmenší prvočíselný dělitel). Dále rozvinutím $(1 + p + q)^4 = (3 + q)^4$ podle binomické věty a vynecháním členů dělitelných třemi zjistíme, že $3 \mid q^4$, a tedy také $3 \mid q$. Možnost $q = p^2$ zjevně nenastává, takže q je prvočíslo, konkrétně $q = 3$. Máme $n \cdot 3 = 2 \cdot 6^4$ a $n = 2^5 \cdot 3^3 = 864$.

Úloha 38. Mlsná myška se nachází v levém dolním rohu šachovnice 3×3 a touží po kousku sýra, který se povaluje v pravém horním rohu. Myška umí přecházet jen mezi políčky sousedícími hranou. Kolika způsoby můžeme na některá z volných políček (třeba i na žádné z nich) umístit překážky tak, aby se myška stále uměla dostat k sýru?



Výsledek. 51

Řešení. Podívejme se nejprve situaci, kdy obsadíme prostřední pole. V takovém případě může myška k sýru proniknout jedině jednou ze dvou chodbiček vedoucích podél stěn. Jedna z nich proto musí zůstat volná a překážky můžeme skládat pouze do druhé z nich. Chodbička se skládá ze tří políček, takže máme $2^3 = 8$ možností, jak částečně zaplnit jednu z nich, a tedy $8 + 8 - 1 = 15$ způsobů, jak nechat alespoň jednu z chodbiček volnou. (Museli jsme odečíst jedničku, protože jinak bychom situaci, kdy jsme nechali volné obě chodbičky, započítali dvakrát.)

Zaměřme se nyní na případ, kdy necháme prostřední pole volné. Zde existuje cesta k sýru právě tehdy, když je volné alespoň jedno políčko sousedící s myškou a alespoň jedno políčko sousedící se sýrem. Dvojici políček vedle myšky tedy můžeme obsadit třemi různými způsoby (nesmíme je zaplnit obě) a dvojici políček vedle sýra také třemi. Každé ze zbývajících dvou rohových polí poskytuje dvě možnosti, takže počet vyhovujících rozmístění je tentokrát $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$.

Proto existuje dohromady $15 + 36 = 51$ způsobů, jak myšku potrápit, ale ne umořit hlady.

Úloha 39. Ze všech dvojic (x, y) reálných čísel splňujících

$$x^2y^2 + 6x^2y + 10x^2 + y^2 + 6y = 42$$

označme (x_0, y_0) tu s nejmenším x_0. Najděte y_0.

Výsledek. -3

Řešení. Nejdříve si všimneme, že pokud k oběma stranám rovnice přičteme 10, můžeme z levé strany vytknout $x^2 + 1$, čímž dostaneme

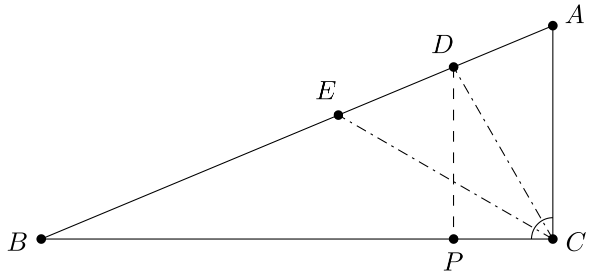
$$(x^2 + 1)(y^2 + 6y + 10) = 52.$$

Na výraz na levé straně se můžeme dívat jako na součin dvou kvadratických funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(y) = y^2 + 6y + 10$. Protože grafy kvadratických funkcí jsou symetrické a v tomto případě jsou obě funkce nejprve klesající a teprve potom rostoucí, nejmenší hodnota x_0 dává největší hodnotu f. Hodnota $g(y_0)$ musí být naopak nejmenší možná, neboť součin $f(x)g(y)$ je kladná konstanta. Stačí tedy zjistit, ve kterém bodě má $g(y) = (y + 3)^2 + 1$ své minimum. Odpověď je $y_0 = -3$.

Úloha 40. Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u vrcholu C. Dále D a E jsou body na straně AB, přičemž D leží mezi A a E a přímky CD a CE dělí úhel ACB na třetiny. Pokud $|DE| : |BE| = 8 : 15$, najděte $|AC| : |BC|$.

Výsledek. $\frac{4\sqrt{3}}{11}$

Řešení. Nechť P je bod na straně BC takový, že $DP \parallel AC$. Protože jsou trojúhelníky ABC a DBP podobné, platí $|AC| : |BC| = |DP| : |BP|$.



Ze sinové věty pro trojúhelníky CDE a CBE vyjádříme poměry $\sin|\sphericalangle CED| : \sin|\sphericalangle ECD| = |CD| : |ED|$ a $\sin|\sphericalangle CEB| : \sin|\sphericalangle ECB| = |CB| : |EB|$. Protože sinus vedlejších úhlů je stejný a $|\sphericalangle ECB| = |\sphericalangle ECD|$, dostaneme s využitím zadání $|CD| : |CB| = |ED| : |EB| = 8 : 15$. Dále $|DP| = |CD| \cdot \sin 60^\circ$ a $|BP| = |CB| - |CP| = |CB| - |CD| \cdot \cos 60^\circ$, tedy

$$\frac{|DP|}{|BP|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}|CD|}{\frac{15}{8}|CD| - \frac{1}{2}|CD|} = \frac{4\sqrt{3}}{11}.$$

Úloha 41. Háňa propadla nové hazardní hře, v níž je cílem uhodnout neznámé přirozené číslo z intervalu 1 až N včetně. V každém tahu řekne Háňa některé číslo z tohoto intervalu. Pokud se trefí, hra končí, a v opačném případě jí krupiér prozradí, zda je její tip příliš velký, nebo příliš malý. Pokud je její číslo vyšší než hledané číslo, musí Háňa zaplatit 1 Kč, a pokud je nižší, zaplatí dokonce 2 Kč. Za správný tip se nic neplatí. Pro jaké největší N dokáže Háňa hru určitě dokončit, smí-li utratit nanejvýš 10 Kč?

Výsledek. 232

Řešení. Symbolem N_k označíme maximální N, pro něž Háňa vybavená k korunami dokáže najít neznámé číslo z rozmezí $1, \ldots, N$ (a samozřejmě i z libovolného jiného intervalu délky N); naším úkolem je určit N_{10}. Zjevně $N_0 = 1$ a $N_1 = 2$. Dále ukážeme, že platí rekurentní vztah

$$N_{k+2} = N_{k+1} + N_k + 1.$$

Má-li Háňa $k+2$ korun a zvolí číslo $N_{k+1}+1$, pak mohou nastat tři možnosti: trefí se, přestřelí (a musí pokračovat s $k+1$ korunami a intervalem o délce N_{k+1}), nebo tipne moc nízké číslo (a následně má k korun na prozkoumání rozmezí délky N_k). Z toho plyne $N_{k+2} \geq N_{k+1} + N_k + 1$. Kdyby ale měla více než $N_{k+1} + N_k + 1$ čísel, z nichž může vybírat, pak volbou čísla většího než $N_{k+1}+1$ riskuje, že bude ponechána s intervalem delším než N_{k+1} a pouhými $k+1$ korunami – to nastane v případě, že bude tipnuté číslo moc vysoké. Pokud naopak zvolí číslo menší než $N_{k+1}+2$, hrozí jí, že skončí s více než N_k možnostmi a jen k korunami – v případě, že bude tip moc nízký. Tím je kýžená rekurence dokázána.

S její znalostí už můžeme přímočaře vypočítat $N_{10} = 232$.

Úloha 42. Pro kladná celá čísla a, b, c platí $a \geq b \geq c$ a

$$a + b + c + 2ab + 2bc + 2ca + 4abc = 2017.$$

Zjistěte všechny vyhovující hodnoty a.

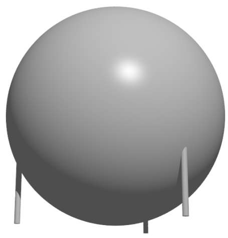
Výsledek. 134

Řešení. Levou stranu rovnosti lze vynásobit dvěma a příčíst jedničku, což nám umožní využít vzorec

$$1 + 2a + 2b + 2c + 4ab + 4bc + 4ca + 8abc = (2a+1)(2b+1)(2c+1).$$

Když tutéž operaci provedeme s pravou stranou, získáme $2 \cdot 2017 + 1 = 4035$. Rozkladem na prvočísla dostaneme $4035 = 3 \cdot 5 \cdot 269$, a jelikož $a \geq b \geq c \geq 1$, lze z toho vyvodit $2a+1 = 269$, $2b+1 = 5$ a $2c+1 = 3$. Výsledkem je proto $a = 134$.

Úloha 43. Mimozemská kosmická loď má tvar dokonalé koule o poloměru R podepřené třemi rovnoběžnými svislými nohami o délce 1 ms (mimozemský sáh) a zanedbatelné tloušťce. Dolní konce noh tvoří rovnostranný trojúhelník o straně délky 9 ms. Když loď stojí na rovném povrchu, dotýká se ho také nejnižší bod koule. Jaký je poloměr R (v ms)?

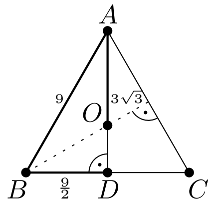


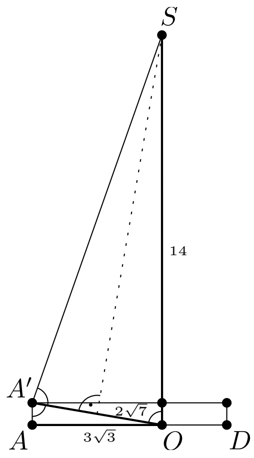
Výsledek. 14

Řešení. Označme dolní konce nohou A, B, C a jejich příslušné horní konce postupně A', B', C'. Dále nechť O je střed trojúhelníku ABC (neboli bod dotyku koule a povrchu planety), S střed koule a $D = AO \cap BC$. Máme $|AO| = |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$ ms, $|AA'| = 1$ ms a $|SO| = |SA'| = R$. Pythagorova věta dává

$$(|SO| - |AA'|)^2 + |AO|^2 = |SA'|^2 \quad \text{nebo} \quad (R-1)^2 + 27 = R^2,$$

z čehož dostaneme $R = 14$ ms.





Úloha 44. Čtyři bratři, Albrecht, Bořivoj, Chrudoš a Dalimil, nasbírali v lese spoustu lískových oříšků. V noci Albrechta honila mlsná, takže se jich rozhodl pár sníst. Po přepočítání oříšků zjistil, že kdyby jich měli o jeden méně, šlo by je rozdělit na čtyři stejně velké hromádky. Proto jeden ořech zahodil, snědl svůj podíl (čtvrtinu zbytku) a šel spokojeně spát. O něco později hlad probudil i Bořivoje a i on zjistil, že jeden oříšek přebývá. I zahodil jej a schroustal čtvrtinu zbytku. Do rána se přesně totéž přihodilo i Chrudošovi a Dalimilovi. Když se za kuropění všichni bratři setkali, ukázalo se, že i nyní by po zahození jednoho ořechu bylo možné zbytek rozdělit na čtyři stejné hromádky. Jaké nejmenší množství ořechů mohli chlapci nasbírat?

Výsledek. 1021

Řešení. Představme si, že na dně košíku od začátku leží tři další, imaginární ořechy. V tom případě je celkový počet ořechů násobkem čtyř. Povšimněme si, že po Albrechtově zásahu je celkový počet ořechů opět dělitelný čtyřmi a jsou mezi nimi všechny tři imaginární oříšky. Zopakováním této úvahy ještě čtyřikrát zjistíme, že původní počet ořechů včetně těch fiktivních musel být $4^5 k$ pro nějaké přirozené k, takže skutečných ořechů bylo $4^5 k - 3$. Na druhé straně je snadno vidět, že všechna čísla tvaru $4^5 k - 3$ zadání vyhovují. Dosazením $k = 1$ tedy nalezneme kýžené minimum $4^5 - 3 = 1021$.

Úloha 45. Přirozené číslo nazýváme *vychované*, jestliže není dělitelné žádným prvočíslem různým od 2, 3 a 7. Kolik vychovaných čísel najdeme mezi čísly $1000, 1001, \dots, 2000$?

Výsledek. 19

Řešení. Začneme obecným pozorováním, a sice, že pro každé reálné číslo $x > 1/2$ leží v polootevřeném intervalu $\langle x, 2x)$ právě jedna mocnina dvojky.

Dále nazveme přirozené číslo *uťáplé*, jestliže není dělitelné žádným prvočíslem různým od 2 a 3. Počet uťáplých čísel v intervalu $\langle x, 2x)$ lze spočítat následujícím způsobem: Zaprvé je v intervalu $\langle x, 2x)$ právě jedna mocnina dvojky. Zadruhé leží v intervalu $\langle x, 2x)$ nanejvýš jedno uťáplé číslo (označme jej c_1) dělitelné trojkou, ale ne 3^2, neboť $c_1/3$ je ona jediná mocnina dvojky ležící v intervalu $\langle x/3, 2x/3)$, předpokládáme-li $x > 1/6$. Můžeme pokračovat obdobně a najít uťáplé c_2 dělitelné 3^2, ale ne 3^3, pak c_3 atd., až nakonec $\langle x/3^k, 2x/3^k) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ neboli $x < 3^{-k}/2$. Z toho můžeme usoudit, že počet uťáplých čísel v intervalu $\langle x, 2x)$ je $1 +$ největší k splňující $3^k < 2x$; označme tuto hodnotu jako $\ell_3(x)$.

Počet vychovaných čísel v intervalu $\langle x, 2x)$ zjistíme podobnou technikou. Hledanou hodnotu dostaneme sečtením počtů uťáplých čísel v intervalech $\langle x, 2x)$, $\langle x/7, 2x/7)$, $\langle x/7^2, 2x/7^2)$ atd. Do tohoto součtu $\ell_3(x) + \ell_3(x/7) + \ell_3(x/7^2) + \dots$ přispěje $\ell_7(x)$ sčítanců, kde symbol ℓ_7 definujeme obdobně jako ℓ_3.

Protože číslo 2000 není vychované, chce po nás úloha určit počet vychovaných čísel v intervalu $\langle 1000, 2000)$, což je

$$\ell_3(1000) + \ell_3(1000/7) + \ell_3(1000/49) + \ell_3(1000/343) = 7 + 6 + 4 + 2 = 19.$$

Úloha 46. Císař Decimus zakázal číslici 0 (kterou zavedl jeho předchůdce Nullus). Nařídil místo ní používat číslici D, představující hodnotu 10, čímž vznikla *decimická soustava.* I v ní má každé přirozené číslo jednoznačně daný zápis, například

$$3\text{DD}6 = 3 \cdot 1000 + 10 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 4106.$$

Aby změna číselné soustavy proběhla co možná nejsnáze, byl na velký obelisk vytesán seznam všech čísel od 1 do DDD včetně. Kolikrát se v něm vyskytuje nově zavedená číslice D? Výskyty v rámci jednoho čísla se počítají odděleně, takže například DD přispívá do součtu dvakrát.

Výsledek. 321

Řešení. Nejprve si všimněme, že i nejmenší čtyřciferné číslo, 1111, je větší než DDD. Na obelisku jsou proto vypsána právě všechna jednociferná, dvojciferná a trojciferná čísla v decimické soustavě.

Čísla, jež mají v decimické soustavě právě k cifer, odpovídají řetězcům

$$\underbrace{1\ldots1}_{k}, \ldots, \underbrace{\text{D}\ldots\text{D}}_{k}.$$

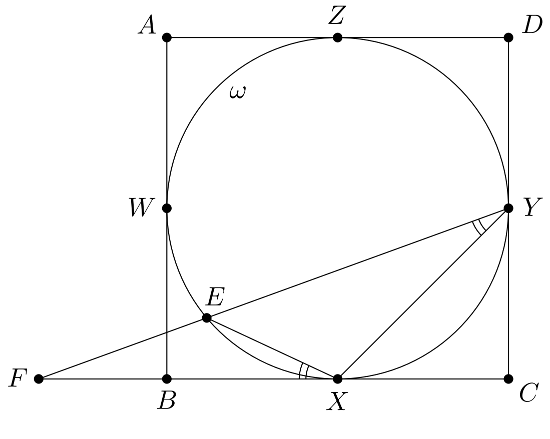
Chceme-li spočítat celkové množství déček, která se vyskytují v k-ciferných číslech, můžeme to udělat následovně: Zjevně existuje právě 10^{k-1} čísel, která mají D na první pozici (protože ostatní pozice můžeme obsadit zcela libovolně). Dále existuje stejný počet čísel, která mají D na druhé pozici, protože máme opět $k-1$ pozic, které můžeme obsadit libovolně. Stejně tak najdeme 10^{k-1} čísel s déčkem na třetí pozici, a tak dále až do k-té pozice. Dohromady se proto v k-ciferných číslech vyskytuje $k \cdot 10^{k-1}$ číslic D. Každé číslo jsme totiž započítali právě tolikrát, kolik D obsahovalo, což odpovídá požadavkům zadání.

Můžeme tedy uzavřít, že počet výskytů číslice D v číslech $1, \ldots, \text{DDD}$ je dohromady $1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 = 321$.

Úloha 47. Do čtverce $ABCD$ je vepsána kružnice ω, která se čtverce dotýká v bodech W, X, Y, Z ležících postupně na stranách AB, BC, CD, DA. Nechť E je vnitřní bod kratšího oblouku kružnice ω mezi W a X a dále F průsečík BC a EY. Určete obsah trojúhelníku FYC, jestliže víte, že $|EF| = 5$ a $|EY| = 7$,

Výsledek. 21

Řešení. Díky rovnosti úsekového a obvodového úhlu je $|\sphericalangle EXF| = |\sphericalangle EYX|$. Protože mají trojúhelníky FEX a FYX navíc společný úhel u vrcholu F, jsou si podobné. Platí tedy $|EF| : |XF| = |XF| : |YF|$ neboli $|XF|^2 = |EF| \cdot |YF| = 5 \cdot 12 = 60$ (což je zároveň vyjádření mocnosti bodu F ke kružnici ω).



Nechť $t = \frac{1}{2}|AB|$ je polovina strany čtverce. Pak podle Pythagorovy věty platí

$$|YF|^2 = t^2 + (t + |XF|)^2 = 2t^2 + 2t \cdot |XF| + |XF|^2 = 2t(t + |XF|) + |XF|^2,$$

takže hledaný obsah trojúhelníku FYC můžeme vyjádřit jako

$$\tfrac{1}{2} \cdot |YC| \cdot |CF| = \tfrac{1}{2} \cdot t \cdot (t + |XF|) = \tfrac{1}{4}(|YF|^2 - |XF|^2) = 21.$$

Úloha 48. V kryptogramu

$$WE \cdot LIKE = NABOJ$$

označují různá písmena různé číslice. Navíc je dáno $\mathrm{S}(WE) = 11$, $\mathrm{S}(LIKE) = 23$ a $\mathrm{S}(NABOJ) = 19$, kde $\mathrm{S}(n)$ značí ciferný součet přirozeného čísla n. Žádné ze tří čísel nezačíná nulou. Najděte pěticiferné číslo $NABOJ$.

Výsledek. 60 724

Řešení. Protože se v kryptogramu vyskytuje deset různých písmen, musíme použít všech deset číslic $0, 1, \ldots, 9$. Součet všech jednociferných čísel je 45. Když sečteme tři dané ciferné součty, dostaneme $11 + 23 + 19 = 53$, což se rovná $45 + E$. Proto $E = 8$. Jeho umocněním na druhou zjistíme, že $J = 4$, a ze vztahu $\mathrm{S}(WE) = 11$ určíme $W = 3$.

Dále si všimneme, že

$$LIKE < \frac{100000}{38} < 2636.$$

Proto musí být $L = 1$ nebo $L = 2$. Kdyby $L = 2$, z ciferného součtu $LIKE$ bychom získali $I + K = 13$, takže by dvojice (I, K) nebo (K, I) musela být $(4, 9)$, $(5, 8)$ nebo $(6, 7)$. Ale číslice 4 a 8 už jsou zabrané a v případě $(6, 7)$ by člen $LIKE$ přesáhl horní mez odhadu. Tedy $L = 1$. Pak z ciferného součtu $LIKE$ plyne $I + K = 14$, což zužuje možnosti pro (I, K) nebo (K, I) na dvojici $(5, 9)$. Snadný výpočet ukáže, že jen $(I, K) = (5, 9)$ řeší kryptogram. Vynásobením $38 \cdot 1598 = 60\,724$ dostaneme hledané číslo $NABOJ = 60\,724$.

Úloha 49. Najděte všechna přirozená čísla n, pro která je součet všech jejich vlastních dělitelů roven 63.

Poznámka: Vlastní dělitel d čísla n splňuje $1 < d < n$.

Výsledek. 56, 76, 122

Řešení. Označme $s(n)$ součet všech vlastních dělitelů přirozeného čísla n. Snadno zjistíme, že úloha nemá řešení, pokud n má tři nebo více prvočíselných dělitelů: $s(2 \cdot 3 \cdot 5) = 41$, $s(2 \cdot 3 \cdot 7) = 53$, a vyšší hodnoty takového n už dávají $s(n)$ větší než 63. Dále kdyby n bylo mocninou jediného prvočísla p, byl by $s(n)$ dělitelný p, takže $p = 3$ nebo $p = 7$. Můžeme nicméně snadno ověřit, že žádná mocnina 3 ani 7 nesplňuje zadanou podmínku.

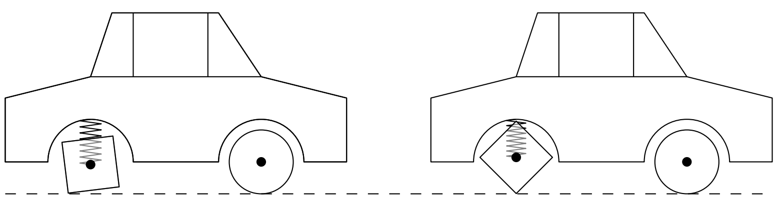
Tedy n má právě dva různé prvočíselné dělitele p, q a možné řešení lze vyjádřit jako $n = p^\alpha \cdot q^\beta$. Kdyby $\alpha = \beta = 2$, pak by $p = 2$, $q = 3$ dávalo $s(n) = 54$ a pro všechny další kombinace prvočísel a vyšších mocnin by bylo $s(n) > 63$. Proto aspoň jeden ze dvou exponentů musí být menší než 2, a tedy n není druhou mocninou přirozeného čísla, speciálně má sudý počet vlastních dělitelů. Kdyby byly všechny dělitele liché, bylo by $s(n)$ sudé číslo, což ale není. Můžeme proto usoudit, že (bez újmy na obecnosti, neboť p a q mají ve vyjádření n stejnou roli) $q = 2$.

Ze stejných důvodů je počet lichých vlastních dělitelů (což jsou přesně $p, p^2, \ldots, p^\alpha$) lichý, a tudíž α je také liché. Nicméně i pro $p = 3$, $\alpha = 3$ a $\beta = 1$ vychází $s(n) > 63$, takže $\alpha = 1$. Můžeme vyjádřit

$$s(n) = 2 + 2^2 + \cdots + 2^\beta + p + 2p + \cdots + 2^{\beta-1}p = (2^\beta - 1)(p + 2).$$

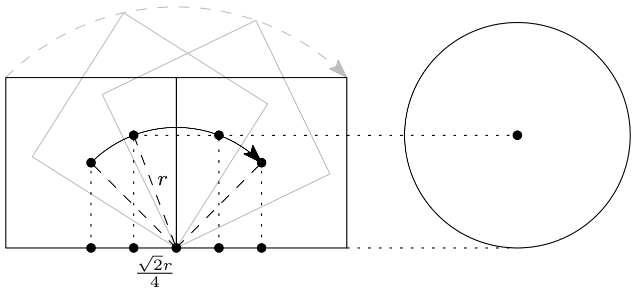
Ze všech dělitelů 63 jsou jen 1, 3 a 7 tvaru $2^\beta - 1$. Jim odpovídající hodnoty p jsou postupně 61, 19 a 7, takže možná n jsou $2 \cdot 61 = 122$, $2^2 \cdot 19 = 76$ a $2^3 \cdot 7 = 56$.

Úloha 50. Honza má mazácké auto se čtvercovými zadními koly (přední kola jsou standardní, tj. kulatá). Jezdit v takovém autě by bylo za normálních okolností dosti nepříjemné, ovšem Honza si na zadní kola nainstaloval velmi dobré tlumiče, díky nimž auto při jízdě po rovné silnici zůstává rovnoběžně s povrchem. Hrana zadního kola má délku 40 cm a zadní náprava je vzhledem k autu pohyblivá pouze ve vertikálním směru. Jaký je poloměr předního kola (v cm), víme-li, že když se auto pohybuje konstantní rychlostí kupředu, zadní je náprava přesně polovinu času níže (blíž k silnici) a polovinu času výše (dál od silnice) než přední náprava?



Výsledek. $10\sqrt{7}$

Řešení. Uvažme trajektorii středu čtvercového kola během pohybu auta dopředu – ta sestává ze čtvrtkružnic se středem v jednom z vrcholů čtverce.



Jede-li auto konstantní rychlostí dopředu, můžeme na takovou čtvrtkružnici nahlížet také jako na graf výšky zadní nápravy v závislosti na čase. Hledaným poloměrem kulatého kola je tedy tato výška přesně ve čtvrtině horizontální vzdálenosti. Nechť r je poloměr oblouku, po kterém se pohybuje střed zadního kola. Pak je ona čtvrtina rovna $\sqrt{2}r/4$ a užitím Pythagorovy věty dostáváme, že výška v tomto okamžiku je

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}r\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{8}}r.$$

Výsledek pak dostaneme dosazením $r = 20\sqrt{2}$.

Úloha 51. Město Budoucnosti má tvar pravidelného 2017úhelníku. Jeho vrcholy tvoří 2017 stanic metra, očíslovaných na plánku města od 1 do 2017 proti směru hodinových ručiček. Mají zde dvě linky metra, *okrajovou* a *diagonální*. Okrajová linka zajišťuje přímé spojení ze stanice a do stanice b (nikoli však v opačném směru), právě když $a - b + 1$ je dělitelné 2017, a jedna taková jízda trvá 1 minutu. Diagonální linka zajišťuje přímé spojení ze stanice a do stanice b, právě když $2b - 2a + 1$ je dělitelné 2017, a jedna taková jízda zabere 15 minut. Filip je nadšenec do metra a náruživý cestovatel. Rád by se ze stanice 1 dostal co nejdál, tj. do stanice, pro niž je optimální čas potřebný k jejímu dosažení nejdelší možný. Která čísla stanic splňují Filipovu podmínku?

Výsledek. 1984, 1985

Řešení. Kdykoli Filip cestuje jednu zastávku diagonální linkou a poté jednu zastávku okrajovou linkou, dostane se za stejný čas do stejné stanice, jako kdyby jel nejprve okrajovou a až poté diagonální linkou. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že zpočátku cestuje pouze diagonální linkou a poté zase pouze okrajovou. Dále vidíme, že kdyby jeho cesta sestávala z alespoň dvou jízd diagonální linkou a alespoň jedné jízdy okrajovou linkou, mohla by být nahrazena méně časově náročnou cestou – jednoduše by stačilo vynechat poslední dvě jízdy diagonální a první jízdu okrajovou linkou, které dohromady tvoří v síti metra smyčku. Stačí nám tudíž uvažovat cesty využívající výhradně diagonální linku a cesty využívající diagonální linku nejvýše jednou.

Označme n číslo stanice splňující Filipovu podmínku. Je-li $n \geq 1009$, pak se Filip zvládne pomocí jedné jízdy diagonální linkou a $n - 1009$ jízd okrajovou linkou přepravit do stanice n za $15 + (n - 1009)$ minut. Pokud by používal výhradně diagonální linku, mohl by se do stanice n dostat za $2 \cdot (2018 - n) \cdot 15$ minut. Je zřejmé, že s využitím pouze okrajové linky by kratší cesty nedocílil. Chceme tedy najít $n \geq 1009$, pro které je $M(n) = \min\{n - 994, 30 \cdot 2018 - 30n\}$ největší možné. Máme

$$\begin{aligned} &n - 994 \leq 30 \cdot 2018 - 30n \iff \\ &\iff n \leq \frac{30 \cdot 2018 + 994}{31} = \frac{31 \cdot 2018 - 1024}{31} = 2018 - 33 - \frac{1}{31} = 1985 - \frac{1}{31}. \end{aligned}$$

Tedy pro $n \leq 1984$ je $M(n) = n - 994 \leq 1984 - 994 = 990$ a pro $n \geq 1985$ je $M(n) = 30 \cdot (2018 - n) \leq 30 \cdot (2018 - 1985) = 990$, odkud vidíme, že hledané největší minimum je rovno 990 a nabývá se pro $n = 1984$ a $n = 1985$.

Zbývá ověřit, že pro $n < 1009$ je možné dojet do stanice n za méně než 990 minut: pro $n \leq 990$ se tam Filip dostane za $n - 1$ minut použitím okrajové linky a pro $n \geq 991$ se tam zvládne dopravit diagonální linkou za $15 \cdot (2 \cdot (1009 - n) + 1) \leq 15 \cdot 37 = 555$ minut.

Úloha 52. Nechť $f(n)$ značí počet přirozených čísel, která mají právě n cifer a jejichž ciferný součet je 5. Určete, kolik z 2017 čísel $f(1), f(2), \ldots, f(2017)$ má na místě jednotek jedničku.

Výsledek. 202

Řešení. Každé n-ciferné číslo s ciferným součtem 5 se dá reprezentovat jako 5 jedniček přiřazených k některým z n míst takového čísla. Jednomu místu může být přiřazeno více jedniček a prvnímu místu musí být přiřazena alespoň jedna jednička. Počet n-ciferných čísel s ciferným součtem 5 je tedy roven počtu způsobů, jak rozmístit čtyři jedničky na n míst. Jinými slovy počítáme počet čtyřčlenných kombinací z n prvků s opakováním, tedy

$$f(n) = \binom{n+4-1}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}.$$

Dále budeme toto vyjádření považovat za novou definici f namísto původní kombinatorické definice.

Spočtěme nyní počet těch $f(n)$, která mají poslední cifru 1. Nejprve si uvědomme, že dává-li n zbytek po dělení pěti 0, 2, 3 nebo 4, pak n, $n+3$, $n+2$ nebo $n+1$ je dělitelné pěti. Protože čísla 24 a 5 jsou nesoudělná, je i $f(n)$ dělitelné pěti, tedy jeho poslední cifra je 0 nebo 5. Poslední číslice čísla $f(n)$ tedy může být 1 pouze v případě, že n dává po dělení pěti zbytek 1.

Dále ukažme, že $f(n)$ a $f(n+40)$ mají stejnou poslední číslici. Skutečně, počítáme-li $f(n+40) - f(n)$, přičemž se díváme pouze na čitatele, můžeme postupovat roznásobením závorek ve výrazu

$$24f(n+40) = \big(40 + (n)\big)\big(40 + (n+1)\big)\big(40 + (n+2)\big)\big(40 + (n+3)\big)$$

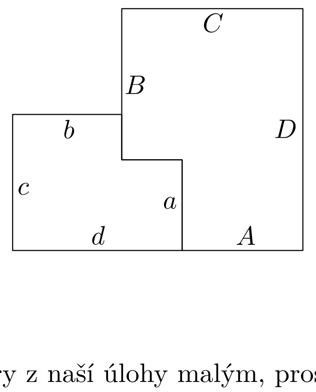
ponechávajíce přitom vnitřní závorky bez úprav. Po odečtení členu $24f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)$ jsou zbývající členy součinem čtyř čísel, z nichž buď alespoň dvě jsou 40, nebo právě tři jsou závorky obsahující n. V prvním případě je takový člen dělitelný 40^2, ve druhém případě jsou alespoň dvě ze závorek po sobě jdoucí čísla, tedy takový člen je dělitelný 80. Tudíž po vydělení $24 = 8 \cdot 3$ vidíme, že tento rozdíl je dělitelný deseti, což jsme chtěli ukázat. Stačí se tedy omezit na zkoumání poslední číslice $f(n)$ pro libovolnou množinu čtyřiceti po sobě jdoucích čísel n.

Nakonec z definice f snadno ověříme, že

$$f(n) = f(-3-n). \tag{$\star$}$$

S ohledem na všechny dříve získané poznatky nám stačí spočítat pouze $f(1) = 1$, $f(6) = 126$, $f(11) = 1001$ a $f(16) = 3876$. Z identity ($\star$) nyní plyne, že ze zbývajících čtyř čísel tvaru $f(5k+1)$ ($f(-4)$, $f(-9)$, $f(-14)$ a $f(-19)$) mají dvě poslední cifru 1 a zbylá dvě 6. Tedy $4 \cdot 2000/40 = 200$ z čísel $f(1), \ldots, f(2000)$ má poslední cifru 1 a z čísel $f(2001), \ldots, f(2017)$ platí totéž pro $f(2001)$ a $f(2011)$. Dohromady máme 202 takových čísel.

Úloha 53. Na obrázku jsou dva nepřímo podobné šestiúhelníkové útvary, jejichž některé strany mají délky a, b, c, d, respektive A, B, C, D. Přiložíme-li tyto dva útvary k sobě, jak ukazuje obrázek, dostaneme nový šestiúhelníkový útvar podobný oběma menším (přímo podobný tomu napravo). Určete poměr $A : a$.



Výsledek. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Řešení. Nazývejme tři podobné útvary z naší úlohy malým, prostředním a velkým. Označme hledaný poměr p. Díky podobnosti malého a prostředního útvaru je

$$p = A : a = B : b = C : c = D : d.$$

Navíc zřejmě platí rovnosti $D = B + a$ a $C + b = A + d$. Poměr stran $B : A$ v prostředním útvaru odpovídá poměru $C : c$ ve velkém útvaru. Je tedy $B : A = p$, odkud plyne $B = p^2 a$. Analogická pozorování v prostředním a velkém útvaru dávají $b : a = C : B = D : C$, odkud

$$d : a = \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = p^3.$$

Dosazením výše získaných výsledků do rovnosti $D = B + a$ dostáváme $pd = p^2a + a = a(p^2 + 1)$, a tedy $p^4 = p^2 + 1$. Jediným kladným řešením rovnice $p^4 - p^2 - 1 = 0$ jakožto kvadratické rovnice s neznámou p^2 je $p^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Z toho vyplývá, že

$$p = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

Hledaný poměr je tedy druhá odmocnina z tzv. zlatého řezu.

Úloha 54. Najděte všechny dvojice kladných celých čísel (a, b), pro něž má každá z rovnic

$$x^2 - ax + a + b - 3 = 0,$$
$$x^2 - bx + a + b - 3 = 0$$

dva kladné celé kořeny.

Výsledek. $(2, 2)$, $(6, 6)$, $(7, 8)$, $(8, 7)$

Řešení. Nechť k, l jsou kořeny první rovnice a m, n kořeny druhé. Kdykoli nalezneme jedno řešení (k, l, m, n), můžeme v něm zřejmě prohodit k a l nebo m a n, čímž získáme další řešení. Proto budeme vždy psát jen jedno z těchto řešení. Podle Viètových vzorců platí

$$k + l = a, \quad m + n = b, \quad kl = mn = a + b - 3.$$

Zkombinováním těchto rovností dostaneme

$$kl + mn = 2a + 2b - 6 = 2k + 2l + 2m + 2n - 6,$$

což lze přeuspořádat na

$$(k - 2)(l - 2) + (m - 2)(n - 2) = 2.$$

Pokud jsou oba sčítance $(k - 2)(l - 2)$ a $(m - 2)(n - 2)$ kladné, tedy rovné 1, dostáváme dvě řešení $(k, l, m, n) = (3, 3, 3, 3)$ a $(1, 1, 1, 1)$. Je-li jeden ze sčítanců nula, získáme řešení $(k, l, m, n) = (2, 6, 3, 4)$ a $(3, 4, 2, 6)$.

Zbývá případ, kdy je jeden ze sčítanců záporný. Pak musí být jedno z čísel k, l, m, n rovno 1. Bez újmy na obecnosti nechť $k = 1$. Pak $l = mn$ a rovnici můžeme upravit na

$$2 = -(l - 2) + (m - 2)(n - 2) = -mn + 2 + mn - 2m - 2n + 4 = -2m - 2n + 6,$$

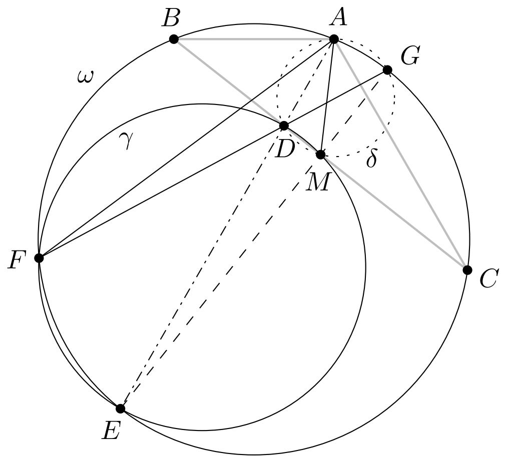
ekvivalentně $m + n = 2$, což dává $m = n = 1$ a $l = mn = 1$. Pro případ záporného sčítance tedy neexistuje žádné řešení.

Možné hodnoty $(a, b) = (k + l, m + n)$ jsou tedy $(6, 6)$, $(8, 7)$, $(7, 8)$ a $(2, 2)$. Snadno ověříme, že všechny tyto hodnoty (a, b) opravdu splňují podmínky ze zadání.

Úloha 55. Trojúhelníku ABC se stranami délek $|AB| = 3$, $|BC| = 7$ a $|AC| = 5$ je opsána kružnice ω. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě D a kružnici ω v bodě E. Nechť γ je kružnice nad průměrem DE. Druhý průsečík kružnic ω a γ (různý od E) označme F. Určete $|AF|$.

Výsledek. $\frac{30}{\sqrt{19}}$

Řešení. Ze zadání víme, že $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle CAE|$, a z vlastností obvodových úhlů máme $|BE| = |CE|$. Trojúhelník BCE je tedy rovnoramenný se základnou BC a osa strany BC prochází bodem E. Označme další průsečík této osy a kružnice ω jako G (pak EG bude průměr kružnice ω) a střed strany BC jako M.



Použitím Thaletovy věty postupně pro kružnice ω a γ dostaneme rovnost $|\sphericalangle GFE| = |\sphericalangle DFE| = 90°$, z níž plyne, že body G, D, F leží na jedné přímce. Dále znovu z Thaletovy věty zjistíme, že $|\sphericalangle GMD| = 90°$ a $|\sphericalangle GAD| = |\sphericalangle GAE| = 90°$, tedy body D, M, G, A leží na jedné kružnici, kterou označíme δ. Z vlastností obvodových úhlů (vždy v kružnici napsané nad rovnítkem) získáme

$$|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle AFG| \stackrel{\omega}{=} |\sphericalangle AEG| = |\sphericalangle AEM|$$

a

$$|\sphericalangle FAD| = |\sphericalangle FAE| \stackrel{\omega}{=} |\sphericalangle FGE| = |\sphericalangle DGM| \stackrel{\delta}{=} |\sphericalangle DAM| = |\sphericalangle EAM|.$$

Z toho vyplývá, že trojúhelníky AFD a AEM jsou podobné. Stejným způsobem odvodíme

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ACB| \stackrel{\omega}{=} |\sphericalangle AEB|,$$

což společně s rovností $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle EAB|$ (AE je osa úhlu) dokazuje podobnost trojúhelníků CAD a EAB. Pak

$$|AF| = |AE| \cdot \frac{|AD|}{|AM|} = |AE| \cdot \frac{|AB| \cdot \frac{|AC|}{|AE|}}{|AM|} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AM|}.$$

Délku $|AM|$ můžeme spočítat pomocí vzorce pro délku těžnice jako

$$|AM| = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{19}.$$

Teď už snadno dopočítáme výsledek:

$$|AF| = \frac{3 \cdot 5}{\frac{1}{2}\sqrt{19}} = \frac{30}{\sqrt{19}}.$$

Úloha 56. Určete počet uspořádaných trojic (x, y, z), kde x, y, z jsou nezáporná celá čísla menší než 2017 a výraz

$$(x + y + z)^2 - 704xyz$$

je dělitelný 2017.

Výsledek. $2017^2 + 1 = 4\,068\,290$

Řešení. Podmínku $2017 \mid (x + y + z)^2 - 704xyz$ můžeme přepsat jako

$$(x + y + z)^2 \equiv 704xyz \pmod{2017}.$$

V dalším textu budou všechny uvažované kongruence modulo 2017. Díky tomu, že 2017 je prvočíslo, existuje pro každé přirozené číslo $a < 2017$ právě jedno přirozené číslo (budeme jej značit symbolem a^{-1}) menší než 2017 a splňující $a \cdot a^{-1} \equiv 1$.

Nejprve pojďme najít vyhovující trojice (x, y, z), v nichž jsou všechna tři čísla nenulová. V takovém případě můžeme psát $y \equiv kx$ a $z \equiv lx$ pro přirozená k, l menší než 2017, jelikož příslušná k a l jsou jednoznačně určena kongruencemi $k \equiv y \cdot x^{-1}$, $l \equiv z \cdot x^{-1}$. Dosazením do zadání obdržíme podmínku

$$(x + kx + lx)^2 \equiv 704klx^3,$$

kterou vynásobením $(x^{-1})^2$ ekvivalentně upravíme na

$$(1 + k + l)^2 \equiv 704klx.$$

Nakonec tuto kongruenci vynásobíme $(704kl)^{-1}$, čímž původní podmínku převedeme do podoby

$$x \equiv (704kl)^{-1}(1 + k + l)^2.$$

Z toho vyplývá, že pro všechny dvojice $k, l \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$ existuje právě jedno x splňující podmínku ze zadání (všechny úpravy totiž byly ekvivalentní, a to včetně přechodu od y, z k proměnným k, l). Taková k, l lze zvolit 2016^2 způsoby. Potřebujeme ale, aby x bylo nenulové, neboť jinak bychom nemohli k a l definovat. To nastane právě tehdy, když $k + l \not\equiv 2016$. „Špatných“ dvojic (k, l) je proto 2015, jedna za každé k vyjma 2016. Dohromady tedy existuje $2016^2 - 2015$ trojic (x, y, z) požadovaných vlastností, pro které navíc $x, y, z \neq 0$.

Jestliže $x = 0$, zatímco y a z jsou nenulová, pak je potřeba splnit podmínku $(y + z)^2 \equiv 0$. Ta platí právě tehdy, když $y \equiv -z$, takže takových trojic $(0, y, z)$ je 2016. Stejným způsobem získáme 2016 trojic pro $y = 0$ a tentýž počet pro $z = 0$. Pokud jsou nulová dvě z čísel x, y, z, pak musejí být nulová všechna tři, takže nám zbývá započítat poslední trojici $(0, 0, 0)$.

Dohromady je trojic (x, y, z) s požadovanými vlastnostmi

$$2016^2 - 2015 + 3 \cdot 2016 + 1 = 2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 + 1 = 2017^2 + 1.$$

Úloha 57. Bára s Helčou střídavě házejí běžnou hrací kostkou, která má dvě stěny červené, dvě zelené a dvě modré. Po každém hodu dostane hráčka žeton té barvy, kterou právě hodila. Vítězí ta z nich, která jako první shromáždí žetony všech tří barev. Bára začíná. S jakou pravděpodobností vyhraje?

Výsledek. 81/140

Řešení. Uvažujme situaci, kdy má hráčka, jež je právě na řadě, x různých žetonů a její soupeřka y. Symbolem $P_1(x, y)$ označíme pravděpodobnost vítězství hráčky, která je na řadě, a symbolem $P_2(x, y)$ pravděpodobnost výhry její soupeřky. Zjevně tedy $P_1(x, y) + P_2(x, y) = 1$. Naším cílem je spočítat $P_1(1, 1)$, tedy pravděpodobnost Bářina vítězství poté, co obě dívky provedly svůj první hod.

Ze vztahu $P_2(2, 2) = \frac{2}{3}P_1(2, 2)$ vypočítáme, že $P_1(2, 2) = \frac{3}{5}$, $P_2(2, 2) = \frac{2}{5}$. Dále si rozmyslíme, že platí rovnosti

$$\begin{aligned} P_2(2, 1) &= \tfrac{2}{3}P_1(1, 2), \\ P_1(1, 2) &= \tfrac{1}{3}P_2(2, 1) + \tfrac{2}{3}P_2(2, 2), \end{aligned}$$

z nichž snadno vyjádříme $P_1(1, 2) = \frac{12}{35}$, $P_2(1, 2) = \frac{23}{35}$, $P_1(2, 1) = \frac{27}{35}$ a $P_2(2, 1) = \frac{8}{35}$. Na závěr si uvědomíme, že

$$P_1(1, 1) = \tfrac{1}{3}P_2(1, 1) + \tfrac{2}{3}P_2(1, 2),$$

což vede k výsledku $P_1(1, 1) = \frac{81}{140}$.

Úloha 58. Najděte největší celé číslo n, pro něž má rovnice

$$k(k + 1)(k + 3)(k + 6) = n(n + 1)$$

celočíselné řešení (k, n).

Výsledek. 104

Řešení. Jestliže (k, n) je řešením rovnice, existuje právě jedno další řešení se stejnou hodnotou k, a to $(k, -1-n)$. Z dvojice celých čísel n, $-1-n$ je vždy jedno nezáporné a druhé záporné. Protože se zajímáme o vysoké hodnoty n, můžeme předpokládat $n \geq 0$. V tomto oboru je $n(n+1)$ rostoucí funkcí proměnné n, takže pro nalezení maximální hodnoty n musíme usilovat o to, aby byla levá strana rovnosti co největší.

Označme symbolem $P(k)$ polynom

$$k(k+1)(k+3)(k+6) = k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k$$

představující levou stranu rovnice. Budeme využívat skutečnosti, že mezi dvěma po sobě následujícími možnými hodnotami pravé strany $n(n+1)$ a $(n+1)(n+2)$ není žádné další číslo, které je součinem dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. Z toho důvodu se budeme snažit $P(k)$ aproximovat polynomem

$$(k^2 + ak + b)(k^2 + ak + (b+1))$$

v proměnné k s celočíselnými parametry a a b. Aby se shodovaly koeficienty u k^3, musí být $a = 5$. Roznásobením dostáváme

$$\begin{aligned}(k^2 + ak + b)(k^2 + ak + (b+1)) = (k^2 + 5k + b)(k^2 + 5k + (b+1)) = \\ = k^4 + 10k^3 + (26 + 2b)k^2 + (10b + 5)k + (b^2 + b).\end{aligned}$$

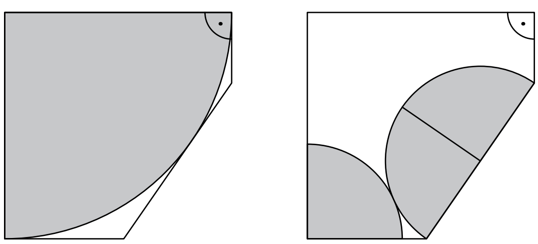
Neexistuje žádné celé číslo b splňující $26 + 2b = 27$. Dosazením obou nejbližších hodnot $b = 0$ a $b = 1$ získáváme nerovnosti, které platí pro dostatečně vysoké hodnoty k:

$$k^4 + 10k^3 + 26k^2 + 5k \overset{(1)}{<} k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k \overset{(2)}{<} k^4 + 10k^3 + 28k^2 + 15k + 2.$$

Pro tato dostatečně vysoká k je hodnota $P(k)$ sevřena mezi dvě po sobě jdoucí čísla tvaru $n(n+1)$. Potřebujeme zjistit, od které hodnoty k jsou obě nerovnosti platné. Nerovnost (1) je možné zjednodušit na $0 < k^2 + 13k = k(k+13)$, proto $k > 0$ nebo $k < -13$. Podobně z (2) získáváme $0 < k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2)$, tedy $k > 2$ nebo $k < 1$. Pro $k < -13$ nebo $k > 2$ jsou tudíž splněny obě nerovnosti, $P(k)$ leží mezi dvěma po sobě jdoucími čísly tvaru $n(n+1)$ a rovnice tedy nemá žádné řešení. Musíme proto zkoumat jen hodnoty $-13 \leq k \leq 2$.

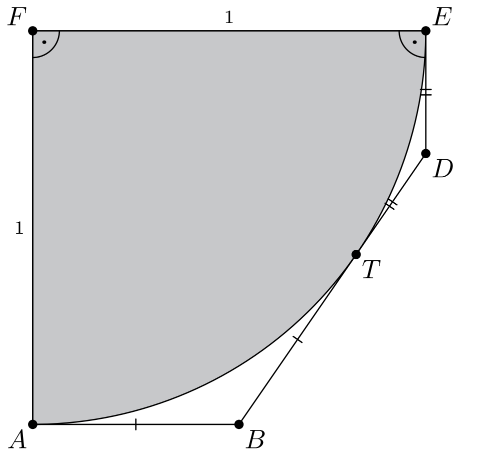
Kdykoli místo nerovnosti (1) nebo (2) platí rovnost, získáváme vhodné k, protože v tom případě se $P(k)$ rovná číslu ve tvaru $n(n+1)$. Z toho důvodu existují řešení (k, n) pro $k = -13, 0, 1, 2$. Jelikož pro $k \geq 0$ je $P(k)$ rostoucí a my hledáme největší přípustné $P(k)$, hodnoty $P(0)$ a $P(1)$ nás nezajímají. Podobně je $P(k)$ zjevně klesající pro $k \leq -6$, takže v tomto rozmezí nelze najít lepší řešení než $k = -13$. Zbývá proto prozkoumat $k = -5, -4, -3, -2, -1$. Hodnota $P(k)$ ale není kladná pro $-6 \leq k \leq -3$ ani pro $-1 \leq k \leq 0$, takže jediným kandidátem mezi řečenými čísly je $P(-2)$. Snadno ověříme, že z hodnot $P(-13)$, $P(-2)$ a $P(2)$ je největší ta první. Pro $k = -13$ nastává rovnost v (1), hledaným číslem je tudíž $n = k^2 + 5k = 104$.

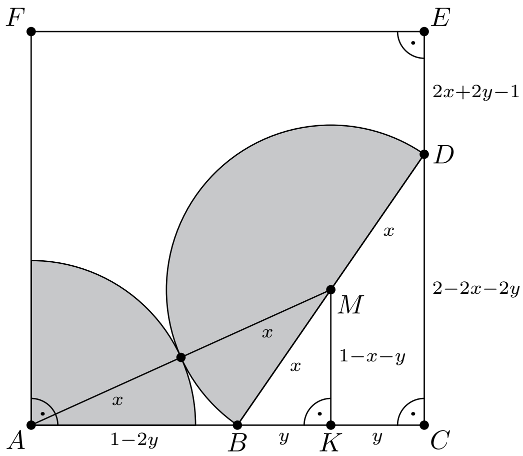
Úloha 59. Pizzerie pana Čtvrtníčka dodává své zboží ve speciálních pětiúhelníkových krabicích, které jsou vhodné jak pro jednu čtvrtinu velké pizzy, tak i pro tři čtvrtiny pizzy malé (viz obrázek). Jaký je poloměr malé pizzy v centimetrech, jestliže ta velká má poloměr 30 cm?



Výsledek. $5(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4})$

Řešení. Vezměme pětiúhelník $ABDEF$ podobný dnu popsané krabice, přičemž $|EF| = 1$ (použitím jednotky 30 cm dostaneme podmínky ze zadání). Všimněme si, že $|AF| = |EF|$ (obě délky odpovídají poloměru velké pizzy) a $|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle BAF| = 90°$ (jinak by rohy nebylo možné beze zbytku vyplnit čtvrtinou pizzy), takže existuje bod C takový, že $ACEF$ je čtverec. Symboly K, M označme po řadě středy úseček BC, BD a dále nazvěme T bod, v němž se velká pizza dotýká BD.





Označíme-li hledaný poloměr symbolem x, platí $|BD| = 2x$. Z dotyků popsaných v zadání odvodíme jednak vztah $|AM| = 2x$, jednak $|AB| = |BT|$ a $|DE| = |DT|$. Z nich mimo jiné plyne $|AB| + |DE| = |BD|$. Při označení $|BC| = 2y$ dostáváme $|AB| = 1 - 2y$, $|DE| = |BD| - |AB| = 2x + 2y - 1$, $|CD| = 2 - 2x - 2y$ a $|KM| = |CD|/2 = 1 - x - y$. Použitím Pythagorovy věty v trojúhelnících BKM a AKM získáváme

$$y^2 + (1 - x - y)^2 = x^2 \quad \text{a} \quad (1 - y)^2 + (1 - x - y)^2 = 4x^2.$$

Dosazením za výraz $1 - x - y$ dostáváme

$$y^2 + 4x^2 - (1 - y)^2 = x^2 \quad \text{neboli} \quad y = \frac{1 - 3x^2}{2}.$$

S touto znalostí se v kterékoli z předchozích rovnic můžeme zbavit y a získat

$$9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Povšimněme si, že

$$\begin{aligned} 9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 &= (3x^2)^2 + (x - 1)^2 - 2 \cdot 3x^2(x - 1) - 7x^2 \\ &= (3x^2 - x + 1)^2 - 7x^2 \\ &= (3x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7} + 1)x + 1), \end{aligned}$$

takže rovnici lze přepsat jako

$$(3x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7} + 1)x + 1) = 0.$$

První z činitelů nemá žádné reálné kořeny, ten druhý má kořeny tvaru

$$\frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{7} \pm \sqrt{2\sqrt{7} - 4}\right).$$

Větší z nich ale zjevně převyšuje 1/2, což je ve sporu s nerovností

$$2|BD| = |BD| + |AB| + |DE| < |BC| + |CD| + |AB| + |DE| = 2.$$

Proto nutně $x = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4})$, takže odpovědí je

$$30x = 5\left(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4}\right) \text{cm}.$$