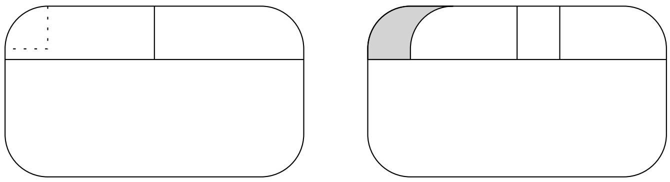
1. feladat Egy régi villamos ablakai úgy néznek ki, mint az ábrákon. Minden sarok lekerekített része egy negyedkör 10 cm-es sugárral. A csúsztatható felső rész 10 centiméterrel van eltolva, ahogy a második ábrán látható. A nyitott rész magassága 13 cm. Mekkora a nyílás területe cm^2-ben?



Eredmény. 130

Megoldás. Ugyanakkora a területe, mint a elcsúsztatott rész és a fix rész közötti átfedésnek, ami egy $10\,\text{cm} \times 13\,\text{cm}$-es téglalap.

2. feladat Egy téglalapot felosztottunk kilenc kisebb téglalapra az ábrán látható módon. Az egyes kis téglalapokba írt számok az adott kis téglalap kerületét jelentik. Adjuk meg a nagy téglalap kerületét.

	9	
14	10	17
	12	

Eredmény. 42

Megoldás. Az ábrán látható, hogy a nagy téglalap kerülete ugyanannyi mint a négy külső kis téglalap kerületeinek összege mínusz a középső téglalap kerülete. Tehát a válasz

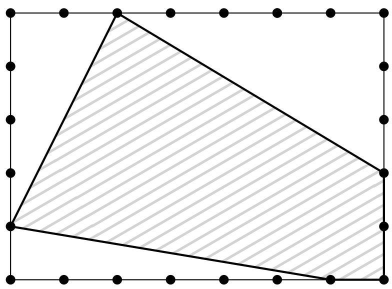
$$14 + 9 + 17 + 12 - 10 = 42.$$

3. feladat Péter kitörölte egy négyjegyű prím egyik számjegyét és így 630-at kapott. Mi volt ez a prímszám?

Eredmény. 6301

Megoldás. Mivel egy négyjegyű prím utolsó számjegye nem lehet páros, a prímszám $630*$ alakú volt. Továbbá, az utolsó számjegy nem lehet 5, mert akkor a szám 5-tel osztható volna. Tehát csak az 1, 3, 7 és 9 lehetőségek maradtak. Mivel 630 osztható 3-mal, a 3-as és 9-es számjegyek nem lehetségesek. Hasonlóan, 630 osztható 7-tel így 7se lehet. Tehát a szám 6301 volt.

4. feladat Patrícia, a sztárépítész egy nagyon modern ötszög alakú házat épít egy téglalap alakú telken. A telek oldalai 35 m és 25 m hosszúak. A ház alaprajza az ábrán látható módon passzol a telekre:



(A határokon a pontok 5 méteres távolságot jelölnek). A telek hányadrészét fedi le a ház?

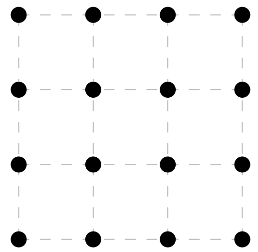
Eredmény. $\frac{41}{70}$

Megoldás. Mivel csak telekhez viszonyított arány érdekel, tekinthetjük az 5 métert egységnek. A három derékszögű háromszög területét kivonva a teljesből, kapjuk az

$$1 - \frac{1}{35}\left(\frac{5\cdot 3}{2} + \frac{6\cdot 1}{2} + \frac{4\cdot 2}{2}\right) = \frac{41}{70}$$

eredményt.

5. feladat Egy 16 pontból álló négyzetrács (mint az ábrán) tartalmazza 9 darab 1×1-es négyzet csúcsait, négy darab 2×2-es négyzet és egy darab 3×3-as négyzet csúcsait. Ez összesen 14 olyan négyzet amelyeknek az oldalai párhuzamosak a rács oldalaival. Mi a legkevesebb számú pont amelyeket kitörölve mind a 14 négyzetnek hiányzik legalább egy csúcsa?



Eredmény. 4

Megoldás. Szükséges legalább 4 csúcsot törölni, mert a sarkokban található négy 1×1-es négyzetnek nincs közös pontja. Ha két átellenes sarkot és két belső pontot a másik átlón kitörlünk, látható, hogy nem marad ép négyzet, tehát 4 pont törlése elegendő is.

6. feladat Adjátok meg az

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2017^2.$$

négyzetösszeg egyes helyiértéken álló számjegyét.

Eredmény. 5

Megoldás. A négyzetszámok utolsó számjegyei periodikusan, tizesével ismétlődnek.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385,$$

tehát ennek utolsó számjegye 5. Ebből következik, hogy $1^2 + 2^2 + \cdots + 2010^2$ utolsó számjegye is 5, hiszen $201 \cdot 5 = 1005$. Továbbá $2011^2 + 2012^2 + \cdots + 2017^2$ utolsó számjegye 0, azért a teljes összegnek is 5 lesz az utolsó számjegye.

7. feladat Fejezzük ki a

$$\frac{0,\overline{2}}{0,\overline{24}}$$

hányadost $\frac{a}{b}$ alakú törtként a lehető legkisebb a és b pozitív egészekkel.

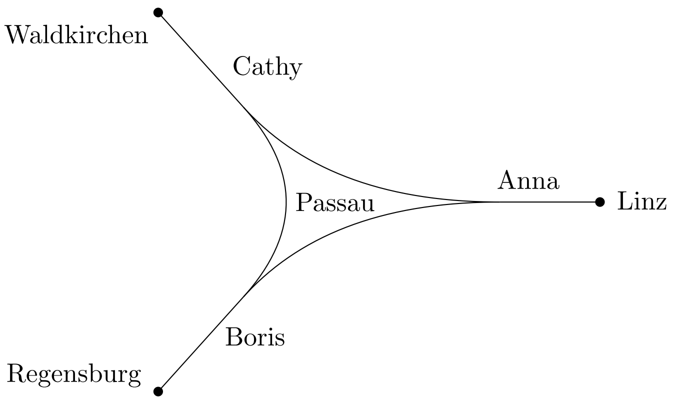
Megjegyzés: A felülvonás azt jelöli, hogy a tizedesjegyek periodikusan ismétlődnek, például $0,\overline{123} = 0,123123\ldots$.

Eredmény. $\frac{11}{12}$

Megoldás. A hányados felírható az alábbi módon:

$$\frac{0.\overline{2}}{0.\overline{24}} = \frac{0.\overline{22}}{0.\overline{24}} = \frac{22 \cdot 0.\overline{01}}{24 \cdot 0.\overline{01}} = \frac{11}{12}.$$

8. feladat Passauban egy vasútállomás háromszöget formáz. Anna, Boris és Cathy megfigyelik a vonatforgalmat rendre Linzben, Regensburgban és Waldkirchenben a Passauból jövő sínek mentén. Anna 190, Boris 208, Cathy pedig 72 bejövő és kimenő vonatot számolt összesen. Hány vonat ment Linzből Regensburgba vagy Regensburgból Linzbe, ha semelyik vonatnak sem kiinduló vagy végállomása Passau, és nem is fordulhat vissza Passauban?



Eredmény. 163

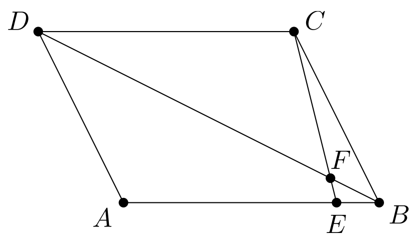
Megoldás. Legyen a Linz és Waldkirchen között közlekedő vonatok száma r, Linz és Regensburg között w, Waldkirchen és Regensburg között pedig l. Anna megszámolja a Linz és bármely másik elmített város között a vonatokat, tehát $r + w = 190$. Hasonlóan $l + w = 208$ és $l + r = 72$. Összeadva az első két egyenletet majd kivonva a harmadikat, kapjuk hogy $2w = 190 + 208 - 72$, amiből $w = \frac{1}{2} \cdot 326 = 163$.

9. feladat Adjuk meg az összes olyan $x < 10\,000$ pozitív egész számot, amelyre x egy páros szám negyedik hatványa, és permutálni tudjuk x számjegyeit úgy, hogy egy páratlan szám negyedik hatványát kapjuk. A számjegycsere után kapott szám nem kezdődhet nullával.

Eredmény. 256

Megoldás. Legyen $x = a^4$ valamilyen páros a számra, és az átalakítás után b^4 egy páratlan b-re. Mivel $10\,000 = 10^4$, a és b kisebbek mint 10. Egy pozitív egyjegyű páros számot négyzetre emelve, majd utolsó számjegyét megint négyzetre emelve láthatjuk, hogy a^4 biztosan 6-ra végződik. Megnézve b lehetséges értékeit, csak $5^4 = 625$ és $9^4 = 6561$ tartalmazza a 6-os számjegyet. De 9^4 a számjegyeinek bármilyen permutációja után osztható lenne 3-mal (a számjegyek összege nem változik). Ekkor csak $a^4 = 6^4 = 1296$ lehetséges, de ez nem vihető át 6561-be. Marad az $5^4 = 625$, és könnyen megtalálható, hogy ekkor $x = a^4 = 256$ az egyetlen megoldás.

10. feladat Az $ABCD$ paralelogrammában egy C-n átmenő egyenes az AB oldalt egy E pontban metszi, úgy hogy $EB = \frac{1}{5} AE$. A CE szakasz a BD átlót az F pontban metszi. Adjuk meg a $BF : BD$ arányt.



Eredmény. $1 : 7$

Megoldás. Az EFB háromszög és a CDF háromszög hasonló egymáshoz, $EB : DC = 1 : 6$ aránnyal. Ebből következik, hogy $BF : FD = 1 : 6$ is ilyen arányú, tehát $BF : BD = 1 : 7$.

11. feladat Egy nagy társasházban 100 számozott lakás található. Minden lakásban egy, kettő vagy három ember lakik. Az elsőtől az 52-edik lakásig összesen 56 ember lakik, az 51-ediktől a 100-adik lakásokban pedig összesen 150 ember. Összesen hányan élnek a házban?

Eredmény. 200

Megoldás. Mivel egy lakásban maximum 3 ember lakhat, az 51.-100. lakásokban mind pontosan három ember él. Tehát $56 - 2 \cdot 3 = 50$ ember él az első ötven lakásban összesen. Ebből következik, hogy $50 + 150 = 200$ lakója van a társasháznak.

12. feladat Miklós leírta a 3-as számot piros ceruzával és a 2-es számot zöld ceruzával egy papírra. Ez volt az első lépés. Minden további lépésben pirossal leírta az előző lépésbeli két szám összegét, és zölddel a (pozitív) különbségüket. Milyen számot írt le pirossal a 2017. lépésben?

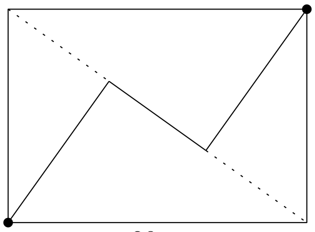
Eredmény. $3 \cdot 2^{1008}$

Megoldás. Könnyen látható, hogy minden lépésben a piros szám nagyobb mint a zöld. Ha az n. lépésben a piros szám P_n és a zöld szám Z_n akkor az $n+1$. lépésben $P_{n+1} = P_n + Z_n$ és $Z_{n+1} = P_n - Z_n$, és az $n+2$. lépésben

$$P_{n+2} = P_{n+1} + Z_{n+1} = 2P_n,$$
$$Z_{n+2} = P_{n+1} - Z_{n+1} = 2Z_n.$$

Tehát mindkét szám duplázódik két lépésenként. Az első és a 2017. lépés között ez 1008-szor történik meg, ezért az eredmény $3 \cdot 2^{1008}$.

13. feladat Piroska a Négyszögletű-erdő bejáratánál áll. Az A pontból indulva el kell jutnia B-be, amilyen gyorsan csak lehet. Egy lehetőség az erdő széle mentén sétálni, ami összesen 140 m lenne. Persze tudja a háromszög-egyenlőtlenségből, hogy egy egyenes út rövidebb volna. De sajnos csak az ábrán látható cikkcakkos út van. Ha Piroska tudná, hogy ez az út rövidebb mint 140 m, akkor meg merné kockáztatni az átvágást. Adjuk meg a cikkcakkos út hosszát!



Eredmény. 124 m

Megoldás. A Pitagorasz-tétel alapján a téglalap átlója $\sqrt{60^2+80^2}=100$. A befogótételből meg tudjuk határozni az átló rövidebb (szaggatottal jelölt) szakaszának hosszát: $60^2/100=36$. Ez alapján a hosszabb szakasz hossza $100-36=64$. A magasságtétel alapján a magasság hossza $\sqrt{36\cdot 64}=48$. Összességében a cikkcakkos út hossza $48+(64-36)+48=124$.

14. feladat A nyolcjegyű palindrom számok $\overline{abcddcba}$ alakúak, ahol a, b, c és d nem feltétlen különböző számjegyek. Hány olyan nyolcjegyű palindrom szám van, amiből törölhetünk néhány számjegyet úgy, hogy a törlés után megmaradó szám 2017 legyen?

Eredmény. 8

Megoldás. Mivel 2017 minden számjegye különböző, az a, b, c, d számjegyek különbözőek és mindből egyet törlünk. Törlés után 2017 vagy első vagy utolsó számjegye a. Az első esetben $a=2$ és egy analóg feladathoz jutunk egy hatjegyű palindrommal és a $0, 1, 7$ számjegyekkel. A második esetben $a=7$ és szintén egy analóg feladathoz jutunk hatjegyű palindrommal és a $2, 0, 1$ számjegyekkel. Mindkét esetben ismét két választásuk van az első számjegyre, szóval 4 darab feladatot kapunk négyjegyű palindromra, majd 8 db feladatot kétjegyű palindromra, aminek már egyértelmű a megoldása. Tehát összesen 8 lehetőség van.

15. feladat Egy n egész szám számjegyeinek összegét jelöljük $\mathrm{S}(n)$-nel, a számjegyeinek szorzatát pedig $\mathrm{P}(n)$-nel. Hány olyan pozitív egész n van, amelyre $n=\mathrm{S}(n)+\mathrm{P}(n)$?

Eredmény. 9

Megoldás. Egyjegyű n esetén $\mathrm{S}(n)+\mathrm{P}(n)=2n>n$. A továbbiakban feltesszük, hogy n legalább kétjegyű. Mivel ekkor $\mathrm{S}(n)<n$, szükségképpen $\mathrm{P}(n)>0$, így n mindegyik számjegye nullától különböző kell, hogy legyen. Legyen $m\geq 1$ olyan, melyre $n=a_m 10^m+\cdots+a_0$, ahol $1\leq a_k\leq 9$ valamennyi $0\leq k\leq m$ esetén egész. Ekkor

$$\begin{aligned}
n-\mathrm{S}(n)-\mathrm{P}(n) &= a_m 10^m+\cdots+a_0-(a_m+\cdots+a_0)-a_m\cdots a_0\\
&=(10^m-1-a_{m-1}\cdots a_0)a_m+(10^{m-1}-1)a_{m-1}+\cdots+9a_1\\
&\geq(10^m-1-9^m)a_m\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

egyenlőség pedig csakis $m=1$ esetén lehetséges. Tehát a feltételnek megfelelő n számok felírhatók, mint

$$n=10a_1+a_0=a_1+a_0+a_1a_0$$

ez pedig $a_1(9-a_0)=0$ egyenlőséggel ekvivalens, ebből adódóan pedig $a_0=9$. A feladat feltételét így tehát pontosan kilenc szám elégíti ki: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, valamint 99.

16. feladat Egy gyár tulajdonosa 100 embert foglalkoztat. Minden csoportvezető havi fizetése 5 000 €, minden szerelőé 1 000 € és minden részmunkaidős munkásé 50 €. Összesen a tulajdonos havi 100 000 Eurót fizet a dolgozóknak, és mindhárom típusból van legalább egy dolgozó. Hány csoportvezető dolgozik ennél a gyárnál?

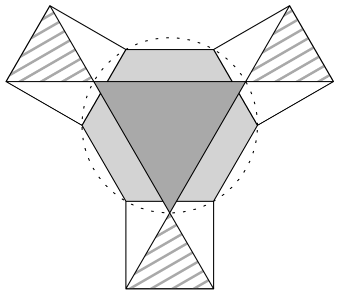
Eredmény. 19

Megoldás. Jelölje x, y, z rendre a csoportvezetők, szerelők és részmunkaidős munkások számát. Ekkor a feladat feltételei felírhatók egyenletrendszerként az alábbi módon:

$$x+y+z=100 \tag{1}$$
$$5\,000x+1\,000y+50z=100\,000 \tag{2}$$

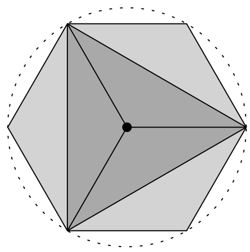
Fejezzük ki z-t (2) egyenletből: $z = 2000 - 20y - 100x$, ekkor az egyenlet jobb oldala 20-szal osztható, ezért z felírható $z = 20k$ alakban, ahol k pozitv egész. Ekkor a (2) egyenletet egyszerűsítve az $5x + y + k = 100$ egyenletet kapjuk. Kivonva ebből (1) egyenletet, szintén $z = 20k$ helyettesítéssel $4x = 19k$ adódik. Mivel 4 és 19 relatív prímek, x osztható 19-cel. Mivel x, y, és z pozitívak, (2) miatt $x < 20$. Így tehát $x = 19$ ($y = 1$ és $z = 80$) az egyetlen megoldás.

17. feladat Az alábbi mozaik szabályos sokszögekből áll. A hatszög és a sötét háromszög köréírt köre megegyezik. Feltéve, hogy egy csíkos háromszög területe 17, határozzátok meg a sötét háromszög területét.



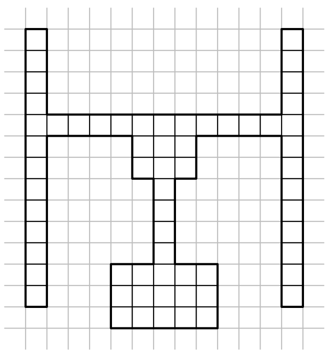
Eredmény. 51

Megoldás. Először forgassuk el a sötét háromszöget 30°-kal köréírt körének középpontja körül, ekkor csúcsai egybeesnek a hatszög csúcsaival. Világos tehát, hogy területe a hatszög területének fele.



Ugyanakkor vegyük észre, hogy a csíkos szabályos háromszögek oldalhossza megegyezik a hatszög oldalhosszával. Ezért a csíkos háromszög területe a hatszög területének $\frac{1}{6}$-a. Mindent összevetve a sötét háromszög területére $3 \cdot 17 = 51$ adódik.

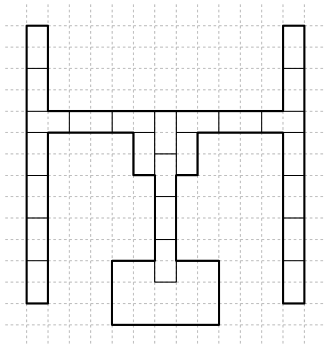
18. feladat A passaui vasútállomás felújítása során speciális mintázatú burkolatot akarnak a látássérült emberek számára létrehozni. A kövezet ábrája a lenti ábrán található. Sajnos csak 1×2-es csempék állnak rendelkezésre. Hányféleképpen lehet a burkolatot lefedni velük? A csempék megkülönböztethetetlenek, és két csempézést akkor tekintünk különbözőnek, ha bennük a csempék valamely ponton eltérő helyzetben vannak.



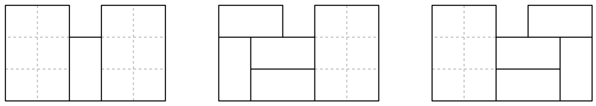
Eredmény. 15

Megoldás. A vékony sávok mentén kezdve a csempék lerakását, egyértelmű, hogy a csempézés variálására csak egy

3×5-ös területen van lehetőség:

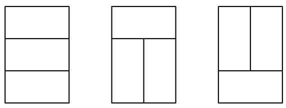


Három lehetőségünk van a következő csempénél: vagy ugyanabban az irányban helyezzük el, mint az előzőt (ld. (1)), amely két különálló 3×2-es területhez vezet, vagy tehetjük rá merőlegesen ((2) és (3) szerint, az iránytól függően). Ezekben az esetekben a csempézés egyértelmű egy 3×2-es terület kivételével.



(1) (2) (3)

Minden 3×2-es területet háromféleképpen fedhetünk le a következő ábra szerint:



Tehát $3 \cdot 3 = 9$ lehetőségünk van az (1) esetben, 3-3 pedig a másik kettőben. Összesen így $9 + 3 + 3 = 15$ különböző csempézés lehetséges.

19. feladat Misi gondolt egy n pozitív egész számra. Ezután kiválaszotta n egy pozitív osztóját, megszorozta 4-gyel, majd kivonva ezt a számot n-ből 2017-et kapott eredményül. Adjátok meg az összes lehetséges számot, amire Misi gondolhatott.

Eredmény. 2021, 10085

Megoldás. Legyen d az az osztója n-nek, amit Misi választott. Ekkor $n = kd$ valamely k pozitív egészre. Ebből a következő egyenletet kapjuk:

$$kd - 4d = (k - 4)d = 2017.$$

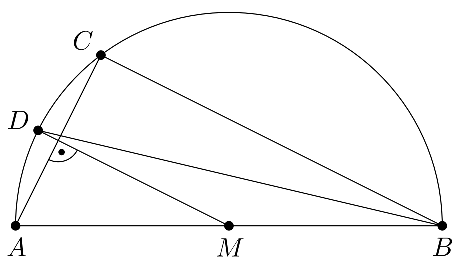
Mivel 2017 prím, így $d = 1$ vagy $d = 2017$. Előbbi esetben $n = k = 2017 + 4 = 2021$, míg utóbbi esetben $k = 5$, és így $n = 2017 \cdot 5 = 10085$ adódik.

20. feladat Grizsa és Vanyecska nagyon jó barátok, így mindig elkezdenek csevegni, ha egymás mellé ülnek. Öt diák (Grizsát és Vanyecskát is beleértve) szeretne egy konstruktív kerekasztal beszélgetést, vagyis öt székre akarnak leülni egy körasztal mentén úgy, hogy Grizsa és Vanyecska ne legyenek szomszédok. Hányféleképpen tudják ezt megtenni? A forgatással egymásba vihető elrendezések is különbözőnek számítanak.

Eredmény. 60

Megoldás. Miután Grizsa szabadon elfoglalta az öt hely egyikét, Vanyecska leültetésére 2 lehetőségünk van, hogy ne üljenek egymás mellett. Ez $5 \cdot 2$ különböző esetet ad. Mindegyikben a három másik diák szabadon leültethető, 3!-féleképpen, így összesen $5 \cdot 2 \cdot 3! = 60$ lehetőségünk van.

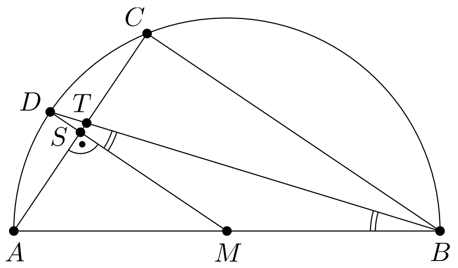
21. feladat Az ábrán AB egy M középpontú kör átmérője. D és C pontok úgy illeszkednek a körre, hogy $AC \perp DM$ és $MAC\sphericalangle = 56°$. Adjátok meg az AC és BD által bezárt hegyesszög nagyságát.



Eredmény. $73°$

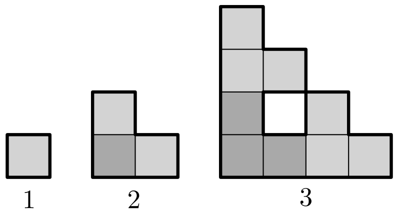
Megoldás.

Jelöljük AC és DM metszéspontját S-sel, AC és BD metszéspontját pedig T-vel.



$MAC\sphericalangle = 56°$ és az S-beli derékszög ismeretéből $SMA\sphericalangle = 34°$ adódik, az AMS háromszög szögeinek vizsgálatából. Továbbá, $BMD\sphericalangle = 180° - SMA\sphericalangle = 146°$. Mivel MD és MB egyaránt a kör sugarai, $BDM\triangle$ egyenlő szárú ($MBD\sphericalangle = MDB\sphericalangle$), ezért $MDB\sphericalangle = 17°$. $CTB\sphericalangle$ szöget akarjuk meghatározni, ami megegyezik $STD\sphericalangle$ szöggel, ez pedig a DST derékszögű háromszög szögeinek segítségével kiszámolható, ugyanis $SDT\sphericalangle = MDB\sphericalangle$. Tehát $CTB\sphericalangle = 73°$.

22. feladat Egy egységnégyzetekből felépülő alakzat úgy épül fel, hogy egy négyzetből kiindulva minden lépésben az aktuális állapot egy-egy példányát illeszti maga mellé az ábrának megfelelő módon. Milyen hosszú a vastaggal jelölt határolóvonal a hatodik állapotban?



Eredmény. 488

Megoldás. Jelölje f_n a vastag határvonalat az n-edik lépésben. Figyeljük meg, hogy minden állapot az előzőből úgy keletkezik, hogy két, az előző állapottal egybevágó alakzatot ragasztunk egy-egy egység hosszú vonal mentén az eggyel korábbi állapothoz, és a ragasztás menti határvonalok eltűnnek. Ebből a megfigyelésből az $f_{n+1} = 3 \cdot f_n - 2 \cdot 2$ képlet adódik minden $n \geq 1$ esetén, továbbá tudjuk, hogy $f_1 = 4$, így tehát $f_6 = 488$-at kapjuk eredményül.

23. feladat Egy hatalmas kerekasztal körül 2017 széket helyeztek el, a székeken szuperhősök és főgonoszok ülnek. A szuperhősök mindig igazat mondanak, míg a főgonoszok mindig hazudnak. Valamennyi, az asztalnál ülő személy kijelentette, hogy egy szuperhős és egy főgonosz között foglal helyet. Utólag azonban kiderült, hogy valamiért pontosan egy szuperhős tévedett ezt illetően. Hány szuperhős ül az asztalnál?

Eredmény. 1345

Megoldás. Elsőként figyeljük meg, hogy két főgonosz nem ülhet egymás mellett: ha ez lenne a helyzet, akkor mindkettőjük másik szomszédja is főgonosz kellene, hogy legyen, ezt a gondolatmenetet követve pedig arra a következtetésre jutnánk, hogy az asztalnál egyetlen szuperhős sem ül, ez azonban ellentmond annak a feltételnek, hogy pontosan egy szuperhős tévedett. Ha elhagyjuk a tévedő szuperhőst, igaz lesz, hogy bármely szuperhős egy szuperhős és egy főgonosz között foglal helyet, valamint bármely főgonosz két szuperhős között, így az asztaltársaság egymást követő ívekre bontható, ahol egy-egy ív szuperhős-szuperhős-főgonosz alakú. A tévedésbe eső szuperhős vagy két szuperhős között, vagy két főgonosz között ül. Az ülőhelyek száma 3-mal osztva 1-et ad maradékul, így az ülésrend mintáját alapulvéve csak az első eset fordulhat elő, ezért $\frac{2}{3} \cdot 2016 + 1 = 1345$ szuperhős ül az asztalnál.

24. feladat Találjátok meg az összes pozitív valós x-et, amelyre

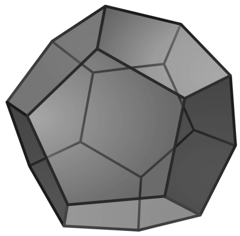
$$x^{2017x} = (2017x)^x.$$

Eredmény. $\sqrt[2016]{2017}$

Megoldás. Mivel x pozitív, mindkét oldalt $1/x$-edik hatványra emelhetjük, amiből $x^{2017} = 2017x$ vagy másképp $x^{2016} = 2017$. Így $x = \sqrt[2016]{2017}$ a megoldás.

25. feladat Leo egy szabályos dodekaéder éleit akarja kiszínezni a következő módon: kiválaszt egy színes filctollat, majd az egyik csúcsból kiindulva a filctoll felemelése nélkül sorra kiszínez éleket úgy, hogy semelyik élt nem színezi ki kétszer, ezt az eljárást addig folytatja, ameddig tudja. Ezután elővesz egy másik színű filctollat, majd kezdve egy még ki nem színezett éllel az előzőekben leírtakat követi ismét. Ezt addig folytatja, amíg a dodekaéder minden éle ki nincs színezve pontosan egy színnel. Legalább hány filctoll használata szükséges?

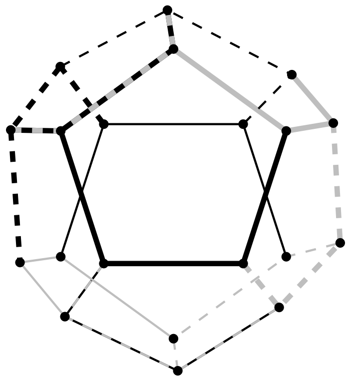
Megjegyzés: A szabályos dodekaéder olyan test, melynek tizenkét ötszöglapja van, ahogy azt az ábra is mutatja:



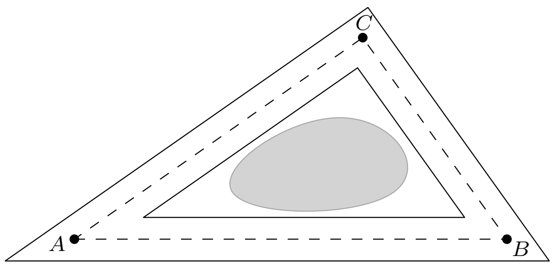
Eredmény. 10

Megoldás. Egy szabályos dodekaédernek 20 csúcsa van, és minden csúcsa pontosan 3 élre illeszkedik. Most tekintsük a dodekaéder gráfját. Minden lépésben egy sétát színezünk a gráfban, aminek éleit aztán töröljünk a gráfból. Ha az eltávolított séta zárt, úgy minden csúcsra igaz, hogy 0 vagy 2 rá illeszkedő élt töröltünk a gráfból. Ha az aktuálisan törölt séta kiinduló csúcsa b, a záró csúcsa pedig egy ettől különböző e, úgy a b-re és e-re illeszkedő élek közül pontosan egy került törlésre, míg a gráf összes többi csúcsára szintén igaz, hogy 0 vagy 2 rá illeszkedő élt töröltünk. Ezért minden csúcs egy séta kezdő-/végpontja kell, hogy legyen, ezért legalább 10 lépés szükséges az üres gráf eléréséhez, tehát legalább 10 szín kellett a dodekaéder éleinek kiszínezéséhez.

A következő ábra azt mutatja meg, hogy 10 színnel már ki tudjuk színezni az éleket:

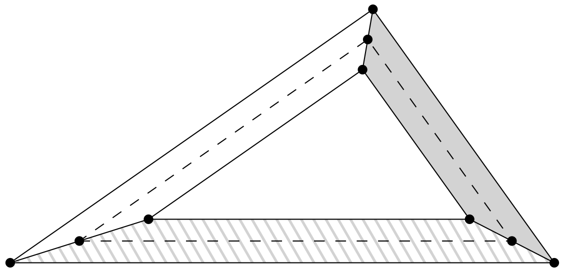


26. feladat Joci, a tájépítész tervezett egy murvával felszórt utat, mely egy tavat kerül meg. Az ABC háromszög jelöli az út közepét, ennek pedig rendre $a = 80\,\mathrm{m}$, $b = 100\,\mathrm{m}$ és $c = 120\,\mathrm{m}$ hosszú oldalai vannak. Az út széleinek ettől a háromszögtől való távolsága $1\,\mathrm{m}$. Hány m^3 murvát kell Jocinak rendelnie, ha átlagosan $4\,\mathrm{cm}$ a murvaréteg vastagsága?



Eredmény. 24

Megoldás. Az út felületét feloszthatjuk három trapézra, melyek magassága rendre 2, középvonalaik pedig a, b, valamint *c.*



Mivel egy trapéz területe megegyezik a magasságának és a középvonalának szorzatával, az út felülete így négyzetméterben kifejezve

$$2 \cdot (80 + 100 + 120) = 2 \cdot 300 = 600.$$

Ezért a szükséges murva mennyisége $600\,\mathrm{m}^2 \cdot 0,04\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{m}^3$.

27. feladat Adjuk meg az összes négyjegyű négyzetszámot amelynek az első két számjegye egyenlő, és a két utolsó számjegye szintén egyenlő.

Eredmény. 7744

Megoldás. Legyen N a keresett szám, és jelölje x az első, y az utolsó számjegyét. Ekkor

$$N = 1000x + 100x + 10y + y = 11(100x + y),$$

tehát N osztható 11-gyel. Mivel négyzetszám, oszthatónak kell lennie 11^2-tel is. Tehát $N = 11^2k^2$ valamilyen k pozitív egészre és $100x + y = 11k^2$. Mivel ennek az egyenlőtlenségnek a baloldala a háromjegyű $\overline{x0y}$ amelynek a tizes helyiértékén 0 áll, k^2 egy kétjegyű szám kell legyen, aminek számjegyeinek összege 10. Az egyetlen ilyen szám a $8^2 = 64$. Tehát kapjuk hogy $100x + y = 11 \cdot 8^2$ és ez alapján $N = 11^2 \cdot 8^2 = 88^2 = 7744$.

28. feladat A vidámparkban van egy lottósorsolás a következő szabályokkal: a résztvevőnek négy megkülönböztethetetlen doboz közül kell egyet választania, és abból egy golyót kihúznia. Ha a golyó fehér, a résztvevő nyert, ha fekete, vesztett. Például, ha a golyók eloszlása a négy dobozban

$$(6,6),\ (5,3),\ (4,0),\ (3,5),$$

ahol minden (w,b) pár egy dobozt jelöl, amiben w fehér és b fekete golyó van, a játékos $\frac{5}{8}$ eséllyel nyer. Minden 1000. résztvevő megnyeri a szuper jokert: tetszőlegesen újraoszthatja a golyókat az egyes dobozok közt. Ezek után a dobozokat összekeverik, és a résztvevő választhat egy dobozt, amiből húz egyet. Johanna egy szerencsés lány, és megnyerte ezt a szuper jokert. Mekkora a legnagyobb valószínűség, amit a példában szereplő eloszlásból kiindulva érhet el ideális stratégiával?

Eredmény. $\frac{51}{58}$

Megoldás. Ha Johanna pontosan egy fehér golyót helyez a négy dobozból háromba, automatikusan nyer, ha ebből a három dobozból választ egyet. A $(1,0)$, $(1,0)$, $(1,0)$, $(15,14)$ kiindulási (w,b)-eloszlásban így $\frac{1}{4}(1+1+1+\frac{15}{29}) = \frac{51}{58}$ valószínűséggel nyer.

Könnyen belátható, hogy minden más eloszlás kisebb győzelmi esélyhez vezet: a vesztés esélyét az egyes fekete golyók kiválasztási valószínűségét összegezve kapjuk meg. Ez a valószínűség pedig akkor minimális, ha a fekete golyók olyan dobozban vannak, ahol a lehető legtöbb golyó van.

29. feladat Egy autóbusz, egy kamion és egy motorbicikli állandó sebességgel haladnak, majd ebben a sorrendben, egyenlő időközönként elmennek egy traffipax mellett. Az úton később egy újabb traffipax mellett haladnak el, szintén azonos időközönként (ráadásul ugyanannyi idővel váltják egymást, mint az első traffipax esetén), ám ezúttal más sorrendben: autóbusz, motorbicikli, kamion. Határozzátok meg az autóbusz sebességét, ha a kamion sebessége 60 km/h, a motorbiciklié pedig 120 km/h.

Eredmény. 80 km/h

Megoldás. Legyen t az az idő, ami az egymást követő járművek traffipaxhoz érése közt eltelik. Így a motorbicikli t órával a kamiont követően éri el az első traffipaxot, illetve t órával hamarabb a másodikat. Ezért a motorbicikli $2t$ óra alatt teszi meg a két traffipax közötti távolságot. A kamionnak ez $4t$ órába telik, hiszen fele olyan gyors, mint a motorbicikli.

Az autóbusz t órával előbb éri el az első traffipaxot, mint kamion, továbbá $2t$ órával hamarabb éri el a másodikat. Így amíg a kamionnak $4t$ órába telik megtenni a két traffipax közti távolságot, addig az autóbusznak ez csak $3t$ órát vesz igénybe. Következésképp az autóbusz sebessége $\frac{4}{3}$-szorosa a kamionénak, vagyis 80 km/h.

30. feladat Keressük meg az összes számhármast a következő állításban szereplő lyukak pozitív egészekkel való betöltésére, úgy, hogy az állítás igaz legyen: „Ebben az állításban, $\square$%-a a számjegyeknek nagyobb mint 4, $\square$%-a a számjegyeknek kisebb mint 5, és $\square$%-a a számjegyeknek vagy 4, vagy 5”.

Eredmény. 50, 50, 60

Megoldás. A számjegyek teljes n száma 7-től 10-ig terjedhet. Mivel egész százalékokat akarunk kapni, az egyedüli lehetséges prímtényezők a 2 és az 5. Ez kizárja az $n = 7$ és $n = 9$ eseteket. Mivel $n = 8$-ra négy számjegy már rögzített, könnyen ellenőrizhetjük, hogy a három lyukat nem lehet megfelelően kitölteni még négy számjegy felhasználásával. Így $n = 10$-et kapjuk. Tehát minden szám a lyukakban 0-ra végződik, és így eljelölhetjük őket rendre $\overline{a0}$-lal, $\overline{b0}$-lal és $\overline{c0}$-lal, ahol a, b és c számjegyek, és $a + b = 10$.

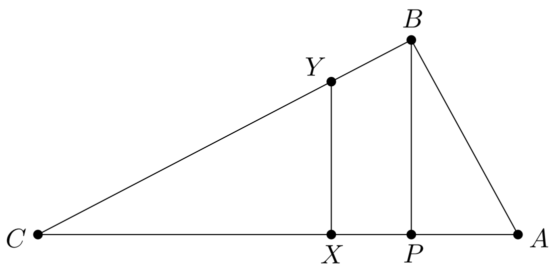
Mivel legalább két számjegy nagyobb mint 4, és legalább öt számjegy kisebb, vagy egyenlő mint 4, levonhatjuk azt a következtetést, hogy $5 \geq a \geq 2$. Sőt, legalább egy a és b közül nagyobb mint négy, tehát $5 \geq a \geq 3$.

Mivel négy számjegy legalább 4 vagy 5, $c \geq 4$. Ezen kívül $\overline{c0}\,\%$ definíció szerint kizárja a $c = 4$ esetet, így $c \geq 5$, amiből $5 \geq a \geq 4$. Az $a = 4$ esetben $b = 6$ lenne, de ehhez egyik $c \geq 5$ értékre se teljesül az állítás. Legyen tehát $a = 5$. Ebből $b = 5$, és az állítás teljesül $c = 6$-ra.

31. feladat Pali marhái egy háromszög alakú réten legelnek, jelöljük ezt ABC-vel. Mivel a pöttyös és egyszínű tehenei nem jönnek ki jól egymással, Pali épített egy húszméteres kerítést, az AC oldalra merőlegesen, a P pontból kiindulva, aminek a másik vége a B pontba került. Ez a kerítés a rétet két derékszögű háromszögre osztotta. A kerítés ellen az A pont körül legelő pöttyös tehenek hamar elkezdtek tiltakozni, rámutatva, hogy $AP : PC = 2 : 7$, és egy tisztességesebb elosztást követeltek. Ezután Pali kicserélte a kerítést egy, az előzővel párhuzamos másikra, ami hasonlóan a rét határainál ér véget, de két egyenlő területű részre osztja a rétet. Mi az új kerítés hossza méterben?

Eredmény. $30\sqrt{\frac{2}{7}}$

Megoldás. Legyen X és Y az új kerítés két végpontja rendre az AC és BC oldalon. Mivel a PBC háromszögnek nagyobb a területe, mint az ABP-nek, az X pont C és P között helyezkedik. A PBC és XYC háromszögek hasonlóak, így $XY : XC = PB : PC$.



Továbbá, mivel az XYC háromszög területe fele az ABC háromszög területének,

$$\frac{1}{2} \cdot XY \cdot XC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot PB \cdot AC$$

ezt átírva

$$XY^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{XY}{XC} \cdot PB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot PB^2 \cdot \frac{AP + PC}{PC},$$

tehát

$$XY = PB \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{AP}{PC}\right)} = 30\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

32. feladat Egy táblán öt, egymástól nem feltétlenül különböző valós szám állt. Minden lehetséges számpár esetén Wendy kiszámolta a számpárok tagjainak összegét, majd felírta az így kapott tíz számot a táblára:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

valamint letörölte a korábbi számokat. Határozzátok meg a letörölt számok szorzatának összes lehetséges értékét.

Eredmény. -144

Megoldás. Legyenek $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ a letörölt számok. A tíz felírt szám legkisebbje $a + b = 1$, a második legkisebb $a + c = 2$, a legnagyobb $d + e = 10$, a második legnagyobb pedig $c + e = 9$. Mivel a tíz számot összeadva

$$4(a + b + c + d + e) = 1 + 2 + 3 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 56,$$

ekkor $a + b + c + d + e = 14$ és $c = 14 - 1 - 10 = 3$ adódik. Következésképp $a = 2 - c = -1$, $b = 1 - a = 2$, $e = 9 - c = 6$, és $d = 10 - e = 4$. Könnyen ellenőrízhetjük, hogy ezek a számok valóban kielégítik valamennyi egyenletet. A keresett szorzat tehát $-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = -144$.

33. feladat Írjátok fel 333-at különböző páratlan pozitív egészek négyzetösszegeként.

Eredmény. $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2$

Megoldás. Tetszőleges páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul. Mivel 333-nak 5 a 8-as maradéka, az összeadandó négyzetszámok számának 8-as maradéka 5 kell, hogy legyen.

Mivel $1^2+3^2+5^2+7^2+17^2 > 333$, 17^2 már nem fordulhat elő az összegben, továbbá az összeadandó négyzetszámok száma sem lehet 5-nél több. Most vessünk egy pillantást a lehetséges összeadandók 5-ös maradékára: Kettő közülük osztható 5-tel (5^2, 15^2), három 1-et ad maradékul (1^2, 9^2, 11^2), és három pedig -1-et (3^2, 7^2, 13^2). Mivel 333-nak 3 az 5-ös maradéka (vagy másképp -2), két eset jöhet szóba. Először adjuk össze valamennyi 0 vagy 1 maradékú négyzetszámot; ez azonban nem 333-at eredményez. A másik lehetőség a -2 eléréséhez, ha összeadjuk az összes -1 maradékot adó számot, majd hozzáadunk egy 0 és egy 1 maradékot adót. Könnyű látni, hogy a 11^2-et vagy 15^2-et tartalmazó összegek túl nagyok, és a fennmaradó két lehetőségből csak a $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2$ lesz egyenlő 333-mal.

34. feladat Zsuzsi kiválasztott 3 valós számot: a, b, c, majd bevezette a $\odot$ műveletet: $x \odot y = ax + by + cxy$. Példaképpen kiszámította, hogy $1 \odot 2 = 3$ és $2 \odot 3 = 4$. Ezután észrevette, hogy létezik egy nullától különböző u valós szám, amelyre $z \odot u = z$ minden valós z szám esetén. Mennyi u értéke?

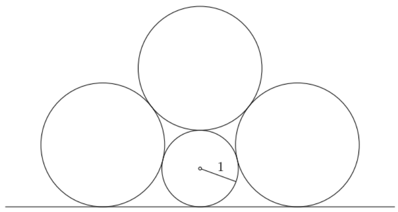
Eredmény. 4

Megoldás. $0 = 0 \odot u = bu$-ból $b = 0$ adódik (hiszen $u \neq 0$). Ez alapján újra felírva a feltételben szereplő egyenleteket:

$$a + 2c = 3,$$
$$2a + 6c = 4$$

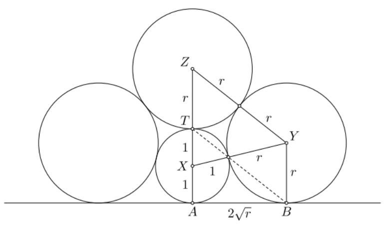
Ennek az egyenletrendszernek az egyértelmű megoldásai $a = 5$ és $c = -1$. Végezetül $1 = 1 \odot u = 5 - u$-ból $u = 4$ adódik.

35. feladat Egy egyenes és négy kör: három közülük egyaránt r sugarú, egy pedig 1 sugarú, az ábrának megfelelően helyezkedik el a síkon. Határozzátok meg r-et.



Eredmény. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Megoldás. Jelöljük az érintési pontokat és a középpontokat az ábrán látható módon.



Alkalmazva a Pitagorasz-tételt, kapjuk:

$$AB^2 = XY^2 - (BY - AX)^2 = (r+1)^2 - (r-1)^2 = 4r.$$

Mivel $BY \parallel TZ$ és $BY = TZ = r$, $BYZT$ paralelogramma és $BT = YZ = 2r$. ABT derékszögű háromszögben:

$$AB^2 + AT^2 = BT^2 \iff r + 1 = r^2.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek az egyetlen pozitív megoldása $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

36. feladat Valaki egy betonfalra graffitizett öt, nem feltétlenül különböző valós számot, melyek összege 20. Kincső kiszámította ezen öt szám közül kiválasztott számpárok összegének alsó egészrészét valamennyi lehetséges számpár esetén (tehát a nála nem nagyobb egész számok közül a maximálisat), így tehát tíz egész számot kapva eredményül. Végezetül összeadta az így kapott számokat. Mi a legkisebb érték, amit Kincső eredményül kaphatott?

Eredmény. 72

Megoldás. Legyen az öt falra írt szám rendre $a_1, \ldots, a_5$. Ekkor tehát a következő kifejezés minimumát keressük:

$$W = \sum_{1 \le i < j \le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor,$$

ahol $\lfloor x \rfloor$ jelöli x alsó egészrészét. Ezt a kifejezést ekvivalensen így alakíthatjuk:

$$\sum_{1 \le i < j \le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor = \sum_{1 \le i < j \le 5} (a_i + a_j) - \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\} = 80 - \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\},$$

ahol $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ jelöli x törtrészét. Így tehát célunk, hogy maximalizáljuk az alábbi összeget:

$$S = \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\}.$$

Ez tovább bontható két összegre:

$$\sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+1}\} + \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+2}\}$$

(legyen $a_6 = a_1$ és $a_7 = a_2$). Ekkor

$$S_1 = \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+1}\} = 40 - \sum_{i=1}^{5} \lfloor a_i + a_{i+1} \rfloor,$$
$$S_2 = \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+2}\} = 40 - \sum_{i=1}^{5} \lfloor a_i + a_{i+2} \rfloor$$

egyenletek következtében S_1 és S_2 egészek, ugyanakkor mind 5, 1-nél kisebb szám összege, azaz legfeljebb 4; tehát $S \le 8$. Ezért az eredeti összegre $W \ge 72$ adódik, ez pedig felvétetik, amennyiben $a_1, \ldots, a_5$ törtrésze rendre 0.4.

37. feladat Valamely n pozitív összetett egész szám esetén $\xi(n)$ jelölje n három legkisebb pozitív osztójának összegét, $\vartheta(n)$ pedig n két legnagyobb pozitív osztójának összegét. Találjátok meg az összes n összetett számot, amelyre $\vartheta(n) = (\xi(n))^4$ teljesül.

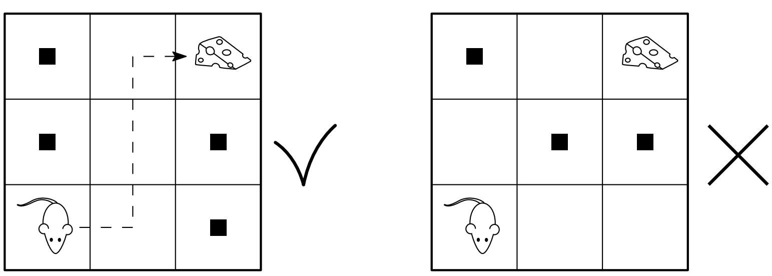
Eredmény. 864

Megoldás. n legkisebb pozitív osztója 1. Legyen n második- és harmadik legkisebb pozitív osztója rendre p és q (ekkor p prím és q prím vagy $q = p^2$). Ekkor $\xi(n) = 1 + p + q$ és $\vartheta(n) = n + n/p$. Így ha a feltételbeli egyenletet megszorozzuk p-vel, a feltétel a következő alakra hozható:

$$n(p+1) = p(1+p+q)^4.$$

Az egyenlet jobb oldala osztható $p+1$-gyel, és mivel p és $p+1$ relatív prímek, szükségképpen ekkor $p+1 \mid (1+p+q)^4$. Belátható, hogy ekkor $p+1$ szükségképpen osztja $1+p+q$-t, ezért $p+1 \mid q$. Ha $q = p^2$, akkor $p+1 \mid p$, ami lehetetlen. Ha pedig q prím, $p+1 \mid q$ csak $p = 2$ és $q = 3$ esetén lehetséges. Ebből $n = 2^5 \cdot 3^3$ adódik.

38. feladat Egy 3×3-as tábla bal alsó sarkában egy kisegér üldögél. A tábla jobb felső sarkában egy darabka sajt van, az egér ezt akarja megszerezni, de csak egyesével tud haladni a tábla szomszédos mezőin. (Csak a közös oldallal rendelkező négyzetek szomszédosak.) Hányféleképp tudunk úgy akadályokat elhelyezni a tábla valahány (esetleg nulla) korábban üres mezőjén úgy, hogy az egér továbbra is elérjen a sajthoz?



Eredmény. 51

Megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor beépítjük a középső mezőt. Ekkor az egér csak a széleken közlekedve közelítheti meg a sajtot, ezt pedig két útvonalon teheti meg, így csak az egyik útvonalon helyezhetünk el akadályokat ekkor. Mindegyik útvonalon három szabad mező van, ahol pedig $2^3 = 8$ féleképp helyezhetünk el akadályt, ezért ekkor $8 + 8 - 1 = 15$ féleképp hagyhatunk egérutat a sajtig (a -1 amiatt van, mert eredetileg kétszer számoltuk azt az esetet, amikor mindkét folyosót szabadon hagytuk).

Tekintsük most azt az esetet, amikor a középső mezőt szabadon hagyjuk. Ekkor pontosan akkor juthat el az egér a sajthoz, ha legalább egy szomszédos mező mind az egér, mind a sajt mellett szabadon marad. Számoljuk össze, hányféleképp tudjuk elállni az egér útját: Ha az egér kiinduló helyzetével szomszédos két mezőt lefoglaljuk, $2^4 = 16$ módon tölthetjük ki a maradékot (a középpontot ugyanis most szabadon hagyjuk). Hasonlóképp, 16 féleképp tölthetjük ki a táblát, ha mindkét mezőt elzárjuk a sajt szomszédságában. Kétszer számoltuk azokat az eseteket, amikor mind az egér, mind a sajt mindkét szomszédos mezőjét eltorlaszoltuk, így ekkor $16 + 16 - 4 = 28$ féleképp akadályozhatjuk meg, hogy az egér eljusson a sajtig. Az összes lehetőségek száma a középpont szabadon hagyásával viszont $2^6 = 64$, így a jó esetek száma $64 - 28 = 36$.

Összevetve a két esetet összesen tehát $15 + 36 = 51$ féleképp helyezhetjük el az akadályokat.

39. feladat Valamennyi (x, y) valós számpár közül, amely kielégíti a következő egyenletet:

$$x^2y^2 + 6x^2y + 10x^2 + y^2 + 6y = 42,$$

legyen (x_0, y_0) olyan, melyre x_0 minimális. Mennyi lehet y_0?

Eredmény. -3

Megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenlet mindkét oldalához 10-et hozzáadva, az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 6y + 10) = 52.$$

Az így kapott egyenlet bal oldala felírható két másodfokú függvény szorzataként: $f(x) = x^2 + 1$ és $g(y) = y^2 + 6y + 10$. Mivel mindkét függvény képe felfele nyíló parabola, továbbá $f(-x) \cdot g(y) = f(x) \cdot g(y)$, így x_0 minimalitása f maximalitását eredményezi, amiből adódóan $g(y_0)$ minél kisebb kell, hogy legyen (hiszen $f(x)g(y)$ pozitív konstans). $g(y) = (y + 3)^2 + 1$ minimuma pedig az $y_0 = -3$ pontban van.

40. feladat Legyen $\triangle ABC$ derékszögű háromszög, melynek C a derékszögű csúcsa. Legyenek D és E belső pontjai az AB szakasznak úgy, hogy a D pont A és E között helyezkedik el, továbbá CD és CE harmadolják az $ACB\sphericalangle$ szöget. Amennyiben $DE : BE = 8 : 15$, találjuk meg $\tan ABC\sphericalangle$ értékét.

Eredmény. $\frac{4\sqrt{3}}{11}$

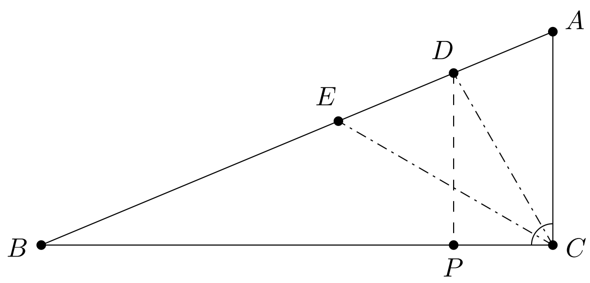
Megoldás. CE felezi $DCB\sphericalangle$ szöget, így a szögfelezőtétel értelmében $\frac{CD}{CB} = \frac{DE}{EB} = \frac{8}{15}$. Alkalmazva a szinusztételt $\triangle CDB$ háromszögre, $\frac{CD}{CB} = \frac{\sin CBD\sphericalangle}{\sin CDB\sphericalangle} = \frac{\sin B}{\sin(120^\circ - B)}$ adódik. Így,

$$\frac{15}{8} = \frac{\sin(120^\circ - B)}{\sin B} = \frac{\sin 120^\circ \cos B - \cos 120^\circ \sin B}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot B + \frac{1}{2}.$$

Következésképp,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cot B = \frac{15}{8} - \frac{1}{2} = \frac{11}{8}.$$

Ebből pedig $\tan B = \frac{4\sqrt{3}}{11}$. Legyen P olyan pont BC-n, melyre $DP \parallel AC$. Ekkor ABC és DBP háromszögek hasonlók, $AC : BC = DP : BP$.



Mivel CE a BCD háromszög egy szögfelezője, a szögfelező tétel értelmében $CD : CB = ED : EB = 8 : 15$. Továbbá, $DP = CD \cdot \sin 60^\circ$ és $BP = CB - CP = CB - CD \cdot \cos 60^\circ$, ezért

$$\frac{DP}{BP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}CD}{\frac{15}{8}CD - \frac{1}{2}CD} = \frac{4\sqrt{3}}{11}.$$

41. feladat Máté a következő játékot játssza: Egy egész számot kell kitalálnia 1 és N között, beleértve a végpontokat. Minden lépésben megnevez egy számot; ha ez épp a kitalálandó szám, a játék véget ér, máskülönben elárulják neki, hogy a tippje nagy vagy kicsi volt. Amennyiben a tippje túl nagy volt, be kell fizetnie 1 €-t, ha pedig túl kicsi, úgy a fizetendő összeg 2 € (pontos találat esetén nem kell fizetnie). Melyik az a legnagyobb N egész, amelyre teljesül, hogy Máté mindig be tudja a játékot fejezni legfeljebb 10 € költéssel?

Eredmény. 232

Megoldás. Jelöljük N_k-val a legnagyobb olyan N számot, melyre teljesül, hogy legfeljebb k euró felhasználásával Máté mindig megtalálja a keresett számot az $1, \ldots, N$ számok közül; tehát a célunk N_{10} meghatározása. Világos, hogy $N_0 = 1$ és $N_1 = 2$. Azt fogjuk megmutatni, hogy az N_k sorozat további tagjait az alábbi rekurzív összefüggés alapján határozhatjuk meg:

$$N_{k+2} = N_{k+1} + N_k + 1.$$

Valóban, ha Máténak $k + 2$ eurója van és tippel egy számra, akkor vagy eltalálja, vagy túl nagy számot tippel (ebben az esetben $k + 1$ eurója marad és egy legfeljebb N_{k-1} hosszú sorozatban van a kitalálandó szám) vagy pedig a tippje túl kicsi (ekkor k eurója marad egy N_k hosszú sorozatra). Ez a megfigyelés egyúttal módot is ad Máténak, hogyan tippeljen: az $1, \ldots, N_{k+1}$ sorozatból $N_k + 1$-et tippeli meg; ekkor a rekurzió valóban a legnagyobb N-hez vezet.

Így hát kiszámítva a keresett számot, $N_{10} = 232$ adódik.

42. feladat a, b, c pozitív egészek, hogy $a \geq b \geq c$ és

$$a + b + c + 2ab + 2bc + 2ca + 4abc = 2017.$$

Találjátok meg a összes lehetséges értékét.

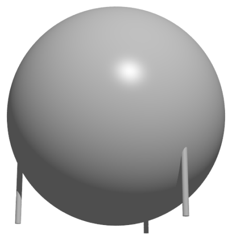
Eredmény. 134

Megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenletet megszorozva 2-vel, majd hozzáadva 1-et, a bal oldal szorzattá alakítható:

$$1 + 2a + 2b + 2c + 4ab + 4bc + 4ca + 8abc = (2a + 1)(2b + 1)(2c + 1).$$

Az egyenlet jobb oldala pedig $2 \cdot 2017 + 1 = 4035$ lesz. Ennek felírva a prímtényezős felbontását: $4035 = 3 \cdot 5 \cdot 269$, és mivel $a \geq b \geq c \geq 1$, szükségképpen $2a + 1 = 269$, $2b + 1 = 5$, és $2c + 1 = 3$. Ebből pedig $a = 134$.

43. feladat Egy földönkívüliek által használt űrhajónak tökéletes gömb alakja van, melynek sugara R, illetve három párhuzamos, 1 űm (űrlény méter) hosszú, elhanyagolható szélességű egyenes rúd támasztja függőlegesen. Ezeknek a lábaknak az alsó vége egy 9 űm oldalhosszúságú szabályos háromszöget határoz meg, és ha az űrhajó sík terepen nyugszik, a gömb pont érinti a talajt. Mekkora az űrhajó R sugara (űrlény méterben kifejezve)?



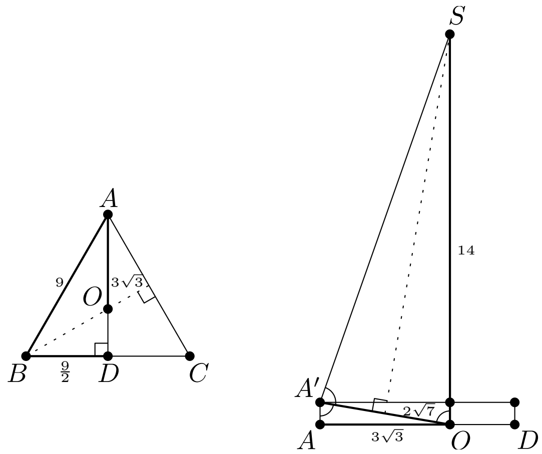
Eredmény. 14

Megoldás.

Jelölje a lábak alsó végeit rendre A, B, C, felső végeiket pedig A', B', C'. Legyen O az ABC háromszög középpontja (azaz a pont ahol a gömb érinti a földet), legyen S az űrhajó középpontja és $D = AO \cap BC$. Ekkor $AO = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$, $AA' = 1$ és $SO = SA' = R$. Pitagorasz tétele szerint

$$(SO - AA')^2 + AO^2 = SA'^2 \quad \text{azaz} \quad (R - 1)^2 + 27 = R^2,$$

tehát $R = 14$ űm.



44. feladat Négy testvér, Ádám, Balázs, Csilla és Dani, rengeteg mogyorót gyűjtöttek össze az erdőben. Éjjel Ádám mókuséhesen ébredt, így nem bírta megállni, hogy egyen néhányat a mogyorókból. Miután összeszámolta a mogyorókat, arra jutott, hogy ha eggyel kevesebb mogyoró lenne, négy egyenlő részre lehetne osztani a maradékot. Így tehát félretett egyet, majd megette a részét (vagyis a maradék egynegyedét); majd visszafeküdt aludni. Az éjszaka folyamán később Balázs is felébredt a gyomra korgására, és ő is úgy számolta, hogy egy mogyorót félretéve elnegyedelheti a maradékot, majd megette a rá eső negyedet. Az éjszaka folyamán aztán ugyanígy járt el Csilla és Dani is. Miután mind felkeltek reggel, újfent megszámolták a megmaradt mogyorókat, és megint csak azt fedezték fel, hogy egyet félretéve a maradékot fel tudják osztani négy egyenlő részre. Minimálisan hány mogyorót gyűjtöttek össze a testvérek?

Eredmény. 1021

Megoldás. Adjunk hozzá három képzeletbeli mogyorót az összegyűjtöttekhez még lefekvés előtt (ezeket nem eszik meg a testvérek). Ekkor az összes mogyoró száma osztható 4-gyel. Vegyük észre, hogy miután Ádám belakott, a maradék mogyorók száma is 4 többszöröse, a képzeletbeli mogyorókat is beleszámolva. Ezt a gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy a mogyorók száma lefekvéskor $k \cdot 4^5$ valamilyen k pozitív egészre, viszont ebbe beleszámoltuk a képzeletbeli mogyorókat is.

Itt $k = 1$-et behelyettesítve kapjuk hogy a mogyorók száma $4^5 - 3 = 1021$ volt.

45. feladat Egy pozitív egész számot *kellemesnek* nevezünk, ha minden prímosztója 2, 3, és 7 közül kerül ki. Hány kellemes szám van az $1000, 1001, \ldots, 2000$ számok között?

Eredmény. 19

Megoldás. Először vegyük észre, hogy ha x olyan valós szám, melyre $x > 1/2$, akkor 2-nek pontosan egy egész kitevős hatványa esik a félig nyílt $[x, 2x)$ intervallumba.

A továbbiakban nevezzünk egy pozitív egész számot *több mint kellemesnek*, ha minden prímosztója 2 vagy 3. A $[x, 2x)$ intervallumba eső több mint kellemes számok számának meghatározását a következő módon végezzük: Először is, $[x, 2x)$ intervallumban pontosan egy 2-hatvány van. Továbbá $[x, 2x)$ intervallumban legfeljebb egy 3-mal osztható de 9-cel nem osztható több mint kellemes szám van, legyen ez c_1 ha létezik. Ekkor $c_1/3$ az egyetlen 2-hatvány az $[x/3, 2x/3)$ intervallumban, feltéve, hogy $x > 1/6$. Ilyen módon keressük c_2 több mint kellemes számot, amely osztható 3^2-nel, de nem osztható 3^3-nal, majd ezt az eljárást folytatjuk, amíg $[x/3^k, 2x/3^k) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ valamely k-ra, ahol $x < 3^{-k}/2$. Ebből következően a több mint kellemes számok száma az $[x, 2x)$ intervallumban 1 + a legnagyobb k, amire $3^k < 2x$; jelöljük ezt a számot $\ell_3(x)$-szel.

Hasonló módon határozzuk meg a $[x, 2x)$ intervallumbeli kellemes számok számát is: Ugyanis keressünk több mint kellemes számokat a $[x, 2x)$, $[x/7, 2x/7)$, $[x/7^2, 2x/7^2)$ stb. intervallumokban. Ezt úgy tudjuk összeszámlálni, mint $\ell_3(x) + \ell_3(x/7) + \ell_3(x/7^2) + \ldots$, ezt az összeget $\ell_7(x)$-nek jelölve.

Végül, mivel 2000 nem kellemes szám, a kellemes számok száma a megadott intervallumon:

$$\ell_7(1000) = \ell_3(1000) + \ell_3(1000/7) + \ell_3(1000/49) + \ell_3(1000/343) = 7 + 6 + 4 + 2 = 19.$$

46. feladat Decimus császár betiltotta a 0 számjegy használatát (amit elődje, Nullus vezetett be) és bevezette helyette a D szimbólumot, ami a tízes számjegynek felel meg. Minden pozitív egész szám egyértelműen kifejezhető így, például

$$3\text{DD}6 = 3 \cdot 1000 + 10 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 4106.$$

Az átállás megkönnyítése végett összeírtak egy listát, ami minden egész számot tartalmaz 1-től DDD-ig. Hányszor szerepel az új számjegy, D a listán? Ha egy számnak több D számjegye is van, azt annyiszor számoljuk, ahányszor előfordul.

Eredmény. 321

Megoldás. Figyeljük meg, hogy a k-jegyű számok (Decimus jelölése szerint) az alábbi módon rendezhetők sorba:

$$\underbrace{1\ldots1}_{k},\ldots,\underbrace{\mathrm{D}\ldots\mathrm{D}}_{k}.$$

Így tehát ahhoz, hogy D előfordulásait sorra vegyük a k-jegyű számok körében, először összecsoportosítjuk azokat a számokat, melyek első számjegye D, majd a második, stb., k-adik helyen. Minden helyiértékhez 10^{k-1} ilyen k-jegyű szám van, hiszen ennyiféleképp tölthetjük fel a maradék $k-1$ helyet a $1,\ldots,9,\mathrm{D}$ számjegyekkel. Mivel minden D-t tartalmazó számnál az összes előfordulást számoljuk, így nem okoz gondot, hogy ezeket a számokat minden megfelelő csoportban számon tartjuk, így $k\cdot 10^{k-1}$ darab D-t számolunk össze a k-jegyű számok körében.

Ezért az $1,\ldots,\mathrm{DDD}$ számok között D összes előfordulásainak száma $1\cdot 10^0+2\cdot 10^1+3\cdot 10^2=321$.

47. feladat Az $ABCD$ négyzet beírt köre ω, ez a négyzet oldalait a W, X, Y, Z pontokban érinti, melyek rendre az AB, BC, CD, DA oldalakon helyezkednek el. Legyen E egy belső pontja az ω kör W és X közé eső (rövidebb) ívének, és legyen F a BC és EY egyenesek metszéspontja. Feltéve, hogy $EF=5$ és $EY=7$, határozzátok meg FYC háromszög területét.

Eredmény. 21

Megoldás. Egészítsük ki CDF háromszöget $CDTF$ téglalappá és legyen M a TF szakasz felezőpontja. A Thalész-tétel következményeképp $WEF\sphericalangle=90°$, továbbá $WMF\sphericalangle=90°$, így $WEFM$ húrnégyszög; legyen ξ a köréírt köre. Ekkor Y pont ξ-re vonatkozó hatványa

$$EY\cdot FY=MY\cdot WY.$$

FYC háromszög területe megegyezik $CDTF$ téglalap területének a negyedével, amit ki tudunk számolni, mint

$$CF\cdot CD=WY\cdot MY=84.$$

Így a keresett terület 21.

48. feladat

$$WE\cdot LIKE=NABOJ$$

A fenti egyenletben különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek. Továbbá tudjuk, hogy $\mathrm{D}(WE)=11$, $\mathrm{D}(LIKE)=23$ és $\mathrm{D}(NABOJ)=19$, ahol $\mathrm{D}(n)$ tetszőleges pozitív egész n esetén n számjegyeinek összegét jelöli. A három szám egyike sem nullával kezdődik. Adjátok meg az ötbetűs $NABOJ$ szó értékét.

Eredmény. 60 724

Megoldás. Mivel a fenti egyenletben tíz különböző betű szerepel, a $0,1,\ldots,9$ számjegyek mindegyike előfordul. Az összes számjegy összege 45. Ha összeadjuk a három szó számjegyeinek összegét, $11+23+19=53$-at kapunk, ami megegyezik $45+E$-vel. Ez $E=8$-hoz vezet, amiből, $J=4$ következik. A $\mathrm{D}(WE)=11$ feltételből $W=3$. Most figyeljük meg, hogy $38\cdot 3000>100000$, ezért szükségképpen $L=1$ vagy $L=2$. Ha $L=2$, akkor $LIKE$ számjegyeinek összegéből $I+K=13$ adódik, így (I,K) vagy (K,I) rendezett pár értéke $(4,9)$, $(5,8)$, vagy $(6,7)$ valamelyike. Ugyanakkor a 4-es és 8-as számjegyekhez már rendeltünk értéket, így csak a $(6,7)$ jöhet szóba, ekkor viszont a $LIKE$ szó értéke túl nagy ahhoz, hogy a szorzat ötjegyű legyen. Következésképpen tehát $L=1$. Ekkor viszont $I+K=14$, így (I,K) vagy (K,I) egyenlő kell, hogy legyen az $(5,9)$ számpárral. Könnyen kiszámítható, hogy csak az $(I,K)=(5,9)$ ad jó megoldást. Tehát $38\cdot 1598=60\,724$ a feladatbeli egyenlet megoldása, azaz $NABOJ=60\,724$.

49. feladat Találjátok meg az összes pozitív egész n számot, melynek valódi osztóinak s összege 63.

d valódi osztója n-nek, ha osztója n-nek és $1<d<n$ teljesül.

Eredmény. 56, 76, 122

Megoldás. Könnyen látszik, hogy nem lehet megoldás, ha n-nek legalább 3 prímosztója van, azaz n-nek legfeljebb két különböző prím lehet osztója, legyenek ezek p_1 és p_2, ekkor egy lehetséges megoldás $n=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}$ alakú. Ha $a_1=a_2=2$, továbbá $p_1=2$, $p_2=3$, úgy $s=54$, más prímosztók esetén pedig ekkor $s>63$. Ezért legalább az egyik prímosztó kitevőjének kisebbnek kell lennie 2-nél. Ha $a_1=a_2=1$, akkor $p_1+p_2=63$, ez pedig $p_1=2$ és $p_2=61$ esetén teljesülhet (vagy fordítva). Ekkor tehát $n=2\cdot 61=122$ megoldást ad.

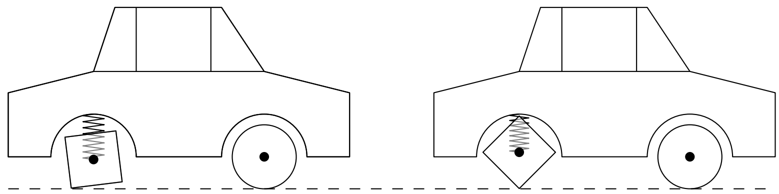
Ha pedig $n=p_1^{a_1}\cdot p_2$ feltéve, hogy $a_1>1$:

$$\begin{aligned} s &= p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{a_1}+p_2+p_1p_2+p_1^2p_2+\cdots+p_1^{a_1-1}p_2 \\ &= (p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{a_1-1})(1+p_2)+p_1^{a_1}+p_2 \\ &> p_1^{a_1}+p_2. \end{aligned}$$

Miután $p_2 \geq 2$, a 61-nél kisebb prímhatványokat kell megvizsgálni. Ezek pedig 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 3^2, 3^3, 5^2, 7^2. Ha $p_1 = 2$ és $a_1 = 2$, $p_2 = 19$-et kapunk, $p_1 = 2$ és $a_1 = 3$ esetében pedig $p_2 = 7$ adódik. Minden más eset eredményeképp p_2 nem lenne prím. Ez tehát további két megoldáshoz vezet: $n = 2^2 \cdot 19 = 76$ és $n = 2^3 \cdot 7 = 56$.

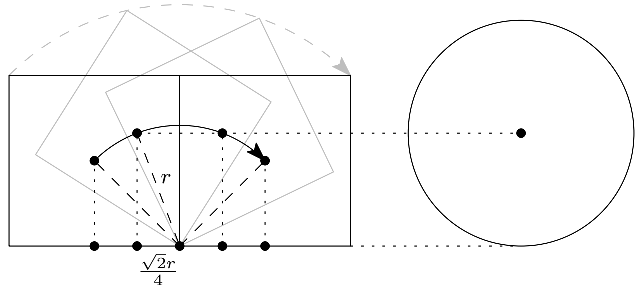
Végül ha $n = p_1^{a_1}$ és $a_1 > 1$, könnyen látszik, hogy $s = p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{a_1-1} \neq 63$. Minden lehetséges esetet összevetve, a következő három szám elégíti ki a feltételeket: $n_1 = 56$, $n_2 = 76$ és $n_3 = 122$.

50. feladat Robinak menő kocsija van négyzet alakú hátsó kerekekkel (az első kerekeknek a szokásoknak megfelelően kör alakjuk van). Egy ilyen autót meglehetősen kényelmetlen lenne vezetni, de Robi kitűnő lengéscsillapítóról gondoskodott a hátsó kerekek miatt, így az autó a sík terepen haladva végig a talajjal párhuzamos helyzetű maradhat. A hátsó kerekek oldalhossza 40 cm. Mekkora az elülső kerekek sugara (cm-ben kifejezve), ha tudjuk, hogy amikor az autó egyenletes sebességgel halad előre, a hátsó kerekek tengelye pontosan annyit tartózkodik az első kerekek tengelye fölött, mint alatt?



Eredmény. $10\sqrt{7}$

Megoldás. Figyeljük meg, hogy a négyzet középpontja mindig egy negyedkört ír le, amíg egy csúcsa mentén egyik oldaláról a másikra átfordul.



Ha az autó egyenletesen halad előre, ez a negyedkörív lesz a hátsó tengely magasságfüggvényének grafikonja az idő függvényében. Ezért a kör alakú kerék középpontja annyit halad előre vízszintesen, mint a négyzet alakú kerék oldalának a fele, ami alatt a négyzet egy oldaláról a szomszédos oldalára fordul. Legyen r ennek a negyedkörívnek a sugara; így ekkor az első kerék középpontjának útja $\sqrt{2}r/2$. Így az első kerék középpontjának magassága a Pitagorasz-tétel szerint:

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}r\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{8}}r.$$

Behelyettesítve $r = 20\sqrt{2}$-t adódik az eredmény.

51. feladat A jövő városa szabályos 2017-szög alakú. A város csúcsaiban 2017 metrómegálló van, melyeknek $1, 2, \ldots, 2017$ a nevei, az óramutató járásával ellentétesen, a város térképét nézve. Két metróvonal van: *Oldal* és *Átló*. Az Oldal nevű metróvonal közvetlenül közlekedik a megállóból b megállóba (de visszafele nem) pontosan akkor, ha $a - b + 1$ osztható 2017-tel, továbbá egy megállót 1 perc alatt tesz meg. Az Átló nevű metróvonal közvetlenül elmegy a megállóból b-be pontosan akkor, ha $2b - 2a + 1$ osztható 2017-tel, és egy ilyen megálló megtétele 15 percig tart. Tibi nagyon szeret metróval utazni. Kiindulva az 1-es megállóból, el szeretne jutni egy n jelzésű megállóba, ami a következőt teljesíti: ha minden megállóhoz tekintjük az 1-ből odavezető, legkisebb összidejű utat, akkor ezek közül az n-be vivő a lehető leghosszabb. Adjátok meg az összes ilyen n lehetséges úticél megállóhelyet Tibi számára.

Eredmény. 1984, 1985

Megoldás. Vegyük észre, hogy $n \geq 1009$ esetén Tibi az Átló vonalat egyszer, valamint az Oldal vonalat $n - 1009$ alkalommal n megállóba tud jutni $15 + (n - 1009)$ perc alatt. Másrészt ha csak az Átló vonalat használja, $2 \cdot (2018 - n) \cdot 15$ perc alatt juthat el n-be. Kevesebb idő alatt lehetetlen n-be metrózni: ha ugyanis az útvonal legalább két Átló-beli megállót és legalább egy Oldal-belit tartalmaz, az időt lerövidíthetjük az Átló helyett az Oldal használatával.

Most meg szeretnénk találni azon $n \geq 1009$ számo(ka)t, mely(ek)re $M(n) = \min\{n - 994, 30 \cdot 2018 - 30n\}$ maximális.

$$n - 994 \leq 30 \cdot 2018 - 30n \iff n \leq \frac{30 \cdot 2018 + 994}{31} = \frac{31 \cdot 2018 - 1024}{31} = 2018 - 33 - \frac{1}{31} = 1985 - \frac{1}{31}.$$

Így ha $n \leq 1984$: $M(n) = n - 994 \leq 1984 - 990 = 990$, ha pedig $n \geq 1985$: $M(n) = 30 \cdot (2018 - n) \leq 30 \cdot (2018 - 1985) = 990$, azaz ekkor a keresett legnagyobb minimum 990, és ez $n = 1984$ és $n = 1985$ esetén vétetik fel.

Meg kell még gondolni, hogy ha $n < 1009$, akkor el tudunk jutni n-be 990 percnél kevesebb idő alatt: $n \leq 990$ esetén Tibi $n-1$ perc alatt n-be ér csak az Oldal használatával, $n \geq 991$ esetén pedig $15 \cdot (2 \cdot (1009 - n) + 1) \leq 15 \cdot 37 = 555$ perc alatt csak az Átló használatával.

52. feladat Legyen $f(n)$ azon n jegyű pozitív egészek száma, melyek számjegyeinek összege 5. Számítsátok ki, hogy az $f(1), f(2), \ldots, f(2017)$ számok közül mennyi végződik az 1-es számjegyre.

Eredmény. 202

Megoldás. Minden n-jegyű szám, mely számjegyeinek összege 5, kölcsönösen egyértelműen kifejezhető, mint 5 darab 1-es n helyre való elosztása úgy, hogy egy helyre több 1-es is kerülhet. Az első helyre azonban szükséges, hogy legalább egy 1-es kerüljön, így a feladat valójában 4 darab 1-es n helyre való kiosztásával ekvivalens. Így tehát azon n-jegyű számok száma, melyek számjegyeinek összege 5 az ismétléses kombináció képlete szerint:

$$f(n) = \binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}.$$

Ezzel meghatároztuk $f(n)$ értékét.

Ezután meghatározzuk az 1-esre végződő $f(n)$-eket. Ha n öttel osztva 0-t, 2-t, 3-at vagy 4-et ad maradékul, akkor n, $n+3$, $n+2$ vagy $n+1$ osztható 5-tel. Mivel 24 és 5 relatív prímek, ekkor $f(n)$ szintén osztható lesz 5-tel, azaz 0-ra vagy 5-re végződik. Emiatt $f(n)$ csak úgy végződhet 1-esre, ha n-nek az ötös maradéka 1. Most szorozzuk meg $f(n)$-et 3-mal:

$$3f(n) = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{8}.$$

Nyilván $f(n)$ utolsó számjegye pontosan akkor 1, ha $3f(n)$ utolsó számjegye 3. Mivel $f(n)$ egész, nyilván $(n+3)(n+2)(n+1)n$ minden n-re osztható 8-cal. Éppen ezért $(n+3)(n+2)(n+1)n$-nek a 40-es maradékát fogjuk vizsgálni (ami 5 és 8 legkisebb közös többszöröse). Írjuk fel n-et $40k + r$ alakban, ahol $r \in \{1, 6, 11, 16, 21, 26, 21, 36\}$.

Ha $n = 40k + 1$, akkor

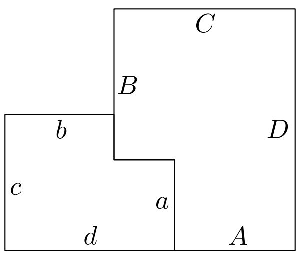
$$3f(n) = \frac{(40k+1)(40k+2)(40k+3)(40k+4)}{8} = (40k+1)(20k+1)(40k+3)(10k+1),$$

ennek pedig utolsó jegye a 3. Hasonló módon fogjuk $3(f)$ utolsó számjegyét kiszámolni a többi esetben is:

n	$3f(n)$ egszerűsített alakban	$3f(n)$ utolsó számjegye
$40k+1$	$(40k+1)(20k+1)(40k+3)(10k+1)$	3
$40k+11$	$(40k+11)(10k+3)(40k+13)(20k+7)$	3
$40k+21$	$(40k+21)(20k+11)(40k+23)(10k+6)$	8
$40k+31$	$(40k+31)(10k+8)(40k+33)(20k+17)$	8
$40k+6$	$(20k+3)(40k+7)(10k+2)(40k+9)$	8
$40k+16$	$(10k+4)(40k+17)(20k+9)(40k+19)$	8
$40k+26$	$(20k+13)(40k+27)(10k+7)(40k+29)$	3
$40k+36$	$(10k+9)(40k+37)(20k+19)(40k+39)$	3

Látható tehát, hogy 40 maradékosztályai közül 5-re végződik 3-asra $3f(n)$ (és így 1-esre $f(n)$). Ebből adódóan 1-től 2000-ig $50 \cdot 40 = 200$ olyan $f(n)$ van, amely 1-esre végződik. Továbbá pedig $2001 = 50 \cdot 40 + 1$ és $2011 = 50 \cdot 40 + 11$ végződnek még 1-esre. Vagyis $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(2017)$ számok közül 202-nek 1 az utolsó jegye.

53. feladat Az ábrán két, középpontosan hasonló hatszög látható, melyek bizonyos oldalhosszai rendre a, b, c, d és A, B, C, D. Ha ezt a két alakzatot az ábrának megfelelően összeillesztjük, egy, a két kisebb hatszöghöz hasonló hatszöget kapunk (mely irányítástartóan hasonló a jobb oldali hatszöghöz). Találjátok meg a $p = \frac{A}{a}$ arányszámot.



Eredmény. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Megoldás. Nevezzük a továbbiakban a három hasonló hatszöget kis, közepes, illetve nagy hatszögeknek értelemszerűen. A kis és középső hatszögek hasonlósága alapján $p = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$. Továbbá könnyen látható, hogy $D = B + a$ és

$C+b=A+d$. A középső és a nagy hatszögek hasonlósága miatt $\frac{B}{A}=\frac{C}{c}$. Így hát $\frac{B}{A}=\frac{C}{c}=p$, aminek következtében $B=p^2a$ adódik. Hasonló módon következik $\frac{b}{a}=\frac{C}{B}=\frac{D}{C}$, és így

$$\frac{d}{a}=\frac{d}{c}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}=p^3.$$

Behelyettesítve a kapott eredményeket a $D=B+a$ egyenletbe $pd=p^2a+a=a(p^2+1)$ egyenlethez jutunk, amiből $p^4=p^2+1$ adódik. $p^4-p^2-1=0$ egyenlet egyetlen pozitív megoldása $p^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ezért $p=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ a keresett arányszám.

54. feladat Határozzuk meg az összes (a,b), pozitív egész számpárt, ha az alábbi egyenletek

$$x^2-ax+a+b-3=0,$$
$$x^2-bx+a+b-3=0$$

minden gyöke szintén pozitív egész.

Eredmény. $(2,2)$, $(6,6)$, $(7,8)$, $(8,7)$

Megoldás. Legyenek k és l az első egyenlet gyökei, míg m és n a második egyenleté. Viète-formulák szerint

$$k+l=a,\qquad m+n=b, kl=mn=a+b-3$$

. Ezeket összevetve a következő egyenletet kapjuk:

$$kl+mn=2a+2b-3=2k+2l+2m+2n-3,$$

ami pedig ilyenképp alakítható szorzattá:

$$(k-2)(l-2)+(m-2)(n-2)=2.$$

Világosan látszik, hogy ha (k,l,m,n) megoldás, k és l vagy m és n felcserélésével újabb megoldásokhoz jutunk. Az ilyen módon egymásba vihető megoldások közül a továbbiakban csak egyet sorolunk fel. Ha mind $(k-2)(l-2)$, mind pedig $(m-2)(n-2)$ pozitív, $(k,l,m,n)=(3,3,3,3)$ az egyedüli megoldás. Ha valamelyik összeadandó nulla, $(k,l,m,n)=(2,6,3,4)$, $(3,4,2,6)$ további megoldások.

Vizsgáljuk végül azt az esetet, amikor valamely összeadandó negatív. Ez akkor fordulhat elő, ha k, l, m és n közül valamelyik 1. Tegyük fel, hogy $k=1$. Ekkor $l=mn$, és az egyenlet így módosul:

$$-l+2+(m-2)(n-2)=-mn+2+mn-2m-2n+4=-2m-2n+6=4.$$

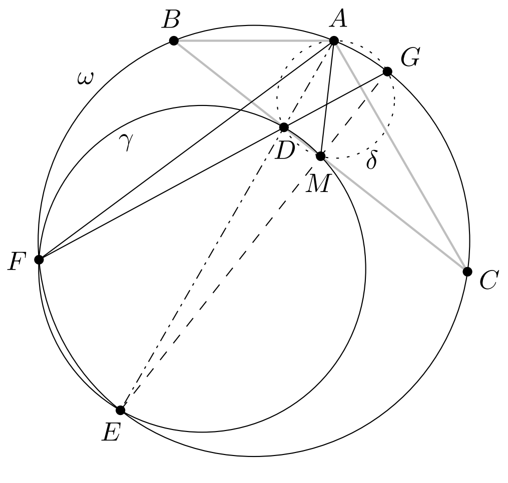
Ez $m+n=2$-höz vezet, ami csak $m=n=1$ esetén lehetséges, $l=mn=1$. Ekkor $(k,l,m,n)=(1,1,1,1)$ újabb megoldást ad.

Így tehát $(a,b)=(k+l,m+n)$ lehetséges értékei $(6,6)$, $(8,7)$, $(7,8)$, $(2,2)$. Könnyedén leellenőrízhetjük, hogy mindegyik (a,b) valóban kielégíti a feltételeket.

55. feladat ABC háromszög köréírt köre ω, a háromszög oldalai pedig $AB=3$, $BC=7$, és $AC=5$. Az A-nál lévő szög szögfelezője a BC oldalt a D pontban metszi, míg az ω kört E-ben. Legyen γ a DE-re mint átmérőre emelt kör. Az ω és γ körök egymást E és F pontokban metszik. Számítsátok ki az AF szakasz hosszát.

Eredmény. $\frac{30}{\sqrt{19}}=\frac{30\sqrt{19}}{19}$

Megoldás. A koszinusztételből könnyen kiszámíthatjuk, hogy $\cos BAC\sphericalangle=-\frac{1}{2}$, így $BAC\sphericalangle=120°$. A kerületi szögek tételéből $EBC\sphericalangle=ECB\sphericalangle=60°$. Így BCE szabályos háromszög. Ekkor nyilván BC oldalfelező merőlegese átmegy E-n. Legyen G ennek az egyenesnek ω-val vett másik metszéspontja.



A Thalész-tételt alkalmazva ω és γ körökön $GFE\sphericalangle = 90°$ és $DFE\sphericalangle = 90°$. Ekkor viszont F, D és G pontok egy egyenesre kell, hogy essenek. Ismét a kerületi szögek tételét ω-ra alkalmazva $BGF\sphericalangle = BEG\sphericalangle = \frac{1}{2}BEC\sphericalangle = 30°$ adódik, és hasonlóképp $GFC\sphericalangle = 30°$. Tehát FG felezi BFC szöget, így pedig

$$\frac{BF}{CF} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}.$$

Legyen $BF = 5x$, $CF = 3x$. BCF háromszögre alkalmazva a koszinusztételt a $49 = 25x^2 + 9x^2 - 30\cos 60°$ egyenletet kapjuk, aminek megoldása $x = \frac{7}{\sqrt{19}}$.

Végezetül $BFCA$, kiszámíthatjuk:

$$AF = \frac{AB \cdot FC + BF \cdot AC}{BC} = \frac{30x}{7} = \frac{30}{\sqrt{19}} = \frac{30\sqrt{19}}{19}.$$

56. feladat Határozzátok meg az (x, y, z) rendezett számhármasok számát, ahol x, y, z olyan 2017-nél kisebb nemnegatív egész számok, melyekre

$$(x + y + z)^2 - 704xyz$$

osztható 2017-tel.

Eredmény. $2017^2 + 1 = 4\,068\,290$

Megoldás. $2017 \mid (x + y + z)^2 - 704xyz$ ekvivalensen $(x + y + z)^2 \equiv 704xyz \pmod{2017}$. Vegyük észre, hogy 2017 prím. Így tehát minden $a < 2017$ számhoz pontosan egy olyan, a^{-1}-nek jelölt 2017-nél kisebb pozitív egész létezik, amelyre $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{2017}$.

Először határozzuk meg az összes (x, y, z) számhármast, melyre x, y és z mind nullától különböznek. Legyen $y = kx$ és $z = lx$ (ilyen k és l mindig létezik: $k \equiv x \cdot y^{-1}$, $l \equiv z \cdot x^{-1}$). A feltétel ekkor atírható, mint $(x + kx + lx)^2 \equiv 704klx^3 \pmod{2017}$, és $(x^{-1})^2$-tel szorozva $(1 + k + l)^2 \equiv 704klx$ adódik. A kongruenciát megszorozva $(704kl)^{-1}$-zel:

$$x \equiv (704kl)^{-1}(1 + k + l)^2 \pmod{2017}.$$

Ebből minden k, $l \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$ esetén következik, hogy pontosan egy x létezik, ami kielégíti az állítás feltételeit (minden lépés ekvivalens volt). Ilyen k-t és l-t tehát 2016^2 féleképp választhatunk. Tudjuk, hogy $x \neq 0$. Ez pontosan akkor lehetséges, ha $k + l \equiv 2016 \pmod{2017}$. 2015 ilyen (k, l) pár van, minden nullától különböző k-ra 2016-ot kivéve. Így tehát $2016^2 - 2015$ megfelelő (x, y, z) számhármas van, ha $xyz \neq 0$.

Ha $x = 0$ és y illetve z nullától különböznek, akkor a feltételből $(y + z)^2 \equiv 0 \pmod{2017}$, amivel ekvivalens $y \equiv -z \pmod{2017}$. Ekkor tehát 2016 megfelelő $(0, y, z)$ hármas található. Hasonlóan 2016 számhármas ad megoldást rendre $y = 0$ és $z = 0$ esetében is. Végül pedig ha x, y, z közül valamelyik kettő nullával egyenlő, a harmadiknak is nullának kell lennie. Ez tehát egy újabb megoldást ad: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Nincs más hátra, mint összeszámlálni a megoldásokat:

$$2016^2 - 2015 + 3 \cdot 2016 + 1 = 2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 + 1 = 2017^2 + 1.$$

57. feladat Juli és Tamás játszanak egy szabályos dobókockával, amelynek két oldala pirosra, két oldala zöldre és két oldala kékre van festve. Felváltva dobnak a kockával, addig amíg valamelyikük nem látta már mindhárom színt a saját körei alatt. Ez a játékos győz. Mekkora a valószínűsége, hogy Juli győz, ha ő dob először?

Eredmény. 81/140

Megoldás. Legyen $P_1(x, y)$ annak a valószínűsége, hogy a most sorra kerülő jatékos nyeri a játékot, feltéve hogy ő x-féle, ellenfele y-féle színt látott eddig. Legyen $P_2(x, y)$ ugyanez a nem sorra kerülő játékosra (azaz $P_1(x, y) + P_2(x, y) = 1$). Célunk kiszámolni $P_1(1, 1)$-et, azaz annak a valószínűségét, hogy az első játékos nyer, miután már mindketten egyszer dobtak.

Mivel $P_2(2, 2) = \frac{2}{3}P_1(2, 2)$, kapjuk hogy $P_1(2, 2) = \frac{3}{5}$, $P_2(2, 2) = \frac{2}{5}$. Továbbá, mivel

$$P_2(2, 1) = \tfrac{2}{3}P_1(1, 2),$$
$$P_1(1, 2) = \tfrac{1}{3}P_2(2, 1) + \tfrac{2}{3}P_2(2, 2)$$

kapjuk hogy $P_1(1, 2) = \frac{12}{35}$, $P_2(1, 2) = \frac{23}{35}$, $P_1(2, 1) = \frac{27}{35}$ és $P_2(2, 1) = \frac{8}{35}$. Végül,

$$P_1(1, 1) = \tfrac{1}{3}P_2(1, 1) + \tfrac{2}{3}P_2(1, 2),$$

tehát $P_1(1, 1) = \frac{81}{140}$.

58. feladat Adott a következő egyenlet:

$$k(k+1)(k+3)(k+6) = n(n+1),$$

határozzátok meg a legnagyobb n egész számot, amelyre létezik (k, n) egész megoldás.

Eredmény. 104

Megoldás. A bal oldali szorzások elvégzése után a következő negyedfokú polinom adódik:

$$k(k+1)(k+3)(k+6) = (k^2+k)(k^2+9k+18) = k^4+10k^3+27k^2+18k.$$

Most tekintsük az egyenlet jobb oldalát, és azon egyszerű megállapítást, mint hogy $n(n+1)$ és $(n+1)(n+2)$ között nincs olyan egész szám, amely előáll két szomszédos egész szám szorzataként. Így a jobb oldalt $(ak^2+bk+c)(ak^2+bk+(c+1))$ alakban próbáljuk becsülni, ahol k változó, a, b és c pedig egész együtthatók. Vessünk egy pillantást k^4 és k^3 együtthatóira, ez $a = 1$-et és $b = 5$-öt ad eredményül a bal oldali kifejezéssel összevetve. Ebből:

$$(ak^2+bk+c)(ak^2+bk+(c+1)) = (k^2+5k+c)(k^2+5k+(c+1)) = k^4+10k^3+(26+2c)k^2+(10c+5)k+(c^2+c).$$

Mivel semmilyen c egész szám nem elégíti ki a $26+2c = 27$ egyenletet, $c = 0$ és $c = 1$ behelyettesítésével elegendően nagy k-ra a következő egyenlőtlenségek adódnak:

$$k^4+10k^3+26k^2+5k < k^4+10k^3+27k^2+18k < k^4+10k^3+28k^2+15k+2.$$

A középen álló kifejezés felvett értékei két szomszédos, $n(n+1)$ alakú szám között van. Most azon k számokat akarjuk meghatározni, amik ezen egyenlőtlenségeket kielégítik. Az első ekvivalensen így alakítható:

$$\begin{aligned} k^4+10k^3+26k^2+5k &< k^4+10k^3+27k^2+18k \\ 0 &< k^2+13k \\ 0 &< k(k+13) \end{aligned}$$

ebből pedig $k > 0$ vagy $k < -13$. Hasonlóképp a második egyenlőtlenségből:

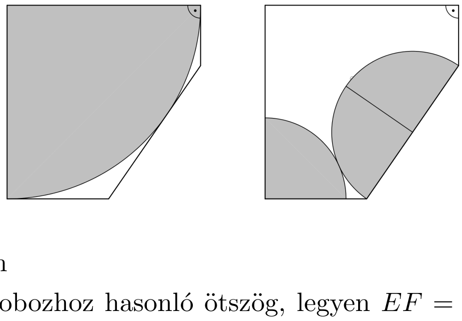
$$\begin{aligned} k^4+10k^3+27k^2+18k &< k^4+10k^3+28k^2+15k+2 \\ 3k &< k^2+2 \\ 0 &< (k-1)(k-2) \end{aligned}$$

ami pedig $k > 2$ vagy $k < 1$ esetén teljesül. Ennélfogva $k < -13$ vagy $k > 2$ kielégíti mindkét egyenlőtlenséget, és $k(k+1)(k+3)(k+6)$ két szomszédos, $n(n+1)$ alakú szám közé esik. Ezért tehát azokat a k-kat kell végignézni, melyre $-13 \le k \le 2$ fennáll. A (k, n) megoldásokat az alábbi táblázat foglalja magába:

k	-13	-6	-6	-3	-3	-1	-1	0	0	1	2
$k(k+1)(k+3)(k+6)$	10 920	0	0	0	0	0	0	0	0	56	240
n	104	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	7	15

Tehát $n = 104$ a keresett szám.

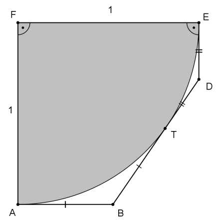
59. feladat A Quarter-Pizzéria egyedi, ötszög alakú pizzásdobozokban szállítja ki a pizzáit, amelyben éppen elfér egy negyed nagy pizza, vagy háromnegyed kis pizza (az ábrán látható módon). Mekkora a kis pizza sugara, ha a nagy pizzáé 30 cm?

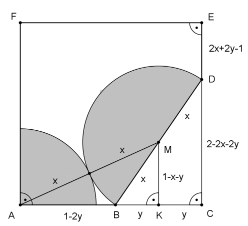


Eredmény. $5(1+\sqrt{7}-\sqrt{2\sqrt{7}-4})\,\mathrm{cm}$

Megoldás. Legyen $ABDEF$ egy, a dobozhoz hasonló ötszög, legyen $EF = 1$ (ha 30 cm-t tekintünk egységnek, a feladatbeli ötszöggel egybevágót kapunk). Nyilván $AF = EF$ (a nagy pizza sugara) és $AFE\sphericalangle = BAF\sphericalangle = 90°$

(negyedkörök középponti szögei), így létezik egy C pont, melyre $ACEF$ négyzet. Legyen K, M rendre a BC, BD szakaszok felezőpontjai és legyen T a nagy pizza BD szakasszal vett érintési pontja.





Legyen x a kis pizza keresett sugara, ekkor ugyebár $BD = 2x$. Mivel a kis pizzák is érintik egymást, $AM = 2x$, továbbá $AB = BT$ és $DE = DT$, hiszen külső pontból egyazon körhöz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak. Ennek eredményeképp $AB + DE = BD$. Ha $BC = 2y$, úgy $AB = 1 - 2y$, $DE = BD - AB = 2x + 2y - 1$, $CD = 2 - 2x - 2y$ és $KM = CD/2 = 1 - x - y$. Alkalmazva a Pitagorasz-tételt BKM és AKM, derékszögű háromszögekre:

$$y^2 + (1 - x - y)^2 = x^2 \quad \text{és} \quad (1 - y)^2 + (1 - x - y)^2 = 4x^2.$$

Ezért

$$y^2 + 4x^2 - (1 - y)^2 = x^2, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{1 - 3x^2}{2}.$$

Behelyettesítve valamely fenti egyenletbe egyszerűbb alakú egyenletet kapunk:

$$9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$9x^4-6x^3-2x+1 = (3x^2)^2+(x-1)^2-2\cdot 3x^2(x-1)-7x^2 = (3x^2-x+1)^2-7x^2 = (3x^2+(\sqrt{7}-1)x+1)(3x^2-(\sqrt{7}+1)x+1),$$

ez pedig a következő egyenlethez vezet:

$$(3x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7} + 1)x + 1) = 0.$$

Innen már világosan látszik, hogy az első tényezőnek nincs valós gyöke, a második gyökei pedig

$$\frac{1}{6}(1 + \sqrt{7} \pm \sqrt{2\sqrt{7} - 4}).$$

A nagyobb gyök viszont 1/2-nél nagyobb, ez pedig ellentmond a

$$2BD = BD + AB + DE < BC + CD + AB + DE = 2$$

egyenlőtlenségnek. Ez pedig azt jelenti, hogy $x = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4})$, így hát a kisebbik pizza sugara

$$30x = 5(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4}) \text{ cm}.$$