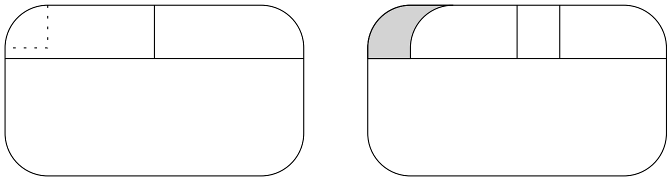
Aufgabe 1. Die Fenster in einer alten Straßenbahn sehen aus wie hier abgebildet. Die abgerundeten Ecken werden von Viertelkreisen mit Radius 10 cm gebildet. Ein Teil des Schiebefensters wurde 10 cm weit geöffnet, wie im zweiten Bild zu sehen ist. Die Höhe des geöffneten Bereichs ist 13 cm. Wie groß ist die Fläche der Öffnung in cm^2?



Ergebnis: 130

Lösungsweg: Der Flächeninhalt der Öffnung ist genau so groß wie der Bereich, in dem sich das Schiebefenster mit dem festen Fenster überlappt, und das ist ein Rechteck der Größe $10\,\mathrm{cm} \times 13\,\mathrm{cm}$.

Aufgabe 2. Ein Rechteck ist wie abgebildet in neun kleinere Rechtecke unterteilt. Die Zahl, die in einem kleinen Rechteck steht, gibt den Umfang dieses kleinen Rechtecks an. Welchen Umfang hat dann das große Rechteck?

	9	
14	10	17
	12	

Ergebnis: 42

Lösungsweg: Bei einem Blick auf die Abbildung erkennt man Folgendes: Der Umfang des großen Rechtecks ist gleich der Summe der Umfänge der vier äußeren kleinen Rechtecke, bei denen der Umfang gegeben ist, minus den Umfang des kleinen Rechtecks in der Mitte. Also ist die Antwort

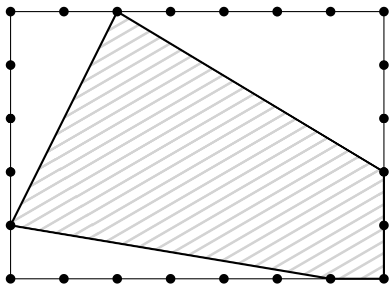
$$14 + 9 + 17 + 12 - 10 \;=\; 42.$$

Aufgabe 3. Marius radierte aus Versehen eine Ziffer einer vierstelligen Primzahl weg und erhielt 630. Wie lautet diese Primzahl?

Ergebnis: 6301

Lösungsweg: Da die letzte Ziffer einer vierstelligen Primzahl nicht gerade sein kann, muss die Primzahl von der Form $630*$ gewesen sein. Die letzte Ziffer kann auch keine 5 sein, da sonst die Zahl durch 5 teilbar wäre. Die Endziffern 3 und 9 scheiden wegen einer durch 3 teilbaren Quersumme aus. Da 6300 durch 7 teilbar ist, ist auch 6307 durch 7 teilbar. Also bleibt nur noch 6301 als Lösung.

Aufgabe 4. Die Star-Architektin Pauline will sich in ihrem rechteckigen Grundstück mit den Seitenlängen 35 m und 25 m ein ganz modernes fünfeckiges Haus bauen. Die Grundfläche des Hauses passt sie in das Grundstück ein wie in der Abbildung zu sehen ist:



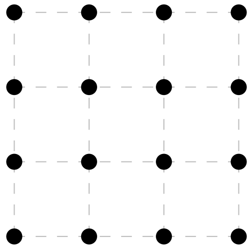
Dabei markieren die Punkte am Rand jeweils einen Abstand von 5 m. Welchen Anteil an der Gesamtfläche nimmt die Grundfläche des Hauses ein?

Ergebnis: $\frac{41}{70}$

Lösungsweg: Da es nur um den Anteil geht, kann man 5 m als Einheit benutzen. Durch Aufsummieren der Flächenanteile der drei rechtwinkligen Dreiecke erhält man als Ergebnis

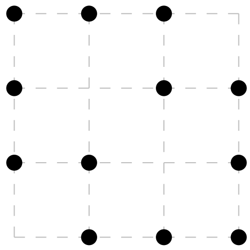
$$1 - \frac{1}{5 \cdot 7}\left(\frac{5 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2}\right) \;=\; \frac{41}{70}.$$

Aufgabe 5. Das abgebildete quadratische Gitter von 16 Punkten enthält die Ecken von neun 1×1-Quadraten, vier 2×2-Quadraten und einem 3×3-Quadrat, also von insgesamt 14 Quadraten, deren Seiten parallel zu den Seiten des Gitters sind. Was ist die kleinste Anzahl an Gitterpunkten, die weggenommen werden können, so dass nach deren Entfernung bei jedem der 14 Quadrate mindestens ein Eckpunkt fehlt?



Ergebnis: 4

Lösungsweg: Es müssen mindestens vier Punkte weggenommen werden, denn die vier kleinen 1×1-Quadrate in den Ecken des Gitters haben keinen gemeinsamen Punkt. Folgendes Beispiel zeigt, dass es auch genügt, vier Punkte wegzunehmen: Entferne zwei entgegengesetzte Ecken des Gitters und zwei innere Punkte auf der anderen Diagonalen.



Aufgabe 6. Bestimme die Einerziffer der Summe der Quadratzahlen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2017^2$.

Ergebnis: 5

Lösungsweg: Die Einerziffern der Quadratzahlen wiederholen sich periodisch mit der Periodenlänge 10. Für die Summe der ersten zehn Quadratzahlen ergibt sich aufgrund von

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 \; = \; 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 \; = \; 385$$

die Endziffer 5. Folglich hat die Summe $1^2 + \cdots + 2010^2$ als Einerziffer die Endziffer von $201 \cdot 5 = 1005$, also 5. Da die Summe $2011^2 + 2012^2 + \cdots + 2017^2$ auf die Ziffer 0 endet, ist die gesuchte Einerziffer die 5.

Aufgabe 7. Schreibe den Quotienten

$$\frac{0.\overline{2}}{0.\overline{24}}$$

als einen vollständig gekürzten Bruch $\frac{a}{b}$ mit positiven ganzen Zahlen a und b.

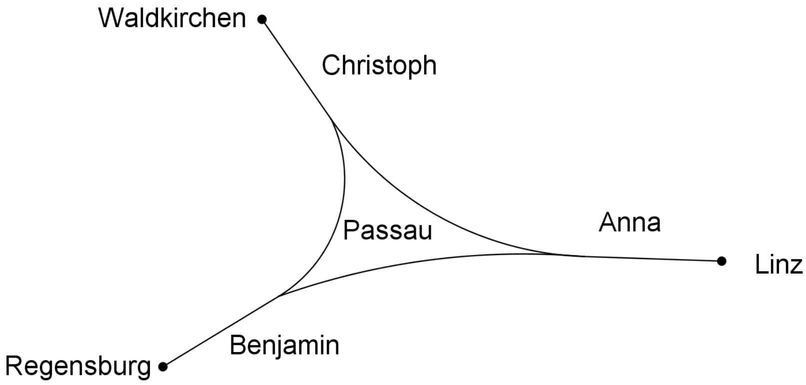
Hinweis: Der Querstrich bedeutet hier periodische Wiederholung in der Dezimalbruchentwicklung, beispielsweise ist $0.\overline{123} = 0.123123123\ldots$

Ergebnis: $\frac{11}{12}$

Lösungsweg: Den gegebenen Quotienten kann man wie folgt umformen:

$$\frac{0.\overline{2}}{0.\overline{24}} = \frac{0.\overline{22}}{0.\overline{24}} = \frac{22 \cdot 0.\overline{01}}{24 \cdot 0.\overline{01}} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$$

Aufgabe 8. Passau hat einen triangelförmigen Bahnhof. Anna, Benjamin und Christoph beobachten den Zugverkehr in Linz, Regensburg und Waldkirchen an den von Passau kommenden Gleisen und zählen dort sowohl die einfahrenden als auch die abfahrenden Züge: Anna zählt 190, Benjamin 208 und Christoph 72. Wie viele Züge gingen von Linz nach Regensburg oder umgekehrt, wenn kein Zug in Passau startet, endet oder dort seine Richtung ändert?



Ergebnis: 163

Lösungsweg: Die Anzahl der Züge zwischen Linz und Waldkirchen sei r, die Anzahl zwischen Linz und Regensburg sei w und die zwischen Waldkirchen und Regensburg sei l. Anna zählt die Züge zwischen Linz und den anderen beiden Städten. Daraus erhält man die Gleichung $r + w = 190$. Ganz analog ergeben sich die Gleichungen $l + w = 208$ und $l + r = 72$. Addiert man nun die ersten beiden Gleichungen und zieht davon die dritte ab, so erhält man $2w = 190 + 208 - 72$. Folglich ist $w = \frac{1}{2} \cdot 326 = 163$.

Aufgabe 9. Bestimme alle natürlichen Zahlen $x < 10\,000$ mit der Eigenschaft, dass x eine Viererpotenz einer geraden Zahl ist und durch Vertauschen der Ziffern von x eine Viererpotenz einer ungeraden Zahl entsteht.

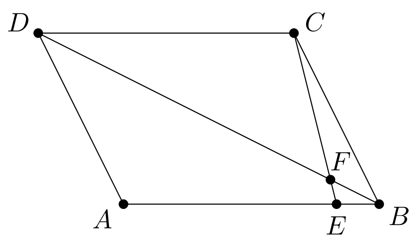
Hinweis: Dabei darf das Ergebnis einer Vertauschung nicht mit einer Null beginnen.

Ergebnis: 256

Lösungsweg: Sei $x = a^4$ mit einer geraden natürlichen Zahl a und sei b eine ungerade natürliche Zahl, so dass b^4 durch Vertauschen der Ziffern von x entsteht. Wegen $10\,000 = 10^4$ müssen a und b kleiner als 10 sein. Indem man a quadriert und die Einerziffer des Ergebnisses noch einmal quadriert, erkennt man, dass a^4 immer auf die Ziffer 6 endet.

Nun berechnet man $1^4 = 1$, $3^4 = 81$, $5^4 = 625$, $7^4 = 2401$ und $9^4 = 6561$. Weil aber eine Ziffer 6 vorhanden sein muss, braucht man nun nur noch die Fälle $b = 5$ und $b = 9$ zu betrachten. Im Fall $b = 9$ muss die zugehörige Zahl a^4 auch durch 9 teilbar sein, was zur Folge hat, dass 3 ein Teiler von a ist. Also muss $a = 6$ sein, aber die Ziffern von $6^4 = 1296$ können nicht zu $9^4 = 6561$ umgeordnet werden.
Folglich bleibt nur noch $b = 5$ übrig. In der Tat kann man die Ziffern von $4^4 = 256$ zu $5^4 = 625$ umordnen.

Aufgabe 10. Im Parallelogramm $ABCD$ schneidet eine Gerade durch den Punkt C die Seite AB im Punkt E so, dass $\overline{EB} = \frac{1}{5}\,\overline{AE}$ erfüllt ist. Die Strecke CE schneidet die Diagonale BD im Punkt F. Bestimme das Verhältnis $\overline{BF} : \overline{BD}$.



Ergebnis: $1 : 7$

Lösungsweg: Die Dreiecke $\triangle EBF$ und $\triangle DFC$ sind ähnlich mit einem Streckungsfaktor $\overline{EB} : \overline{DC} = 1 : 6$. Deshalb gilt auch $\overline{BF} : \overline{FD} = 1 : 6$ und somit $\overline{BF} : \overline{BD} = 1 : 7$.

Aufgabe 11. Ein großes Haus hat 100 nummerierte Wohneinheiten. In jeder Wohnung ist entweder eine Person oder sind zwei oder drei Personen zu Hause. Die Gesamtzahl der Einwohner in den Wohnungen *Nr. 1* bis *Nr. 52* ist 56 und die Gesamtzahl der Leute in den Wohnungen von *Nr. 51* bis *Nr. 100* ist 150. Wie viele Leute leben in diesem Haus?

Ergebnis: 200

Lösungsweg: Da die maximale Anzahl von Leuten in einer Wohnung drei ist, leben in den Wohnungen von *Nr. 51* bis *Nr. 100* jeweils genau drei Personen. Also sind in den Wohnungen von *Nr. 1* bis *Nr. 50* genau $56 - 2 \cdot 3 = 50$ Leute zu Hause, so dass sich eine Gesamtzahl von $150 + 50 = 200$ ergibt.

Aufgabe 12. Als ersten Schritt eines Spieles schrieb Tobias die Zahl 3 mit einem roten und die Zahl 2 mit einem grünen Stift auf ein Blatt Papier. In den folgenden Schritten schrieb er die Summe der beiden Zahlen aus dem vorherigen Schritt in Rot auf und ihre (positive) Differenz in Grün. Welche Zahl schrieb er im 2017-ten Schritt in roter Farbe auf?

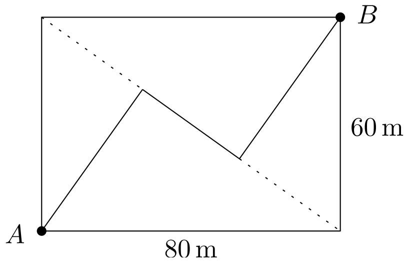
Ergebnis: $3 \cdot 2^{1008}$

Lösungsweg: Man sieht leicht, dass in jedem Schritt die rote Zahl größer ist als die grüne. Wenn also im n-ten Schritt R_n die rote und G_n die grüne Zahl bedeutet, so ergibt sich im $(n+1)$-ten Schritt $R_{n+1} = R_n + G_n$ sowie $G_{n+1} = R_n - G_n$ und im $(n+2)$-ten Schritt

$$\begin{aligned} R_{n+2} &= R_{n+1} + G_{n+1} = 2R_n, \\ G_{n+2} &= R_{n+1} - G_{n+1} = 2G_n. \end{aligned}$$

Also verdoppelt sich sowohl die rote als auch die grüne Zahl alle zwei Schritte. Da diese Verdopplung bis zum 2017-ten Schritt genau 1008-mal passiert, schrieb Tobias im 2017-ten Schritt die rote Zahl $3 \cdot 2^{1008}$ auf.

Aufgabe 13. Rotkäppchen befindet sich am Eingang des *Rechtwinkligen Waldes*. Es muss möglichst schnell von A nach B kommen. Dazu kann es am Waldrand entlang einen Weg der Länge 140 m gehen. Natürlich kennt es die Dreiecksungleichung und weiß, dass der direkte Weg kürzer wäre. Leider gibt es aber von A nach B nur einen Zickzackweg mit zwei rechtwinkligen Abbiegungen durch den Wald, wie in der Skizze zu sehen ist. Wenn Rotkäppchen wüsste, dass dieser Weg kürzer als 140 m ist, würde es diesen Weg nehmen. Berechne die Länge des Zickzackweges durch den Wald in Metern!



Ergebnis: 124

Lösungsweg: Mit dem Satz von Pythagoras erhält man $\sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ als Länge der Diagonalen des Rechtecks. Die Höhe auf die Diagonale teilt diese in zwei Teile. Beispielsweise bestimmt man nun den kürzeren Teil mit dem Kathetensatz zu $60^2 : 100 = 36$. Daraus ergibt sich $100 - 36 = 64$ für den längeren Teil der Diagonalen und man kann den Höhensatz anwenden, um die Länge der Höhe als $\sqrt{36 \cdot 64} = 48$ zu erhalten. Insgesamt hat der Zickzackweg eine Länge von $48 + (64 - 36) + 48 = 124$.

Aufgabe 14. Achtstellige Palindrome sind Zahlen der Form $\overline{abcddcba}$, wobei a, b, c und d nicht notwendigerweise verschiedene Ziffern sind und $a \neq 0$ gilt. Wie viele achtstellige Palindrome haben die Eigenschaft, dass man nach dem Streichen einiger Ziffern die Zahl 2017 als Ergebnis bekommt?

Ergebnis: 8

Lösungsweg: Da alle Ziffern der Zahl 2017 verschieden sind, müssen alle Ziffern a, b, c und d paarweise verschieden sein und jede Ziffer muss genau einmal gestrichen werden. Nach dem Streichen ist die erste oder die letzte Ziffer von 2017 gleich a, weshalb es für a nur die zwei Möglichkeiten $a = 2$ oder $a = 7$ gibt. In beiden Fällen ergibt sich nun eine analoge Aufgabenstellung für ein sechsstelliges Palindrom $\overline{bcddcb}$. Im ersten Fall hat man für b die zwei Möglichkeiten $b = 0$ oder $b = 7$ und im zweiten Fall die zwei Möglichkeiten $b = 2$ oder $b = 1$. Analog sieht man, dass man für das dann entstehende vierstellige Palindrom $\overline{cddc}$ jeweils zwei Möglichkeiten für c hat und anschließend d eindeutig festgelegt ist. Insgesamt gibt es also $2^3 = 8$ Möglichkeiten für ein Palindrom der gesuchten Art.

Aufgabe 15. Für eine positive ganze Zahl n sei $\mathrm{S}(n)$ die Summe ihrer Ziffern und $\mathrm{P}(n)$ das Produkt ihrer Ziffern. Wie viele positive ganze Zahlen gibt es, für die $n = \mathrm{S}(n) + \mathrm{P}(n)$ gilt?

Ergebnis: 9

Lösungsweg: Für eine einstellige positive ganze Zahl n gilt stets $\mathrm{S}(n) + \mathrm{P}(n) = 2n > n$.

Nun betrachtet man positive ganze Zahlen n mit mehr als einer Ziffer. Sei $m \geq 1$ und $n = a_m 10^m + \cdots + a_0$ mit $0 \leq a_k \leq 9$ für $0 \leq k \leq m$ und $a_m \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} n - \mathrm{S}(n) - \mathrm{P}(n) &= a_m 10^m + \cdots + a_0 - (a_m + \cdots + a_0) - a_m \cdots a_0 \\ &= (10^m - 1 - a_{m-1} \cdots a_0) a_m + (10^{m-1} - 1) a_{m-1} + \cdots + 9a_1 \\ &\geq (10^m - 1 - 9^m) a_m \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

und in der letzten Ungleichung gilt Gleichheit nur für $m = 1$. Ist also n eine Zahl der gesuchten Art, so muss

$$n = 10a_1 + a_0 = a_1 + a_0 + a_1 a_0$$

erfüllt sein, was gleichbedeutend ist mit $a_1(9 - a_0) = 0$, also $a_0 = 9$. Schließlich haben genau die neun Zahlen 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 und 99 die gewünschte Eigenschaft.

Aufgabe 16. Ein Fabrikbesitzer beschäftigt 100 Angestellte. Jeder Gruppenleiter verdient 5 000 € im Monat, jeder Arbeiter 1 000 € und jeder Teilzeitbeschäftigte nur 50 €. Der Fabrikbesitzer hat von jeder dieser drei Arten mindestens einen Angestellten und zahlt jeden Monat 100 000 € Lohn aus. Wie viele Gruppenleiter sind in der Fabrik beschäftigt?

Ergebnis: 19

Lösungsweg: Übersetzt man die gegebenen Informationen in Gleichungen, so entsteht folgendes Gleichungssystem, wenn man mit x die Anzahl der Gruppenleiter, mit y die Anzahl der Arbeiter und mit z die Anzahl der Teilzeitbeschäftigten bezeichnet:

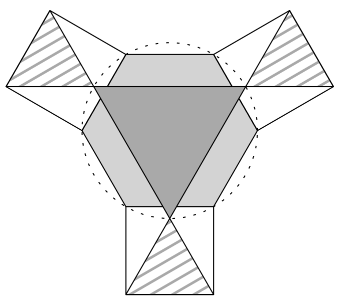
$$x + y + z = 100 \tag{1}$$
$$5\,000x + 1\,000y + 50z = 100\,000 \tag{2}$$

Dabei sind x, y und z positive ganze Zahlen. Löst man Gleichung (2) nach z auf, so kann man wegen $z = 2000-20y-100x$ erkennen, dass z durch 20 teilbar sein muss. Setzt man $z = 20k$ in die beiden Gleichungen ein und dividiert die zweite durch 1 000, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y + 20k &= 100, \\ 5x + y + k &= 100. \end{aligned}$$

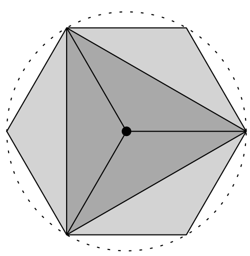
Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so ergibt sich $4x = 19k$. Weil 4 und 19 teilerfremd sind, muss 19 ein Teiler von x sein. Wegen $0 < x < 20$ kommt nur $x = 19$ (mit $y = 1$ und $z = 80$) als Lösung in Frage.

Aufgabe 17. Das abgebildete Mosaik ist ausschließlich aus regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt. Das Sechseck und das dunkelgraue Dreieck besitzen denselben Umkreis. Bestimme den Flächeninhalt des dunkelgrauen Dreiecks, wenn der Flächeninhalt eines schraffierten Dreiecks 17 beträgt.



Ergebnis: 51

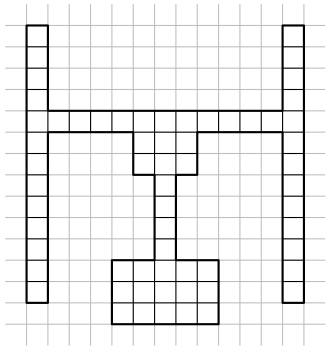
Lösungsweg: Dreht man das dunkelgraue Dreieck 30° um den Mittelpunkt des Umkreises, so fallen seine Ecken mit Ecken des Sechsecks zusammen. Also ist der Flächeninhalt des dunkelgrauen Dreiecks genau halb so groß wie der Flächeninhalt des Sechsecks.



Da sowohl das Sechseck als auch die aufgesetzten Quadrate und die dort innen liegenden schraffierten Dreiecke die gleichen Seitenlängen besitzen, beträgt der Flächeninhalt eines schraffierten Dreiecks ein Sechstel des Flächeninhalts des Sechsecks. Also verhalten sich die Flächeninhalte des schraffierten und des dunkelgrauen Dreiecks wie $1 : 3$ zueinander. Deshalb ist der gesuchte Flächeninhalt $3 \cdot 17 = 51$.

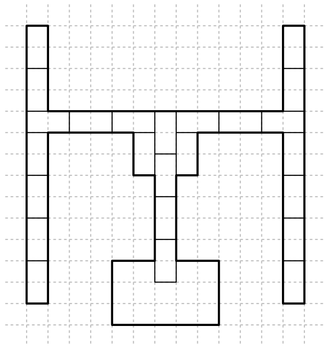
Aufgabe 18. Im Zuge der Renovierung des Bahnhofs in Passau werden auch speziell gepflasterte Wege für sehbehinderte Personen angelegt. Die Form dieser Pflasterung ist in der Abbildung zu sehen. Leider sind nur noch Platten der Größe 1×2 übrig geblieben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, mit solchen Platten den Weg auszulegen?

Hinweis: Die Platten unterscheiden sich nicht und zwei Pflasterungen sind verschieden, wenn Platten an einer Stelle anders angeordnet sind.

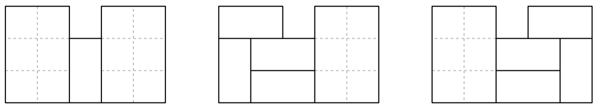


Ergebnis: 15

Lösungsweg: Beginnt man mit dem Auslegen der Platten in den schmalen Streifen, so erkennt man, dass deren Lage eindeutig vorgegeben ist bis hin zur $3 \times 5-$Rechtecksfläche.

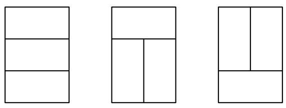


Nun gibt es drei Möglichkeiten für die nächste Platte: Sie kann entweder in der gleichen Richtung wie die vorherige angefügt werden (Fall (1) unten), wobei zwei abgetrennte $3 \times 2-$Flächen entstehen, oder sie kann quer angelegt werden (Fälle (2) und (3)). Hier ist dann die Pflasterung wieder eindeutig bis auf eine $3 \times 2-$Fläche.



(1) (2) (3)

Jede $3 \times 2-$Fläche kann auf die folgenden drei Arten ausgelegt werden:



Deshalb gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten der Pflasterung im Fall (1) und jeweils 3 in den Fällen (2) und (3). Also gibt es insgesamt $9 + 3 + 3 = 15$ unterschiedliche Pflasterungen.

Aufgabe 19. Patricia suchte sich eine natürliche Zahl n aus. Dann nahm sie einen (positiven) Teiler von n, multiplizierte ihn mit 4, subtrahierte den Wert dieses Produktes von n und erhielt 2017 als Ergebnis. Bestimme alle Zahlen, die Patricia sich ausgesucht haben könnte.

Ergebnis: 2021, 10085

Lösungsweg: Es sei d der gewählte Teiler von n. Folglich ist $n = k \cdot d$ für eine ganze Zahl k. Laut Aufgabenstellung muss die Gleichung

$$k \cdot d - 4d = (k - 4)d = 2017$$

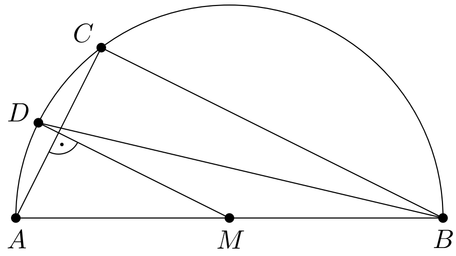
gelten. Da 2017 eine Primzal ist, muss entweder $d = 1$ oder $d = 2017$ sein. Im ersten Fall ergibt sich $n = k = 2017 + 4 = 2021$, und im zweiten Fall ist $k = 5$ und deshalb $n = 2017 \cdot 5 = 10085$.

Aufgabe 20. Marianne und Hilde sind so gute Freundinnen, dass sie immer miteinander zu reden beginnen, sobald sie nebeneinander sitzen. Fünf Schülerinnen, unter ihnen auch Marianne und Hilde, wollen ein ernstes Thema konstruktiv diskutieren. Deshalb wollen sie auf fünf Stühlen so um einen runden Tisch sitzen, dass Marianne und Hilde nicht direkt nebeneinander sitzen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, wenn Anordnungen, die durch Drehungen auseinander hervorgehen, als unterschiedlich gezählt werden?

Ergebnis: 60

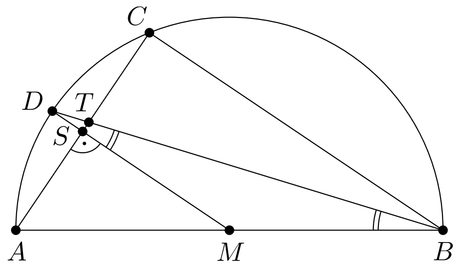
Lösungsweg: Marianne hat 5 Möglichkeiten sich ihren Platz auszusuchen. Da Hilde nicht neben Marianne sitzen soll, bleiben für sie nur die zwei Plätze übrig, die Marianne gegenüber liegen. Das ergibt $5 \cdot 2$ Möglichkeiten. Die restlichen drei Schülerinnen können sich auf $3!$ Arten dazusetzen. Also gibt es insgesamt $5 \cdot 2 \cdot 3! = 60$ Möglichkeiten für die gesuchte Anordnung.

Aufgabe 21. In der Abbildung ist AB der Durchmesser eines Kreises mit Mittelpunkt M. Die Punkte D und C liegen so auf dem Kreis, dass $AC \perp DM$ erfüllt ist und $\angle MAC = 56°$ gilt. Bestimme die Größe des spitzen Winkels zwischen den Strecken AC und BD in Grad.



Ergebnis: 73

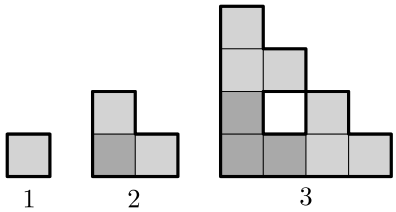
Lösungsweg: Der Schnittpunkt von AC mit DM sei mit S und der mit DB sei mit T bezeichnet.



Wegen $\angle MAC = 56°$ und dem gegebenen rechten Winkel bei S erhält man aus der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle AMS$ zunächst $\angle SMA = 34°$. Dann ist $\angle BMD = 180° - \angle SMA = 146°$. Weil MB und MD beides Radien des Kreises sind, ist das Dreieck $\triangle BDM$ gleichschenklig. Für den Basiswinkel $\angle MDB$ ergibt sich $\angle MDB = \frac{1}{2}(180° - 146°) = 17°$. Schließlich kann man den gesuchten Winkel über die Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle DST$ berechnen:

$$\angle DTS = 180° - 90° - \angle SDT = 90° - \angle MDB = 90° - 17° = 73°$$

Aufgabe 22. Eine geometrische Figur wird nacheinander aus Einheitsquadraten aufgebaut, indem Kopien einer Stufe wie in der Abbildung zu einer neuen Stufe zusammengesetzt werden. Wie lang ist die dicke Begrenzungslinie der Figur in Stufe sechs?



Ergebnis: 488

Lösungsweg: Mit f_n wird die Länge der dicken Begrenzungslinie der n-ten Stufe bezeichnet. In jeder Stufe werden drei kongruente Figuren der vorherigen Stufe entlang zweier Seiten der Länge 1 zusammengesetzt, die nun nicht mehr zum Rand gehören. Hieraus ergibt sich die Rekursionsformel $f_{n+1} = 3 \cdot f_n - 2 \cdot 2$ für alle $n \geq 1$. Mit $f_1 = 4$ erhält man hieraus die Lösung $f_6 = 488$.

Aufgabe 23. In einer Zusammenkunft von Superhelden und Schurken waren alle 2017 Plätze um einen großen runden Tisch besetzt. Die Superhelden sagen immer die Wahrheit, wohingegen die Schurken immer lügen. Jede Person, die am Tisch saß, sagte aus, dass sie zwischen einem Superhelden und einem Schurken sitzt. Aus ungeklärten Gründen machte genau ein Superheld einen Fehler. Wie viele Superhelden waren anwesend?

Ergebnis: 1345

Lösungsweg: Zuerst sei bemerkt, dass Schurken nicht nebeneinander sitzen können. Hat nämlich ein Schurke einen anderen Schurken als einen Nachbarn, dann müsste der zweite Nachbar auch ein Schurke sein. Das würde sich so fortsetzten, was bedeuten würde, dass gar kein Superheld anwesend ist. Aber es ist ja bekannt, dass es mindestens einen Superhelden gibt, nämlich den, der einen Fehler machte.

Wenn man zunächst den Superhelden, der fälschlicherweise gelogen hat, außer Acht lässt und nur die Superhelden betrachtet, die immer die Wahrheit sagen, dann sitzt jeder Superheld zwischen einem Superhelden und einem Schurken. Die um den Tisch sitzenden Leute lassen sich also in geordnete Gruppen der Form *Superheld–Superheld–Schurke* unterteilen. Der lügende Superheld kann dann entweder zwischen zwei Superhelden gesetzt werden oder zusammen mit einem Schurken zwischen einen Superhelden und einen Schurken. Der Rest bei der Division der Anzahl der Personen durch drei ist im ersten Fall 1 und im zweiten Fall 2. Weil 2017 bei der Division durch 3 den Rest 1 ergibt, handelt es sich um den ersten Fall. Folglich sitzen $\frac{2}{3} \cdot 2016 + 1 = 1345$ Superhelden am Tisch.

Aufgabe 24. Bestimme alle positiven reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$x^{2017x} = (2017x)^x$$

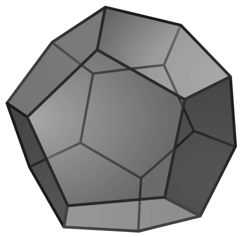
erfüllen.

Ergebnis: $\sqrt[2016]{2017}$

Lösungsweg: Da x positiv ist, kann man beide Seiten mit $\frac{1}{x}$ potenzieren und erhält $x^{2017} = 2017x$ und hieraus $x^{2016} = 2017$. Die gesuchte Lösung ist also $x = \sqrt[2016]{2017}$.

Aufgabe 25. Leo möchte die Kanten eines regelmäßigen Dodekaeders in einer speziellen Art und Weise anmalen: Er wählt sich einen Filzstift, setzt ihn an einem Eckpunkt des Dodekaeders an und fährt damit entlang von zusammenhängenden Kanten ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Kante zweimal anzumalen, bis er den Stift entweder freiwillig absetzt oder er dazu gezwungen wird. Dann nimmt er einen Filzstift mit einer anderen Farbe und beginnt erneut, noch nicht eingefärbte zusammenhängende Kanten anzumalen. Er macht auf diese beschriebene Art, jedes Mal mit einer neuen Farbe, so lange weiter, bis alle Kanten des Dodekaeders genau einmal eingefärbt sind. Was ist die kleinste Anzahl an Farben, die Leo benutzen kann?

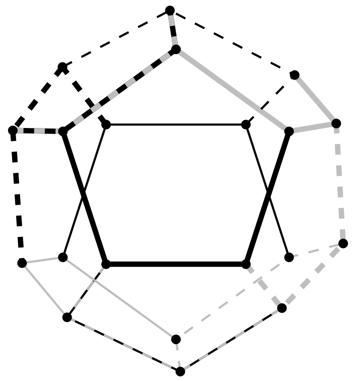
Hinweis: Ein regelmäßiges Dodekaeder ist ein Körper mit zwölf kongruenten regelmäßigen Fünfecken als Flächen wie in der Abbildung zu sehen ist.



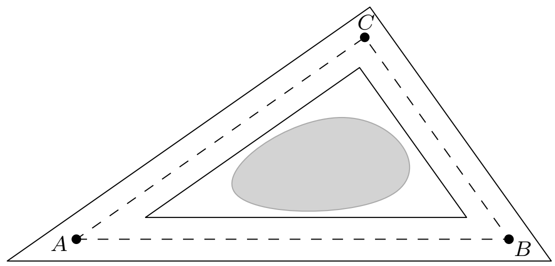
Ergebnis: 10

Lösungsweg: Ein Dodekaeder hat 20 Ecken und an jeder Ecke treffen sich drei Kanten. Es genügt, das Kantenmodell zu betrachten, das aus den Ecken und den Kanten des Dodekaeders besteht. Nach jedem Schritt, bei dem ein Streckenzug von zusammenhängenden Kanten in einer Farbe angemalt wird, entfernt man die eingefärbten Kanten. Wenn man einen geschlossenen Streckenzug entfernt, werden an jeder Ecke entweder 0 oder 2 Kanten entfernt. Wenn die Anfangsecke A und die Endecke E eines weggenommenen Streckenzuges verschieden sind, wird an den Ecken A und E genau eine Kante entfernt, wohingegen an den übrigen Ecken 0 oder 2 Kanten entfernt werden. Also muss jede Ecke Start- oder Endpunkt von mindestens einem Streckenzug sein. Deswegen braucht man mindestens 10 Farben.

Die folgende Abbildung zeigt, dass es eine Färbung mit 10 Farben gibt. Folglich ist 10 die Antwort.

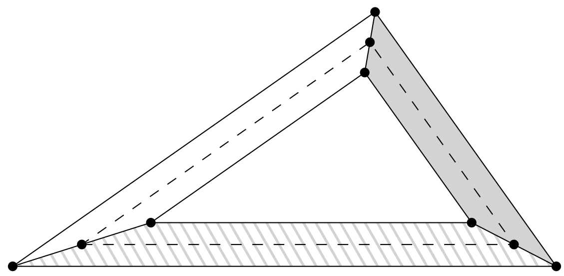


Aufgabe 26. Der Landschaftsarchitekt Severin ist beauftragt, einen dreieckigen Schotterweg rund um einen neuen Badesee anzulegen. Die Seitenlängen des Dreiecks $\triangle ABC$ in der Mitte des Weges betragen $a = 80\,\mathrm{m}$, $b = 100\,\mathrm{m}$ und $c = 120\,\mathrm{m}$. Die Ränder des Weges sollen jeweils einen Abstand von $1\,\mathrm{m}$ zu diesem Dreieck haben, so wie es in der Abbildung dargestellt ist. Wie viele Kubikmeter feinen Schotter muss Severin bestellen, wenn der Belag des Schotters durchschnittlich $4\,\mathrm{cm}$ hoch sein soll?



Ergebnis: 24

Lösungsweg: Die Fläche des Weges kann in drei Trapeze mit der Höhe 2 und den Mittellinien der Länge a, b bzw. c unterteilt werden.



Weil man die Fläche eines Trapezes auch als Produkt aus Mittellinie und Höhe berechnen kann, erhält man

$$2 \cdot (80 + 100 + 120) = 2 \cdot 300 = 600$$

als Fläche des Weges in m^2. Nun berechnet man die gefragte Bestellmenge an Schotter durch $600\,\mathrm{m}^2 \cdot 0.04\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{m}^3$.

Aufgabe 27. Finde alle vierstelligen Quadrate ganzer Zahlen, wobei die ersten beiden Ziffern gleich sein sollen und die letzen beiden Ziffern auch.

Ergebnis: 7744

Lösungsweg: Sei N eine solche Zahl mit den ersten beiden Ziffern x und den letzten beiden Ziffern y. Dann gilt

$$N = 1000x + 100x + 10y + y = 11(100x + y)$$

und man sieht, dass N durch 11 teilbar ist. Weil N aber eine Quadratzahl ist, muss N auch durch 11^2 teilbar sein. Schreibt man $N = 11^2k^2$ mit einer ganzen Zahl k, so folgt $100x + y = 11k^2$. Weil die linke Seite dieser Gleichung eine dreistellige Zahl mit einer Null an der Zehnerstelle ist, muss k^2 eine zweistellige Quadratzahl sein, deren Ziffern in der Summe 10 ergeben. Letzteres sieht man ein, wenn man $k^2 = 10a + b$ mit Ziffern a und b schreibt und dann $11k^2 = 100a + 10(a + b) + b$ berechnet. Die einzige solche Quadratzahl ist $8^2 = 64$. Damit ist nun $100x + y = 11 \cdot 8^2$ und folglich $N = 11^2 \cdot 8^2 = 88^2 = 7744$.

Aufgabe 28. Auf einem Volksfest gibt es eine Tombola mit folgenden Spielregeln: Man darf zuerst eine von vier nicht unterscheidbaren Boxen auswählen und dann eine Kugel aus der gewählten Box ziehen. Ist die gezogene Kugel weiß, so hat man gewonnen, ist sie schwarz, so hat man verloren. Ist beispielsweise die Verteilung der Kugeln in den vier Boxen

$$(6,6), \quad (5,3), \quad (4,0), \quad (3,5),$$

wobei jedes Paar (w,s) eine Box mit w weißen und s schwarzen Kugeln repräsentiert, dann gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{5}{8}$.

Jeder tausendste Teilnehmer erhält einen Super-Joker: Er darf selber alle Bälle in den Boxen umverteilen, muss dabei aber in jede Box mindestens eine Kugel legen. Anschließend werden die Boxen gemischt, der Teilnehmer darf eine davon auswählen und daraus dann eine Kugel ziehen. Johanna hatte Glück und hat den Super-Joker gewonnen. Welche maximale Gewinnwahrscheinlichkeit kann sie durch geeignetes Umverteilen der Kugeln im obigen Beispiel erreichen?

Ergebnis: $\frac{51}{58}$

Lösungsweg: Wenn Johanna in drei der vier Urnen jeweils eine weiße Kugel und keine schwarze Kugel legt, so hat sie bei Auswahl einer dieser Urnen mit Sicherheit gewonnen. Also gewinnt sie bei einer Verteilung $(1,0)$, $(1,0)$, $(1,0)$ und $(15,14)$ der Kugeln mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}(1+1+1+\frac{15}{29}) = \frac{51}{58}$.

Man sieht leicht ein, dass jede andere Verteilung der Kugeln zu einer geringeren Gewinnwahrscheinlichkeit führt. Die Wahrscheinlichkeit des Verlierens ist nämlich die Summe der Wahrscheinlichkeiten, jedesmal eine schwarze Kugel zu ziehen, und für eine einzelne Kugel ist die Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden am kleinsten, wenn sich so viele Kugeln wie möglich in der Box befinden.

Aufgabe 29. Ein Bus, ein Lastwagen und ein Motorrad fahren mit konstanten Geschwindigkeiten. Sie passieren in gleichen Zeitintervallen einen Kontrollposten in der genannten Reihenfolge. Bei einem etwas weiter entfernten zweiten Kontrollposten entlang der Straße kommen sie wieder in den gleichen Zeitabständen vorbei, diesmal allerdings in der geänderten Reihenfolge Bus, Motorrad, Lastwagen. Wie schnell fährt der Bus in km/h, wenn der Lastwagen mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h und das Motorrad mit 120 km/h unterwegs sind?

Ergebnis: 80

Lösungsweg: Es sei t das Zeitintervall zwischen den Zeitpunkten, an denen die Fahrzeuge den ersten Kontrollposten passieren. Das Motorrad kommt beim ersten Posten t Stunden nach dem Lastwagen und beim zweiten Posten t Stunden vor dem Lastwagen vorbei. Also braucht das Motorrad für die Strecke zwischen den Kontrollposten $2t$ Stunden weniger als der Lastwagen. Da das Motorrad zweimal so schnell unterwegs ist wie der Lastwagen, braucht es für die gleiche Strecke, wie sie der Lastwagen fährt, nur die halbe Zeit. Folglich braucht der Lastwagen $4t$ Stunden für die Strecke zwischen den Kontrollposten und das Motorrad $2t$ Stunden.

Der Bus kommt am ersten Kontrollposten t Stunden vor dem Lastwagen vorbei und am zweiten Posten $2t$ Stunden früher als der Lastwagen. Da der Lastwagen $4t$ Stunden für die Strecke zwischen den Kontrollposten benötigt, braucht der Bus $3t$ Stunden dafür. Folglich ist der Bus mit $\frac{4}{3}$ der Geschwindigkeit des Lastwagens unterwegs, nämlich mit 80 km/h.

Aufgabe 30. Bestimme alle Möglichkeiten dafür, in dem nachfolgenden Satz alle Lücken so mit natürlichen Zahlen zu füllen, dass eine wahre Aussage entsteht:

„In diesem Satz sind $\boxed{}$% der vorkommenden Ziffern größer als 4, $\boxed{}$% kleiner als 5 und $\boxed{}$% entweder 4 oder 5.“

Ergebnis: 50, 50, 60

Lösungsweg: Offensichtlich ist die Gesamtzahl der vorkommenden Ziffern höchstens zehn. Aus den vier schon bekannten Ziffern schließt man, dass die Zahlen in den ersten beiden Lücken mindestens 20 und in der dritten mindestens 40 sein müssen. Folglich gibt es insgesamt zehn Ziffern und alle Einträge in den Lücken enden auf eine Null. Deshalb kann man sie als $\overline{a0}$, $\overline{b0}$ und $\overline{c0}$ mit Ziffern a, b und c schreiben, wobei $a+b=10$ gilt, da die Zahlen in den ersten beiden Lücken in der Summe 100 ergeben müssen.

In dem betrachteten Satz kommen also bereits mindestens zwei Ziffern größer als 4 und mindestens fünf Ziffern kleiner als 5 vor, so dass $5 \geq a \geq 2$ gelten muss. Da mindestens eine der Ziffern a oder b größer als 4 sein muss, ergibt sich sogar $5 \geq a \geq 3$.

Weil bereits vier Ziffern entweder 4 oder 5 sind, gilt $c \geq 4$. Wäre $c = 4$, so gäbe es aber mindestens fünf solche Ziffern, was zu einem Widerspruch führt. Also gilt $c \geq 5$ und somit $5 \geq a \geq 4$. Nun betrachtet man in einer Fallunterscheidung die beiden letzten Möglichkeiten für a:

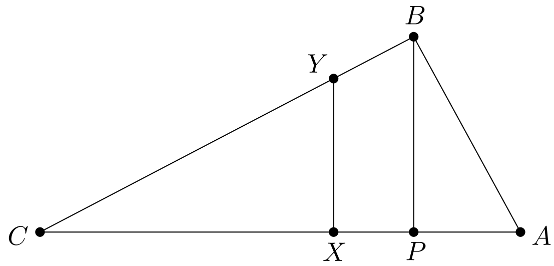
Ist $a = 4$, so folgt hieraus $b = 6$. Wenn nun $c = 5$ wäre, so wären aber 60% der Ziffern entweder 4 oder 5, und im anderen Fall $c > 5$ wären es dann nur 50% solche Ziffern. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch.

Ist $a = 5$, so folgt $b = 5$ und $c \geq 6$. Man sieht leicht, dass nur $c = 6$ alle Bedingungen erfüllt und somit 50, 50, 60 die einzig mögliche Lösung ist.

Aufgabe 31. Pauls Herde weidet auf einer dreieckigen Wiese mit den Eckpunkten A, B und C. Da sich seine gefleckten Kühe nicht mit den ungefleckten vertragen, hat Paul einen zwanzig Meter langen Zaun senkrecht zur Seite AC eingezogen, der beim Punkt P auf dieser Seite beginnt und im Punkt B endet. Dadurch wird die Wiese in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt. Aber kurz danach wiesen die gefleckten Kühe, die in dem Teil weideten, der den Punkt A enthält, darauf hin, dass das Verhältnis $\overline{AP} : \overline{PC} = 2 : 7$ ist, und forderten eine gerechte Aufteilung. Also ersetzte Paul den Zaun durch einen neuen parallel zum alten, der die Wiese in zwei gleiche Teile aufteilte und ebenfalls an den Grenzen der Wiese endete. Wie lang war der neue Zaun in Metern?

Ergebnis: $30\sqrt{\frac{2}{7}}$

Lösungsweg: Da das Dreieck $\triangle PBC$ eine größere Fläche hat als das Dreieck $\triangle ABP$, liegt der mit X bezeichnete Endpunkt des neuen Zaunes auf der Seite AC zwischen C und P. Der andere Endpunkt liegt auf der Seite BC und wird mit Y bezeichnet. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle PBC$ und $\triangle XYC$ folgt $\overline{XY} : \overline{XC} = \overline{PB} : \overline{PC}$.



Da das Dreieck $\triangle XYC$ die Hälfte der Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ besitzt, folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{XY} \cdot \overline{XC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{AC},$$

was äquivalent ist zu

$$\overline{XY}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{XY}}{\overline{XC}} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PB}^2 \cdot \frac{\overline{AP} + \overline{PC}}{\overline{PC}}.$$

Deshalb ergibt sich

$$\overline{XY} = \overline{PB} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}\right)} = 30\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Aufgabe 32. An der Tafel standen fünf nicht notwendigerweise verschiedene reelle Zahlen. Für jedes mögliche Paar von diesen Zahlen berechnete Julien dessen Summe, schrieb diese zehn Ergebnisse

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

an die Tafel und wischte die ursprünglichen Zahlen weg. Bestimme alle möglichen Werte, die das Produkt der weggewischten Zahlen annehmen kann.

Ergebnis: -144

Lösungsweg: Bezeichnet man die ursprünglichen Zahlen mit $a \le b \le c \le d \le e$, so ist unter den zehn berechneten Summen $a + b = 1$ die kleinste, $a + c = 2$ die nächstgrößere, $d + e = 10$ die größte und $c + e = 9$ die zweitgrößte. Da die zehn berechneten Summen sich zu

$$4(a + b + c + d + e) = 1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 56$$

aufaddieren, erhält man $a + b + c + d + e = 14$ und somit $c = 14 - 1 - 10 = 3$. Hieraus kann man die restlichen Zahlen zu $a = 2 - c = -1$, $b = 1 - a = 2$, $e = 9 - c = 6$ und $d = 10 - e = 4$ bestimmen. Für diese Werte überprüft man leicht, dass die restlichen sechs Summen genau in die Liste der Zahlen an der Tafel passen. Also kann das Produkt nur den Wert $-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = -144$ annehmen.

Aufgabe 33. Schreibe die Zahl 333 als Summe von Quadraten verschiedener positiver ungerader Zahlen.

Ergebnis: $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2$

Lösungsweg: Die Quadrate ungerader Zahlen lassen beim Teilen durch 8 den Rest 1. Da 333 beim Teilen durch 8 den Rest 5 lässt, muss die Anzahl der Summanden gleich fünf sein. Wegen $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 17^2 > 333$ kann 17^2 nicht in der Summe vorkommen.

Nun betrachtet man die möglichen restlichen Summanden modulo 5: Zwei von ihnen, nämlich 5^2 und 15^2, sind durch 5 teilbar, drei weitere, nämlich 1^2, 9^2 und 11^2, lassen Rest 1 und die übrigen drei, 3^2, 7^2 und 13^2, lassen den Rest -1.

Da 333 beim Teilen durch 5 den Rest 3 lässt, kann man nun zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall summiert man alle Zahlen mit den Resten 0 oder 1 auf und erkennt, dass diese Zahl größer als 333 ist.

Im zweiten Fall summiert man alle Zahlen mit dem Rest -1 und jeweils eine mit Rest 0 bzw. 1 auf. Nun sieht man leicht, dass alle Summen, die entweder 11^2 oder 15^2 enthalten, zu groß sind. Von den beiden verbleibenden Möglichkeiten ist nur $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2$ gleich 333.

Aufgabe 34. Ellen wählte drei reelle Zahlen a, b, c und definierte damit die Operation $\odot$ durch $x \odot y = ax + by + cxy$. Als Übung berechnete sie $1 \odot 2 = 3$ und $2 \odot 3 = 4$. Ferner bemerkte sie, dass es eine reelle Zahl u ungleich Null gibt, so dass $z \odot u = z$ für jede reelle Zahl z gilt. Welchen Wert hat u?

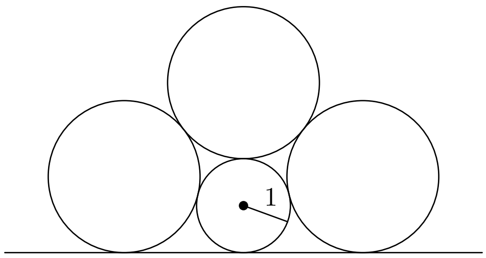
Ergebnis: 4

Lösungsweg: Wegen $0 = 0 \odot u = bu$ folgt $b = 0$, da u ungleich Null ist. Die gegebenen Gleichungen können dann als

$$a + 2c = 3,$$
$$2a + 6c = 4$$

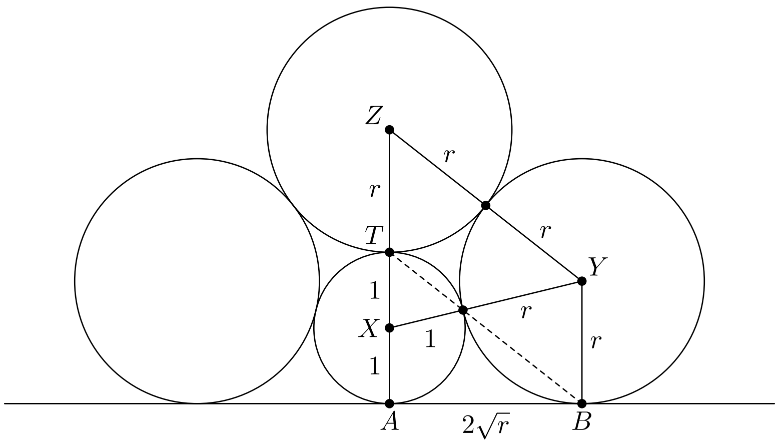
geschrieben werden und man erhält hieraus die Lösungen $a = 5$ und $c = -1$. Aus der Gleichung $1 = 1 \odot u = 5 - u$ folgt schließlich $u = 4$.

Aufgabe 35. Drei Kreise mit Radius r und ein Kreis mit Radius 1 berühren einander und eine Gerade wie in der Abbildung zu sehen ist. Bestimme r.



Ergebnis: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Lösungsweg: Die Berührpunkte A, B und T sowie die Mittelpunkte X, Y und Z der Kreise seien wie in der Abbildung definiert.



Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man

$$\overline{AB}^2 = \overline{XY}^2 - (\overline{BY} - \overline{AX})^2 = (r+1)^2 - (r-1)^2 = 4r.$$

Wegen $BY \parallel TZ$ und $\overline{BY} = \overline{TZ} = r$ ist das Viereck $BYZT$ ein Parallelogramm mit $\overline{BT} = \overline{YZ} = 2r$. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABT$ gilt nun $\overline{AB}^2 + \overline{AT}^2 = \overline{BT}^2$ nach dem Satz des Pythagoras, also $4r + 2^2 = (2r)^2$. Diese Gleichung reduziert sich zu

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Die einzige positive Lösung dieser quadratischen Gleichung ist $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 36. Auf eine alte Betonwand hatte jemand fünf nicht notwendigerweise verschiedene reelle Zahlen gesprüht, deren Summe 20 war. Eva berechnete für jedes Paar dieser Zahlen deren Summe und nahm von dieser Summe jeweils nur den ganzzahligen Anteil. Dann addierte sie alle diese ganzen Zahlen. Bestimme den kleinsten Wert, den diese Summe annehmen kann.

Ergebnis: 72

Lösungsweg: Bezeichnet man die Zahlen an der Betonwand mit $a_1, \ldots, a_5$, so ist der kleinste Wert der Summe

$$W = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor$$

gesucht, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als x ist. Man kann diese Summe umformen zu

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_i + a_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \{a_i + a_j\} = 80 - \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \{a_i + a_j\},$$

wobei $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ den nicht ganzzahligen Anteil von x bezeichnet. Also muss man zur Bestimmung der Lösung die Summe

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \{a_i + a_j\}$$

möglichst groß machen. Diese Summe kann man nun in zwei Summen

$$\sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+1}\} + \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+2}\}$$

aufteilen, wenn man $a_6 = a_1$ und $a_7 = a_2$ setzt. Dann folgt aus den Gleichungen

$$S_1 = \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+1}\} = 40 - \sum_{i=1}^{5} \lfloor a_i + a_{i+1} \rfloor \quad \text{und}$$
$$S_2 = \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+2}\} = 40 - \sum_{i=1}^{5} \lfloor a_i + a_{i+2} \rfloor,$$

dass die Werte S_1 und S_2 ganze Zahlen sein müssen. Da außerdem jede der beiden die Summe von fünf Zahlen ist, die alle kleiner als 1 sind, können sie jeweils höchstens den Wert 4 annehmen, also zusammen höchstens den Wert 8. Folglich erhält man für die ursprüngliche Summe die Ungleichung $W \geq 72$. Gleichheit ist für fünf positive Zahlen $a_1, \ldots, a_5$ mit Nachkommaanteil 0.4 erreichbar, beispielsweise für $a_1 = 2.4$ und $a_2 = \cdots = a_5 = 4.4$.

Aufgabe 37. Für eine zusammengesetzte positive ganze Zahl n sei $\xi(n)$ die Summe der drei kleinsten positiven Teiler und $\vartheta(n)$ die Summe der beiden größten Teiler von n. Bestimme alle zusammengesetzten Zahlen n, für die $\vartheta(n) = (\xi(n))^4$ erfüllt ist.

Hinweis: Mit einem Teiler ist hier ein positiver, nicht notwendigerweise echter Teiler gemeint.

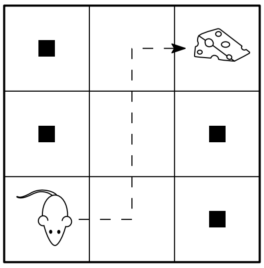
Ergebnis: 864

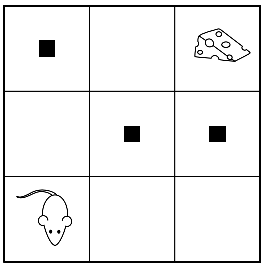
Lösungsweg: Der kleinste positive Teiler von n ist 1. Der zweitkleinste und der drittkleinste Teiler von n werden mit p bzw. q bezeichnet. Dann ist p eine Primzahl und q entweder ebenfalls eine Primzahl oder $q = p^2$. Ferner gilt $\xi(n) = 1 + p + q$ und $\vartheta(n) = n + n/p$. Multipliziert man die in der Aufgabenstellung gegebene Gleichung mit p, so ergibt sich

$$n(p + 1) = p(1 + p + q)^4.$$

Da p und $p + 1$ teilerfremd sind und die linke Seite durch $p + 1$ teilbar ist, muss $(p + 1) \mid (1 + p + q)^4$ gelten. Wenn nun p und q beide ungerade wären, so wäre $p + 1$ gerade und $(1 + p + q)^4$ ungerade, was aufgrund der Teilbarkeitsbedingung nicht möglich ist. Also ist $p = 2$ und damit 2 der kleinste Primteiler von n. Entwickelt man nun $(1 + p + q)^4 = (3 + q)^4$ nach dem binomischen Lehrsatz und lässt die durch 3 teilbaren Terme weg, so sieht man wegen $(p + 1) \mid (1 + p + q)^4$, dass $3 \mid q^4$ und somit $3 \mid q$ gelten muss. Insbesondere ist damit der Fall $q = p^2 = 4$ unmöglich. Also ist q ebenfalls eine Primzahl und deshalb $q = 3$. Deswegen ist $n \cdot 3 = 2 \cdot 6^4$ und somit $n = 2^5 \cdot 3^3 = 864$ die einzige Lösung.

Aufgabe 38. Eine Maus sitzt im linken unteren Feld eines 3×3-Gitters. Ihr Ziel ist es, ein Stück Käse zu erreichen, das im rechten oberen Feld liegt. Dabei darf sie nur Schritte von einem Feld zum nächsten machen, wenn diese Felder durch eine Kante miteinander verbunden sind. Wie viele Möglichkeiten gibt es, einige, vielleicht auch keines der freien Felder mit Hindernissen zu belegen, so dass die Maus immer noch ihr Ziel erreichen kann?





Ergebnis: 51

Lösungsweg: Zunächst kann man den Fall betrachten, dass das zentrale Feld mit einem Hindernis belegt ist. Dann kann die Maus den Käse nur über einen der beiden Wege am Rand erreichen, so dass man weitere Hindernisse nur auf einem der beiden Wege platzieren kann. Jeder Weg besteht aus drei Feldern, so dass man einen dieser Wege auf $2^3 = 8$ Arten belegen kann. Also gibt es insgesamt $8 + 8 - 1 = 15$ Möglichkeiten, mindestens einen der beiden Wege frei zu lassen. Dabei kommt die -1 davon, dass die Möglichkeit, beide Wege offen zu lassen, zweimal gezählt wurde und deshalb einmal abgezogen werden muss.

Nun betrachtet man den Fall, dass das zentrale Feld nicht mit einem Hindernis belegt ist. Ein Weg zum Käse existiert genau dann, wenn jeweils mindestens eines der Felder, die an das Feld der Maus bzw. an das Feld des Käses angrenzen, frei ist. Dies ergibt $2^2 - 1 = 3$ Möglichkeiten der Belegung für die an die Maus angrenzenden Felder, ebenso drei Möglichkeiten der Belegung für die an den Käse angrenzenden Felder und je zwei Möglichkeiten für die beiden verbleibenden Eckfelder. Somit erhält man in diesem Fall $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also $15 + 36 = 51$ Wege.

Aufgabe 39. Unter allen Paaren (x, y) reeller Zahlen, die die Gleichung

$$x^2y^2 + 6x^2y + 10x^2 + y^2 + 6y = 42$$

erfüllen, sei (x_0, y_0) dasjenige mit minimalem x_0. Bestimme y_0.

Ergebnis: -3

Lösungsweg: Addiert man 10 auf beiden Seiten der Gleichung, so kann man auf der linken Seite den Faktor $x^2 + 1$ ausklammern und erhält

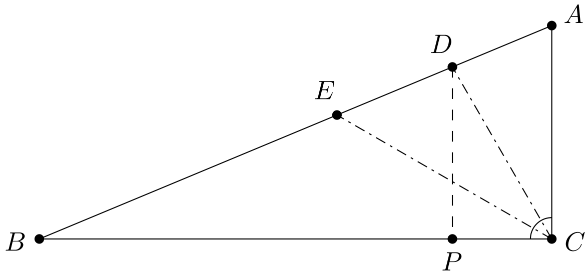
$$(x^2 + 1)(y^2 + 6y + 10) = 52.$$

Der entstandene Ausdruck auf der linken Seite ist also ein Produkt der quadratischen Funktionen $f(x) = x^2 + 1$ und $g(y) = y^2 + 6y + 10$. Da beide Funktionen symmetrische, nach oben geöffnete Parabeln sind, nimmt f bei dem minimal möglichen x_0 den maximalen Funktionswert an. Da das Produkt $f(x)g(y)$ eine konstante Funktion ist, muss $g(y_0)$ der minimal mögliche Funktionswert von g sein. Also braucht man nur untersuchen, wo die Funktion $g(y) = (y + 3)^2 + 1$ ihr Minimum annimmt, und erhält deshalb $y_0 = -3$ als Antwort.

Aufgabe 40. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C. Die Punkte D und E liegen so auf der Seite AB, dass D zwischen A und E liegt und die Strecken CD und CE den Winkel $\angle ACB$ in drei gleiche Teile zerlegen. Bestimme das Verhältnis $\overline{AC} : \overline{BC}$, wenn $\overline{DE} : \overline{BE} = 8 : 15$ gilt.

Ergebnis: $\frac{4}{11}\sqrt{3}$

Lösungsweg: Der Punkt P liege so auf der Seite BC, dass $DP \parallel AC$ gilt. Da die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DBP$ ähnlich sind, ist $\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{DP} : \overline{BP}$.



Da CE Winkelhalbierende im Dreieck $\triangle BCD$ ist, teilt sie die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten. Deshalb folgt $\overline{CD} : \overline{CB} = \overline{ED} : \overline{EB} = 8 : 15$. Ferner ist $\overline{DP} = \overline{CD} \cdot \sin 60°$ und $\overline{BP} = \overline{CB} - \overline{CP} = \overline{CB} - \overline{CD} \cdot \cos 60°$, woraus das gesuchte Verhältnis

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{CD}}{\frac{15}{8} \cdot \overline{CD} - \frac{1}{2} \cdot \overline{CD}} = \frac{4}{11}\sqrt{3}$$

folgt.

Aufgabe 41. Michael spielt das folgende Spiel: Seine Aufgabe besteht darin, eine ganze Zahl zwischen 1 und N (beide inklusive) zu erraten. In jedem Zug wählt er eine Zahl aus diesem Intervall. Wenn die Zahl die gesuchte ist, endet das Spiel. Sollte die genannte Zahl nicht die gesuchte sein, so erfährt er, ob er zu hoch oder zu niedrig geraten hat. Hat er zu hoch geraten, muss er 1 € zahlen, hat er zu niedrig geraten, so muss er 2 € zahlen. Er muss nichts zahlen, wenn er die Zahl erraten hat. Wie lautet die größte ganze Zahl N, für welche Michael das Spiel immer beenden kann, ohne mehr als 10 € auszugeben?

Ergebnis: 232

Lösungsweg: Sei N_k die maximale Zahl, für welche Michael mit k Euro die gesuchte Zahl aus dem Intervall $1, \ldots, N_k$ finden kann (alternativ kann man jedes beliebige Intervall der Länge N_k wählen). Unser Ziel ist es, N_{10} zu bestimmen. Klarerweise gilt $N_0 = 1$ und $N_1 = 2$. Wir zeigen nun, dass die Folge $(N_k)_{k \geq 0}$ die Rekursionsgleichung

$$N_{k+2} = N_{k+1} + N_k + 1$$

erfüllt. Angenommen Michael hat $k+2$ Euro und er wählt die Zahl $N_{k+1} + 1$, dann können drei verschiedene Fälle eintreten:

- Er hat richtig geraten.
- Er hat zu hoch geraten. In diesem Fall spielt er mit $k+1$ Euro weiter und findet die gesuchte Zahl sicher im Intervall von 1 bis N_{k+1}.
- Er hat zu niedrig geraten. In diesem Fall spielt er mit k Euro weiter und kann ein Spiel sicher im Intervall von $N_{k+1} + 2$ bis $N_{k+1} + 1 + N_k$ der Länge N_k beenden.

Daraus folgt, dass $N_{k+2} \geq N_{k+1} + N_k + 1$ gelten muss. Sollten mehr als $N_{k+1} + N_k + 1$ Zahlen zur Wahl stehen, dann könnte eine Wahl größer als $N_{k+1} + 1$ dazu führen, dass Michael mit $k+1$ Euro in einem Intervall mit mehr als N_{k+1} Zahlen spielen muss. Wenn er hingegen eine Zahl kleiner als $N_{k+1} + 2$ wählt, so kann es passieren, dass er mit k Euro in einem Intervall mit mehr als N_k Zahlen spielen muss. Somit ist die Rekursionsformel bewiesen.

Die Zahl $N_{10} = 232$ kann mit Hilfe der Rekursion berechnet werden.

Aufgabe 42. Gegeben sind die positiven ganzen Zahlen a, b und c. Es gilt $a \geq b \geq c$ und

$$a + b + c + 2ab + 2bc + 2ca + 4abc = 2017.$$

Gib alle möglichen Werte für a an!

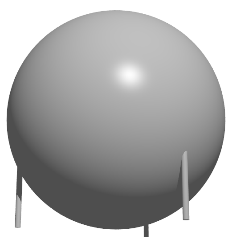
Ergebnis: 134

Lösungsweg: Man multipliziert die linke Seite mit 2, addiert 1 und erhält

$$1 + 2a + 2b + 2c + 4ab + 4bc + 4ca + 8abc = (2a+1)(2b+1)(2c+1).$$

Die Anwendung dieser Operationen auf der rechten Seite führt zu $2 \cdot 2017 + 1 = 4035$. Wegen der Primfaktorzerlegung $4035 = 3 \cdot 5 \cdot 269$ und aufgrund der Relation $a \geq b \geq c \geq 1$ müssen die Gleichungen $2a + 1 = 269$, $2b + 1 = 5$ und $2c + 1 = 3$ gelten. Somit ist $a = 134$ die einzige Lösung.

Aufgabe 43. Ein Alien-Raumschiff hat die Form einer perfekten Kugel vom Radius r mit drei parallelen vertikalen geraden Standfüßen der Länge 1 af (Alien Fuß) mit vernachlässigbarer Breite. Die unteren Enden der Standfüße bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 9 af. Wenn das Raumschiff auf einer ebenen Fläche steht, berührt der niedrigste Punkt der Kugel die Fläche. Wie groß ist der Radius r in af?

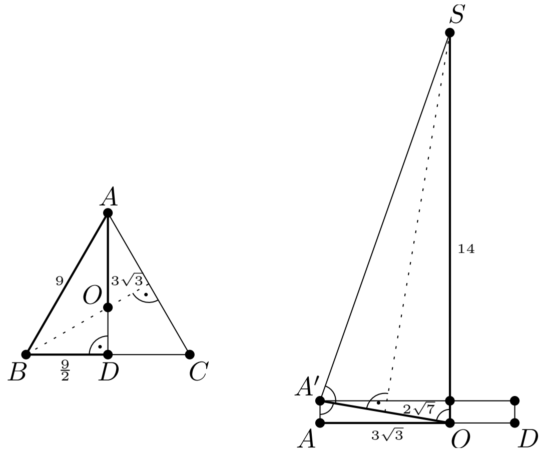


Ergebnis: 14

Lösungsweg: Wir bezeichnen die unteren Enden der Standfüße mit A, B, C und deren obere Enden mit A', B', C'. Sei O der Mittelpunkt des Dreiecks ABC, also jener Punkt, an dem die Kugel die Oberfläche berührt, und sei S der Mittelpunkt der Kugel. Sei weiters D der Schnittpunkt der Gerade durch die Punkte A und O mit der Gerade durch B und C (siehe Skizze). Es gilt $\overline{AO} = \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{af}$, $\overline{AA'} = 1\,\mathrm{af}$ und $\overline{SO} = \overline{SA'} = r$. Der Satz von Pythagoras liefert

$$(\overline{SO} - \overline{AA'})^2 + \overline{AO}^2 = \overline{SA'}^2 \quad \text{bzw.} \quad (r - 1\,\mathrm{af})^2 + 27\,\mathrm{af}^2 = r^2.$$

Somit folgt $r = 14\,\mathrm{af}$.



Aufgabe 44. Adam, Bert, Christoph und Daniel haben eine große Menge an Haselnüssen gesammelt. In der Nacht erwacht Adam mit einem unwiderstehlichen Appetit auf Haselnüsse. Durch Zählen findet er Folgendes heraus: Wenn man eine Haselnuss entfernt, so kann der Rest in vier Haufen mit gleich großer Anzahl an Nüssen aufgeteilt werden. Also entfernt er eine Nuss und isst seinen Anteil (ein Viertel des Restes). Später in der Nacht möchte auch Bert Haselnüsse essen. Er stellt fest, dass es wieder eine extra Nuss gibt. Auch er entfernt sie, teilt die restlichen Nüsse in vier Haufen mit gleicher Anzahl auf und vertilgt sogleich sein Viertel des Restes. Bis zum Morgen ergeht es Christoph und Daniel genauso. Als sich die vier Freunde am Morgen treffen, sehen sie, dass die übrig gebliebene Anzahl an Nüssen nach dem Entfernen einer weiteren Nuss immer noch durch vier teilbar ist. Was ist die kleinstmögliche Anzahl an Haselnüssen, die die Brüder gesammelt haben können?

Ergebnis: 1021

Lösungsweg: Fügt man drei zusätzliche imaginäre Nüsse zur ursprünglichen Anzahl hinzu, dann ist die Zahl der anfänglich vorhandenen Nüsse sicher ein Vielfaches von vier. Nach Adams Nachtmahl ist die Zahl der restlichen Nüsse immer noch durch vier teilbar und auch die drei imaginären Nüsse sind noch im Rest enthalten. Die Wiederholung dieser Argumentation liefert für die Anzahl der ursprünglichen Nüsse inklusive der drei imaginären Nüsse den Wert $4^5 \cdot k$ für eine ganze Zahl k. Somit muss die ursprüngliche Zahl der Nüsse $4^5 \cdot k - 3$ sein. Durch Einsetzen von $k = 1$ erhält man das gewünschte Minimum $4^5 - 3 = 1021$.

Aufgabe 45. Eine positive ganze Zahl soll *praktisch* heißen, wenn alle ihre Primteiler aus der Menge $\{2, 3, 7\}$ sind. Wie viele praktische Zahlen gibt es in der Menge $\{1000, 1001, \ldots, 2000\}$?

Ergebnis: 19

Lösungsweg: Wir beginnen mit einer allgemeinen Beobachtung: Wenn x eine reelle Zahl mit $x > 1/2$ ist, dann gibt es genau eine (ganzzahlige) Potenz von 2 im halb-offenen Intervall $[x, 2x)$.

Weiters nennen wir eine positive ganze Zahl *super praktisch*, wenn alle ihre Primteiler aus der Menge $\{2, 3\}$ sind. Die Anzahl der super praktischen Zahlen im Intervall $[x, 2x)$ kann wie folgt berechnet werden: In diesem Intervall gibt es maximal eine super praktische Zahl (wir nennen sie c_1), die durch 3 teilbar ist, aber nicht durch 3^2, da $c_1/3$ die einzige Potenz von 2 im Intervall $[x/3, 2x/3)$ ist, vorausgesetzt, dass $x > 1/6$ ist. Mit dieser Methode fahren wir fort und finden eine super praktische Zahl c_2, die durch 3^2 teilbar ist, aber nicht durch 3^3, usw. bis $[x/3^k, 2x/3^k) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, das heißt $x < 3^{-k}/2$. Daraus leiten wir ab, dass die Anzahl der super praktischen Zahlen im Intervall $[x, 2x)$ gleich 1 plus dem größten k ist, welches $3^k < 2x$ erfüllt. Wir bezeichnen diese Zahl mit $\ell_3(x)$.

Um die Anzahl der praktischen Zahlen im Intervall $[x, 2x)$ zu bekommen, verwenden wir eine ähnliche Technik: Wegen $7^3 = 343$ und $7^4 > 2000$ ist die gesuchte Zahl die Summe der Anzahlen an super praktischen Zahlen in den Intervallen $[x, 2x)$, $[x/7, 2x/7)$, $[x/7^2, 2x/7^2)$ und $[x/7^3, 2x/7^3)$.

Da 2000 keine praktische Zahl ist, müssen wir schließlich

$$\ell_3(1000) + \ell_3(1000/7) + \ell_3(1000/49) + \ell_3(1000/343) = 7 + 6 + 4 + 2 = 19$$

berechnen, was die gewünschte Anzahl ergibt.

Aufgabe 46. Kaiser Decimus verbietet in einem kaiserlichen Dekret ab sofort die Verwendung der Ziffer 0, die von seinem Vorgänger Nullus eingeführt wurde. Er erteilt außerdem die Anweisung, ab nun die Ziffer D zu verwenden, die für die Zahl 10 steht. Er sieht sich als Erfinder des sogenannten *Decimus Systems*, in dem jede positive ganze Zahl immer noch eine eindeutige Darstellung besitzt. Beispielsweise ist

$$3\mathrm{DD}6 = 3 \cdot 1000 + 10 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 4106.$$

Um seinem Volk den Übergang ins neue System zu erleichtern, lässt Kaiser Decimus eine Liste mit allen ganzen Zahlen von 1 bis einschließlich DDD anfertigen. Wie oft kommt die neue Ziffer D in dieser Liste vor?

Hinweis: Kommt die Ziffer D in einer bestimmten Zahl mehrmals vor, so wird jedes vorkommende D einzeln gezählt, zum Beispiel wird sie in der Zahl DD zwei Mal gezählt.

Ergebnis: 321

Lösungsweg: Beachte, dass alle k-stelligen Zahlen im Decimus System genau durch die folgenden Zeichenketten beschrieben werden können:

$$\underbrace{1\ldots1}_{k}, \ldots, \underbrace{\mathrm{D}\ldots\mathrm{D}}_{k}$$

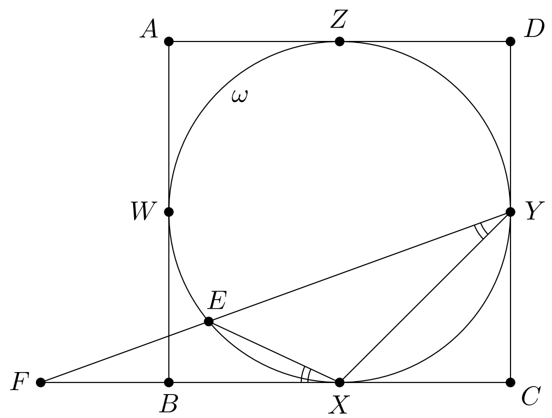
Um die Gesamtanzahl der D's in einer k-stelligen Zahl festzustellen, können die Zahlen, die ein D an der ersten, zweiten, $\ldots$, k-ten Stelle haben, in Gruppen zusammengefasst werden. Fixiert man ein D an einer bestimmten Stelle einer k-stelligen Zahl, so gibt es für jede der übrigen $k-1$ Stellen die 10 Möglichkeiten, sie mit den Ziffern $1, \ldots, 9, \mathrm{D}$ zu besetzen. Für k-stellige Zahlen gibt es demnach 10^{k-1} Zahlen mit einem D an einer fixierten Stelle.

Wir führen diese Überlegungen in unserem Beispiel für ein-, zwei- und dreistellige Zahlen durch und berücksichtigen, dass in einer zweistelligen Zahl die Ziffer D an zwei und in einer dreistelligen Zahl an drei verschiedenen Stellen fixiert werden kann. Da unter den Zahlen von 1 bis DDD nur ein-, zwei- und dreistellige Zahlen auftreten können, kommt die Ziffer D also $1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 = 321$ Mal vor.

Aufgabe 47. Der Inkreis ω eines Quadrates $ABCD$ berührt das Quadrat in den Punkten W, X, Y und Z, die in dieser Reihenfolge auf den Seiten AB, BC, CD und DA liegen. Sei E ein Punkt auf dem kürzeren Kreisbogen von ω zwischen W und X und sei F der Schnittpunkt der Geraden BC mit der Geraden EY. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle FCY$, wenn $\overline{EF} = 5$ und $\overline{EY} = 7$ ist.

Ergebnis: 21

Lösungsweg: Nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz gilt $\angle EXF = \angle EYX$. Die Dreiecke $\triangle FXE$ und $\triangle FXY$ sind somit ähnlich und es folgt $\overline{EF} : \overline{XF} = \overline{XF} : \overline{YF}$ bzw. $\overline{XF}^2 = \overline{EF} \cdot \overline{YF} = 5 \cdot 12 = 60$. (Letzteres ergibt sich auch sofort aus dem Sekanten-Tangenten-Satz.)



Sei $t = \frac{1}{2}\overline{AB}$ eine halbe Seitenlänge des Quadrats. Dann folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$\overline{YF}^2 = t^2 + (t + \overline{XF})^2 = 2t^2 + 2t \cdot \overline{XF} + \overline{XF}^2 = 2t(t + \overline{XF}) + \overline{XF}^2.$$

Somit kann der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden als

$$\tfrac{1}{2} \cdot \overline{YC} \cdot \overline{CF} = \tfrac{1}{2} \cdot t \cdot (t + \overline{XF}) = \tfrac{1}{4}(\overline{YF}^2 - \overline{XF}^2) = \frac{1}{4}(12^2 - 60) = 21.$$

Aufgabe 48. Von dem Kryptogramm

$$WE \cdot LIKE = NABOJ$$

sind folgende Eigenschaften bekannt: Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern und keine der Zahlen beginnt mit der Ziffer Null. Bezeichnet man mit $\mathrm{Q}(n)$ die Quersumme einer natürlichen Zahl n, so gilt $\mathrm{Q}(WE) = 11$, $\mathrm{Q}(LIKE) = 23$ und $\mathrm{Q}(NABOJ) = 19$. Bestimme als Lösung die fünfstellige Zahl, die sich hinter $NABOJ$ verbirgt.

Ergebnis: 60 724

Lösungsweg: In diesem Kryptogramm kommen zehn verschiedene Buchstaben vor, also alle Ziffern von 0 bis 9. Die Summe dieser Ziffern ist 45 und da die Summe der drei Quersummen $11 + 23 + 19 = 53$ ist, muss der zweimal vorkommende Buchstabe $E = 8$ sein. Deshalb erhält man $J = 4$ und wegen $\mathrm{Q}(WE) = 11$ noch zusätzlich $W = 3$. Nun kann L wegen

$$LIKE < \frac{100000}{38} < 2636$$

nur noch 1 oder 2 sein. Den Fall $L = 2$ kann man wegen $I + K = 13$ ausschließen, da für (I, K) bzw. (K, I) dann nur die Zahlenpaare $(4, 9)$, $(5, 8)$ oder $(6, 7)$ in Frage kommen würden. Diese sind aber alle nicht mehr möglich, da 4 und 8 schon vergeben sind und $(6, 7)$ zu einem zu großen Faktor $LIKE$ führen würde. Also ist $L = 1$ und analog zu vorher bleibt in diesem Fall für (I, K) bzw. (K, I) wegen $I + K = 14$ dann nur noch das Zahlenpaar $(5, 9)$. Nun überprüft man leicht, dass nur $(I, K) = (5, 9)$ zu einer gültigen Lösung führt. Aus $38 \cdot 1598 = 60\,724$ erhält man die gesuchte Zahl $NABOJ = 60\,724$.

Aufgabe 49. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass die Summe aller echten Teiler genau 63 beträgt.

Hinweis: Ein echter Teiler d von n erfüllt $1 < d < n$.

Ergebnis: 56, 76, 122

Lösungsweg: Bezeichne mit $s(n)$ die Summe aller echten Teiler einer positiven ganzen Zahl n. Es ist leicht einzusehen, dass es keine Lösung gibt, wenn n drei oder mehr verschiedene Primfaktoren besitzt, da $s(2\cdot3\cdot5) = 41$ und $s(2\cdot3\cdot7) = 53$ ist und für größere Werte von n die Summe $s(n)$ größer als 63 wird. Falls n die Potenz einer Primzahl p ist, so ist $s(n)$ durch p teilbar und es muss $p = 3$ oder $p = 7$ sein. Wie man leicht überprüfen kann, ist es aber weder für eine Potenz von 3 noch von 7 möglich, die geforderte Bedingung zu erfüllen.

Folglich besitzt n genau zwei verschiedene Primfaktoren p, q und eine mögliche Lösung kann als $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ mit Exponenten $\alpha, \beta \geq 1$ dargestellt werden. Im Fall $\alpha = \beta = 2$ liefern die kleinsten Primzahlen $p = 2$ und $q = 3$ die Summe $s(n) = 54$ und jede andere Wahl der Primfaktoren oder höhere Exponenten führen zu $s(n) > 63$. Also muss mindestens ein Exponent kleiner als 2 sein. Das bedeutet insbesondere, dass n kein Quadrat einer ganzen Zahl sein kann und deshalb die Anzahl an echten Teilern eine gerade Zahl ist. Wenn nun alle echten Teiler ungerade sind, so ist $s(n)$ gerade. Da 63 aber eine ungerade Zahl ist, muss ein echter Teiler gerade sein. Sei o. B. d. A. $q = 2$.

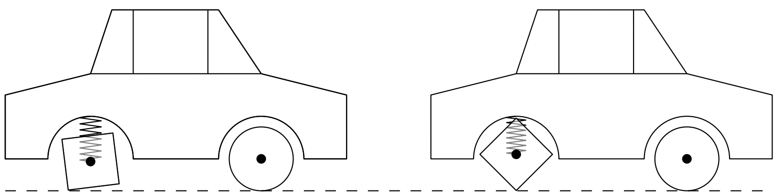
Wieder aufgrund der Tatsache, dass $s(n)$ eine ungerade Zahl ist, muss die Anzahl der ungeraden echten Teiler von n eine ungerade Zahl sein. Da die ungeraden echten Teiler von $n = p^\alpha \cdot 2^\beta$ genau die Zahlen $p, p^2, \ldots, p^\alpha$ sind, muss α eine ungerade Zahl sein. Jedoch erhält man selbst für den kleinsten Wert $p = 3$ mit $\alpha = 3$ und $\beta = 1$ schon $s(n) > 63$, sodass man daraus $\alpha = 1$ folgern kann.

Schließlich ist $n = p \cdot 2^\beta$ und es ergibt sich

$$s(n) = 2 + 2^2 + \cdots + 2^\beta + p + 2p + \cdots + 2^{\beta-1}p = (2^\beta - 1)(p + 2).$$

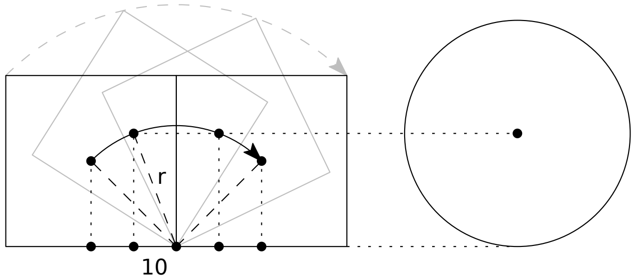
Nun sind von allen Teilern von 63 nur die Zahlen 1, 3 und 7 von der Form $2^\beta - 1$. Die zugehörigen Werte 61, 19 und 7 von p führen dann zu den drei möglichen Werten $2 \cdot 61 = 122$, $2^2 \cdot 19 = 76$ und $2^3 \cdot 7 = 56$ für n.

Aufgabe 50. Georg fährt ein cooles Auto mit quadratischen Hinterrädern und kreisförmigen Vorderrädern. Ein derartiges Fahrzeug ist für gewöhnlich eher unbequem zu fahren, aber Georg hat für die Hinterräder einen äußerst wirkungsfähigen Stoßdämpfer eingebaut. Fährt Georg nämlich auf einer ebenen Straße, so hat die Unterkante des Autos immer den gleichen vertikalen Abstand vom Boden. Die Seitenlänge der Hinterräder beträgt 40 cm und ihre Achse ist in horizontaler Richtung fixiert. Wie groß ist der Radius der Vorderräder in cm, wenn die Hinterachse bei konstanter Vorwärtsbewegung des Autos exakt die Hälfte der Zeit einen kleineren und exakt die Hälfte der Zeit einen größeren Abstand vom Straßenboden hat als die Vorderachse?



Ergebnis: $10\sqrt{7}$

Lösungsweg: Wir betrachten die Bewegungsbahn des Mittelpunkts des Quadrats während der Vorwärtsbewegung des Autos für eine Drehung des Hinterrads um 90 Grad, also für die Drehung von einer Quadratseite auf die nächste. Diese Bahn ist die Kreislinie eines Viertelkreises, der seinen Mittelpunkt in einem Eckpunkt des Quadrats hat.



Bewegt sich das Auto mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts, so bewegt sich der Mittelpunkt des Quadrats mit konstanter Horizontalgeschwindigkeit vorwärts. Legt man für die Durchschreitung des gesamten Viertelkreises die Zeiteinheit 1 fest, so muss aus Symmetriegründen die Hinterachse genau nach einem Viertel der Zeit, also nach einer horizontalen Bewegung der Länge eines Viertels der Quadratseite, auf Höhe der Vorderachse stehen. Der Radius r des Viertelkreises ist die halbe Diagonale im Quadrat, also ist $r = 20\sqrt{2}\,\text{cm}$, und der horizontale Viertelabschnitt beträgt $10\,\text{cm}$. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet man nun den Radius der Vorderräder als die Höhe

$$\sqrt{r^2 - 10^2} = \sqrt{800 - 100} = 10\sqrt{7}.$$

Aufgabe 51. Die *Stadt der Zukunft* hat die Form eines regulären 2017-Ecks. In jeder der Ecken befindet sich eine Metro-Station. Diese Stationen sind von 1 bis 2017 gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert und es gibt die zwei Metro-Linien *Seiten-Linie* S und *Diagonalen-Linie* D. Linie S fährt von Station a zu Station b, und nur in diese Richtung, genau dann, wenn $a - b + 1$ durch 2017 teilbar ist. Von einer Station zur nächsten benötigt Linie S jeweils 1 Minute. Linie D fährt von Station a zu Station b genau dann, wenn $2b - 2a + 1$ durch 2017 teilbar ist. Von einer Station zur nächsten benötigt Linie D jeweils 15 Minuten. Ferdinand ist ein passionierter Metro-Fahrer. Er möchte von der Station 1 abfahren und sucht eine Station n, sodass der zeitlich kürzeste Weg von Station 1 nach Station n unter allen zeitlich kürzesten Wegen von Station 1 zu einer anderen Station am längsten ist. Finde alle möglichen Werte für n.

Ergebnis: 1984, 1985

Lösungsweg: Jedes Mal, wenn Ferdinand eine Station mit der Diagonalen-Linie und anschließend eine Station mit der Seiten-Linie fährt, erreicht er dieselbe Station in der gleichen Zeit, wenn er zuerst eine Station mit der Linie S und anschließend eine Station mit der Linie D fährt. Deshalb kann man annehmen, dass er zuerst die Linie D und dann die Linie S benutzt. Beinhaltet seine Route außerdem mindestens zwei Fahrten mit der Linie D und mindestens eine mit der Linie S, so kann er sein Ziel auch in kürzerer Zeit erreichen, indem er die letzten beiden Fahrten mit der Linie D und die erste Fahrt mit der Linie S weglässt, weil sie zusammen eine Schleife bilden, die ihn nicht vom Fleck bringt, aber Zeit verbraucht. Folglich genügt es, nur Routen zu betrachten, in denen Ferdinand ausschließlich oder höchstens ein Mal die Linie D benutzt.

Sei nun $n \geq 1009$. Mit der einmaligen Benutzung der Linie D und der $(n - 1009)$–fachen Benutzung der Linie S kommt Ferdinand in $15 + (n - 1009)$ Minuten von der Station 1 zur Station n. Offensichtlich kann er sein Ziel nicht schneller erreichen, wenn er nur mit der Linie S fährt. Wenn er andererseits ausschließlich die Linie D benutzt, erreicht er in $2 \cdot (2018 - n) \cdot 15$ Minuten die Station n. Gesucht ist nun ein $n \geq 1009$, für welches das Minimum $M(n) = \min\{n - 994, 30 \cdot 2018 - 30n\}$ so groß wie möglich ist. Aus

$$n - 994 \leq 30 \cdot 2018 - 30n \Longleftrightarrow n \leq \frac{30 \cdot 2018 + 994}{31} = \frac{31 \cdot 2018 - 1024}{31} = 2018 - 33 - \frac{1}{31} = 1985 - \frac{1}{31}$$

folgt für $n \leq 1984$, dass $M(n) = n - 994 \leq 1984 - 994 = 990$ gilt. Außerdem ergibt sich für $n \geq 1985$ die Ungleichung $M(n) = 30 \cdot (2018 - n) \leq 30 \cdot (2018 - 1985) = 990$. Das gewünschte größte Minimum ist also 990 und es wird sowohl für $n = 1984$ als auch für $n = 1985$ angenommen.

Es bleibt noch zu prüfen, dass es für $n < 1009$ möglich ist, die Station n in weniger als 990 Minuten zu erreichen. Für $n \leq 990$ kann Ferdinand in $n - 1$ Minuten entlang der Linie S zur Station n fahren und für $n \geq 991$ braucht er $15 \cdot (2 \cdot (1009 - n) + 1) \leq 15 \cdot 37 = 555$ Minuten, wenn er nur mit Linie D fährt.

Aufgabe 52. Sei $f(n)$ die Anzahl der positiven ganzen Zahlen, die genau n Stellen haben und deren Quersumme 5 beträgt. Bestimme, wie viele der 2017 ganzen Zahlen $f(1), f(2), \ldots, f(2017)$ die Einerziffer 1 haben.

Ergebnis: 202

Lösungsweg: Jede n-stellige Zahl mit Quersumme 5 kann mithilfe von fünf Einsern, die auf den n Plätzen verteilt werden, geschrieben werden. Jeder Platz kann mit mehreren Einsern belegt werden und der erste Platz (von links) muss mindestens einen Einser enthalten. Somit ist die Anzahl der n-stelligen Zahlen mit Ziffernsumme 5 gleich der Anzahl der Möglichkeiten, vier Elemente aus n mit Wiederholung auszuwählen, wobei die Reihenfolge egal ist (dies entspricht einer Kombination mit Wiederholung). Somit gilt:

$$f(n) = \binom{n+4-1}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}$$

Nun wird die Anzahl derjenigen $f(n)$ bestimmt, deren Einerziffer 1 ist. Falls n bei der Division durch 5 einen Rest von $0, 2, 3$ oder 4 lässt, dann ist n, $n+3$, $n+2$ oder $n+1$ durch 5 teilbar. Da 24 und 5 teilerfremd sind, ist $f(n)$ auch durch 5 teilbar und die letzte Ziffer ist somit 0 oder 5. Daraus folgt, dass die Einerziffer von $f(n)$ nur dann 1 sein kann, falls n den Rest 1 bei der Division durch 5 hat.

Im Folgenden wird gezeigt, dass $f(n)$ und $f(n+40)$ dieselbe Einerziffer haben. Dazu multipliziert man die rechte Seite des Ausdrucks

$$24f(n+40) = \big(40+(n)\big)\big(40+(n+1)\big)\big(40+(n+2)\big)\big(40+(n+3)\big)$$

aus, wobei die inneren Klammern nicht weiter ausmultipliziert werden sollen. Nach dem Subtrahieren des Terms $24f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)$ sind die restlichen Terme Produkte aus vier Zahlen, von denen entweder mindestens zwei 40 oder genau drei innere Klammern sind, die n enthalten. Im erstgenannten Fall ist der Term durch 40^2 teilbar, im letzten Fall stehen in mindestens zwei von den Klammern aufeinander folgende ganze Zahlen und somit ist der Term durch 80 teilbar. Nach der Division durch $24 = 8 \cdot 3$ ist die Differenz $f(n+40) - f(n)$ daher durch 10 teilbar, was bedeutet, dass $f(n+40)$ und $f(n)$ dieselbe Einerziffer haben.

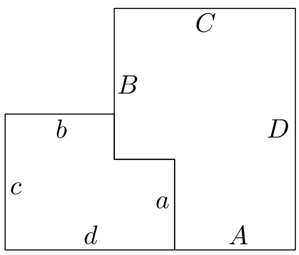
Demnach reicht es aus, die Einerziffer von $f(n)$ für 40 beliebige aufeinander folgende ganze Zahlen zu prüfen. Schließlich kann man den Zusammenhang

$$f(n) = f(-3-n). \qquad (\star)$$

leicht verifizieren und ausnutzen. Berücksichtigt man nun alle Tatsachen, muss man nur mehr $f(1) = 1$, $f(6) = 126$, $f(11) = 1001$ und $f(16) = 3876$ berechnen. Die Beziehung $(\star)$ impliziert nun, dass unter den verbleibenden vier Zahlen von der Form $f(5k+1)$, das sind $f(-4)$, $f(-9)$, $f(-14)$ und $f(-19)$, zwei die Einerziffer 1 und zwei die Einerziffer 6 besitzen. Daher haben $4 \cdot 2000/40 = 200$ der Zahlen $f(1), \ldots, f(2000)$ die Einerziffer 1 und unter den Zahlen $f(2001), \ldots, f(2017)$ haben noch $f(2001)$ und $f(2011)$ diese Eigenschaft.

In Summe gibt es daher 202 solche Zahlen.

Aufgabe 53. Die Skizze zeigt zwei zueinander ähnliche sechseckige Figuren mit den Seiten a, b, c und d bzw. A, B, C und D. Setzt man die beiden Figuren wie in der Abbildung zusammen, so entsteht eine große sechseckige Figur, die ebenfalls zu den beiden kleineren ähnlich ist. Bestimme das Verhältnis $A : a$.



Ergebnis: $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Lösungsweg: Die drei Figuren werden als kleine, mittlere und große Figur bezeichnet und das gesuchte Verhältnis mit p. Aufgrund der Ähnlichkeit der kleinen und der mittleren Figur erhält man

$$p = A : a = B : b = C : c = D : d.$$

Ferner gelten die Gleichungen $D = B + a$ und $C + b = A + d$. Betrachtet man in der mittleren Figur das Verhältnis $B : A$, so entspricht dies in der großen Figur $C : c$. Also ergibt sich $B : A = C : c = p$ und somit $B = p^2 a$. Analog folgt durch Betrachtung der mittleren und der großen Figur $b : a = C : B = D : C$ und hieraus

$$d : a = \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = p^3.$$

Aus der Gleichung $D = B + a$ ergibt sich nun durch Umformen $pd = p^2a + a = a(p^2 + 1)$ und somit $p^4 = p^2 + 1$. Die positive Lösung der Gleichung $p^4 - p^2 - 1 = 0$ ist $p^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Also erhält man

$$p = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

und somit die Wurzel aus dem Goldenen Schnitt als das gesuchte Verhältnis.

Aufgabe 54. Bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, sodass alle Lösungen der beiden Gleichungen

$$x^2 - ax + a + b - 3 = 0,$$
$$x^2 - bx + a + b - 3 = 0$$

auch positive ganze Zahlen sind.

Ergebnis: $(2, 2)$, $(6, 6)$, $(7, 8)$, $(8, 7)$

Lösungsweg: Seien k, l die Lösungen der ersten Gleichung und m, n die Lösungen der zweiten. Falls man eine Lösung (k, l, m, n) hat, so ist es einfach zu sehen, dass man k und l oder m und n oder beide tauschen kann und so eine andere Lösung erhält. Daher betrachten wir nur eine dieser Lösungen. Nach der Satzgruppe von Vieta gilt

$$k + l = a, \quad m + n = b, \quad kl = mn = a + b - 3.$$

Somit erhalten wir

$$kl + mn = 2a + 2b - 6 = 2k + 2l + 2m + 2n - 6$$

und nach Umformung

$$(k - 2)(l - 2) + (m - 2)(n - 2) = 2.$$

Falls beide Summanden $(k - 2)(l - 2)$ und $(m - 2)(n - 2)$ positiv sind, das heißt gleich 1 sind, ergeben sich die Lösungen $(k, l, m, n) = (3, 3, 3, 3)$ und $(1, 1, 1, 1)$. Falls einer der Summanden gleich Null ist, dann sind die Lösungen $(k, l, m, n) = (2, 6, 3, 4)$ und $(3, 4, 2, 6)$.

Letztlich muss noch der Fall betrachtet werden, dass einer der Summanden negativ ist. Damit dies passiert, muss mindestens eine der Zahlen k, l, m, n gleich 1 sein. O. B. d. A. sei $k = 1$. Dann ist $l = mn$ und wir können die Gleichung zu

$$2 = -(l - 2) + (m - 2)(n - 2) = -mn + 2 + mn - 2m - 2n + 4 = -2m - 2n + 6$$

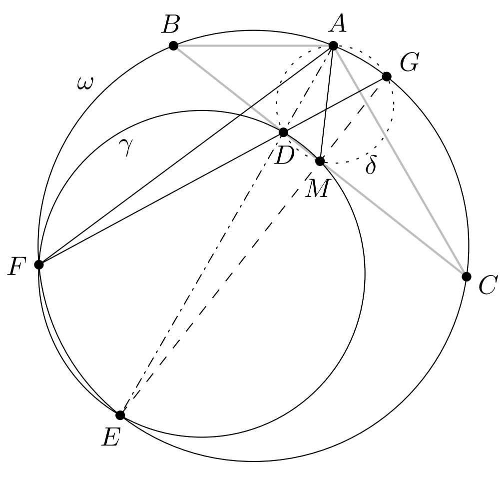
oder $m + n = 2$ umformen. Dies führt zu $m = n = 1$ und $l = mn = 1$. Folglich gibt es keine Lösung mit einem negativen Summanden.

Schließlich ergeben sich als mögliche Werte für $(a, b) = (k + l, m + n)$ die Paare $(6, 6)$, $(8, 7)$, $(7, 8)$ und $(2, 2)$. Wie man schnell nachprüfen kann, erfüllen alle diese Werte für (a, b) die geforderten Bedingungen.

Aufgabe 55. Das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 7$ und $\overline{AC} = 5$ ist dem Kreis ω einbeschrieben. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BAC$ schneidet die Seite BC im Punkt D und den Kreis ω in einem anderen Punkt E. Es sei γ der Kreis mit dem Durchmesser DE. Die Kreise ω und γ schneiden sich im Punkt E und einem zweiten Punkt F. Bestimme die Länge der Strecke AF.

Ergebnis: $\frac{30}{\sqrt{19}}$

Lösungsweg: Laut Südpolsatz muss die Mittelsenkrechte auf die Seite BC ebenfalls durch den Punkt E gehen. Es sei M der Mittelpunkt der Seite BC und der Punkt G der zweite Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten mit dem Umkreis ω des Dreiecks $\triangle ABC$. Dann ist EG ein Durchmesser von ω.



Die Anwendung des Satzes von Thales in den beiden Kreisen ω und γ liefert die beiden rechten Winkel $\angle GFE = \angle DFE = 90°$, woraus folgt, dass die Punkte G, D und F auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Weiters gilt $\angle GMD = 90°$ und erneut nach dem Satz von Thales $\angle DAG = \angle EAG = 90°$. Dies zeigt, dass die Punkte D, M, G und A alle auf einem gemeinsamen Kreis liegen; dieser sei mit δ bezeichnet. Mehrfache Benutzung des Peripheriewinkelsatzes in den verschiedenen Kreisen liefert nun

$$\angle AFD = \angle AFG \overset{\omega}{=} \angle AEG = \angle AEM$$

und

$$\angle FAD = \angle FAE \overset{\omega}{=} \angle FGE = \angle DGM \overset{\delta}{=} DAM = \angle EAM.$$

Deshalb sind die Dreiecke $\triangle AFD$ und $\triangle AEM$ ähnlich. Auf gleiche Weise folgert man aus

$$\angle ACD = \angle ACB \overset{\omega}{=} \angle AEB$$

und $\angle DAC = \angle EAB$, was wegen der Winkelhalbierenden AE gilt, die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle CAD$ und $\triangle EAB$. Es gilt also:

$$\overline{AF} = \overline{AE} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} = \overline{AE} \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AM}}$$

Die Länge der Strecke AM kann mit der Formel für die Länge der Seitenhalbierenden eines Dreiecks als

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\sqrt{2(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) - \overline{BC}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{19}$$

berechnet werden. Das Einsetzen der Zahlenwerte liefert schließlich die gesuchte Lösung:

$$\overline{AF} = \frac{3 \cdot 5}{\frac{1}{2}\sqrt{19}} = \frac{30}{\sqrt{19}}$$

Aufgabe 56. Bestimme die Anzahl an geordneten Tripeln (x, y, z) aus nicht-negativen ganzen Zahlen x, y und z, die kleiner als 2017 sind, sodass der Ausdruck

$$(x + y + z)^2 - 704xyz$$

durch 2017 teilbar ist.

Ergebnis: $2017^2 + 1 = 4\,068\,290$

Lösungsweg: Die Bedingung $2017 \mid (x+y+z)^2 - 704xyz$ kann ebenso als $(x+y+z)^2 \equiv 704xyz \pmod{2017}$ geschrieben werden. Im Folgenden beziehen sich sämtliche Kongruenzen auf den Modul 2017. Da 2017 eine Primzahl ist, gibt es für jede positive ganze Zahl $a < 2017$ genau eine positive ganze Zahl kleiner als 2017, geschrieben als a^{-1}, für die $a \cdot a^{-1} \equiv 1$ gilt, und deshalb für zwei Zahlen $a, b \in \{1, 2, \dots 2016\}$ stets genau eine Zahl $c \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ mit $ac \equiv b$, nämlich diejenige Zahl c mit $c \equiv a^{-1}b$.

Sei zunächst (x, y, z) ein Lösungstripel mit ausschließlich positiven ganzen Zahlen x, y und z. Man setzt nun die Darstellungen $y \equiv kx$ und $z \equiv lx$ mit eindeutig definierten Zahlen $k, l \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ in die Kongruenzrelation $(x+y+z)^2 \equiv 704xyz$ ein und erhält $(x+kx+lx)^2 \equiv 704klx^3$, was nach Multiplikation mit $(x^{-1})^2$ zu $(1+k+l)^2 \equiv 704klx$ führt. Eine weitere Multiplikation mit $(704kl)^{-1}$ liefert schließlich

$$x \equiv (704kl)^{-1}(1 + k + l)^2.$$

Da alle gemachten Umformungen Äquivalenzumformungen waren, gibt es umgekehrt für jede Wahl von zwei Zahlen $k, l \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ genau ein x und im Fall, dass $x \neq 0$ ist, genau ein y und genau ein z, so dass das Tripel (x, y, z) die geforderte Bedingung erfüllt. Dabei tritt der Fall $x = 0$ genau dann ein, wenn $k + l \equiv 2016$ gilt. Von den insgesamt 2016^2 Möglichkeiten, Paare (k, l) mit $k, l \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ zu wählen, müssen also 2015 Möglichkeiten wegen der Paare (k, l) mit $k + l = 2016$ abgezogen werden. Folglich gibt es $2016^2 - 2015$ Lösungstripel (x, y, z) mit $x, y, z > 0$.

Sei nun $x = 0$ und $y, z > 0$. In diesem Fall reduziert sich die gegebene Kongruenz zu $(y + z)^2 \equiv 0$ und es gibt genau dann eine Lösung, wenn $y \equiv -z$ gilt. Die Anzahl dieser Lösungstripel $(0, y, z)$ mit $y, z > 0$ ist 2016. In analoger Weise erhält man auch je 2016 Lösungstripel im Fall $y = 0$ mit $x, z > 0$ und $z = 0$ mit $x, y > 0$. Somit gibt es $3 \cdot 2016$ Lösungstripel (x, y, z), in denen genau ein Mal die Null vorkommt.

Falls zwei der Einträge in einem Lösungstripel null sind, so folgt daraus, dass der dritte Eintrag auch null sein muss. Also gibt es noch die Lösung $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Aus dieser vollständigen Fallunterscheidung ergibt sich die Gesamtanzahl der gesuchten Tripel zu

$$2016^2 - 2015 + 3 \cdot 2016 + 1 = 2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 + 1 = 2017^2 + 1.$$

Aufgabe 57. Andi und Manuel spielen ein Spiel mit einem fairen Spielwürfel, der zwei rote, zwei grüne und zwei blaue Seitenflächen hat. Die beiden würfeln abwechselnd und Andi darf beginnen. Sie würfeln so lange, bis einer der beiden alle drei Farben mindestens einmal gewürfelt hat – wer das zuerst schafft, gewinnt das Spiel. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Andi das Spiel?

Ergebnis: 81/140

Lösungsweg: Es sei $P_1(x, y)$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler, der als nächstes würfeln darf, das gesamte Spiel gewinnt, unter der Voraussetzung, dass er bereits x verschiedene Farben und der andere Spieler y verschiedene Farben gewürfelt hat. Es beschreibe weiters $P_2(x, y)$ die selbe Wahrscheinlichkeit, allerdings aus Sicht des Spielers, der gerade nicht an der Reihe ist, sodass $P_1(x, y) + P_2(x, y) = 1$ gilt. Das Ziel ist die Berechnung von $P_1(1, 1)$, also der Wahrscheinlichkeit, dass der beginnende Spieler Andi gewinnt, nachdem bereits beide einmal gewürfelt haben.

Aus $P_2(2, 2) = \frac{2}{3}P_1(2, 2)$ folgt $P_1(2, 2) = \frac{3}{5}$ und somit $P_2(2, 2) = \frac{2}{5}$. Weiters erhalten wir aus

$$P_2(2,1) = \tfrac{2}{3}P_1(1,2),$$
$$P_1(1,2) = \tfrac{1}{3}P_2(2,1) + \tfrac{2}{3}P_2(2,2)$$

die folgenden Wahrscheinlichkeiten: $P_1(1, 2) = \frac{12}{35}$, $P_2(1, 2) = \frac{23}{35}$, $P_1(2, 1) = \frac{27}{35}$ und $P_2(2, 1) = \frac{8}{35}$. Schlussendlich liefert

$$P_1(1,1) = \tfrac{1}{3}P_2(1,1) + \tfrac{2}{3}P_2(1,2)$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P_1(1, 1) = \frac{81}{140}$.

Aufgabe 58. Bestimme die größte ganze Zahl n, für die die Gleichung

$$k(k + 1)(k + 3)(k + 6) = n(n + 1)$$

mindestens ein Lösungspaar (k, n) ganzer Zahlen besitzt.

Ergebnis: 104

Lösungsweg: Zunächst sei bemerkt, dass es zu einem Lösungpaar (k, n) zum gleichen Wert k noch genau ein anderes Lösungspaar, nämlich $(k, -1 - n)$, gibt. Von den beiden Zahlen n und $-1 - n$ ist immer eine nicht-negativ und die andere negativ. Weil der größte Wert für n gesucht ist, kann man also $n \geq 0$ annehmen. Für solche n ist der Ausdruck $n(n + 1)$ stets wachsend, als Funktion in n gesehen. Um also das n so groß wie möglich zu bekommen, muss die linke Seite der Gleichung maximiert werden.

Sei mit $P(k)$ die linke Seite der Gleichung benannt. Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$P(k) = k(k + 1)(k + 3)(k + 6) = (k^2 + k)(k^2 + 9k + 18) = k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k.$$

Eine mögliche Lösungsstrategie besteht darin, die Tatsache auszunutzen, dass zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen $n(n+1)$ und $(n+1)(n+2)$ der rechten Seite keine weitere Zahl dieser Form liegen kann. Deshalb versucht man, $P(k)$ durch ein Polynom $(k^2 + ak + b)(k^2 + ak + (b + 1))$ in der Variablen k mit festen ganzzahligen Koeffizienten a und b anzunähern in dem Sinne, dass die dort bei Gliedern mit großen Exponenten stehenden Koeffizienten möglichst weitgehend getroffen werden. Betrachtet man den Koeffizienten bei k^3, so bietet es sich an, mit $a = 5$ zu beginnen. Dann ist

$$\begin{aligned}(k^2 + ak + b)(k^2 + ak + (b + 1)) &= (k^2 + 5k + b)(k^2 + 5k + (b + 1)) \\ &= k^4 + 10k^3 + (26 + 2b)k^2 + (10b + 5)k + (b^2 + b).\end{aligned}$$

Nun kann man allerdings keine ganze Zahl b mit $26 + 2b = 27$ finden. Bei $b = 0$ wird der Ausdruck zu klein und bei $b = 1$ bereits zu groß. Also gilt für dem Betrag nach hinreichend große ganze Zahlen k die Doppelungleichung

$$k^4 + 10k^3 + 26k^2 + 5k \overset{(1)}{<} k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k \overset{(2)}{<} k^4 + 10k^3 + 28k^2 + 15k + 2.$$

Für alle solche betragsmäßig großen Zahlen liegt dann der mittlere Ausdruck $P(k)$ strikt zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen der Form $n(n + 1)$. Deshalb untersucht man, für welche k die Doppelungleichung richtig ist. Die Ungleichung (1) ist nacheinander zu

$$\begin{aligned}k^4 + 10k^3 + 26k^2 + 5k &< k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k \\ 0 &< k^2 + 13k \\ 0 &< k(k + 13)\end{aligned}$$

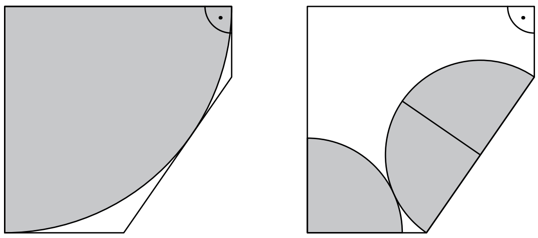
und damit zu $k > 0$ oder $k < -13$ äquivalent. Für die Ungleichung (2) erhält man völlig analog die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k &< k^4 + 10k^3 + 28k^2 + 15k + 2 \\ 3k &< k^2 + 2 \\ 0 &< (k - 1)(k - 2)\end{aligned}$$

und somit $k > 2$ oder $k < 1$. Dies bedeutet, dass für $k < -13$ oder $k > 2$ beide Ungleichungen erfüllt sind und $P(k)$ zwischen zwei aufeinander folgenden Zahlen der Form $n(n+1)$ liegt. Also muss man nur noch alle ganzen k mit $-13 \leq k \leq 2$ untersuchen.

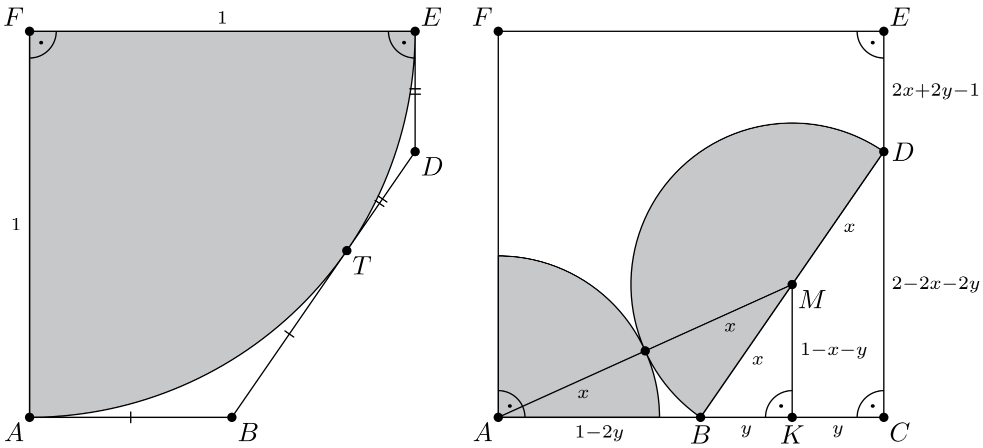
Findet man durch Setzen des Gleichheitszeichens in (1) oder (2) Lösungen für k, so führen diese zu Lösungspaaren für die gegebene Gleichung, denn dann ist $P(k)$ ja von der Form $n(n+1)$. In der Tat gibt es dann Lösungspaare für $k \in \{-13, 0, 1, 2\}$. Weil $P(k)$ als Funktion in k für $k \geq 0$ stets wachsend ist und der größte zugehörige Wert gesucht ist, braucht man von den drei Werten $P(0)$, $P(1)$ und $P(2)$ nur $P(2)$ zu berücksichtigen. Für $k \leq -6$ ist $P(k)$ stets fallend, so dass man nun noch die Fälle $k \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ untersuchen muss. Wegen $P(k) \leq 0$ für $-6 \leq k \leq -3$ und $-1 \leq k \leq 0$ ist hier nur noch $P(-2)$ zu prüfen. Nun rechnet man leicht nach, dass von den drei in Frage kommenden Werten $P(-13)$, $P(-2)$ und $P(2)$ der erste der größte ist. Für $k = -13$ gilt Gleichheit in (1), weshalb $n = k^2 + 5k = 104$ die gesuchte Zahl ist.

Aufgabe 59. Die *Viertel-Pizzeria* liefert ihre Viertelpizzas in speziellen fünfeckigen Pizzakartons, die sowohl für eine große Viertelpizza als auch für drei kleine Viertelpizzas Platz bieten wie in der Abbildung zu sehen ist. Wie groß ist der Radius einer kleinen Pizza in cm, wenn der Radius einer großen Pizza 30 cm beträgt?



Ergebnis: $5(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4})$

Lösungsweg: Es sei $ABDEF$ ein zum gegebenen Pizzakarton ähnliches Fünfeck mit $\overline{EF} = 1$. Nimmt man als Einheit eine Länge von 30 cm, so erhält man die gegebenen Voraussetzungen.



Da AE und EF Radien der großen Pizza sind, gilt $\overline{AF} = \overline{EF}$, und da die beiden Winkel bei A und F Zentriwinkel von Viertelkreisen sind, hat man $\angle AFE = \angle BAF = 90°$. Es muss also ein Punkt C existieren, sodass mit $ACEF$ ein Quadrat entsteht. Es seien K und M die Mittelpunkte der Strecken BC und BD, und weiters sei T der Berührpunkt der Strecke BD an die große Viertelpizza.

Es sei x der gesuchte Radius einer kleinen Pizza, das heißt $\overline{BD} = 2x$ und $\overline{AM} = 2x$. Weil Tangentenabschnitte gleich lang sind, gilt $\overline{AB} = \overline{BT}$ und $\overline{DE} = \overline{DT}$ und somit $\overline{AB} + \overline{DE} = \overline{BD}$. Es sei weiters $\overline{BC} = 2y$, somit ist $\overline{AB} = 1 - 2y$, $\overline{DE} = \overline{BD} - \overline{AB} = 2x + 2y - 1$, $\overline{CD} = 2 - 2x - 2y$ und $\overline{KM} = \overline{CD}/2 = 1 - x - y$. Wendet man den Satz des Pythagoras auf die Dreiecke $\triangle BKM$ und $\triangle AKM$ an, erhält man

$$y^2 + (1 - x - y)^2 = x^2 \quad \text{und} \quad (1 - y)^2 + (1 - x - y)^2 = 4x^2.$$

Folglich gilt

$$y^2 + 4x^2 - (1 - y)^2 = x^2, \quad \text{also} \quad y = \frac{1 - 3x^2}{2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in eine der beiden obigen Gleichungen ein, so erhält man nach Vereinfachung

$$9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Diese Gleichung kann auf folgende Weise faktorisiert werden:

$$\begin{aligned}
9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 &= (3x^2)^2 + (x-1)^2 - 2 \cdot 3x^2(x-1) - 7x^2 \\
&= (3x^2 - x + 1)^2 - 7x^2 \\
&= (3x^2 + (\sqrt{7}-1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7}+1)x + 1)
\end{aligned}$$

Man erhält schlussendlich die Gleichung

$$(3x^2 + (\sqrt{7}-1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7}+1)x + 1) = 0$$

und man sieht, dass der erste Faktor keine reellen Lösungen besitzt. Der zweite Faktor hat hingegen Lösungen der Form

$$\frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{7} \pm \sqrt{2\sqrt{7}-4}\right).$$

Die größere der beiden Lösungen ist jedenfalls sicher größer als 1/2, was folgender Ungleichung widerspricht:

$$2BD = BD + AB + DE < BC + CD + AB + DE = 2$$

Aus diesem Grund muss $x = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7}-4})$ sein und die gesuchte Lösung ist folglich

$$30x = 5\left(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7}-4}\right).$$