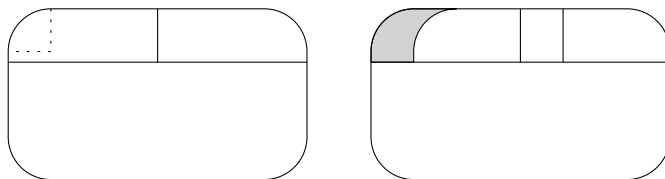


Zadanie 1. Okna w starym tramwaju mają kształt przedstawiony na pierwszym rysunku. Wszystkie cztery zaokrąglone rogi to ćwiartki okręgu o promieniu 10 cm. Okno zostało uchylone poprzez przesunięcie lewego górnego segmentu o 10 cm w prawo, jak pokazano na drugim rysunku. Wysokość przesuniętego segmentu jest równa 13 cm. Ile wynosi, w cm^2 , pole powierzchni otwartego fragmentu okna (oznaczonego szarym kolorem)?



Wynik. 130

Rozwiązanie. To pole jest równe polu części wspólnej przesuwanego segmentu i sztywnego segmentu, która jest prostokątem o wymiarach $10 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$.

Zadanie 2. Prostokąt został podzielony na dziewięć mniejszych prostokątów w sposób pokazany na rysunku. Wewnątrz pięciu z nich napisano ich obwody. Znajdź obwód dużego prostokąta.

	9	
14	10	17
	12	

Wynik. 42

Rozwiązanie. Patrząc na rysunek, stwierdzamy, że obwód dużego prostokąta jest równy sumie obwodów czterech bocznych małych prostokątów (tych, których obwody są zaznaczone na rysunku) pomniejszonej o obwód środkowego prostokąta. Wobec tego szukany obwód dużego prostokąta wynosi

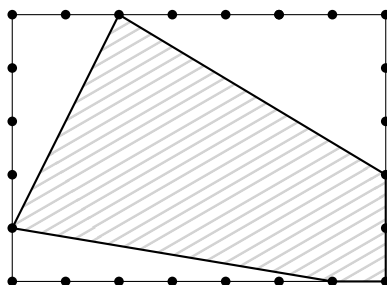
$$14 + 9 + 17 + 12 - 10 = 42.$$

Zadanie 3. Piotr usunął jedną cyfrę z czterocyfrowej liczby pierwszej i otrzymał 630. Jaka była wyjściowa liczba pierwsza?

Wynik. 6301

Rozwiązanie. Ponieważ ostatnia cyfra liczby pierwszej nie może być parzysta, więc Piotr rozważał liczbę postaci $630*$. Skoro ostatnią cyfrą nie może być 5, to pozostaje rozpatrzyć cztery możliwości dla ostatniej cyfry: 1, 3, 7 i 9. Liczba 630 jest podzielna przez 3, więc 6303 i 6309 odrzucamy. Ponadto liczba 630 jest również podzielna przez 7, zatem Piotr nie mógł początkowo rozważać 6307. Ostatecznie, szukaną liczbą jest 6301.

Zadanie 4. Jarek, największa gwiazda wśród architektów, chce zbudować bardzo nowoczesną pięciokątną willę na prostokątnej posesji o wymiarach $35 \text{ m} \times 25 \text{ m}$. Powierzchnia działki przeznaczona na budowę jest zaznaczona na rysunku:



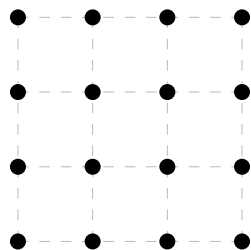
(Kolejne kropki na brzegu wyznaczają odległości 5 m.) Jaką część powierzchni posesji zajmuje pięciokąt, na planie którego zostanie zbudowana willa?

Wynik. $41/70$

Rozwiązanie. Ponieważ poszukujemy stosunku pól, więc możemy przyjąć 5 m jako jednostkę. Sumując pola trzech narożnych trójkątów prostokątnych, dostajemy wynik

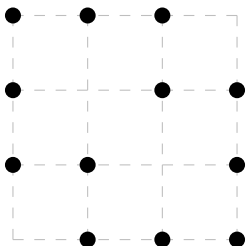
$$1 - \frac{1}{35} \left(\frac{5 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} \right) = \frac{41}{70}.$$

Zadanie 5. Kwadratowa siatka (widoczna na rysunku) składająca się z 16 kropek zawiera wierzchołki dziewięciu kwadratów o wymiarach 1×1 , czterech 2×2 i jednego 3×3 , co daje 14 kwadratów o bokach równoległych do krawędzi siatki. Jaka jest najmniejsza liczba kropek, które można usunąć w taki sposób, żeby każdemu z tych 14 kwadratów brakowało co najmniej jednego wierzchołka?



Wynik. 4

Rozwiązanie. Cztery kwadraty 1×1 leżące w rogach siatki nie mają wspólnych wierzchołków, więc musimy usunąć co najmniej cztery kropki. Jeżeli usuniemy dwie narożne kropki leżące naprzeciwko siebie i dwie leżące wewnątrz siatki na drugiej przekątnej, otrzymamy układ spełniający wymagane warunki.



Zadanie 6. Znajdź cyfrę jedności liczby

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2017^2.$$

Wynik. 5

Rozwiązanie. Wykorzystamy okresowość (modulo 10) ostatnich cyfr kwadratów liczb całkowitych. Łatwo sprawdzić, że

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385,$$

więc ostatnią cyfrą tej liczby jest 5. Wobec tego ostatnią cyfrą liczby $1^2 + 2^2 + \dots + 2010^2$ jest również 5, gdyż $201 \cdot 5 = 1005$. Ponadto ostatnia cyfra sumy $2011^2 + 2012^2 + \dots + 2017^2$ jest równa 0. Ostatecznie, szukaną cyfrą jedności jest 5.

Uwaga. Bezpośrednio wykorzystując wzór $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, możemy stwierdzić, że dana suma jest równa $2017 \cdot 1009 \cdot 1345$, więc jako liczba nieparzysta podzielna przez 5 kończy się cyfrą 5.

Zadanie 7. Zapisz iloraz

$$\frac{0, (2)}{0, (24)}$$

w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{a}{b}$ (gdzie a i b są całkowite dodatnie).

Uwaga. Powyższy zapis oznacza ułamek dziesiętny okresowy, np. $0, (123) = 0,123123\dots$

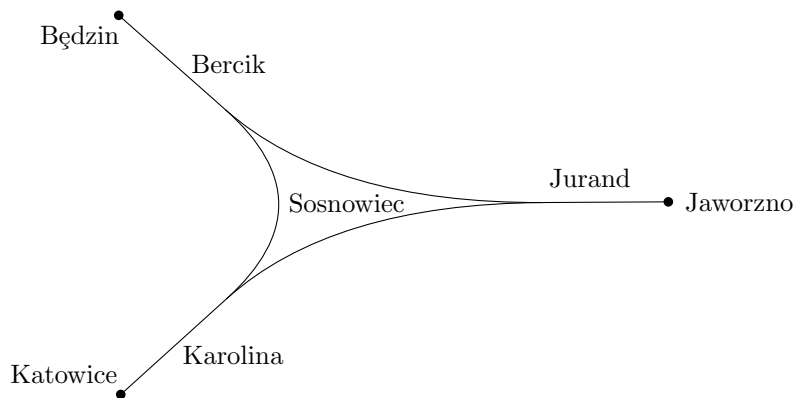
Wynik. $11/12$

Rozwiązanie. Możemy przekształcić dany iloraz w następujący sposób:

$$\frac{0, (2)}{0, (24)} = \frac{0, (22)}{0, (24)} = \frac{22 \cdot 0, (01)}{24 \cdot 0, (01)} = \frac{11}{12}.$$

Zadanie 8. Stacja kolejowa w Sosnowcu ma kształt trójkąta. Karolina, Jurand i Bercik obserwują ruch pociągów kursujących przez Sosnowiec odpowiednio w Katowicach, Jaworznie i Będzinie. Karolina naliczyła 190, Jurand — 208, a Bercik — 72 pociągi w obu kierunkach. Ile pociągów odbyło kurs na trasie Katowice–Jaworzno (w którymkolwiek kierunku)? Zakładamy, że żaden pociąg nie zaczyna ani nie kończy swojego biegu w Sosnowcu i żaden pociąg w nim

nie zawraca.



Wynik. 163

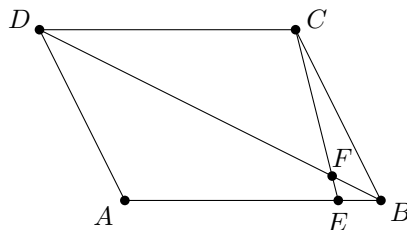
Rozwiązanie. Oznaczmy liczbę pociągów, które odbyły kurs na trasie Katowice–Będzin przez j , na trasie Katowice–Jaworzno przez b , a na trasie Będzin–Jaworzno przez k . Karolina liczy wszystkie pociągi obsługujące połączenia między Katowicami i pozostałymi dwoma miastami, a zatem $j+b=190$. Podobnie uzyskujemy równości $k+b=208$ oraz $k+j=72$. Dodając stronami pierwsze dwie równości, a następnie odejmując stronami trzecią, uzyskujemy $2b=190+208-72$, co prowadzi do $b=\frac{1}{2}\cdot 326=163$.

Zadanie 9. Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite $x < 10000$, że x jest czwartą potęgą pewnej liczby parzystej oraz można przestawić cyfry liczby x tak, aby otrzymać czwartą potęgę pewnej liczby nieparzystej (przyjmujemy, że zapis liczby w systemie dziesiętnym nie może zaczynać się cyfrą 0).

Wynik. 256

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że szukana liczba jest równa a^4 dla pewnej liczby parzystej a oraz, że można przestawić jej cyfry tak, aby otrzymać b^4 dla pewnej liczby nieparzystej b . Ponieważ $10000=10^4$, więc obydwie liczby a oraz b są mniejsze od 10. Podnosząc do kwadratu wszystkie parzyste liczby jednocyfrowe, a następnie ponownie podnosząc do kwadratu ich cyfry jedności, stwierdzamy, że liczba a^4 jest zakończona cyfrą 6. Rozważając możliwe wartości b , zauważamy, że tylko $5^4=625$ oraz $9^4=6561$ zawierają cyfrę 6. Jednak dowolna liczba utworzona z cyfr liczby 9^4 jest podzielna przez 3 (gdyż jej suma cyfr jest podzielna przez 3), więc w tym wypadku jedyną możliwością jest $a=6$, ale $6^4=1296$ nie powstaje z 6561 przez przestawienie cyfr. Z kolei dla $b=5$ mamy $5^4=625$ z łatwością odnajdujemy $x=a^4=4^4=256$ jako jedyny możliwy wynik.

Zadanie 10. W równoległoboku $ABCD$ prosta przechodząca przez punkt C przecina bok AB w punkcie E , przy czym $EB=\frac{1}{5}AE$. Odcinek CE przecina przekątną BD w punkcie F . Znajdź stosunek $BF:BD$.



Wynik. 1:7

Rozwiązanie. Trójkąty EBF i CDF są podobne w skali $EB:CD=1:6$. Wobec tego $BF:DF=1:6$, więc $BF:BD=1:7$.

Zadanie 11. W budynku jest 100 ponumerowanych mieszkań. Każde z nich ma jednego, dwóch lub trzech lokatorów. Łączna liczba mieszkańców lokali od 1 do 52 jest równa 56, a łączna liczba mieszkańców lokali od 51 do 100 jest równa 150. Ile osób mieszka w tym budynku?

Wynik. 200

Rozwiązanie. Skoro maksymalna liczba osób zajmujących jedno mieszkanie jest równa trzy, to w każdym z mieszkań od 51 do 100 mieszkają dokładnie trzy osoby. Wobec tego, mieszkańców lokali od 1 do 50 jest dokładnie $56-2\cdot 3=50$. Stąd wniosek, że w całym budynku mieszka dokładnie $50+150=200$ osób.

Zadanie 12. W pierwszym kroku Mikołaj napisał na kartce liczbę 3 pistacjową kredką oraz liczbę 2 limonkową kredką. W każdym następnym kroku napisał na kartce sumę liczb z poprzedniego kroku na pistacjowo, natomiast na limonkowo ich (dodatnią) różnicę. Jaką liczbę napisał na pistacjowo w 2017 kroku?

Wynik. $3 \cdot 2^{1008}$

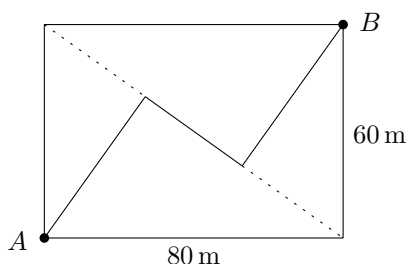
Rozwiązanie. Nietrudno uzasadnić, że w każdym kroku pistacjowa liczba jest większa od limonkowej. Jeżeli w n -tym kroku liczby P_n, L_n są napisane odpowiednio na pistacjowo i limonkowo, to w kroku $n+1$ mamy $P_{n+1} = P_n + L_n$ oraz $L_{n+1} = P_n - L_n$, a w kroku $n+2$ uzyskujemy

$$P_{n+2} = P_{n+1} + L_{n+1} = 2P_n,$$

$$L_{n+2} = P_{n+1} - L_{n+1} = 2L_n.$$

Wobec tego co dwa kroki zarówno pistacjowa, jak i limonkowa liczba, ulegają podwojeniu. Między pierwszym a 2017-tym krokiem nastąpi to dokładnie 1008 razy, co oznacza, że $P_{2017} = 3 \cdot 2^{1008}$.

Zadanie 13. Czerwony Kapturek stoi i myśli przy wejściu do „Prostokątnego Lasu”. Zaczynając z punktu A chce ona dotrzeć do punktu B najszybciej, jak to możliwe. Jedną z możliwości jest spacer skrajem lasu o łącznej długości 140 m. Oczywiście Kapturek zna nierówność trójkąta i wie, że droga po przekątnej lasu byłaby najkrótsza, ale niestety przez las wiedzie tylko przedstawiona na rysunku droga w kształcie zygzaka z dwoma zakrętami o 90° . Gdyby Kapturek wiedziała, że ta droga jest krótsza niż 140 m, chętnie skorzystałaby ze skrótu. . . Jaka jest długość (w metrach) zygzaka prowadzącego przez las?



Wynik. 124

Rozwiązanie. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przekątna lasu ma długość $\sqrt{60^2 + 80^2} = 100$. Z podobieństwa odpowiednich trójkątów prostokątnych wynika, że każdy z krótszych odcinków przekątnej (od wierzchołka do najbliższego zakrętu zygzaka) ma długość $\frac{60^2}{100} = 36$. Wobec tego środkowy odcinek zygzaka ma długość $100 - 2 \cdot 36 = 28$. Podobnie z podobieństwa trójkątów uzyskujemy, że każdy z dwóch skrajnych odcinków zygzaka ma długość $\frac{80}{100} \cdot 60 = 48$. Wobec tego cała droga przez las ma długość $2 \cdot 48 + 28 = 124$ m, czyli jest odrobinę krótsza niż 140 m.

Zadanie 14. Ośmiocyfrowym palindromem nazywamy każdą liczbę postaci $\overline{abcdcba}$, gdzie a, b, c, d są cyframi (niekoniecznie różnymi). Ile różnych ośmiocyfrowych palindromów ma tę własność, że po usunięciu z nich pewnych cyfr można otrzymać liczbę 2017?

Wynik. 8

Rozwiązanie. Skoro wszystkie cyfry 2017 są różne, to również cyfry a, b, c, d muszą być różne i z wyjściowego palindromu należy usunąć po jednym wystąpieniu każdej z nich. Zauważmy, że po usunięciu czterech cyfr, pierwsza lub ostatnia cyfra 2017 jest równa a . W pierwszym przypadku mamy $a = 2$ i otrzymujemy analogiczne zagadnienie dla sześciocyfrowego palindromu o cyfrach 0, 1, 7. Z kolei w drugim przypadku mamy $a = 7$ i również otrzymujemy analogiczne zagadnienie dla sześciocyfrowego palindromu o cyfrach 2, 0, 1. W obu przypadkach mamy ponownie podobną sytuację do wyjściowej: dwa wybory wartości b , z której każdy prowadzi do zagadnienia wyboru czterocyfrowego palindromu. W końcu każdy z tych problemów rozbija się na dwa dla dwucyfrowych palindromów, a te mają jednoznaczne rozwiązania. Łącznie jest więc $2^3 = 8$ palindromów spełniających warunki zadania.

Zadanie 15. Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n przez $S(n)$ i $P(n)$ oznaczamy odpowiednio sumę i iloczyn cyfr liczby n . Ile dodatnich liczb całkowitych n ma tę własność, że $n = S(n) + P(n)$?

Wynik. 9

Rozwiązanie. Dla jednocyfrowej dodatniej liczby całkowitej n mamy $S(n) + P(n) = 2n > n$. Rozważmy zatem dodatnią liczbę całkowitą n , która ma więcej niż jedną cyfrę. Ponieważ $S(n) < n$, więc $P(n) > 0$. Oznacza to, że wszystkie cyfry n muszą być różne od 0. Niech $m \geq 1$ i $n = a_m 10^m + \dots + a_0$ będzie liczbą całkowitą, gdzie $1 \leq a_k \leq 9$ dla $0 \leq k \leq m$. Wówczas

$$\begin{aligned} n - S(n) - P(n) &= a_m 10^m + \dots + a_0 - (a_m + \dots + a_0) - a_m \dots a_0 = \\ &= (10^m - 1 - a_{m-1} \dots a_0) a_m + (10^{m-1} - 1) a_{m-1} + \dots + 9a_1 = \\ &\geq (10^m - 1 - 9^m) a_m \geq \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 1$. Zatem dla liczby n spełniającej warunki zadania mamy

$$n = 10a_1 + a_0 = a_1 + a_0 + a_1a_0,$$

co jest równoważne z $a_1(9 - a_0) = 0$ i w konsekwencji z $a_0 = 9$. Ostatecznie, warunki zadania spełnia dziewięć liczb: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 i 99.

Zadanie 16. Właściciel fabryki zatrudnia 100 pracowników — brygadzystów, robotników i stażystów (na każdym stanowisku pracuje przynajmniej jedna osoba). Miesięczne wynagrodzenie brygadzysty wynosi 5000 zł, robotnika 1000 zł, a stażysty 50 zł. Każdego miesiąca właściciel wypłaca swoim pracownikom łącznie 100 000 zł. Ilu brygadzystów jest zatrudnionych w tej fabryce?

Wynik. 19

Rozwiązanie. Oznaczmy przez x , y , z odpowiednio liczbę brygadzystów, robotników i stażystów. Warunki zadania możemy zapisać za pomocą układu równań

$$x + y + z = 100 \quad (1)$$

$$5000x + 1000y + 50z = 100\,000 \quad (2)$$

w dodatnich liczbach całkowitych. Przypisując równoważnie równanie (2), otrzymujemy zależność

$$z = 2000 - 20y - 100x.$$

Stąd wynika, że z jest liczbą podzielną przez 20, a zatem $z = 20k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k . Wyjściowy układ przybiera więc postać

$$x + y + 20k = 100 \quad (3)$$

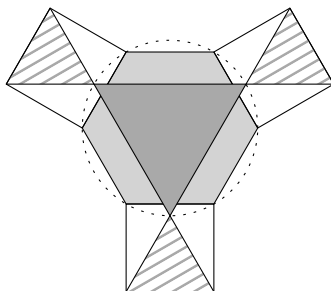
$$5x + y + k = 100. \quad (4)$$

Odejmując (3) od (4), dostajemy równość

$$4x = 19k.$$

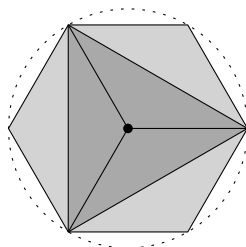
Ponieważ liczby 4 i 19 są względnie pierwsze, więc x jest wielokrotnością 19. Z drugiej strony, równanie (4) prowadzi do wniosku, że $x < 20$. Zatem $x = 19$ i jedynym rozwiązaniem układu jest trójka $(19, 1, 80)$.

Zadanie 17. Poniższa mozaika składa się z wielokątów foremnych. Jasnoszary sześciokąt i ciemnoszary trójkąt są wpisane w ten sam okrąg. Wiedząc, że pole każdego z zakreskowanych trójkątów wynosi 17, znajdź pole ciemnoszarego trójkąta.



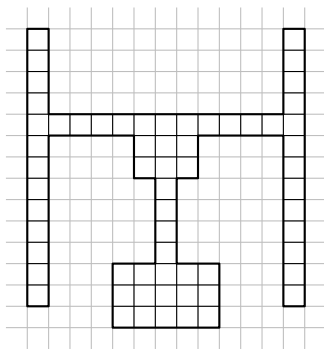
Wynik. 51

Rozwiązanie. Zauważmy, że ciemnoszary trójkąt możemy obrócić wokół środka okręgu tak, aby jego wierzchołki pokryły się z wierzchołkami sześciokąta. Wobec tego pole tego trójkąta stanowi dokładnie połowę pola sześciokąta (rysunek).



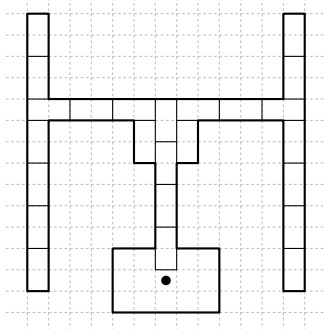
Każdy zakreskowany trójkąt jest trójkątem równobocznym o boku tej samej długości, co bok sześciokąta. Zatem pole każdego zakreskowanego trójkąta stanowi $\frac{1}{6}$ pola sześciokąta. Ostatecznie pole ciemnoszarego trójkąta jest więc równe $3 \cdot 17 = 51$.

Zadanie 18. W ramach renowacji dworca w Sosnowcu budowany jest specjalny chodnik z kostki brukowej przystosowany dla osób niedowidzących. Kształt chodnika jest przedstawiony na poniższym rysunku. Niestety, dostępne są jedynie kostki o wymiarach 1×2 . Na ile sposobów można wybrukować chodnik takimi kostkami? Kostki są nierozróżnialne. Dwa brukowania są uznawane za różne, jeśli w którymś miejscu kostki są ustawione w różnej pozycji.

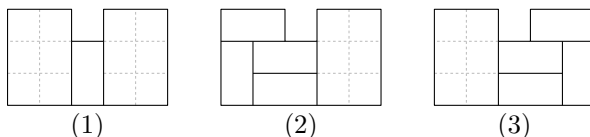


Wynik. 15

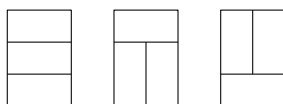
Rozwiązanie. Rozpoczynając od wyłożenia kostką cienkich pasków, dochodzimy do wniosku, że całe pokrycie jest określone jednoznacznie z dokładnością do dolnego prostokąta 3×5 :



Są trzy opcje ułożenia kostki zawierającej pole oznaczone kropką: albo może być ona ułożona pionowo (przypadek (1)), co prowadzi do brukowania dwóch rozłącznych prostokątów 3×2 , albo poziomo (przypadki (2) oraz (3)) — wówczas pozostałe pokrycie jest jednoznaczne oprócz jednego prostokąta 3×2 .



Każdy prostokąt 3×2 można wybrukować trzema kostkami na dokładnie trzy sposoby:



Wobec tego jest $3 \cdot 3 = 9$ sposobów dokończenia pokrycia w przypadku (1) oraz po 3 sposoby w każdym z przypadków (2) i (3). Łącznie mamy więc $9 + 3 + 3 = 15$ możliwości.

Zadanie 19. Michał wybrał dodatnią liczbę całkowitą n . Następnie wybrał dodatni dzielnik n , pomnożył go przez 4 i otrzymany wynik odjął od n , uzyskując 2017. Znajdź wszystkie liczby, które mógł wybrać Michał.

Wynik. 2021, 10085

Rozwiązanie. Dla wybranego dzielnika d liczby n istnieje liczba całkowita k taka, że $n = kd$. Równanie z treści zadania można przepisać w postaci

$$kd - 4d = (k - 4)d = 2017.$$

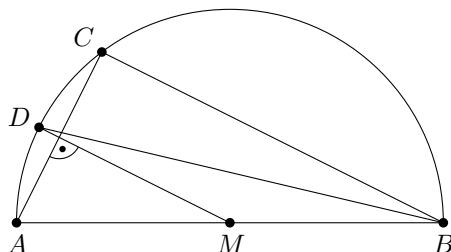
Skoro 2017 jest liczbą pierwszą, to $d = 1$ lub $d = 2017$. W pierwszym przypadku otrzymujemy $n = k = 2017 + 4 = 2021$. W drugim zaś mamy $k = 5$, skąd $n = 2017 \cdot 5 = 10085$.

Zadanie 20. Dominik i Tomek są dobrymi przyjaciółmi, więc kiedy tylko usiądą obok siebie, zaczynają rozmawiać. Pięcioro studentów, włączając Dominika i Tomka, chce odbyć konstruktywną dyskusję, więc chcą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby Dominik i Tomek nie siedzieli obok siebie. Ile jest możliwych usadzeń wokół stołu spełniających ten warunek? Przyjmujemy, że dwa usadzenia takie, że jedno z nich powstaje z drugiego przez obrót, są różne.

Wynik. 60

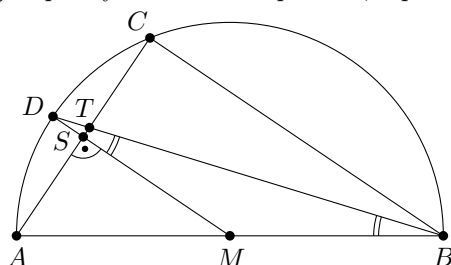
Rozwiązanie. Każde usadzenie spełniające warunki zadania możemy uzyskać w następujący sposób: Najpierw na 5 sposobów wybieramy miejsce dla Dominika. Następnie Tomka sadzamy na jednym z miejsc, które nie sąsiadują z miejscem Dominika, co możemy zrobić na 2 sposoby. W końcu pozostałe osoby sadzamy przy stole w dowolny sposób, co możemy uczynić na $3! = 6$ sposobów. Łącznie uzyskujemy więc $5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$ konfiguracji studentów spełniających warunki zadania.

Zadanie 21. W konfiguracji przedstawionej na rysunku odcinek AB jest średnicą okręgu o środku M . Punkty C i D leżą na tym okręgu, przy czym proste AC i DM są prostopadłe oraz $\angle MAC = 56^\circ$. Znajdź miarę kąta ostrego między prostymi AC i BD (w stopniach).



Wynik. 73°

Rozwiązanie. Oznaczmy punkt przecięcia prostych AC i DM przez S , a punkt przecięcia prostych AC i BD przez T .



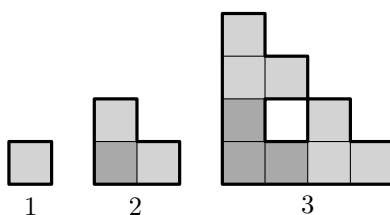
Z równości $\angle MAC = 56^\circ$ oraz z faktu, że kąt przy wierzchołku S jest prosty otrzymujemy, że $\angle SMA = 34^\circ$, przy czym wykorzystaliśmy fakt iż suma miar kątów wewnętrznych trójkąta AMS jest równa 180° . Ponadto

$$\angle BMD = 180^\circ - \angle SMA = 146^\circ.$$

Odcinki MD i MB są promieniami okręgu, więc trójkąt BDM jest równoramienny, w szczególności $\angle MBD = \angle MDB$, więc $\angle MDB = 17^\circ$. Aby znaleźć $\angle CTB$, który jest równy $\angle STD$, wykorzystamy sumę kątów trójkąta prostokątnego DST , wiedząc, że $\angle SDT = \angle MDB$. Powyższy rachunek daje równość

$$\angle CTB = 180^\circ = \angle DST - \angle SDT = 180^\circ - 90^\circ - 17^\circ = 73^\circ.$$

Zadanie 22. Budujemy figurę złożoną z kwadratów jednostkowych poprzez sukcesywne sklejanie jej kopii, tak jak na poniższym rysunku. Jaka jest długość brzegu (na rysunku oznaczonego pogrubioną linią) figury otrzymanej w szóstym kroku?



Wynik. 488

Rozwiązanie. Niech f_n oznacza długość brzegu figury uzyskanej w n -tym kroku. Zauważmy, że w każdym kroku trzy przystające figury z poprzedniego kroku są sklejanie razem wzdłuż dwóch odcinków jednostkowych, które przestają być częścią brzegu. Dzięki tej obserwacji uzyskujemy wzór $f_{n+1} = 3 \cdot f_n - 2 \cdot 2$ dla każdego $n \geq 1$. W połączeniu z warunkiem początkowym $f_1 = 4$ pozwala to na wykonanie bezpośrednich rachunków, które prowadzą do równości $f_6 = 488$.

Zadanie 23. Rycerze i łotrzy zajmują wszystkie 2017 miejsc przy bardzo dużym okrągłym stole. Rycerze zawsze mówią prawdę, a łotrzy zawsze kłamią. Każda osoba przy stole stwierdziła, że siedzi pomiędzy rycerzem a łotrem. Z niewiadomych powodów jeden rycerz się pomylił. Ilu rycerzy siedzi przy stole?

Wynik. 1345

Rozwiązanie. Zauważmy, że nie ma dwóch łotrów siedzących obok siebie. Gdyby tak było, to koło każdego z nich musiałby siedzieć kolejny łotr itd., więc przy stole byłoby sami łotry, co nie jest zgodne z treścią zadania (wiemy, że jest co najmniej jeden rycerz). Jeśli pominiemy rycerza, który się pomylił, to każdy rycerz siedzi pomiędzy innym rycerzem, a łotrem. Zatem możemy podzielić uczestników spotkania na bloki postaci rycerz–rycerz–łotr. Wracając do omylnego rycerza: siedzi on albo pomiędzy dwoma innymi rycerzami w bloku (r–r–r–ł), albo pomiędzy dodatkowym łotrem, a innym z obecnych (r–r–ł–r–ł). Reszta z dzielenia liczby uczestników przez 3 wynosi 1 w pierwszym przypadku i 2 w drugim. Skoro $2017 = 3 \cdot 672 + 1$, to mamy pierwszy przypadek, a wtedy przy stole siedzi $2 \cdot 672 + 1 = 1345$ rycerzy.

Zadanie 24. Znajdź wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste x spełniające równanie

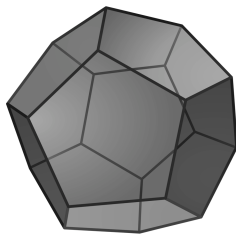
$$x^{2017x} = (2017x)^x.$$

Wynik. $^{2016}\sqrt{2017}$

Rozwiązanie. Skoro $x > 0$, to daną równość możemy podnieść stronami do potęgi $1/x$, otrzymując $x^{2017} = 2017x$, czyli $x^{2016} = 2017$. Jedynym rozwiązaniem równania jest więc $x = ^{2016}\sqrt{2017}$.

Zadanie 25. Piotruś chce pokolorować krawędzie dwunastościanu foremnego w następujący sposób: wybiera pisak jednego koloru i zaczynając w dowolnym wierzchołku koloruje krawędzie bez odrywania ręki do momentu, aż chce lub musi się zatrzymać (każdą krawędź może pokolorować tylko raz). Następnie wybiera inny kolor i powtarza ten proces, używając różnych kolorów, aż każda krawędź będzie pokolorowana. Jaka jest minimalna liczba kolorów, których Piotruś musi użyć, żeby pokolorować dwunastościan foremny w taki sposób?

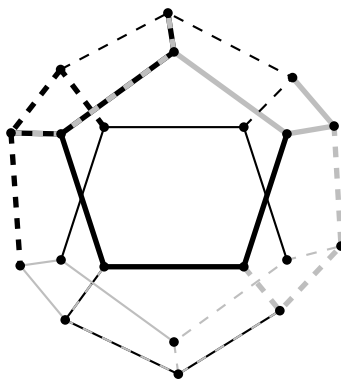
Uwaga. Dwunastościan foremny to wielościan o 12 ścianach w kształcie pięciokątów foremnych, jak pokazano na rysunku:



Wynik. 10

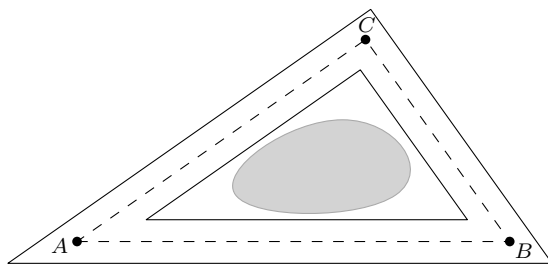
Rozwiązanie. Dwunastościan foremny ma 20 wierzchołków, a w każdym schodzą się po 3 krawędzie. Rozważmy graf składający się z wierzchołków i krawędzi dwunastościanu. Po każdym kroku usuwamy z grafu krawędzie pokolorowane danym kolorem. Jeżeli usuniemy w ten sposób zamkniętą ścieżkę, to w każdym wierzchołku zostaną usunięte 0 lub 2 krawędzie. Jeżeli w ścieżce wierzchołek początkowy p jest różny od wierzchołka końcowego k , to w wierzchołkach p i k będą usunięte 1 lub 3 krawędzie, a w pozostałych — 0 lub 2. Zatem każdy wierzchołek musi być początkiem lub końcem co najmniej jednej ścieżki, więc ścieżek (kolorów) musi być co najmniej 10.

Na rysunku zostało przedstawione przykładowe kolorowanie z wykorzystaniem 10 kolorów:



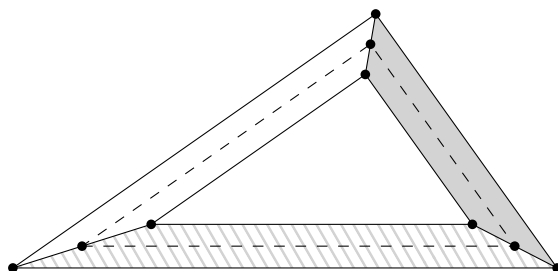
Zadanie 26. Ogrodnik Andrzej zaprojektował zwirową drogę dookoła jeziora. Trójkąt ABC wyznacza środek drogi, a jego boki mają długości 80 m, 100 m oraz 120 m. Granice drogi są zawarte w prostych odległych o 1 m od prostych zawierających boki trójkąta, jak pokazano na rysunku. Ile m^3 żwiru potrzebuje Andrzej, jeżeli chce, aby wysokość

warstwy żwiru, z którego zostanie usypana droga, miała średnio 4 cm?



Wynik. 24

Rozwiązanie. Powierzchnię drogi można podzielić na trzy trapezy o wysokości 2 i długościach linii środkowych 80 m, 100 m, 120 m.



Ponieważ pole trapezu jest równe iloczynowi jego wysokości oraz długości linii środkowej, więc

$$2 \cdot (80 + 100 + 120) = 2 \cdot 300 = 600$$

jest polem drogi w m^2 . Objętość potrzebnego Andrzejowi żwiru jest więc równa

$$600 \text{ m}^2 \cdot 0,04 \text{ m} = 24 \text{ m}^3.$$

Zadanie 27. Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe będące kwadratami liczb całkowitych, których dwie pierwsze cyfry są równe oraz dwie ostatnie cyfry są równe.

Wynik. 7744

Rozwiązanie. Niech N oznacza jedną z szukanych liczb a x i y będą odpowiednio jej pierwszą i ostatnią cyfrą. Wówczas

$$N = 1000x + 100x + 10y + y = 11(100x + y),$$

więc liczba N jest podzielna przez 11. Jednakże N , jako kwadrat liczby całkowitej, jest również liczbą podzielną przez 11^2 . Wobec tego $N = 11^2 k^2$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k i $100x + y = 11k^2$. Ponieważ lewa strona ostatniej równości jest liczbą trzycyfrową postaci $\overline{x0y}$, więc k^2 jest dwucyfrowym kwadratem liczby całkowitej o sumie cyfr równej 10. Jediną taką liczbą jest $8^2 = 64$. Zatem $100x + y = 11 \cdot 8^2$, skąd ostatecznie $N = 11^2 \cdot 8^2 = 88^2 = 7744$.

Zadanie 28. Podczas festynu urządzono loterię o następujących zasadach: uczestnik najpierw wybiera jedno z czterech nieodróżnialnych pudełek, a następnie losuje z wybranego pudełka jedną ze znajdujących się w nim kul. Jeżeli wylosowana kula jest biała, uczestnik wygrywa, a jeżeli czarna — przegrywa. Przykładowo, jeżeli początkowy rozkład kul w czterech pudełkach jest następujący

$$(6, 6), (5, 3), (4, 0), (3, 5),$$

gdzie każda z par (b, c) oznacza pudełko zawierające b białych oraz c czarnych kul, to uczestnik wygrywa z prawdopodobieństwem $\frac{5}{8}$. Dodatkową zasadą jest, że co tysięczny uczestnik otrzymuje *super-jokera*, czyli specjalny przywilej polegający na możliwości rozmieszczenia kul w pudełkach (co najmniej jednej w każdym) przed losowaniem zgodnie z własnym pomysłem. Następnie pudełka są mieszane, a uczestnik na normalnych zasadach wybiera jedno z nich i losuje kulę. Natalia ma dziś szczęście i właśnie otrzymała *super-jokera*. Jakie jest największe możliwe prawdopodobieństwo zwycięstwa, jakie Natalia może uzyskać, odpowiednio rozmieszczając kule z powyższego przykładu w pudełkach?

Wynik. 51/58

Rozwiązanie. Jeżeli Natalia umieści po jednej białej kuli w trzech z czterech pudełek, wygra w przypadku wyboru dowolnego z nich. Przy rozkładzie $(1, 0), (1, 0), (1, 0), (15, 14)$ par (b, c) kul w pudełkach, Natalia wygra z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + \frac{15}{29}) = \frac{51}{58}$.

Łatwo zauważyć, że każdy inny rozkład prowadzi do mniejszej szansy zwycięstwa: prawdopodobieństwo przegranej jest równe sumie prawdopodobieństw wylosowania każdej z czarnych kul, a dla pojedynczej kuli prawdopodobieństwo wylosowania jest oczywiście najmniejsze, jeżeli znajduje się ona w pudełku, w którym jest tak dużo kul, jak to możliwe.

Zadanie 29. Trzy pojazdy: autobus, ciężarówka i motocykl, z których każdy porusza się ze stałą prędkością, minęły stojącego nieruchomo przy ulicy obserwatora w tej właśnie kolejności, w równych odstępach czasu. Wkrótce później minęły one innego (stojącego dalej) obserwatora w równych odstępach czasu o tej samej długości, co za pierwszym razem, ale w innej kolejności: autobus, motocykl, ciężarówka. Znajdź prędkość autobusu (w km/h), jeżeli prędkość ciężarówka to 60 km/h, a prędkość motocykla to 120 km/h.

Wynik. 80

Rozwiązanie. Oznaczmy przez t długość każdego z równych odstępów między minięciami obserwatorów przez pojazdy (w godzinach). Motocykl mija pierwszego obserwatora t godzin po ciężarówce, a drugiego obserwatora — t godzin przed ciężarówką. Wobec tego odległość między obserwatorami jest przez motocykl pokonana w czasie o $2t$ godzin krótszym niż przez ciężarówkę. Z drugiej strony, motocykl porusza się dwa razy szybciej niż ciężarówka, więc czas przejazdu od pierwszego obserwatora do drugiego jest połową odpowiedniego czasu dla ciężarówki. W konsekwencji, przejechanie odległości między dwoma obserwatorami zajmuje $4t$ godzin ciężarówce oraz $2t$ godzin motocyklowi.

Z kolei autobus mija pierwszego obserwatora o t godzin wcześniej niż ciężarówka, a drugiego — o $2t$ godzin wcześniej niż ciężarówka. Ponieważ pokonanie odległości między obserwatorami zajmuje ciężarówce $4t$ godzin, więc autobusowi ten sam dystans zabiera $3t$ godzin. To oznacza, że autobus porusza się z prędkością równą $\frac{4}{3}$ prędkości ciężarówki, czyli 90 km/h.

Zadanie 30. Znajdź wszystkie sposoby wypełnienia luk w poniższym stwierdzeniu dodatnimi liczbami całkowitymi w taki sposób, aby stało się ono prawdziwe: „Spośród wszystkich cyfr występujących w niniejszym stwierdzeniu, dokładnie % cyfr jest większych od 4, dokładnie % cyfr jest mniejszych od 5 i dokładnie % cyfr jest równych 4 lub 5.”

Wynik. 50, 50, 60

Rozwiązanie. Łączna liczba użytych cyfr n jest równa co najmniej 7 i co najwyżej 10. Skoro chcemy, aby wpisywane wartości procentowe były liczbami całkowitymi, jedynymi możliwymi dzielnikami pierwszymi n są 2 oraz 5. To wyklucza opcje $n = 7$ oraz $n = 9$. Dla $n = 8$, przy znanych 4 cyfrach, bezpośrednio sprawdzamy, że nie można wypełnić luk tylko czterema cyframi, aby stwierdzenie stało się prawdziwe. Wobec tego $n = 10$, co oznacza, że wszystkie trzy liczby, które należy wpisać w luki kończą się cyfrą 0. Oznaczmy kolejne liczby przez $a0$, $b0$, $c0$, gdzie a , b , c są cyframi oraz $a + b = 10$.

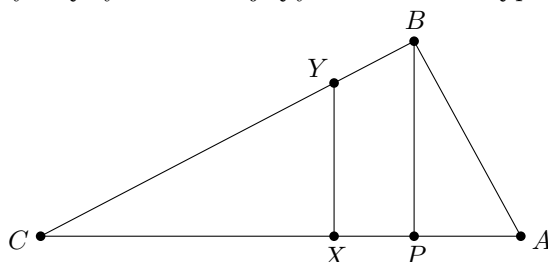
Ponieważ są co najmniej dwie cyfry większe od 4 i co najmniej pięć cyfr nie większych od 4, więc $5 \geq a \geq 2$. Co więcej, co najmniej jedna z cyfr a i b jest większa od 4, a zatem $5 \geq a \geq 3$.

Skoro już co najmniej cztery cyfry są równe 4 lub 5, to $c \geq 4$. Jednak definicja liczby $c0$ wyklucza przypadek $c = 4$, więc $c \geq 5$, skąd $5 \geq a \geq 4$. Dla $a = 4$ otrzymujemy $b = 6$, ale wówczas nie istnieje wybór $c \geq 5$ prowadzący do spełnienia warunków zadania. Pozostaje przypadek $a = 5$, który prowadzi do $b = 5$ i wówczas dla $c = 6$ stwierdzenie jest prawdziwe.

Zadanie 31. Bydło Dominika jest wyprowadzane na łąkę w kształcie trójkąta ABC . Ponieważ jego łacie krowy i te bez plam nie żyją w zgodzie, Dominik postanowił wybudować dwudziestometrowy płot prostokątny do boku AC zaczynając w punkcie P na AC , a kończąc w punkcie B , dzieląc całą łąkę na dwa trójkąty prostokątne. Jednakże łacie krowy (żyjące w części z wierzchołkiem A) w proteście wskazały, że $AP : PC = 2 : 7$ i zażądały bardziej sprawiedliwego podziału. Dominik, postanowił więc zamienić wybudowany płot innym, równoległym do starego o końcach leżących na bokach łąki, lecz dzielący łąkę na dwie części o równych polach. Jakiej długości płot powinien wybudować Dominik?

Wynik. $30\sqrt{2/7}$

Rozwiązanie. Niech X , Y będą końcami nowego płotu między AC i BC , odpowiednio. Ponieważ trójkąt PBC ma większe pole niż ABP , punkt X leży między C i P . Trójkąty PBC i XYC są podobne, więc $XY : XC = PB : PC$.



Z faktu, że pole trójkąta XYC stanowi połowę pola trójkąta ABC mamy

$$\frac{1}{2} \cdot XY \cdot XC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot PB \cdot AC,$$

skąd

$$XY^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{XY}{XC} \cdot PB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot PB^2 \cdot \frac{AP + PC}{PC},$$

a zatem

$$XY = PB \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{AP}{PC} \right)} = 30\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Zadanie 32. Pięć liczb rzeczywistych (niekoniecznie różnych) napisano na tablicy. Dla każdej pary liczb, Łukasz obliczył ich sumę i napisał dziesięć wyników

$$1, 2, 3, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

na tablicy, wymazując początkowe liczby. Wyznacz wszystkie możliwe wartości iloczynu wymazanych liczb.

Wynik. -144

Rozwiązanie. Oznaczmy początkowe liczby przez $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Wśród dziesięciu obliczonych sum, najmniejszą jest $a+b=1$, drugą w kolejności jest $a+c=2$, największą zaś $d+e=10$ i drugą po największej jest $c+e=9$. Wszystkie wyniki sumują się do

$$4(a+b+c+d+e) = 1+2+3+5+5+6+7+8+9+10 = 56,$$

więc $a+b+c+d+e=14$ i $c=14-1-10=3$. Wobec tego $a=2-c=-1$, $b=1-a=2$, $e=9-c=6$ i $d=10-e=4$. Dla tych wartości możemy z łatwością sprawdzić, że pozostałe 6 wyników pasują do tych, które napisał Łukasz. Ostatecznie, szukany iloczyn jest równy $-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 = -144$.

Zadanie 33. Zapisz 333 jako sumę dowolnej liczby kwadratów różnych nieparzystych dodatnich liczb całkowitych.

Wynik. $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2$

Rozwiązanie. Ponieważ $17^2 = 289 < 333 < 361 = 19^2$, więc jedynie liczby $1^2, 3^2, \dots, 17^2$ (łącznie dziewięć różnych liczb) mogą pojawić się jako składniki. Ponadto kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 przy dzieleniu przez 8, a ponieważ 333 daje resztę 5 z dzielenia przez 8, to liczba składników szukanego przedstawienia jest równa 5.

Ponieważ $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 17^2 > 333$, więc 17^2 nie może pojawić się w sumie. Popatrzmy na reszty z dzielenia przez 5 pozostałych składników (utożsamiamy reszty 3 i 4 odpowiednio z -2 i -1). Dwa z nich są podzielne przez 5 ($5^2, 15^2$), trzy dają resztę 1 ($1^2, 9^2, 11^2$) i trzy dają resztę -1 ($3^2, 7^2, 13^2$). Jako, że 333 daje resztę -2 , pozostaje rozpatrzyć dwa przypadki. W pierwszym z nich, sumujemy wszystkie liczby z resztami 0 lub 1; jednakże wynik przekroczy 333. W drugim, by otrzymać -2 , sumujemy wszystkie składniki, które dają resztę -1 , jeden z resztą 0 i jeden z resztą 1. Łatwo sprawdzić że sumy wykorzystujące liczby 11^2 i 15^2 są zbyt duże i z pozostałych dwóch możliwości otrzymujemy szukany rozkład: $3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2 = 333$.

Zadanie 34. Agnieszka wybrała trzy liczby rzeczywiste a, b, c i zdefiniowała działanie $\odot$ wzorem $x \odot y = ax + by + cxy$. W ramach ćwiczenia policzyła, że $1 \odot 2 = 3$ oraz $2 \odot 3 = 4$. Po dłuższych rozważaniach doszła do wniosku, że istnieje niezerowa liczba rzeczywista u taka, że $z \odot u = z$ dla dowolnej liczby rzeczywistej z . Wyznacz u .

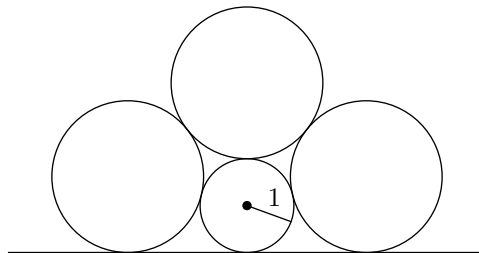
Wynik. 4

Rozwiązanie. Z równości $0 = 0 \odot u = bu$ dostajemy $b=0$, gdyż $u \neq 0$. Założenie zadania może być zapisane jako układ równań

$$\begin{cases} a+2c=3 \\ 2a+6c=4, \end{cases}$$

którego rozwiązaniami są liczby $a=5, c=-1$. Ostatecznie równości $1 = 1 \odot u = 5 - u$ dają wynik $u=4$.

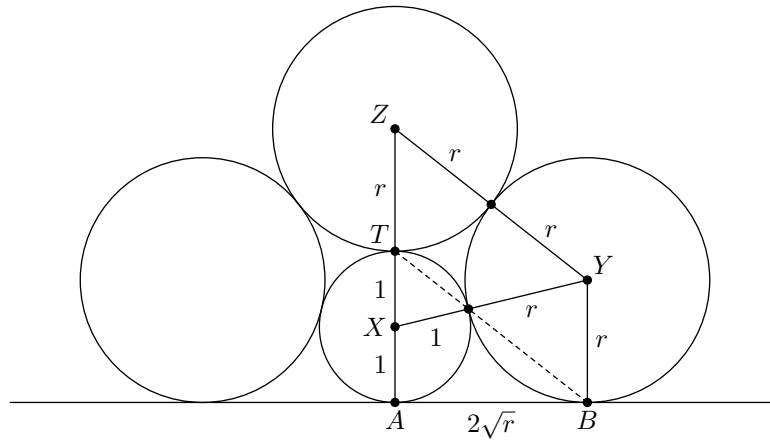
Zadanie 35. Trzy okręgi o promieniu r i okrąg o promieniu 1 są styczne do siebie i do prostej, jak pokazano na rysunku. Znajdź r .



Wynik. $(1+\sqrt{5})/2$

Rozwiązanie. Oznaczmy niektóre punkty styczności przez A, B, T a środki pewnych okręgów przez X, Y, Z , jak

pokazano na rysunku:



Na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy

$$AB^2 = XY^2 - (BY - AX)^2 = (r+1)^2 - (r-1)^2 = 4r.$$

Ponieważ proste BY oraz TZ są równoległe i $BY = TZ = r$, więc czworokąt $BYZT$ jest równoległobokiem oraz $BT = YZ = 2r$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego dla trójkąta ABT uzyskujemy, że $AB^2 + AT^2 = BT^2$, więc $4r + 2^2 = (2r)^2$ co po uproszczeniu daje

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Szukana liczba to jedyny dodatni pierwiastek powyższego równania kwadratowego, który jest równy $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Zadanie 36. Na starym betonowym murze ktoś umieścił matematyczne graffiti składające się z pięciu (niekoniecznie różnych) liczb rzeczywistych, których suma jest równa 20. Dla każdej pary spośród tych liczb Kamil obliczył ich sumę i zaokrąglił ją w dół (tj. do największej liczby całkowitej, która nie przekracza uzyskanej sumy), otrzymując w ten sposób dziesięć liczb całkowitych. W końcu dodał do siebie wszystkie te liczby. Jaka jest najmniejsza możliwa suma, którą mógł uzyskać?

Wynik. 72

Rozwiązanie. Niech a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 będą liczbami z muru. Interesuje nas najmniejsza możliwa wartość wyrażenia

$$W = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor,$$

gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x . Wyrażenie to możemy przepisać równoważnie w postaci

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_i + a_j) - \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \{a_i + a_j\} = 80 - \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \{a_i + a_j\},$$

gdzie z kolei $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ oznacza część ułamkową liczby x . Zadanie sprowadza się więc do maksymalizacji sumy

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \{a_i + a_j\},$$

którą z kolei można rozbić na dwie sumy

$$\sum_{i=1}^5 \{a_i + a_{i+1}\} + \sum_{i=1}^5 \{a_i + a_{i+2}\}$$

(gdzie $a_6 = a_1$ oraz $a_7 = a_2$). Wówczas równości

$$S_1 = \sum_{i=1}^5 \{a_i + a_{i+1}\} = 40 - \sum_{i=1}^5 \lfloor a_i + a_{i+1} \rfloor,$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^5 \{a_i + a_{i+2}\} = 40 - \sum_{i=1}^5 \lfloor a_i + a_{i+2} \rfloor$$

prowadzą do wniosku, że obie liczby S_1, S_2 są całkowite. Co więcej, każda z nich jest sumą pięciu liczb mniejszych od 1, więc obie są równe co najwyżej 4 i w konsekwencji $S \leq 8$. Dla wyjściowej sumy otrzymujemy więc szacowanie $W \geq 72$. Pozostaje zauważyć, że równość ta jest osiągalna, gdy każda z liczb a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ma część ułamkową równą 0,4.

Zadanie 37. Dla dodatniej liczby całkowitej złożonej n oznaczmy przez $\xi(n)$ sumę trzech najmniejszych dodatnich dzielników liczby n , a przez $\vartheta(n)$ — sumę dwóch największych dzielników n . Znajdź wszystkie liczby złożone n , dla których $\vartheta(n) = (\xi(n))^4$.

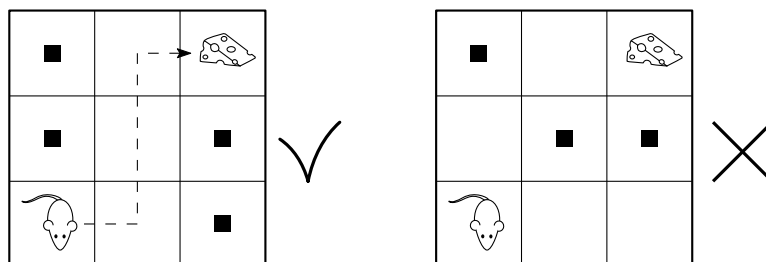
Wynik. 864

Rozwiązanie. Najmniejszy dzielnik n jest równy 1. Niech p, q będą drugim i trzecim najmniejszym dzielnikiem n , odpowiednio (p jest liczbą pierwszą i q jest liczbą pierwszą lub $q = p^2$). Wówczas $\xi(n) = 1 + p + q$ i $\vartheta(n) = n + n/p$. Wobec tego warunek z treści zadania może być zapisany jako

$$n(p+1) = p(1+p+q)^4.$$

Prawa strona powyższej równości jest podzielna przez $p+1$, a skoro p i $p+1$ są względnie pierwsze, to $p+1 \mid (1+p+q)^4$. Jeśli p i q byłyby nieparzyste, to $p+1$ byłoby parzyste a $(1+p+q)^4$ nieparzyste, co jest niemożliwe, więc $p=2$ (2 musi być dzielnikiem n i p jest najmniejszym pierwszym dzielnikiem n). Wówczas podzielność $p+1 \mid (1+p+q)^4$ przybiera postać $3 \mid (3+q)^4$, skąd uzyskujemy $3 \mid 3+q$ i w konsekwencji $3 \mid q$. Z racji iż przypadek $q = p^2$ nie może zajść wnioskujemy, że q jest liczbą pierwszą, zatem $q=3$. Ostatecznie, $n \cdot 3 = 2 \cdot 6^4$, więc $n = 2^5 \cdot 3^3 = 864$.

Zadanie 38. W lewym dolnym polu tablicy 3×3 znajduje się mysz, której celem jest dojście do sera znajdującego się w prawym górnym rogu, poruszając się tylko pomiędzy sąsiednimi polami. Na ile sposobów można umieścić przeszkody na niektórych wolnych polach tablicy (być może żadnym) w taki sposób, aby mysz wciąż mogła dotrzeć do sera?



Wynik. 51

Rozwiązanie. Rozważmy najpierw przypadek, gdy ustawimy przeszkodę w centralnym polu. Wówczas mysz może dotrzeć do sera tylko poruszając się jednym z dwóch „bocznych korytarzy”, więc kolejne przeszkody możemy umieszczać tylko w jednym z nich. Każdy korytarz składa się z trzech pól, wobec czego jest $2^3 = 8$ sposobów ustawienia przeszkód w jednym z nich i w konsekwencji $8 + 8 - 1 = 15$ sposobów ustawienia przeszkód tak, aby co najmniej jeden korytarz pozostał wolny (składnik -1 odpowiada za dwukrotne policzenie sytuacji, w której obydwa korytarze nie zawierają przeszkód).

Pozostaje przypadek, gdy centralne pole jest wolne. Wówczas droga od myszy do sera istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno pole przyległe do pola z myszą jest wolne i co najmniej jedno pole przyległe do pola z serem jest wolne. To oznacza, że mamy trzy opcje umieszczenia przeszkód w polach sąsiadujących z myszą, trzy opcje dla pól sąsiadujących z serem (tj. co najwyżej jedna przeszkoda na każdej z tych par pól) oraz dwie opcje dla każdego z dwóch pozostałych narożników tablicy. Łączna liczba umieszczeń przeszkód w taki sposób, aby mysz wciąż miała dostęp do sera jest więc w tym przypadku równa $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$.

Ostatecznie uzyskujemy, że łączna liczba umieszczeń przeszkód jest równa $15 + 36 = 51$.

Zadanie 39. Spośród wszystkich par liczb rzeczywistych (x, y) spełniających równość

$$x^2 y^2 + 6x^2 y + 10x^2 + y^2 + 6y = 42,$$

niech (x_0, y_0) będzie tą, w której x_0 jest możliwie najmniejsze. Znajdź y_0 .

Wynik. -3

Rozwiązanie. Po dodaniu liczby 10 do obu stron danej równości i wyciągnięciu przed nawias czynnika $x^2 + 1$ po lewej stronie, uzyskujemy

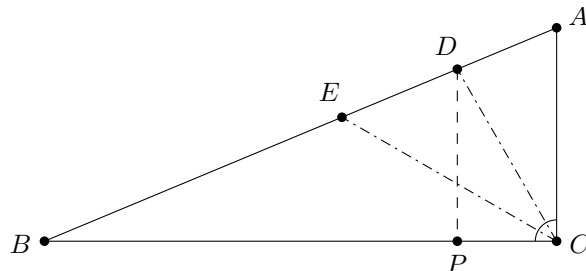
$$(x^2 + 1)(y^2 + 6y + 10) = 52.$$

Obecnie po lewej stronie powyższej równości wyrażenie możemy potraktować jako iloczyn dwóch funkcji kwadratowych $f(x) = x^2 + 1$ oraz $g(y) = y^2 + 6y + 10$. Ponieważ wykresy funkcji kwadratowych są symetryczne, a w tym wypadku każda z nich jest najpierw malejąca, a potem rosnąca, więc najmniejsza wartość x_0 prowadzi do największej wartości f . To z kolei oznacza, że $g(y_0)$ jest najmniejsze możliwe (iloczyn $f(x)g(y)$ jest pewną dodatnią stałą). Wystarczy więc znaleźć punkt, w którym funkcja $g(y) = (y+3)^2 + 1$ osiąga minimum, a jest nim $y_0 = -3$.

Zadanie 40. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkty D i E leżą na boku AB , przy czym punkt D leży między punktami A i E , oraz półproste CD i CE dzielą kąt ACB na trzy równe części. Znajdź $AC : BC$ wiedząc, że $DE : BE = 8 : 15$.

Wynik. $4\sqrt{3}/11$

Rozwiązanie. Niech P będzie punktem na odcinku BC takim, że $DP \parallel AC$. Jako, że trójkąty ABC i DBP są podobne, to $AC : BC = DP : BP$.



Ponieważ CE dwusieczną kąta wewnętrznego w trójkącie BCD , więc z twierdzenia o dwusiecznej uzyskujemy równość $CD : CB = ED : EB = 8 : 15$. Ponadto trójkąt prostokątny CDP jest połową trójkąta równobocznego, więc $DP = \frac{\sqrt{3}}{2} CD$ oraz $BP = CB - CP = CB - \frac{1}{2} CD$, a zatem

$$\frac{DP}{BP} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} CD}{\frac{15}{8} CD - \frac{1}{2} CD} = \frac{4\sqrt{3}}{11}.$$

Zadanie 41. Mikołaj gra ze starszym bratem w grę. Jego brat wybiera w tajemnicy liczbę całkowitą z przedziału od 1 do N (włącznie), a zadaniem Mikołaja jest jej odgadnięcie. W każdej turze Mikołaj wybiera pewną liczbę całkowitą. Jeśli trafił w tajemną liczbę brata, gra się kończy, w przeciwnym razie dostaje informację o tym, czy jego strzał jest większy, czy mniejszy od tajemnej liczby. Niestety, jego brat, korzystając z przewagi wieku, wprowadził do gry dodatkową regułę: jeśli podana przez Mikołaja liczba jest za mała, Mikołaj musi mu zapłacić 2 zł, a jeśli jest za duża 1 zł (w przypadku trafienia brat nie pobiera opłaty). Wyznacz największe takie N , że Mikołaj może zawsze zgadnąć liczbę brata dysponując budżetem 10 zł.

Wynik. 232

Rozwiązanie. Oznaczmy przez N_k maksymalne N takie, że dysponując kwotą k zł Mikołaj może zawsze zgadnąć liczbę z przedziału $1, \dots, N$ (lub równoważnie, z dowolnego N -elementowego zbioru liczb całkowitych); naszym celem jest znalezienie N_{10} . Jasne jest, że $N_0 = 1$ oraz $N_1 = 2$. Wykażemy, że te liczby spełniają zależność rekurencyjną

$$N_{k+2} = N_{k+1} + N_k + 1.$$

Istotnie, jeśli Mikołaj ma $k+2$ zł i wybiera numer $N_{k+1} + 1$, wtedy albo jest to szukany numer, albo jest za duży (w takiej sytuacji kontynuuje z kwotą $k+1$ zł i zbiorem długości N_{k+1}), albo za mały (co skutkuje kwotą k zł i N_k możliwościami). Stąd mamy $N_{k+2} \geq N_{k+1} + N_k + 1$. Z drugiej strony, jeśli jest więcej niż $N_{k+1} + N_k + 1$ liczb z których Mikołaj może wybierać, to wybranie numeru większego niż $N_{k+1} + 1$ daje więcej niż N_{k+1} możliwości, lecz wtedy zostaje tylko $k+1$ zł (zbyt duży numer). Analogicznie, wybór numeru mniejszego niż $N_{k+1} + 2$ może prowadzić do więcej niż N_k możliwości, ale zostanie tylko k zł (zbyt mały numer). To kończy dowód postulowanej rekurencji.

Wartość $N_{10} = 232$ może być teraz bezpośrednio obliczona za pomocą podanej rekurencji.

Zadanie 42. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają nierówności $a \geq b \geq c$ oraz równość

$$a + b + c + 2ab + 2bc + 2ca + 4abc = 2017.$$

Znajdź wszystkie możliwe wartości liczby a .

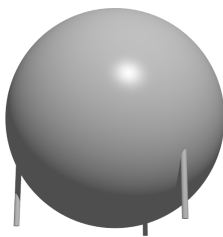
Wynik. 134

Rozwiązanie. Zauważmy, że po pomnożeniu lewej strony równania przez 2 i dodaniu 1 otrzymujemy

$$1 + 2a + 2b + 2c + 4ab + 4bc + 4ca + 8abc = (2a+1)(2b+1)(2c+1).$$

Te same rachunki zastosowane do prawej strony dają $2 \cdot 2017 + 1 = 4035$. Rozkładając tę liczbę na czynniki pierwsze otrzymujemy $4035 = 3 \cdot 5 \cdot 269$. Jednakże $a \geq b \geq c \geq 1$, więc muszą zająć następujące równości: $2a+1 = 269$, $2b+1 = 5$ oraz $2c+1 = 3$. Stąd $a = 134$.

Zadanie 43. Statek kosmitów ma kształt idealnej kuli o promieniu R , podpartej na trzech równoległych pionowych nogach o długości 1 sk (sążni kosmickich) i zaniedbywalnej grubości. Dolne końce nóg tworzą trójkąt równoboczny o boku długości 9 sk, a gdy statek spoczywa na płaskiej powierzchni, najniższy punkt kuli dokładnie się z nią styka. Ile wynosi R (w sk)?

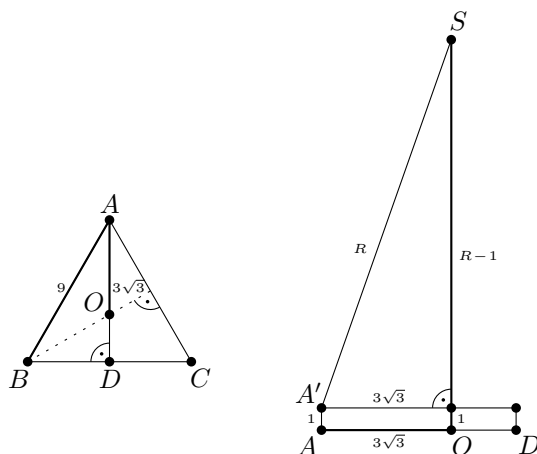


Wynik. 14

Rozwiązanie. Oznaczmy dolne końce nóg statku przez A, B, C , a odpowiadające im górne końce odpowiednio przez A', B', C' . Niech O będzie środkiem trójkąta ABC (czyli punktem styczności statku z podłożem), S będzie środkiem kulistej części statku oraz $D = AO \cap BC$. Wówczas $AO = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$ sk, $AA' = 1$ sk oraz $SO = SA' = R$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$(SO - AA')^2 + AO^2 = SA'^2, \quad \text{czyli} \quad (R - 1)^2 + 27 = R^2,$$

skąd otrzymujemy $R = 14$ sk.



Zadanie 44. Czterej bracia Arek, Bartek, Czarek i Darek zebrali dużą liczbę orzechów pistacjowych. W nocy Arek obudził się z nieodpartą chęcią jedzenia, więc zdecydował się zjeść pewną część orzechów. Policzawszy je, stwierdził, że po odrzuceniu jednego orzeszka, pozostałą część można podzielić na cztery równe części; zjadł więc jeden z orzechów oraz jedną czwartą reszty i wrócił do łóżka. Później tej samej nocy obudził się głodny Bartek i podobnie zjadł jednego orzecha, a następnie czwartą część pozostałych. Do rana to samo przydarzyło się także Czarkowi i Darkowi. Gdy rano bracia spotkali się, zauważyli, że liczba orzechów po odrzuceniu jednego dzieli się przez cztery. Jaka jest najmniejsza liczba orzechów, które mogli zebrać bracia?

Wynik. 1021

Rozwiązanie. Na początku nocy dodajmy do zebranych orzechów trzy „sztuczne” (np. kamienie). Wówczas łączna liczba wszystkich orzechów jest wielokrotnością czwórki. Co więcej, po przekąsce Arka łączna liczba orzechów wciąż jest wielokrotnością 4, a wśród nich pozostają trzy „sztuczne”. Powtarzając to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że początkowa łączna liczba orzechów (włączając „sztuczne”) jest równa $4^5 k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k . Wobec tego liczba zebranych orzechów jest postaci $4^5 k - 3$. Podstawiając $k = 1$, otrzymujemy szukane minimum $4^5 - 3 = 1021$.

Zadanie 45. Dodatnią liczbę całkowitą nazywamy *pistacjową*, jeżeli każdy z jej dzielników pierwszych jest równy 2, 3 lub 7. Ile spośród liczb 1000, 1001, ..., 2000 jest pistacjowych?

Wynik. 19

Rozwiązanie. Rozpocznijmy od obserwacji: Jeśli x jest liczbą rzeczywistą taką, że $x > 1/2$, to istnieje dokładnie jedna całkowita potęga dwójki w przedziale $[x, 2x)$.

Nazwijmy liczbę *limonkową* jeśli wszystkie jej dzielniki pierwsze to 2 i 3. Liczbę limonkowych liczb w przedziale $[x, 2x)$ możemy obliczyć w następujący sposób: Istnieje dokładnie jedna potęga dwójki w przedziale $[x, 2x)$. Ponadto,

w przedziale $[x, 2x)$ istnieje co najwyżej jedna limonkowa liczba (powiedzmy c_1) podzielna przez 3, ale nie przez 3^2 , jeśli $c_1/3$ jest jedyną potęgą dwójki w przedziale $[x/3, 2x/3)$ zakładając, że $x > 1/6$. Kontynuując to rozumowanie, znajdziemy wszystkie liczby limonkowe podzielne przez 3^2 ale nie przez 3^3 itd. dopóki $[x/3^k, 2x/3^k) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ tzn. $x < 3^{-k}/2$. Wobec tego liczba liczb limonkowych w przedziale $[x, 2x)$ jest o 1 większa od największej liczby k takiej, że $3^k < 2x$; oznaczmy, tę liczbę przez $\ell_3(x)$.

Aby obliczyć sumę wszystkich liczb pistacjowych w przedziale $[x, 2x)$, wykorzystamy podobny argument: szukana liczba jest sumą liczb limonkowych w przedziałach $[x, 2x)$, $[x/7, 2x/7)$, $[x/7^2, 2x/7^2)$ itd. Zatem możemy ją wyrazić jako sumę $\ell_3(x) + \ell_3(x/7) + \ell_3(x/7^2) + \dots$, mającą $\ell_7(x)$ składników, gdzie symbol ℓ_7 definiujemy analogicznie jak ℓ_3 .

Ostatecznie z tego, że 2000 nie jest pistacjową liczbą, nasze zadanie sprowadza się do obliczenia wartości wyrażenia

$$\ell_3(1000) + \ell_3(1000/7) + \ell_3(1000/49) + \ell_3(1000/343) = 7 + 6 + 4 + 2 = 19.$$

Zadanie 46. Imperator Decymus zakazał używania cyfry 0 (wprowadzonej przez jego poprzednika, Nullusa) i wprowadził zamiast niej do użycia cyfrę D dla oznaczenia wielkości 10, ustanawiając tym samym *notację Decymusa*. Każda dodatnia liczba całkowita ma w tej notacji jednoznaczne przedstawienie, np. dotychczas zawierająca 0 liczba 4106 ma nową postać 3DD6, gdyż

$$3DD6 = 3 \cdot 1000 + 10 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 4106.$$

Aby ułatwić przejście na nowy system liczbowy, powstała lista wszystkich dodatnich liczb całkowitych od 1 do DDD (włącznie). Ile razy nowa cyfra D występuje na tej liście? Liczymy wszystkie wystąpienia, nawet wielokrotne w tej samej liczbie, np. DD daje dwa wystąpienia D.

Wynik. 321

Rozwiązanie. Zauważmy że wszystkie liczby k -cyfrowe (w notacji Decymusa) mają dokładne przedstawienia za pomocą układów

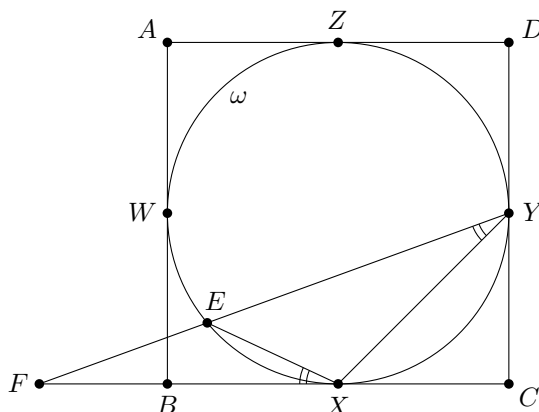
$$\underbrace{1 \dots 1}_k, \dots, \underbrace{D \dots D}_k.$$

W związku z tym, aby obliczyć całkowitą liczbę wystąpień cyfry D wśród liczb k -cyfrowych, możemy pogrupować liczby mające w zapisie D na pierwszej pozycji, drugiej itd. aż do k -tej pozycji (jedna liczba może należeć do kilku grup gdy ma w swoim zapisie więcej niż jedno D). Dla każdej takiej wybranej pozycji jest dokładnie 10^{k-1} takich liczb w danej grupie-pozostaje uzupełnić brakujące $k-1$ pozycji za pomocą symboli $1, \dots, 9, D$. Ponieważ dla każdej liczby zliczamy wszystkie wystąpienia D, więc możemy dowolne takie liczby w których D występuje wielokrotnie, zliczać wielokrotnie jako elementy wszystkich takich grup dostając prawidłowy wynik, więc jest $k \cdot 10^{k-1}$ wystąpień cyfr D wśród liczb k -cyfrowych. Z powyższego wnosimy że wśród liczb $1, \dots, DDD$, cyfra D pojawia się $1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 = 321$ razy.

Zadanie 47. W kwadrat $ABCD$ wpisano okrąg ω , który jest styczny do boków AB , BC , CD i DA odpowiednio w punktach W , X , Y , Z . Niech E będzie punktem leżącym na krótszym łuku WX okręgu ω , a F będzie punktem przecięcia prostych BC i EY . Wiedząc, że $EF = 5$ i $EY = 7$, znajdź pole trójkąta FYC .

Wynik. 21

Rozwiązanie. Z twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym otrzymujemy $\sphericalangle EXF = \sphericalangle EYX$. Wobec tego trójkąty FEX i FYX są podobne (bowiem mają też wspólny kąt przy wierzchołku F). Zatem $EF : XF = XF : YF$, skąd wniosek, że $XF^2 = EF \cdot YF = 5 \cdot 12 = 60$ (równość tę można było też uzasadnić powołując twierdzenie o potędze punktu względem okręgu).



Niech $t = \frac{1}{2}AB$ będzie połową długości boku kwadratu $ABCD$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy

$$YF^2 = t^2 + (t + XF)^2 = 2t^2 + 2t \cdot XF + XF^2 = 2t(t + XF) + XF^2,$$

zatem pole trójkąta FYC można wyrazić następująco:

$$\frac{1}{2} \cdot YC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (t + XF) = \frac{1}{4}(YF^2 - XF^2) = 21.$$

Zadanie 48. W działaniu

$$WE \cdot LIKE = NABOJ$$

każdą cyfrę zastąpiono literą, przy czym takie same cyfry zastąpiono takimi samymi literami, a różne cyfry — różnymi literami. Przy tym wiemy, że $S(WE) = 11$, $S(LIKE) = 23$ oraz $S(NABOJ) = 19$, gdzie $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Żadna z trzech liczb w powyższym działaniu nie może zaczynać się od zera. Wyznacz liczbę $NABOJ$.

Wynik. 60724

Rozwiązanie. Ponieważ w działaniu występuje 10 różnych liter, więc wszystkie cyfry $0, 1, \dots, 9$ zostały w nim użyte. Suma wszystkich cyfr jest równa 45. Dodając trzy dane sumy cyfr, otrzymujemy z jednej strony $11 + 23 + 19 = 53$, z drugiej zaś $45 + E$. To prowadzi do wniosku $E = 8$ i w konsekwencji $J = 4$ (gdyż liczba $NABOJ$ kończy się tą samą cyfrą, co E^2). Ponadto, z warunku $S(WE) = 11$, otrzymujemy $W = 3$.

Dalej, zauważmy, że

$$LIKE < \frac{100000}{38} < 2636.$$

Wobec tego $L = 1$ lub $L = 2$. W przypadku $L = 2$ warunek dotyczący sumy cyfr $LIKE$ prowadzi do $I + K = 13$, co oznacza, że $\{I, K\} \in \{\{4, 9\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}\}$. Jednak żadna z tych par nie jest możliwa, gdyż liczby 4 oraz 8 zostały już przyporządkowane do innych liter, a dla $\{I, K\} = \{6, 7\}$ czynnik $LIKE$ przekracza górne oszacowanie uzyskane wyżej. Stąd wniosek, że $L = 1$. Warunek $S(LIKE) = 23$ prowadzi do $I + K = 14$, co ogranicza możliwe pary (I, K) do $(5, 9)$ lub $(9, 5)$. Bezpośrednio obliczając, stwierdzamy, że tylko $(I, K) = (5, 9)$ prowadzi do rozwiązania wyjściowego kryptogramu. Ponieważ $38 \cdot 1598 = 60724$, więc wynik to $NABOJ = 60724$.

Zadanie 49. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których suma wszystkich nietrywialnych dzielników liczby n jest równa 63.

Uwaga. Dzielnik d liczby n nazywamy *nietrywialnym*, jeżeli $1 < d < n$.

Wynik. 56, 76, 122

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $s(n)$ sumę wszystkich nietrywialnych dzielników dodatniej liczby całkowitej n . Prosta analiza prowadzi do wniosku, że zadanie nie ma rozwiązania, jeżeli liczba n ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze: $s(2 \cdot 3 \cdot 5) = 41$, $s(2 \cdot 3 \cdot 7) = 53$, a dla większych wartości n liczba $s(n)$ przekracza 63. Co więcej, jeżeli n jest potęgą liczby pierwszej p , to $s(n)$ jest liczbą podzielną przez p . Jedyne potencjalne rozwiązania w tym przypadku mogłyby istnieć dla $p = 3$ lub $p = 7$, ale bezpośrednio sprawdzamy, że żadna potęga 3 ani 7 nie spełnia warunków zadania.

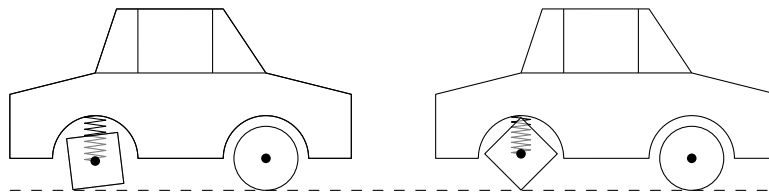
W związku z powyższym liczba n ma dokładnie dwa różne dzielniki pierwsze p, q , tzn. każde rozwiązanie zadania można przedstawić w postaci $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ dla $\alpha, \beta \geq 1$. Jeżeli $\alpha = \beta = 2$, to dla $p = 2$, $q = 3$ otrzymujemy $s(n) = 54$, a dla większych parametrów α, β, p, q (co najmniej jednego z nich) — $s(n) > 63$. To oznacza, że co najmniej jeden z wykładników α, β musi być mniejszy od 2; w szczególności n nie jest kwadratem liczby całkowitej, wobec czego ma parzystą liczbę nietrywialnych dzielników. Stąd, gdyby wszystkie dzielniki były nieparzyste, liczba $s(n)$ byłaby parzysta, czyli różna od 63. Stąd wniosek, że jedna z liczb p, q jest równa 2; bez straty ogólności przyjmijmy, że $q = 2$.

Z tych samych przyczyn, łączna liczba nietrywialnych dzielników nieparzystych (konkretnie $p, p^2, \dots, p^\alpha$) jest nieparzysta, więc α jest liczbą nieparzystą. Jednak nawet w przypadku $p = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, wartość $s(n)$ przekracza 63, wobec czego $\alpha = 1$. W takim razie

$$s(n) = 2 + 2^2 + \dots + 2^\beta + p + 2p + \dots + 2^{\beta-1}p = (2^\beta - 1)(p + 2).$$

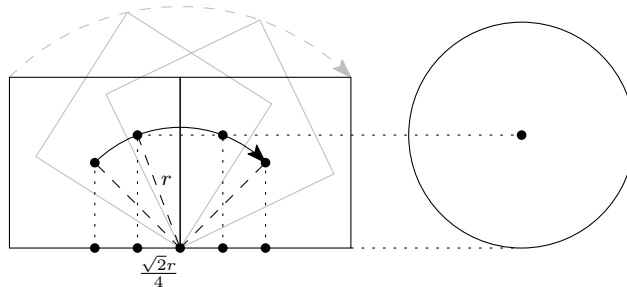
Spośród wszystkich dzielników liczby 63 tylko 1, 3 oraz 7 są postaci $2^\beta - 1$ dla pewnej liczby całkowitej β . Prowadzą one odpowiednio do $p = 61$, $p = 19$ oraz $p = 7$ i w konsekwencji możliwe wartości liczby n to $2 \cdot 61 = 122$, $2^2 \cdot 19 = 76$ oraz $2^3 \cdot 7 = 56$.

Zadanie 50. Beata ma odjazdowy samochód z kwadratowymi tylnymi kołami (przednie są standardowo okrągłe). Taki samochód zwykle nie jest przyjemny do prowadzenia, ale Beata zamontowała bardzo dobry amortyzator do tylnych kół, dzięki któremu podczas jazdy po płaskiej drodze, nadwozie jest cały czas równoległe do drogi oraz nie rusza się kierunku pionowym. Długość boku tylnego koła wynosi 40 cm oraz oś tylnych kół nie zmienia pozycji w kierunku poziomym w stosunku do nadwozia. Jaki jest promień przedniego koła (w cm), który powoduje, że kiedy samochód porusza się ze stałą prędkością do przodu (po płaskiej drodze), oś tylnych kół jest dokładnie przez połowę czasu niżej i przez połowę czasu wyżej od osi przednich kół?



Wynik. $10\sqrt{7}$

Rozwiązanie. Rozważmy trajektorię środka kwadratu gdy samochód porusza się w przód — składa się ona z ćwiartek okręgów o środkach w wierzchołku kwadratu



Jeśli samochód porusza się w przód ze stałą szybkością, taka ćwiartka okręgu może być rozpatrywana jako wykres wysokości położenia tylnej osi jako funkcji w czasie. Stąd poszukiwany promień przedniego koła jest równy wysokości dokładnie w jednej czwartej odległości poziomej. Niech r będzie promieniem łuku; wtedy ta ćwiartka równa się $r\sqrt{2}/4$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy że wysokość w takim momencie wynosi

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}r\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{8}}r.$$

Ostatecznie podstawiając $r = 20\sqrt{2}$ otrzymujemy wynik.

Zadanie 51. Miasto Przyszłości ma kształt 2017-kąta foremnego, w którego wierzchołkach rozmieszczonych jest 2017 stacji metra. Na planie miasta są one ponumerowane kolejno liczbami $1, 2, \dots, 2017$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. W mieście są dwie linie metra: *brzegowa* i *diagonalna*. Linia brzegowa zapewnia bezpośrednie połączenie ze stacji a do stacji b (ale nie w przeciwnym kierunku) wtedy i tylko wtedy, gdy $a - b + 1$ jest liczbą podzielną przez 2017. Podróż na każdym takim odcinku trwa 1 minutę. Linia diagonalna obsługuje bezpośrednie połączenie ze stacji a do stacji b wtedy i tylko wtedy, gdy $2b - 2a + 1$ jest liczbą podzielną przez 2017. Podróż na każdym takim odcinku trwa 15 minut. Maciek jest zapalonym użytkownikiem metra i rozpoczynając ze stacji 1 chce on wybrać się w podróż metrem do stacji n o następującej własności: najkrótszy możliwy czas dojazdu metrem do stacji n jest nie krótszy niż najkrótszy możliwy czas dojazdu do którejkolwiek innej stacji. Znajdź wszystkie możliwe numery n docelowych stacji Maćka.

Wynik. 1984, 1985

Rozwiązanie. Zauważmy, że zarówno stacja docelowa, jak i łączny czas przejazdu, zależą tylko od liczby przejazdów linią brzegową i liczby przejazdów linią diagonalną, nie zaś od kolejności wyboru poszczególnych linii. Co więcej, każda trasa złożona z co najmniej dwóch połączeń diagonalnych i co najmniej jednego brzegowego może zostać skrócona przez ominięcie takich trzech przejazdów (nie zmieniając stacji końcowej) — jest to jasne, gdy takie trzy przejazdy są kolejne, a w ogólności wynika z poprzedniej obserwacji. Wobec tego możemy ograniczyć się do rozważania jedynie tras, w których Maciek korzysta wyłącznie z linii diagonalnej lub korzysta z niej co najwyżej raz.

Jeżeli $n \geq 1009$, to korzystając raz z linii diagonalnej oraz $n - 1009$ razy z linii brzegowej, Maciek dotrze do stacji n w ciągu $15 + (n - 1009)$ minut. Z drugiej strony, korzystając tylko z linii diagonalnej, dotrze on do stacji n w $2 \cdot (2018 - n) \cdot 15$ minut. Chcemy więc znaleźć $n \geq 1009$ o tej własności, że $M(n) = \min\{n - 994, 30 \cdot 2018 - 30n\}$ ma największą możliwą wartość. Mamy

$$n - 994 \leq 30 \cdot 2018 - 30n \iff n \leq \frac{30 \cdot 2018 + 994}{31} = 2018 - 33 - \frac{1}{31} = 1985 - \frac{1}{31}.$$

Wobec tego dla $n \leq 1984$:

$$M(n) = n - 994 \leq 1984 - 994 = 990,$$

a dla $n \geq 1985$:

$$M(n) = 30 \cdot (2018 - n) \leq 30 \cdot (2018 - 1985) = 990,$$

więc szukany najdłuższy pośród wszystkich stacji najkrótszy czas dotarcia jest równy 990 i jest osiągalny dla $n = 1984$ oraz $n = 1985$.

Pozostaje sprawdzić, że dla $n < 1009$ można dotrzeć do stacji o numerze n w mniej niż 990 minut. Dla $n \leq 990$ Maciek może dostać się do stacji n w $n - 1$ minut korzystając tylko z linii brzegowej. Z kolei dla $n \geq 991$ może on dostać się do odpowiedniej stacji w $15 \cdot (2 \cdot (1009 - n) + 1) \leq 15 \cdot 37 = 555$ minut korzystając tylko z linii diagonalnej.

Zadanie 52. Niech $f(n)$ oznacza liczbę dodatnich liczb całkowitych, które mają dokładnie n cyfr i których suma cyfr jest równa 5. Ile spośród 2017 liczb całkowitych $f(1), f(2), \dots, f(2017)$ ma cyfrę jedności równą 1?

Wynik. 202

Rozwiązanie. Każdą n -cyfrową liczbę o sumie cyfr równej 5 można utożsamić z przyporządkowaniem 5 jedynek do pewnych spośród n możliwych pozycji cyfr tej liczby. Każda z tych pozycji może mieć przyporządkowaną nieujemną liczbę jedynek, a pierwsza z lewej — dodatnią liczbę jedynek (czyli co najmniej jedną). Wobec tego liczba n -cyfrowych

liczb o sumie cyfr równej 5 jest równa liczbie sposobów rozmieszczenia 4 jedynek (wszystkich oprócz pierwszej) na n pozycjach. Innymi słowy, interesuje nas liczba 4-elementowych kombinacji z powtórzeniami liczby n , czyli

$$f(n) = \binom{n+4-1}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{24}.$$

W dalszej części rozwiązania funkcja f będzie odnosiła się do powyższego iloczynu, a nie wyjściowej definicji.

Przejdźmy do policzenia tych wartości $f(n)$, których cyfra jedności jest równa 1. Zauważmy najpierw, że jeżeli liczba n daje przy dzieleniu przez 5 jedną z reszt 0, 2, 3 lub 4, to jedna z liczb n , $n+3$, $n+2$ lub $n+1$ jest podzielna przez 5. Ponieważ liczby 24 i 5 są względnie pierwsze, więc wówczas $f(n)$ również jest liczbą podzielną przez 5, a zatem ostatnią cyfrą tej liczby jest 0 lub 5. To oznacza, że ostatnia cyfra liczby $f(n)$ może być równa 1 tylko wtedy, gdy n daje resztę 1 przy dzieleniu przez 5.

Zauważmy ponadto, że $f(n)$ oraz $f(n+40)$ mają tę samą cyfrę jedności. Rzeczywiście, aby to uzasadnić, wystarczy stwierdzić, że różnica liczb jest podzielna przez 10. Po odjęciu od

$$24f(n+40) = (40+(n))(40+(n+1))(40+(n+2))(40+(n+3)),$$

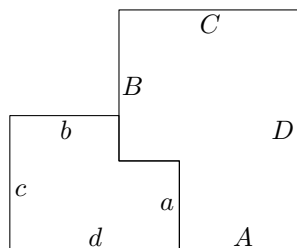
liczby $24f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, uzyskujemy sumę iloczynów czterech liczb, z których każdy zawiera albo co najmniej dwa czynniki równe 40, albo co najmniej trzy czynniki postaci $n+i$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Każdy składnik pierwszego typu jest podzielny przez 40^2 , a każdy składnik drugiego typu jest podzielny przez 80 (gdyż oprócz 40 zawiera dwa czynniki będące kolejnymi liczbami naturalnymi). Po podzieleniu całej sumy przez $24 = 8 \cdot 3$, uzyskujemy liczbę podzielną przez 10, zgodnie ze sformułowanym stwierdzeniem. W konsekwencji, wystarczy sprawdzić cyfry jedności wartości f tylko dla pewnych (dowolnych) 40 kolejnych argumentów całkowitych.

Bezpośrednio sprawdzamy, że

$$f(n) = f(-3-n). \quad (\star)$$

Biorąc pod uwagę wszystkie poczynione spostrzeżenia, wystarczy obliczyć wartości: $f(1) = 1$, $f(6) = 126$, $f(11) = 1001$ oraz $f(16) = 3876$. Tożsamość $(\star)$ prowadzi do wniosku, że wśród pozostałych czterech liczb postaci $f(5k+1)$ (tj. $f(-4)$, $f(-9)$, $f(-14)$ i $f(-19)$) dwie mają cyfrę jedności 1 i dwie mają cyfrę jedności 6. Wobec tego $4 \cdot 2000/40 = 200$ spośród liczb $f(1), \dots, f(2000)$ ma cyfrę jedności równą 1, a pośród liczb $f(2001), \dots, f(2017)$ własność tę mają $f(2001)$ oraz $f(2011)$. Łącznie są więc 202 liczby o opisanej własności.

Zadanie 53. Rysunek przedstawia dwa podobne sześciokąty wklęsłe, których pewne boki mają odpowiednio długości a , b , c , d oraz A , B , C , D . Układając te dwa sześciokąty obok siebie, jak pokazano na rysunku, uzyskujemy sześciokąt podobny do każdego z nich. Znajdź stosunek $A : a$.



Wynik. $\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$

Rozwiązanie. Nazwijmy trzy podobne sześciokąty znajdujące się na rysunku *małym*, *średnim* i *dużym* oraz oznaczmy szukaną proporcję przez p . Z podobieństwa małego i średniego sześciokąta wynika, że

$$p = A : a = B : b = C : c = D : d.$$

Ponadto bezpośrednio z rysunku odczytujemy równości $D = B + a$ oraz $C + b = A + d$. Ponieważ $A : D < C : D$, więc w opisanym podobieństwie średniego i dużego sześciokąta bok A odpowiada bokowi c (a nie C). Stosunek $B : A$ w średnim sześciokącie odpowiada więc stosunkowi $C : c$ w dużym sześciokącie. Wobec tego $B : A = p$ i w konsekwencji $B = p^2 a$. Analogiczne obserwacje dla średniego i dużego sześciokąta prowadzą do $b : a = C : B = D : C$, skąd

$$d : a = \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = p^3.$$

Uwzględniając wszystkie trzy otrzymane równości w związku $D = B + a$, otrzymujemy $pd = p^2 a + a = a(p^2 + 1)$, a zatem $p^4 = p^2 + 1$. Jedynym dodatnim rozwiązaniem równania $p^4 - p^2 - 1 = 0$ (kwadratowego względem zmiennej p^2) jest $p^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Stąd uzyskujemy odpowiedź $p = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Zadanie 54. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) , dla których wszystkie pierwiastki każdego z równań

$$\begin{aligned} x^2 - ax + a + b - 3 &= 0, \\ x^2 - bx + a + b - 3 &= 0 \end{aligned}$$

również są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Wynik. $(2, 2), (6, 6), (7, 8), (8, 7)$

Rozwiązanie. Niech k, l będą pierwiastkami pierwszego równania, a m, n będą pierwiastkami drugiego równania. Łatwo zauważyć, że jeżeli czwórka (k, l, m, n) jest rozwiązaniem, to zamieniając k z l lub m z n , również otrzymujemy rozwiązanie — w związku z tym będziemy rozważać tylko jedno z takich czterech rozwiązań. Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$k + l = a, \quad m + n = b, \quad kl = mn = a + b - 3,$$

skąd

$$kl + mn = 2a + 2b - 6 = 2k + 2l + 2m + 2n - 6,$$

czyli

$$(k - 2)(l - 2) + (m - 2)(n - 2) = 2.$$

Jeżeli obydwa składniki $(k - 2)(l - 2)$ oraz $(m - 2)(n - 2)$ są dodatnie (tj. równe 1), to uzyskujemy rozwiązania $(k, l, m, n) = (3, 3, 3, 3)$ oraz $(k, l, m, n) = (1, 1, 1, 1)$. Jeżeli jeden z tych składników jest równy 0, to mamy rozwiązania $(k, l, m, n) = (2, 6, 3, 4)$ oraz $(k, l, m, n) = (3, 4, 2, 6)$.

Pozostaje przypadek, w którym jeden ze składników $(k - 2)(l - 2)$ oraz $(m - 2)(n - 2)$ jest liczbą ujemną; aby było to możliwe, jedna z liczb k, l, m, n musi być równa 1. Bez straty ogólności założmy, że $k = 1$. Wówczas $l = mn$ i rozważane równanie można przekształcić do postaci

$$2 = -(l - 2) + (m - 2)(n - 2) = -mn + 2 + mn - 2m - 2n + 4 = -2m - 2n + 6,$$

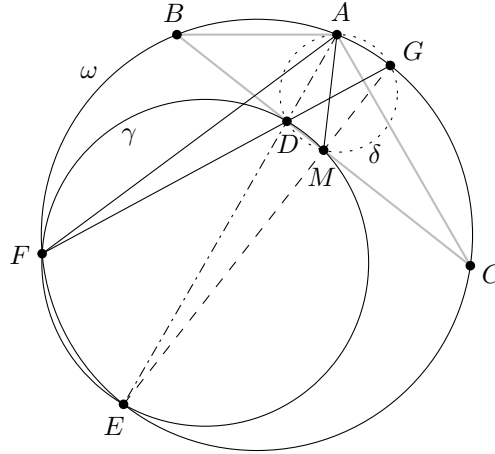
czyli $m + n = 2$, skąd $m = n = 1$ oraz $l = mn = 1$. Stąd wniosek, że nie istnieje rozwiązanie, w którym jeden ze składników jest ujemny.

Ostatecznie, możliwymi wartościami $(a, b) = (k + l, m + n)$ są $(6, 6), (8, 7), (7, 8), (2, 2)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie te pary spełniają warunki zadania.

Zadanie 55. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg ω , przy czym $AB = 3, BC = 7$ oraz $AC = 5$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D , a okrąg ω w punkcie E (różnym od A). Niech γ będzie okręgiem o średnicy DE , a F — różnym od E punktem przecięcia okręgów ω i γ . Wyznacz długość odcinka AF .

Wynik. $30/\sqrt{19}$

Rozwiązanie. Symetralna odcinka BC przechodzi przez punkt E , gdyż $BE = CE$. Oznaczmy drugi punkt przecięcia tej symetralnej z okręgiem ω przez G . Wtedy EG jest średnicą tego okręgu. Niech M będzie środkiem odcinka BC . Korzystając z faktu, że kąt oparty na średnicy okręgu jest prosty, otrzymujemy $\sphericalangle GFE = \sphericalangle DFE = 90^\circ$.



Wnioskujemy stąd, że punkty G, D, F są współliniowe. Dalej, równości $\sphericalangle GMD = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle GAD = \sphericalangle GAE = 90^\circ$ pokazują, że punkty D, M, G, A leżą na jednym okręgu; oznaczmy go przez δ . Korzystając z równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku otrzymujemy

$$\sphericalangle AFD = \sphericalangle AFG = \sphericalangle AEG = \sphericalangle AEM$$

oraz

$$\sphericalangle FAD = \sphericalangle FAE = \sphericalangle FGE = \sphericalangle DGM = \sphericalangle DAM = \sphericalangle EAM.$$

Wynika stąd, że trójkąty AFD i AEM są podobne. Podobnie dowodzimy, że

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB = \sphericalangle AEB,$$

co, razem z równością $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAB$ (AE jest dwusieczną kąta A), dowodzi podobieństwa trójkątów CAD i EAB . Wobec tego

$$AF = AE \cdot \frac{AD}{AM} = AE \cdot \frac{AB \cdot \frac{AC}{AE}}{AM} = \frac{AB \cdot AC}{AM}.$$

Długość odcinka AM można obliczyć na przykład korzystając z twierdzenia kosinusów dla trójkąta ABA' , gdzie punkt A' jest taki, że czworokąt $ABA'C$ jest równoległobokiem:

$$AM = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC} = \frac{1}{2} \sqrt{19}.$$

Wnioskujemy stąd, że

$$AF = \frac{3 \cdot 5}{\frac{1}{2} \sqrt{19}} = \frac{30}{\sqrt{19}}.$$

Uwaga. Długość odcinka AM można także wyznaczyć ze wzoru na środkową trójkąta:

$$AM = \frac{1}{2} \sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2},$$

który z kolei można uzyskać jako bezpośredni wniosek z *twierdzenia Stewarta*.

Zadanie 56. Wyznacz liczbę uporządkowanych trójek (x, y, z) nieujemnych liczb całkowitych mniejszych od 2017, dla których liczba

$$(x + y + z)^2 - 704xyz$$

jest podzielna przez 2017.

Wynik. $2017^2 + 1 = 4068290$

Rozwiązanie. Warunek $2017 \mid (x + y + z)^2 - 704xyz$ można przepisać w postaci $704xyz \equiv (x + y + z)^2 \pmod{2017}$. W dalszej części rozwiązania wszystkie kongruencje rozważane będą modulo 2017. Ponieważ 2017 jest liczbą pierwszą, więc dla każdej dodatniej liczby całkowitej $a < 2017$ istnieje dokładnie jedna liczba całkowita mniejsza od 2017 (oznaczmy ją przez a^{-1}) taka, że $a \cdot a^{-1} \equiv 1$ (jest to tzw. *odwrotność liczby a modulo 2017*).

Zajmijmy się najpierw trójkami (x, y, z) , w których wszystkie trzy liczby x, y, z są różne od zera. Niech $y = kx$ i $z = lx$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych k, l (takie liczby zawsze istnieją: $k \equiv y \cdot x^{-1}$, $l \equiv z \cdot x^{-1}$). Podstawiając te równości do warunku z treści zadania, uzyskujemy

$$704klx^3 \equiv (x + kx + lx)^2,$$

co po pomnożeniu obu stron przez $(x^{-1})^2$ przybiera postać

$$704klx \equiv (1 + k + l)^2.$$

W końcu, mnożąc ostatnią kongruencję stronami przez $(704kl)^{-1}$, otrzymujemy

$$x \equiv (704kl)^{-1} (1 + k + l)^2.$$

Stąd wynika, że dla każdych $k, l \in \{1, 2, \dots, 2016\}$ istnieje dokładnie jedna liczba x spełniająca warunki zadania. Parę liczb k, l możemy wybrać na 2016^2 sposobów. Jednak warunek $x \neq 0$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $k + l \not\equiv 2016$. Jest dokładnie 2015 takich par (k, l) , po jednej dla każdej wartości k z wyjątkiem 2016. Ostatecznie mamy więc dokładnie $2016^2 - 2015$ trójek (x, y, z) spełniających warunki zadania i takich, że $x, y, z \neq 0$.

Jeżeli $x = 0$ oraz $y, z \neq 0$, to $(y + z)^2 \equiv 0$, co ma miejsce dokładnie wtedy, gdy $y \equiv -z$. Jest więc dokładnie 2016 szukanych trójek postaci $(0, y, z)$.

Analogicznie uzyskujemy po 2016 trójek dla $y = 0$ i $xz \neq 0$ oraz $z = 0$ i $xy \neq 0$. W końcu jeżeli dwie z liczb x, y, z są zerami, to trzecia również musi być równa 0, co daje jeszcze jedną trójkę: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Podsumowując, łączna liczba szukanych trójek (x, y, z) jest równa

$$2016^2 - 2015 + 3 \cdot 2016 + 1 = 2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 + 1 = 2017^2 + 1.$$

Zadanie 57. Ela i Adam używają do gry symetrycznej kostki sześcienniej, która ma dwie ściany czerwone, dwie zielone i dwie niebieskie. Na przemian rzucają oni kostką, dopóki któreś z nich nie wyrzuci wszystkich trzech kolorów — ten gracz ogłaszany jest zwycięzcą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ela wygra, jeżeli jest ona graczem rozpoczynającym?

Wynik. $81/140$

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $P_1(x, y)$ prawdopodobieństwo, że rzucający właśnie kostką gracz wygra w tym rzucie, przy założeniu, że wyrzucił dotąd x różnych kolorów, a jego przeciwnik wyrzucił dotąd y kolorów. Niech $P_2(x, y)$ będzie analogicznie określonym prawdopodobieństwem dla gracza, który nie rzuca kostką w danym ruchu (czyli takim, że $P_1(x, y) + P_2(x, y) = 1$).

Chcemy więc wyznaczyć wartość $P_1(1, 1)$, tj. prawdopodobieństwo wygranej gracza rozpoczynającego (w momencie bezpośrednio po wykonaniu przez każdego z graczy po jednym rzucie, który jest praktycznie równoważny z początkiem gry).

Skoro $P_2(2, 2) = \frac{2}{3} P_1(2, 2)$, to $P_1(2, 2) = \frac{3}{5}$, $P_2(2, 2) = \frac{2}{5}$. Co więcej, ponieważ

$$P_2(2, 1) = \frac{2}{3} P_1(1, 2),$$

$$P_1(1, 2) = \frac{1}{3} P_2(2, 1) + \frac{2}{3} P_2(2, 2),$$

więc $P_1(1, 2) = \frac{12}{35}$, $P_2(1, 2) = \frac{23}{35}$, $P_1(2, 1) = \frac{27}{35}$ oraz $P_2(2, 1) = \frac{8}{35}$.

Wreszcie, zachodzi równość

$$P_1(1,1) = \frac{1}{3}P_2(1,1) + \frac{2}{3}P_2(1,2),$$

która prowadzi do $P_1(1,1) = \frac{81}{140}$.

Zadanie 58. Znajdź największą liczbę całkowitą n , dla której istnieje taka liczba całkowita k , że

$$k(k+1)(k+3)(k+6) = n(n+1).$$

Wynik. 104

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że dla każdej pary (k, n) spełniającej dane równanie, jedynym innym rozwiązaniem o tej samej wartości k jest $(k, -1-n)$. Pośród liczb całkowitych n , $-1-n$, jedna jest zawsze nieujemna, a druga — ujemna. Skoro interesuje nas znalezienie największej możliwej wartości n , możemy w dalszej części rozwiązania założyć, że $n \geq 0$. Przy tym warunku prawa strona danego równania $n(n+1)$ jest ściśle rosnącą funkcją n , więc aby zmaksymalizować n , należy zmaksymalizować lewą stronę danej równości.

Przyjmijmy oznaczenie

$$P(k) = k(k+1)(k+3)(k+6) = k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k.$$

Wykorzystamy fakt, że pośród dwóch kolejnych iloczynów dwóch kolejnych liczb całkowitych, tj. liczb postaci $n(n+1)$ oraz $(n+1)(n+2)$, nie występuje żadna liczba będąca iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. W tym celu rozważmy przybliżenie wielomianu $P(k)$ przez wielomian postaci

$$(k^2 + ak + b)(k^2 + ak + (b+1)),$$

gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Porównując współczynniki przy k^3 , przyjmujemy $a = 5$. Po wymnożeniu nawiasów otrzymujemy

$$\begin{aligned}(k^2 + ak + b)(k^2 + ak + (b+1)) &= (k^2 + 5k + b)(k^2 + 5k + (b+1)) = \\ &= k^4 + 10k^3 + (26 + 2b)k^2 + (10b + 5)k + (b^2 + b).\end{aligned}$$

Nie istnieje całkowita wartość b , dla której $26 + 2b = 27$. Podstawiając $b = 0$ oraz $b = 1$, otrzymujemy szacowania

$$k^4 + 10k^3 + 26k^2 + 5k \stackrel{(1)}{<} k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k \stackrel{(2)}{<} k^4 + 10k^3 + 28k^2 + 15k + 2,$$

prawdziwe dla odpowiednio dużej wartości bezwzględnej k . Wartość $P(k)$ jest wówczas ściśle pomiędzy dwoma kolejnymi liczbami postaci $n(n+1)$, więc rozwiązanie nie istnieje. Pozostaje więc sprawdzić, dla jakich wartości k powyższe nierówności zachodzą. Nierówność (1) sprowadza się do

$$0 < k^2 + 13k = k(k+13),$$

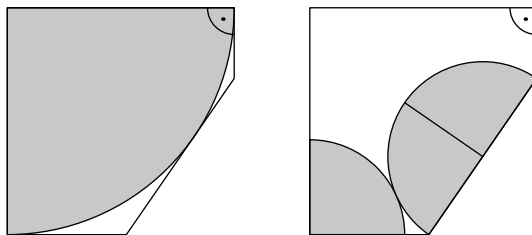
skąd $k > 0$ lub $k < -13$. Podobnie, (2) implikuje

$$0 < k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2),$$

skąd $k > 2$ lub $k < 1$. Wobec tego dla $k < -13$ lub $k > 2$ obydwie nierówności są prawdziwe. Dane równanie może mieć więc rozwiązanie jedynie wtedy, gdy $-13 \leq k \leq 2$.

Jeżeli w jednej z nierówności (1), (2) zachodzi równość, to wartość $P(k)$ jest postaci $n(n+1)$. To oznacza, że rozwiązania (k, n) istnieją dla $k = -13, 0, 1, 2$. Ponieważ wielomian $P(k)$ jest rosnący dla $k \geq 0$, a interesuje nas największa wartość tego wielomianu, przypadki $k = 0$, $k = 1$ nie są istotne. Podobnie, skoro $P(k)$ jest malejący dla $k \leq -6$, to wystarczy rozważyć $k = -5, -4, -3, -2, -1$. Jednak $P(k) \leq 0$ dla $-6 \leq k \leq -3$ oraz dla $-1 \leq k \leq 0$, więc spośród tych wartości potencjalne maksimum może być osiągnięte tylko dla $k = 2$. Bezpośrednio sprawdzamy, że spośród liczb $P(-13)$, $P(-2)$, $P(2)$, pierwsza jest największa. Dla $k = -13$ nierówność (1) staje się równością, więc $n = k^2 + 5k = 104$ stanowi rozwiązanie zadania.

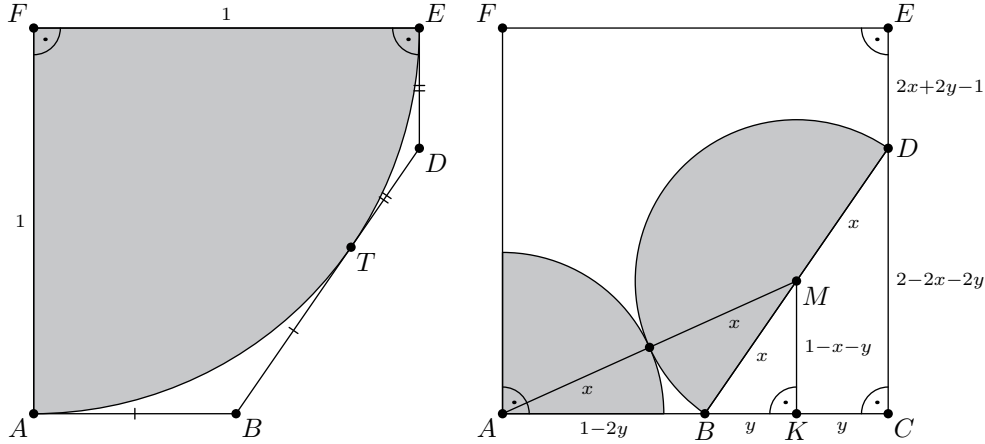
Zadanie 59. Pizzeria „Obiady Ćwiartkowe” dostarcza pizzę w unikalnych pięciokątnych pudełkach, które są przystosowane zarówno do przewozu ćwiartki dużej pizzy, jak i trzech ćwiartek małej pizzy (jak pokazano na rysunku). Ile wynosi (w cm) promień małej pizzy, jeżeli promień dużej pizzy jest równy 30 cm?



Wynik. $5(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4})$

Rozwiązanie. Niech $ABDEF$ będzie pięciokątem podobnym do opisanego pudełka takim, że $EF = 1$ (uznając 30 cm za jednostkę, otrzymujemy warunki zadania). Zauważmy, że $AF = EF$ (jako promienie dużej pizzy) oraz $\sphericalangle AFE = \sphericalangle BAF = 90^\circ$ (jako kąty środkowe w ćwiartkach kół), więc istnieje taki punkt C , że czworokąt $ACEF$ jest kwadratem.

Niech K, M będą środkami odpowiednio odcinków BC, BD i niech T będzie punktem styczności ćwiartki dużej pizzy do odcinka BD .



Oznaczmy przez x szukany promień małej pizzy. Wówczas $BD = 2x$. Ze styczności odpowiednich fragmentów kół, otrzymujemy $AM = 2x$ oraz $AB = BT, DE = DT$, skąd $AB + DE = BD$. Oznaczając $BC = 2y$, mamy więc $AB = 1 - 2y, DE = BD - AB = 2x + 2y - 1, CD = 2 - 2x - 2y$ i w końcu $KM = CD/2 = 1 - x - y$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów BKM i AKM , otrzymujemy

$$y^2 + (1 - x - y)^2 = x^2 \quad \text{oraz} \quad (1 - y)^2 + (1 - x - y)^2 = 4x^2.$$

Stąd

$$y^2 + 4x^2 - (1 - y)^2 = x^2, \quad \text{czyli} \quad y = \frac{1 - 3x^2}{2}.$$

Podstawiając tę zależność do jednej z powyższych równości, otrzymujemy po uproszczeniach

$$9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Zauważmy, że

$$9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 = (3x^2)^2 + (x - 1)^2 - 2 \cdot 3x^2(x - 1) - 7x^2 = (3x^2 - x + 1)^2 - 7x^2 = (3x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7} + 1)x + 1),$$

więc uzyskujemy równanie

$$(3x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7} + 1)x + 1) = 0.$$

Łatwo zauważyć, że pierwszy czynnik nie ma pierwiastków rzeczywistych, natomiast pierwiastki drugiego czynnika są postaci

$$\frac{1}{6} \left(1 + \sqrt{7} \pm \sqrt{2\sqrt{7} - 4} \right).$$

Jednak większy z tych dwóch pierwiastków jest większy od $1/2$, co jest sprzeczne z nierównością

$$2BD = BD + AB + DE < BC + CD + AB + DE = 2.$$

To oznacza, że $x = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4})$, skąd uzyskujemy odpowiedź:

$$30x = 5 \left(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4} \right) \text{ cm.}$$