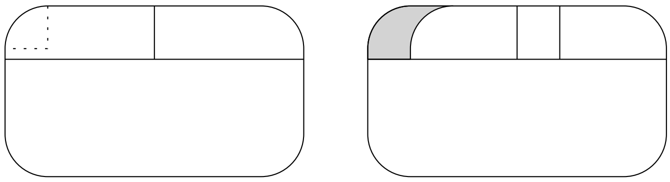
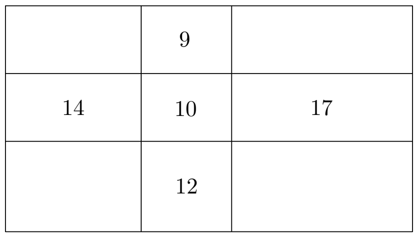
Úloha 1. Na obrázku vidíte, ako vyzerajú okná na starých električkách. Všetky oblé rohy sú štvrťoblúky kružnice s polomerom 10 cm. Na druhom obrázku je znázornená časť pootvoreného posuvného okna o 10 cm. Časť, ktorá sa dá posúvať, má výšku 13 cm. Aká je plocha otvorenej časti okna v cm^2?



Výsledok. 130

Riešenie. Je to len plocha posuvnej a pevnej časti okna, ktoré sa prekrývajú, čo je obdĺžnik $10\,\text{cm} \times 13\,\text{cm}$.

Úloha 2. Veľký obdĺžnik je rozdelený na deväť menších obdĺžnikov tak, ako na obrázku. Číslo vpísané v menšom obdĺžniku značí jeho obvod. Nájdite obvod veľkého obdĺžnika.



Výsledok. 42

Riešenie. Pozerajúc sa na obrázok si môžeme všimnúť, že obvod veľkého obdĺžnika je rovný súčtu obvodov štyroch menších vonkajších obdĺžnikov s vpísanými obvodmi mínus obvod stredného menšieho obdĺžnika. Správna odpoveď je teda

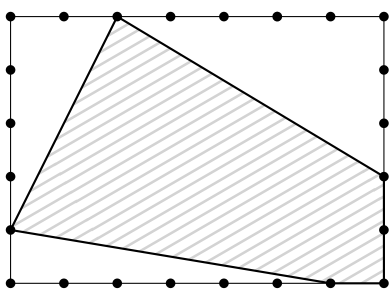
$$14 + 9 + 17 + 12 - 10 = 42.$$

Úloha 3. Matej zmazal jednu cifru zo štvorciferného prvočísla a dostal číslo 630. Aké bolo jeho prvočíslo?

Výsledok. 6301

Riešenie. Nakoľko posledná cifra štvorciferného prvočísla nemôže byť párna, tak hľadané prvočíslo bolo tvaru $630*$. Navyše posledná cifra nemôže byť 5, lebo číslo by bolo deliteľné piatimi. Ostali nám možnosti 1, 3, 7 a 9. Ale číslo 630 je deliteľné tromi, takže cifry 3 a 9 nemôžeme použiť. Podobne, 630 je deliteľné siedmimi, takže ani číslo 6307 nie je prvočíslo. Teda hľadané číslo je 6301.

Úloha 4. Slávny architekt Leonardo chce postaviť moderný palác s päťuholníkovou základňou na obdĺžnikovom pozemku s rozmermi 35 m a 25 m. Umiestniť ho chce presne tak, ako je naznačené na obrázku.



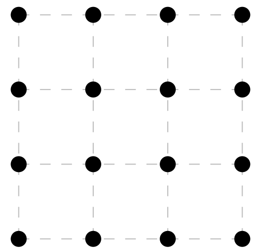
(Bodky na stranách obdĺžnika označujú vzdialenosť 5 m.) Vyjadrite zlomkom, akú časť pozemku zaberá základňa paláca.

Výsledok. $\frac{41}{70}$

Riešenie. Keďže nás zaujíma len podiel obsahov pozemkov, môžeme použiť 5 m ako jednotkovú dĺžku. Spočítaním obsahov troch pravouhlých trojuholníkov získame výsledok

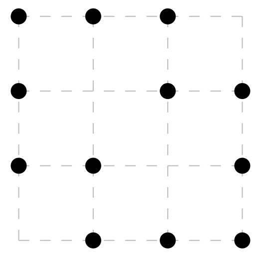
$$1 - \frac{1}{35}\left(\frac{5\cdot 3}{2} + \frac{6\cdot 1}{2} + \frac{4\cdot 2}{2}\right) = \frac{41}{70}.$$

Úloha 5. Na obrázku môžete vidieť štvorcovú mriežku pozostávajúcu zo 16 bodov, ktorá obsahuje deväť štvorcov 1×1, štyri štvorce 2×2 a jeden štvorec 3×3, teda celkom 14 štvorcov, ktorých strany sú rovnobežné so stranami mriežky. Aký je najmenší počet bodov, ktorý môžeme odobrať tak, že po ich odobratí bude každému zo 14-tich štvorcov chýbať aspoň jeden vrchol?



Výsledok. 4

Riešenie. Je nevyhnutné odstrániť aspoň 4 body, pretože štyri štvorce 1×1 v rohoch mriežky nemajú žiaden z bodov spoločný. Odobratie dvoch protiľahlých rohov mriežky a dvoch stredných bodov pozdĺž opačnej diagonály dokazuje, že tento počet je dostačujúci.



Úloha 6. Nájdite poslednú cifru súčtu

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2017^2.$$

Výsledok. 5

Riešenie. Posledné cifry jednotlivých druhých mocnín sa menia periodicky s periódou 10. Máme

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 = 385,$$

čo má poslednú cifru 5. Posledná cifra $1^2 + 2^2 + \cdots + 2010^2$ je 5, vďaka tomu, že $201 \cdot 5 = 1005$. Okrem toho posledná cifra súčtu $2011^2 + 2012^2 + \cdots + 2017^2$ je 0. Dohromady, hľadaná cifra súčtu štvorcov $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2017^2$ je 5.

Úloha 7. Vyjadrite podiel

$$\frac{0.\overline{2}}{0.\overline{24}}$$

ako zlomok $\dfrac{a}{b}$ v základnom tvare, kde a a b sú kladné celé čísla.

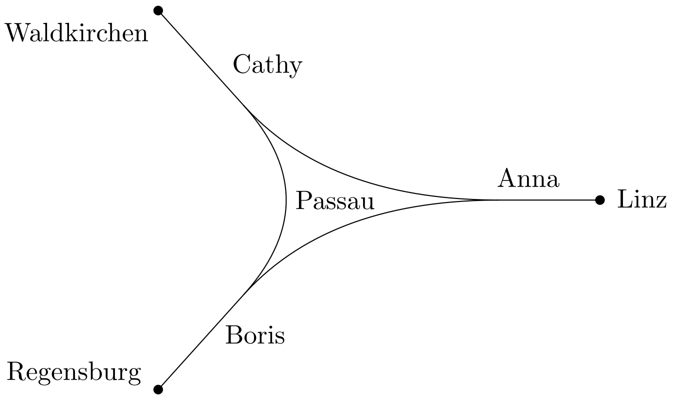
Poznámka: Čiara nad číslom znamená desiatkový periodický rozvoj, napr. $0.\overline{123} = 0.123123\ldots$.

Výsledok. $\frac{11}{12}$

Riešenie. Daný podiel môžeme zapísať aj nasledovným spôsobom:

$$\frac{0.\overline{2}}{0.\overline{24}} = \frac{0.\overline{22}}{0.\overline{24}} = \frac{22 \cdot 0.\overline{01}}{24 \cdot 0.\overline{01}} = \frac{11}{12}.$$

Úloha 8. Passau má železničnú stanicu v tvare trojuholníka. Anna, Boris a Cathy pozorujú železničnú dopravu v Linzi, Regensburgu a Waldkirchene na koľajniciach, ktoré prichádzajú z Passau. Anna napočítala 190, Boris 208 a Cathy 72 prichádzajúcich a odchádzajúcich vlakov dokopy. Koľko vlakov prejde z Linzu do Regensburgu alebo opačne, ak žiaden vlak nezačína, nekončí ani nemení smer v Passau?



Výsledok. 163

Riešenie. Označme počet vlakov medzi Linzom a Waldkirchenom ako r, medzi Linzom a Regensburgom ako w a medzi Waldkirchenom a Regensburgom ako l. Anna spočítala všetky vlaky medzi Linzom a dvomi ostatnými mestami. Preto dostaneme rovnosť $r + w = 190$. Analogicky dostaneme aj rovnosti $l + w = 208$ a $l + r = 72$. Sčítaním prvých dvoch rovností a odčítaním tretej dostaneme $2w = 190 + 208 - 72$ čo nás vedie k tomu, že $w = \frac{1}{2} \cdot 326 = 163$.

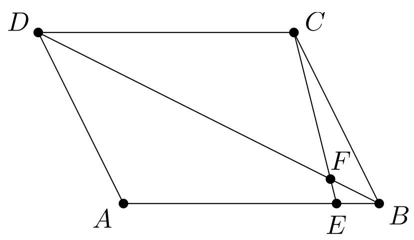
Úloha 9. Nájdite všetky kladné celé čísla $x < 10\,000$ také, že x je štvrtou mocninou nejakého párneho čísla a po permutácii (preusporiadaní) cifier čísla x dostaneme štvrtú mocninu nejakého nepárneho čísla. Číslo po permutácii nemôže začínať nulou.

Výsledok. 256

Riešenie. Predpokladajme, že $x = a^4$ pre nejaké párne kladné celé číslo a a že permutáciou cifier čísla x vieme dostať číslo b^4 pre nejaké nepárne kladné celé číslo b.

Nakoľko $10\,000 = 10^4$, tak obidve čísla a a b musia byť menšie ako 10. Štvrtá mocnina párneho jednociferného čísla a (teda a^4) musí vždy končiť na cifru 6. Nakoľko je b jednociferné kladné celé číslo, tak môžeme vidieť, že iba $5^4 = 625$ a $9^4 = 6561$ obsahujú cifru 6. Napriek tomu, každá permutácia cifier čísla 9^4 bude mať súčet cifier deliteľný tromi (súčet cifier sa nemení), teda jediné možné riešenie by mohlo byť $6^4 = 1296$, ktoré však nie je permutáciou cifier čísla 9^4. Pre $b^4 = 625$ môžeme ľahko nájsť $x = a^4 = 256$, čo je aj jediné riešenie.

Úloha 10. V rovnobežníku $ABCD$ priamka z bodu C pretne stranu AB v bode E tak, že $|EB| = \frac{1}{5}|AE|$. Úsečka CE pretne diagonálu BD v bode F. Zistite pomer $|BF| : |BD|$.



Výsledok. $1 : 7$

Riešenie. Trojuholníky EBF a CDF sú podobné s pomerom podobnosti $|EB| : |CD| = 1 : 6$. Z toho tiež vyplýva, že $|BF| : |FD| = 1 : 6$, a preto $|BF| : |BD| = 1 : 7$.

Úloha 11. Hotel má 100 očíslovaných izieb. V každej izbe sú jedno, dve alebo tri lôžka. V izbách č. 1 až č. 52 je dokopy 56 lôžok. V izbách č. 51 až č. 100 je dokopy 150 lôžok. Koľko lôžok je dokopy v celom hoteli?

Výsledok. 200

Riešenie. Keďže maximálny počet lôžok v izbe je 3, práve tri lôžka sú v každej izbe od č. 51 po č. 100. Takže, od prvej až po 50-tu izbu je dokopy $56 - 2 \cdot 3 = 50$ lôžok. Z toho dostaneme že v celom hoteli je $50 + 150 = 200$ lôžok.

Úloha 12. V prvom kroku Henka napísala na kúsok papiera červeným perom číslo 3 a zeleným perom číslo 2. V každom z ďalších krokov napísala súčet dvoch čísel z predchádzajúceho kroku červeným perom a ich rozdiel zeleným perom (väčšie z nich mínus menšie). Ktoré číslo napísala Henka červeným perom v 2017-tom kroku?

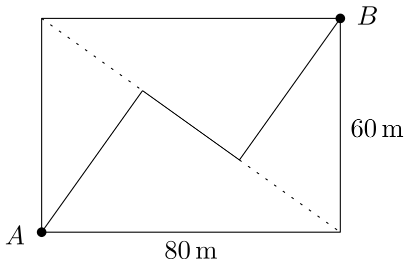
Výsledok. $3 \cdot 2^{1008}$

Riešenie. Ľahko vidieť, že v každom kroku je červené číslo väčšie ako zelené. Predpokladajme, že v n-tom kroku sú na papieri napísané čísla $\check{C}_n$, Z_n postupne červenou a zelenou. Potom v kroku $n+1$ to budú čísla $\check{C}_{n+1} = \check{C}_n + Z_n$ a $Z_{n+1} = \check{C}_n - Z_n$. V kroku $n+2$ dostaneme čísla

$$\begin{aligned} \check{C}_{n+2} &= \check{C}_{n+1} + Z_{n+1} = 2\check{C}_n, \\ Z_{n+2} &= \check{C}_{n+1} - Z_{n+1} = 2Z_n. \end{aligned}$$

Preto sa čísla po dvoch krokoch zdvojnásobia. Medzi prvým a 2017-tym krokom máme 1008 dvojkrokov, teda výsledok je $3 \cdot 2^{1008}$.

Úloha 13. Červená Čiapočka sa cestou k starej mame zatúlala pred „Obdĺžnikový les“. Nachádzala sa v bode A a potrebovala sa dostať do bodu B najrýchlejšie, ako to len ide. Jedna možnosť by bola obísť celý les po jeho okraji, musela by tak prejsť 140 m. Samozrejme, Červená Čiapočka pozná trojuholníkovú nerovnosť a vie, že priama cesta by bola kratšia. Nanešťastie, cez les ide iba jedna kľukatá cestička s dvomi pravouhlými zákrutami tak, ako je znázornená na obrázku. Ak je cestička lesom kratšia ako 140 m, pôjde ďalej po nej. Zistite dĺžku (v metroch) cestičky cez les.



Výsledok. 124

Riešenie. Podľa Pytagorovej vety je dĺžka uhlopriečky obdĺžnika $\sqrt{60^2 + 80^2} = 100$. Pomocou Euklidovej vety o odvesne vieme zistiť dĺžku kratšieho úseku vytnutého výškou na uhlopriečke ako $60^2/100 = 36$. Dlhší úsek uhlopriečky bude teda $100 - 36 = 64$. Podľa Euklidovej vety o výške bude dĺžka výšky $\sqrt{36 \cdot 64} = 48$. Dokopy má teda cestička dĺžku $48 + (64 - 36) + 48 = 124$.

Úloha 14. Osemmiestny palindróm je číslo, ktoré má tvar $\overline{abcddcba}$, kde a, b, c a d sú nie nutne rozdielne číslice. O koľkých osemmiestnych palindrómoch platí, že z nich vieme vymazať niektoré číslice tak, že výsledné číslo bude 2017?

Výsledok. 8

Riešenie. Keďže všetky číslice čísla 2017 sú rôzne, všetky číslice a, b, c, d sú tiež rôzne, a preto každú vymažeme práve raz. Všimnime si, že po vymazaní bude buď prvá alebo posledná číslica 2017 rovná a. V prvom prípade máme $a = 2$ a dostávame analogický podproblém pre šesťčíselný palindróm z číslicami 0, 1, 7. V druhom prípade sa $a = 7$, a dostávame analogický podproblém pre šesťčíselný palindróm z číslicami 2, 0, 1. V oboch prípadoch máme znova dve možnosti pre b, takže dostaneme 4 analogické podproblémy so štvorčíselnými palindrómami. Každý z týchto podproblémov sa znova rozdelí na dva ďalšie podproblémy s dvojčíselnými palindrómami, ktoré už majú jednoznačné riešenia. Dokopy máme teda $2^3 = 8$ možností.

Úloha 15. Pre všetky kladné celé čísla n označíme ich ciferný súčet ako $\mathrm{S}(n)$ a súčin cifier ako $\mathrm{P}(n)$. Koľko kladných celých čísel n má vlastnosť $n = \mathrm{S}(n) + \mathrm{P}(n)$?

Výsledok. 9

Riešenie. Pre jednociferné kladné celé čísla n vždy platí $\mathrm{S}(n) + \mathrm{P}(n) = 2n > n$. Teraz uvažujme kladné celé čísla n, ktoré majú viac ako jednu cifru. Nech $m \geq 1$ a $n = a_m 10^m + \cdots + a_0$ sú celé čísla, pre ktoré platí $0 \leq a_k \leq 9$ pre $0 \leq k \leq m$ a $a_m \neq 0$. Potom máme

$$\begin{aligned} n - \mathrm{S}(n) - \mathrm{P}(n) &= a_m 10^m + \cdots + a_0 - (a_m + \cdots + a_0) - a_m \cdots a_0 \\ &= (10^m - 1 - a_{m-1} \cdots a_0) a_m + (10^{m-1} - 1) a_{m-1} + \cdots + 9a_1 \\ &\geq (10^m - 1 - 9^m) a_m \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

a rovnosť nastáva iba pre $m = 1$. Z toho dôvodu, číslo n, ktoré spĺňa podmienku, musí spĺňať

$$n = 10a_1 + a_0 = a_1 + a_0 + a_1a_0,$$

čo je ekvivalentné $a_1(9 - a_0) = 0$, takže $a_0 = 9$. Po jednoduchom overení dostávame, že práve deväť čísel 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 a 99 má požadovanú vlastnosť.

Úloha 16. Majiteľ továrne zamestnáva 100 zamestnancov. Každý manažér zarába 5 000 € za mesiac, každý robotník zarába 1 000 € za mesiac a každý brigádnik zarába 50 € za mesiac. Majiteľ továrne dokopy platí zamestnancom 100 000 € za mesiac, pričom zamestnáva aspoň jedného zamestnanca z každého typu. Koľko manažérov pracuje v továrni?

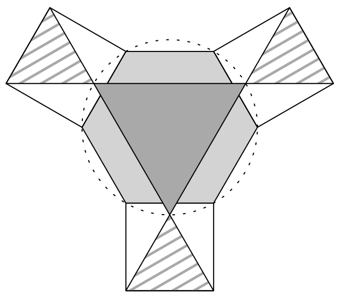
Výsledok. 19

Riešenie. Označme x, y, z počty manažérov, robotníkov a brigádnikov v danom poradí. Podmienky zo zadania vieme prepísať do nasledovnej sústavy rovníc

$$x + y + z = 100, \tag{1}$$
$$5\,000x + 1\,000y + 50z = 100\,000, \tag{2}$$

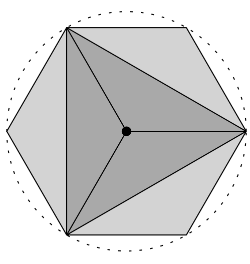
kde x, y, z sú prirodzené čísla. Keď vyjadríme z z rovnice (2) dostávame $z = 2000 - 20y - 100x$. Pravá strana je deliteľná 20-timi, takže z môžme zapísať ako $z = 20k$ pre nejaké prirodzené k. Rovnica (2) sa teda dá zjednodušiť na $5x + y + k = 100$. Od tejto rovnice odčítame (1), kde $z = 20k$ a dostaneme $4x = 19k$. Čísla 4 a 19 sú nesúdeliteľné, teda x je násobok 19. Keďže x, y, a z sú kladné, z rovnice (2) dostávame $x < 20$. Z toho vyplýva, že $x = 19$ ($y = 1$ a $z = 80$) je jediné riešenie.

Úloha 17. Na obrázku vidíte mozaiku zloženú z pravidelných n-uholníkov. Šesťuholník a tmavosivý trojuholník sú vpísané do tej istej kružnice. Každý z troch rovnakých šrafovaných trojuholníkov má obsah 17. Určte obsah tmavosivého trojuholníka.



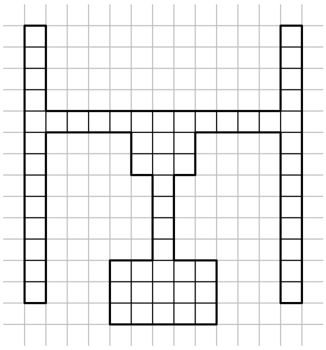
Výsledok. 51

Riešenie. Na začiatok si uvedomíme, že ak tmavosivý trojuholník otočíme o 30° okolo stredu kružnice, tak sa vrcholy trojuholníka budú zhodovať s vrcholmi 6-uholníka. Potom je jasné, že prekrýva polovicu 6-uholníka.



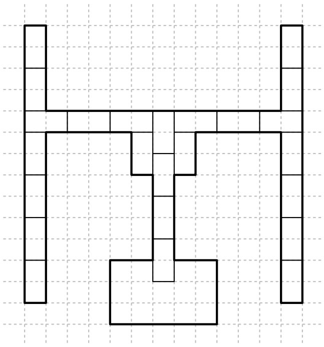
Zároveň vieme, že šrafovaný trojuholník má rovnako dlhú stranu ako je dĺžka strany 6-uholníka. Z toho vyplýva, že plocha šrafovaného trojuholníka je $\frac{1}{6}$ z plochy 6-uholníka. Dohromady je plocha tmavosivého trojuholníka rovná $3 \cdot 17 = 51$.

Úloha 18. V Passau renovujú železničnú stanicu a chcú spraviť aj špeciálny chodník pre nevidiacich. Tvar chodníka je znázornený na obrázku. Nanešťastie majú k dispozícii len dlaždice s rozmermi 1×2. Koľkými spôsobmi môžu podľa vzoru položiť chodník? Dlaždice sú nerozlíšiteľné a dve vydláždenia sú rôzne, ak sú aspoň na jednom mieste chodníka dlaždice v rôznych polohách.

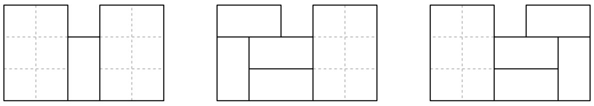


Výsledok. 15

Riešenie. Ak začneme ukladať dlaždice najprv do rovných pásov, tak je zrejmé, že spôsob dláždenia je určený len jedinou oblasťou s rozmermi 3×5:

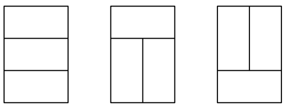


Existujú tri možnosti pre jej dláždenie: buď môžu v dláždení pokračovať v smere poslednej dlaždice (prípad (1)), ktoré vytvorí dve oddelené oblasti 3×2 alebo ukladať dlaždice kolmo na poslednú dlaždicu (prípady (2) a (3)). V týchto dvoch prípadoch môžu dláždiť len jediným spôsobom až kým neostane nevydláždená len jedna oblasť 3×2.



(1) (2) (3)

Každá oblasť 3×2 môže byť vydláždená troma spôsobmi, ktoré sú naznačené na obrázkoch:



Takže máme $3 \cdot 3 = 9$ možností dláždenia v prípade (1) a 3 možnosti v prípadoch (2) a (3). Dokopy máme teda $9 + 3 + 3 = 15$ možností.

Úloha 19. Fero si vybral kladné celé číslo n. Potom si vybral kladného deliteľa čísla n, vynásobil ho štyrmi, výsledok odčítal od čísla n a dostal 2017. Nájdite všetky čísla, ktoré si Fero mohol vybrať.

Výsledok. 2021, 10085

Riešenie. Pre vybraného deliteľa d čísla n vieme nájsť nejaké kladné celé číslo k také, že $n = kd$. Teraz nám rovnosť hovorí

$$kd - 4d = (k - 4)d = 2017.$$

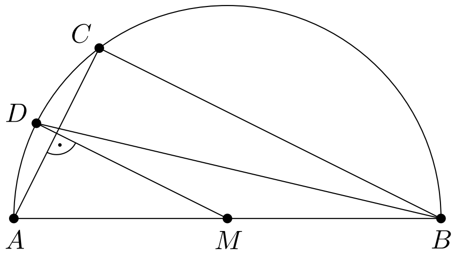
Nakoľko 2017 je prvočíslo, dostávame $d = 1$ alebo $d = 2017$. V prvom prípade dostávame $n = k = 2017 + 4 = 2021$. V druhom prípade dostávame $k = 5$, a preto $n = 2017 \cdot 5 = 10085$.

Úloha 20. Denisa a Vanesa sú veľmi dobré kamarátky, takže kedykoľvek sedia vedľa seba začnú spolu klebetiť. Päť študentov (vrátane Denisy a Vanesy) chce mať konštruktívnu diskusiu, takže si chcú posadať na päť stoličiek okolo okrúhleho stola tak, aby Denisa a Vanesa nesedeli vedľa seba. Koľkými možnosťami to dokážu spraviť? Možnosti, ktoré sa líšia otočením, sú rôzne.

Výsledok. 60

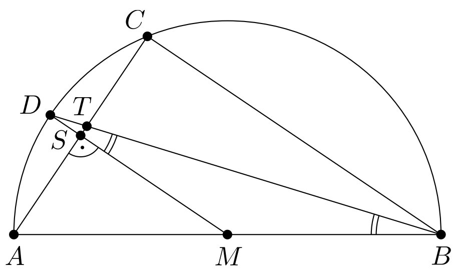
Riešenie. Akonáhle si Denisa sadne na jedno z piatich miest, zostanú len 2 miesta, kde si môže sadnúť Vanesa tak aby nesedeli vedľa seba. To dáva $5 \cdot 2$ možností. Pre každú z nich si traja zvyšní študenti môžu posadať 3! spôsobmi, čo dáva dokopy $5 \cdot 2 \cdot 3! = 60$ spôsobov.

Úloha 21. Ako vidíte na obrázku, AB je priemerom kružnice so stredom M. Dva body D a C sú na kružnici tak, aby platilo $AC \perp DM$ a $|\sphericalangle MAC| = 56°$. Zistite veľkosť ostrého uhla medzi priamkami AC a BD v stupňoch.



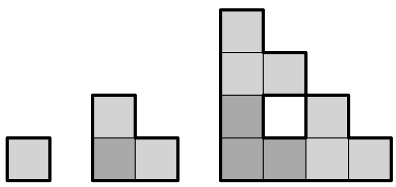
Výsledok. 73°

Riešenie. Označme priesečník priamok AC a DM ako S a priesečník priamok AC a BD ako T.



Z toho, že $|\sphericalangle MAC| = 56°$, a daného pravého uhla pri vrchole S vieme, že $|\sphericalangle SMA| = 34°$ využitím súčtu uhlov trojuholníka AMS. Ďalej, $|\sphericalangle BMD| = 180° - |\sphericalangle SMA| = 146°$. Nakoľko MD aj MB sú polomermi kružnice, tak trojuholník BDM je rovnoramenný ($|\sphericalangle MBD| = |\sphericalangle MDB|$). Využitím súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku dostávame $|\sphericalangle MDB| = 17°$. Naším cieľom je zistiť veľkosť uhla CTB, ktorý je rovnako veľký ako uhol STD. Avšak ten vieme vypočítať pomocou súčtu uhlov v pravouhlom trojuholníku DST s tým, že využijeme $|\sphericalangle SDT| = |\sphericalangle MDB|$. Výsledkom je $|\sphericalangle CTB| = 73°$.

Úloha 22. Útvar je poskladaný zo štvorcov s jednotkovým obsahom postupným spájaním jeho kópií, ako je znázornené na obrázku. Aká je dĺžka hrubej hranice útvaru v šiestom kroku?



Výsledok. 488

Riešenie. Nech f_n je dĺžka hrubej hranice v n-tom kroku. Všimnime si, že v každom kroku sú zlepené vždy tri rovnaké útvary z predchádzajúceho kroku a to pozdĺž dvoch štvorcov, ktoré nie sú časťou hranice. Z tohto pozorovania máme $f_{n+1} = 3 \cdot f_n - 2 \cdot 2$ pre všetky $n \geq 1$. Ak to spojíme s $f_1 = 4$, po dosadení dostávame $f_6 = 488$.

Úloha 23. Všetkých 2017 sedadiel okolo veľmi veľkého okrúhleho stola je obsadených superhrdinami alebo zloduchmi. Superhrdinovia vždy hovoria pravdu a každý zloduch vždy klame. Každý človek, ktorý sedí za stolom skonštatoval, že sedí medzi superhrdinom a zloduchom. Z neznámeho dôvodu práve jeden superhrdina urobil chybu. Koľko superhrdinov je za stolom?

Výsledok. 1345

Riešenie. Najprv, si všimnime, že tam nie sú žiadni zloduchovia, ktorí sedia vedľa seba: ak by to tak bolo, tak nejaký iný zloduch by musel sedieť pri jednom zo spomínaných zloduchov, ďalší vedľa neho atď. To by však znamenalo, že sa tam nenachádza žiaden superhrdina, ale zadanie hovorí, že sa tam aspoň jeden nachádza. Ak vynecháme superhrdinu, ktorý povedal zlé tvrdenie, potom každý superhrdina sedí vedľa iného superhrdinu a zloducha. Teda celý stôl sa dá rozdeliť na časti obsahujúce: superhrdina–superhrdina–zloduch.

Superhrdina, ktorý klamal, môže teraz sedieť medzi dvomi superhrdinami alebo môže sedieť medzi dvomi zloduchmi. Počet ľudí za stolom musí dávať po delení tromi zvyšok 1 v prvom prípade a zvyšok 2 v druhom prípade. Nakoľko 2017 dáva zvyšok 1 po delení 3, tak potom platí prvý prípad, a teda môžeme povedať, že za stolom sedí $\frac{2}{3} \cdot 2016 + 1 = 1345$ superhrdinov.

Úloha 24. Nájdite všetky kladné reálne čísla x také, že

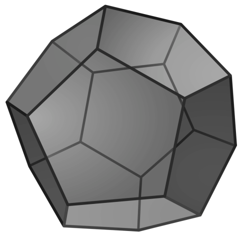
$$x^{2017x} = (2017x)^x.$$

Výsledok. $\sqrt[2016]{2017}$

Riešenie. Nakoľko x je kladné, vieme obe strany rovnosti umocniť na $1/x$ a dostaneme $x^{2017} = 2017x$, resp. $x^{2016} = 2017$. Riešenie je $x = \sqrt[2016]{2017}$.

Úloha 25. Leo chce zafarbiť hrany dvanásťstena špeciálnym spôsobom. Vyberie zvýrazňovač jednej farby a začne ľubovoľným vrcholom dvanásťstena. Potom postupuje po hranách bez toho, aby zodvihol zvýrazňovač alebo zafarbil jednu hranu dvakrát, až kým chce alebo je donútený prestať. Potom vezme zvýrazňovač inej farby a začne farbiť nejaké ešte nezafarbené pospájané hrany. Takto pokračuje s ďalšími farbami dovtedy, kým je každá hrana dvanásťstena zafarbená práve jednou farbou. Aký je minimálny počet farieb, ktoré môže použiť?

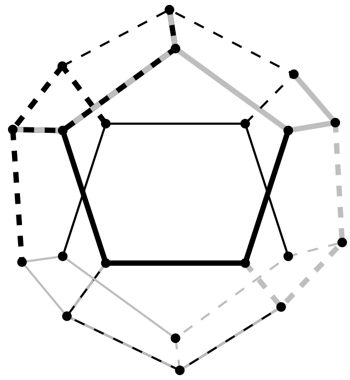
Dvanásťsten je pravidelné teleso s dvanástimi päťuholníkovými stenami ako je znázornené na obrázku:



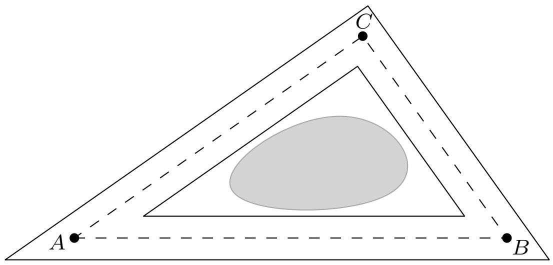
Výsledok. 10

Riešenie. Dvanásťsten má 20 vrcholov a v každom vrchole sa stretávajú tri hrany. Teraz uvažujme len model pozostávajúci z vrcholov a hrán dvanásťstena. Po každom kroku farbenia cesty zo spojených hrán jednej farby tieto zafarbené hrany z modelu vymažeme. Ak je zmazaná uzavretá cesta, v každom vrchole je odobraných 0 alebo 2 hrany. Ak začiatočný vrchol z a konečný vrchol k zmazanej cesty sú odlišné, je z nich vymazaná práve jedna hrana, pričom zo zvyšných vrcholov je odobraných 0 alebo 2 hrany. Preto každý vrchol musí byť počiatočným/konečným vrcholom aspoň jednej cesty. Musíme mať teda aspoň 10 ciest (zafarbení).

Nasledujúci obrázok ukazuje, že zafarbenie 10 farbami existuje:

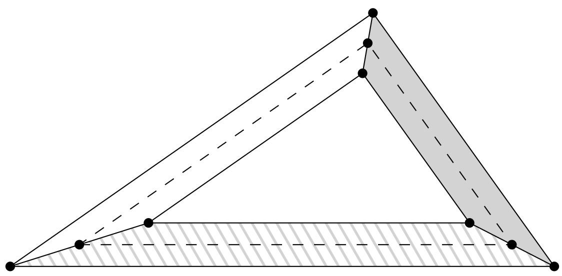


Úloha 26. Záhradný architekt Jožko navrhol nový štrkový chodníček okolo jazera. Trojuholník ABC predstavuje stred chodníčka so stranami dĺžky $a = 80\,\mathrm{m}$, $b = 100\,\mathrm{m}$ a $c = 120\,\mathrm{m}$. Okraje chodníčka tvoria úsečky, ktoré sú vzdialené $1\,\mathrm{m}$ od zodpovedajúcich strán trojuholníka ABC, ako môžeme vidieť na obrázku. Koľko m^3 vysokokvalitného štrku musí Jožko objednať, aby mohol vytvoriť štrkový chodníček s priemernou výškou $4\,\mathrm{cm}$?



Výsledok. 24

Riešenie. Obsah chodníčka vieme rozdeliť na tri lichobežníky s výškou 2 a prislúchajúcou strednou priečkou a, b, alebo c.



Nakoľko obsah lichobežníka vieme vypočítať ako súčin dĺžok výšky a strednej priečky, dostávame

$$2 \cdot (80 + 100 + 120) = 2 \cdot 300 = 600$$

ako výsledný obsah štrkového chodnčka v m^2. Množstvo štrku, ktorý treba objednať, vieme vypočítať ako $600\,\mathrm{m}^2 \cdot 0.04\,\mathrm{m} = 24\,\mathrm{m}^3$. Takže, výsledok je 24.

Úloha 27. Nájdite všetky štvorciferné druhé mocniny celých čísel také, že prvé dve číslice sú rovnaké a posledné dve číslice sú tiež rovnaké.

Výsledok. 7744

Riešenie. Nech N je hľadané číslo a označme x a y ako prvú a poslednú cifru v tomto poradí. Potom dostávame

$$N = 1000x + 100x + 10y + y = 11(100x + y),$$

takže N je deliteľné 11-timi. Ale N je štvorcom (druhou mocninou celého čísla), takže musí byť deliteľné aj 11^2. Takže dostávame $N = 11^2 k^2$ pre nejaké kladné celé číslo k a $100x + y = 11k^2$. Nakoľko ľavá strana rovnosti je trojciferné celé číslo $\overline{x0y}$ s tým, že na mieste desiatok sa nachádza nula, tak k^2 musí byť dvojciferný štvorec, ktorého ciferný súčet je 10. Jediné také číslo je $8^2 = 64$. Z toho vyplýva, že $100x + y = 11 \cdot 8^2$ a z toho dostávame $N = 11^2 \cdot 8^2 = 88^2 = 7744$.

Úloha 28. V lunaparku je jednou z atrakcií aj losovanie lotérie. Pravidlá sú nasledovné: súťažiaci vyberá jednu zo štyroch rôznych krabičiek a potom z nej vytiahne jednu loptičku. Ak je táto loptička biela, súťažiaci vyhráva, a ak je čierna, prehráva. Ak je rozdelenie loptičiek v krabičkách napríklad

$$(6, 6),\ (5, 3),\ (4, 0),\ (3, 5),$$

kde každá dvojica (b, c) označuje krabičku s b bielymi a c čiernymi loptičkami, potom súťažiaci vyhráva s pravdepodobnosťou $\frac{5}{8}$. Každý 1000-ci súťažiaci dostane superžolíka: Súžažiaci môže prerozdeliť loptičky v krabičkách podľa svojej vôle, pričom do každej krabičky musí dať aspoň jednu loptičku. Potom sa krabičky opäť pomiešajú a súťažiaci vyberá jednu krabičku a z nej jednu loptičku. Jolanka má šťastie a vyhrala superžolíka. Aká je najväčšia pravdepodobnosť výhry, ktorú môže mať po vhodnom prerozdelení loptičiek z príkladu?

Výsledok. $\frac{51}{58}$

Riešenie. Ak Jolanka dá po jednej bielej loptičke do troch krabičiek zo štyroch, potom vyhrá, ak vyberie jednu z týchto troch krabičiek. Máme teda rozdelenie $(1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 0)$, $(15, 14)$ pre (b, c) a vyhrá s pravdepodobnosťou $\frac{1}{4}(1+1+1+\frac{15}{29}) = \frac{51}{58}$. Je ľahko vidieť, že akékoľvek iné rozdelenie dáva menšiu pravdepodobnosť výhry: pravdepodobnosť prehry je súčet pravdepodobností vybratia jednej čiernej loptičky a pre vybratie jednej loptičky je pravdepodobnosť najmenšia, ak je v krabičke s čo najviac loptičkami.

Úloha 29. Autobus, nákladiak a motorka sa pohybujú konštantnou rýchlosťou a prechádzajú v tomto poradí okolo stojaceho pozorovateľa v rovnakých časových intervaloch. Ďalej po ceste prejdú okolo ďalšieho pozorovateľa v rovnakých časových intervaloch, ale v inom poradí. Tentokrát v poradí autobus, motorka a nákladiak. Zistite rýchlosť autobusu (v km/h), ak rýchlosť nákladiaka je 60 km/h a rýchlosť motorky je 120 km/h.

Výsledok. 80

Riešenie. Nech t je spoločný časový interval medzi momentmi, kedy vozidlá prechádzajú okolo dvoch pozorovateľov. Motorka príde k prvému pozorovateľovi t hodín po nákladiaku a k druhému pozorovateľovi t hodín pred nákladiakom. To znamená, že motorka prejde vzdialenosť medzi dvoma pozorovateľmi za $2t$ hodín rýchlejšie ako nákladiak. Motorka ide dvakrát tak rýchlo ako nákladiak, takže prejde vzdialenosť medzi pozorovateľmi za polovičný čas. Teda nákladiaku to musí trvať $4t$ hodín, aby prešiel rovnakú vzdialenosť.

Ďalej, autobus prejde okolo prvého pozorovateľa t hodín pred nákladiakom a okolo druhého pozorovateľa $2t$ hodín pred nákladiakom. Nákladiaku trvá $4t$ hodín prejsť medzi pozorovateľmi, takže autobusu trvá $3t$ hodín prejsť rovnakú vzdialenosť. Takže rýchlosť autobusu sú $\frac{4}{3}$ rýchlosti nákladiaku, a to je 80 km/h.

Úloha 30. Nájdite všetky možnosti, ako možno vyplniť voľné políčka vo výroku nižšie celými číslami tak, aby bol pravdivý.

„V tomto výroku je $\square$ % cifier väčších ako 4, $\square$ % cifier je menších ako 5 a $\square$ % cifier je rovných jednej z dvojice cifier 4 alebo 5. “

Výsledok. 50, 50, 60

Riešenie. Zjavne vo výroku nemôže byť viac ako 10 cifier. Ak sa pozrieme na cifry, ktoré už vidíme, môžeme pozorovať, že v prvých dvoch políčkach musí byť aspoň 20 a v treťom aspoň 40. Preto musí byť v políčkach spolu 10 cifier a všetky čísla v políčkach budú končiť na 0, takže ich môžme postupne označiť $\overline{a0}$, $\overline{b0}$ a $\overline{c0}$, kde a, b a c sú cifry, pre ktoré platí $a + b = 10$.

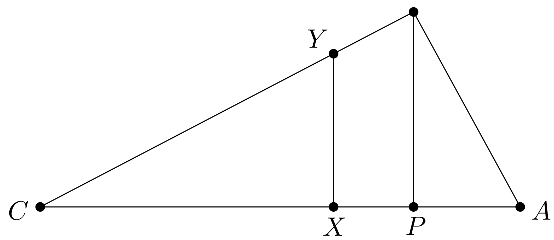
Pretože vo výroku sú aspoň dve cifry väčšie ako 4 a aspoň päť cifier menších alebo rovných 4, môžeme usúdiť, že $5 \geq a \geq 2$. Navyše, aspoň jedna z cifier a a b je väčšia ako 4, takže dostávame $5 \geq a \geq 3$.

Máme aspoň štyri cifry rovné 4 alebo 5, čo znamená, že $c \geq 4$. Keďže definícia $\overline{c0}$ % vylučuje prípad $c = 4$, musí platiť $c \geq 5$, z čoho dostávame $5 \geq a \geq 4$. V prípade $a = 4$ dostaneme $b = 6$, ale potom by pre žiadne $c \geq 5$ nebolo možné dostať pravdivý výrok, ako je požadované. Nech teraz $a = 5$. To vedie k $b = 5$ a výrok je pravdivý pre $c = 6$.

Úloha 31. Paľov dobytok sa pasie na trojuholníkovej lúke ABC. Keďže jeho fľakaté a biele kravy spolu dobre nevychádzajú, Paľo postavil 20-metrový plot kolmý na stranu AC, ktorý začína v bode P na strane AC a končí v bode B. Plot rozdeľuje lúku na dva pravouhlé trojuholníky. Avšak toto rozdelenie nevyhovovalo fľakatým kravám, ktoré sa pasú v oblasti pri bode A. Tie oponovali, že $|AP| : |PC| = 2 : 7$ a vyžadovali spravodlivejšie delenie. Nakoniec Paľo vymenil plot za druhý, rovnobežný k pôvodnému, ktorý končí na stranách AC a BC. Tento plot rozdeľuje lúku na dve časti s rovnakou plochou. Aká je dĺžka tohto plotu v metroch?

Výsledok. $30\sqrt{\frac{2}{7}}$

Riešenie. Keďže trojuholník PBC má väčší obsah ako trojuholník ABP, koncový bod nového plotu na strane AC (označeného ako X) leží medzi C and P a druhý koncový bod (označený ako Y) leží na strane BC. Trojuholníky PBC a XYC sú podobné, takže $|XY| : |XC| = |PB| : |PC|$.



Ďalej plocha trojuholníka XYC je polovicou plochy trojuholníka ABC,

$$\frac{1}{2} \cdot |XY| \cdot |XC| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot |AC|$$

alebo

$$|XY|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{|XY|}{|XC|} \cdot |PB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot |PB|^2 \cdot \frac{|AP| + |PC|}{|PC|},$$

teda

$$|XY| = |PB| \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|AP|}{|PC|}\right)} = 30\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Úloha 32. Na tabuli je napísaných päť (nie nutne rôznych) reálnych čísel. Pre každé dve z nich Veronika vypočítala ich súčet a napísala desať výsledkov

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

na tabuľu, pričom pôvodných päť čísel vymazala. Určte všetky možné hodnoty súčinu zmazaných čísel.

Výsledok. -144

Riešenie. Označme pôvodné čísla ako $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Medzi desiatimi vypočítanými súčtami je najmenší $a+b=1$, druhý najmenší $a+c=2$, najväčší $d+e=10$ a druhý najväčšii $c+e=9$. Sčítaním všetkých desiatich súčtov dostaneme

$$4(a+b+c+d+e) = 1+2+3+5+5+6+7+8+9+10 = 56,$$

teda $a+b+c+d+e=14$. Potom $c = 14-(a+b)-(d+e) = 14-1-10 = 3$. Z toho $a = 2-c = -1$, $b = 1-a = 2$, $e = 9-c = 6$ a $d = 10-e = 4$. Pre tieto hodnoty môžeme jednoducho skontrolovať, že zvyšných šesť súčtov presne zapadá do zoznamu čísel na tabuli. Preto súčin, ktorý máme získať, je $-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6 = -144$.

Úloha 33. Napíšte číslo 333 ako súčet ľubovoľného počtu štvorcov (druhých mocnín) rôznych kladných nepárnych celých čísel.

Výsledok. $3^2+5^2+7^2+9^2+13^2$

Riešenie. Keďže $17^2 = 289 < 333 < 361 = 19^2$, len čísla $1^2, 3^2, \ldots, 17^2$ (spolu 9 rôznych čísel) sa môžu vyskytnúť v súčte. Navyše, umocnením nepárneho celého čísla na druhú dostaneme zvyšok 1 po delení ôsmimi. Číslo 333 má zvyšok 5 po delení ôsmimi, preto musíme mať práve 5 sčítancov.

Keďže $1^2+3^2+5^2+7^2+17^2 > 333$, 17^2 nemôže byť v súčte. Poďme sa pozrieť na zvyšky ostatných sčítancov po delení piatimi: dva z nich sú deliteľné piatimi (5^2, 15^2), tri z nich dávajú zvyšok 1 (1^2, 9^2, 11^2) a tri dávajú zvyšok -1 (3^2, 7^2, 13^2). Pretože 333 dáva zvyšok 3 (alebo -2), zostávajú nám dva prípady na zváženie. V prvom prípade môžme sčítať všetky čísla so zvyškom 0 alebo 1; avšak tento súčet prevyšuje 333. V druhom prípade na dosiahnutie zvyšku -2, musíme sčítať všetky čísla so zvyškom -1, jedno číslo so zvyškom 0 a jedno číslo so zvyškom 1. Môžme si všimnúť, že výsledok zložený z 11^2 alebo 15^2 je príliš veľký a z dvoch zvyšných možností, len súčet $3^2+5^2+7^2+9^2+13^2$ je rovný 333.

Úloha 34. Eliška si zobrala tri reálne čísla a, b, c a zadefinovala operáciu $\odot$ ako $x \odot y = ax + by + cxy$. Na precvičenie vyrátala $1 \odot 2 = 3$ a $2 \odot 3 = 4$. Po ďalšom skúmaní zistila, že existuje nenulové reálne číslo u také, že $z \odot u = z$ pre každé reálne z. Akú hodnotu má u?

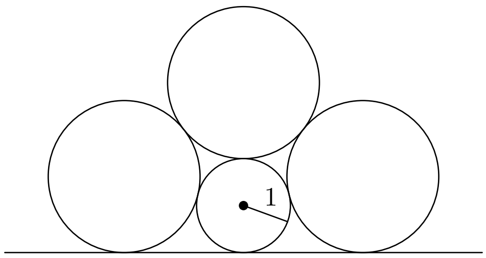
Výsledok. 4

Riešenie. Z $0 = 0 \odot u = bu$ dostaneme $b = 0$ (u je nenulové). Rovnice zo zadania sa teraz dajú prepísať na

$$\begin{aligned} a + 2c &= 3, \\ 2a + 6c &= 4 \end{aligned}$$

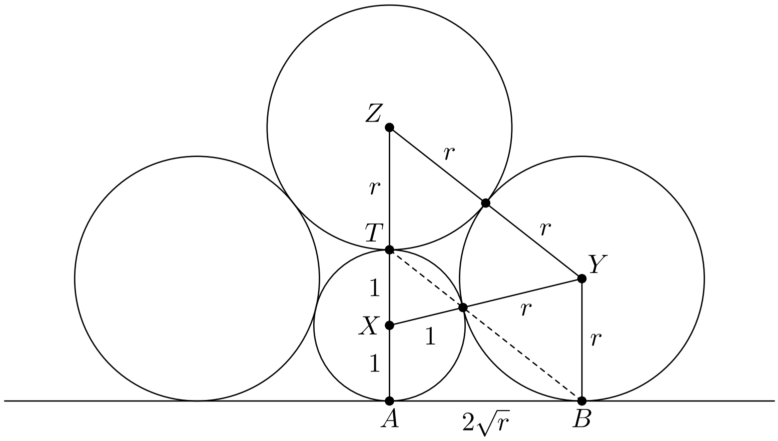
s riešením $a = 5$, $c = -1$. Nakoniec $1 = 1 \odot u = 5 - u$ dáva $u = 4$.

Úloha 35. Tri kružnice s polomerom r a jedna s polomerom 1 sa navzájom dotýkajú podľa obrázku. Nájdite r.



Výsledok. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Riešenie. Označme body dotyku A, B a T a stredy kružníc X, Y a Z tak, ako na obrázku.



Použitím Pytagorovej vety dostaneme

$$|AB|^2 = |XY|^2 - (|BY| - |AX|)^2 = (r+1)^2 - (r-1)^2 = 4r.$$

Keďže $BY \parallel TZ$ a $|BY| = |TZ| = r$, štvoruholník $BYZT$ je rovnobežník, a teda $|BT| = |YZ| = 2r$. Keďže Pytagorova veta v trojuholníku ABT hovorí, že $|AB|^2 + |AT|^2 = |BT|^2$, dostávame $4r + 2^2 = (2r)^2$. To upravíme na

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Jediným kladným riešením tejto kvadratickej rovnice je $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Úloha 36. Na starú betónovú stenu niekto nasprejoval päť (nie nutne rôznych) reálnych čísel, ktorých súčet je 20. Pre každú dvojicu vytvorenú z týchto čísel Harry vypočítal ich súčet a zaokrúhlil ho nadol (t. j. namiesto presného súčtu s zobral najväčšie celé číslo s' neprevyšujúce s). Týmto postupom dostal desať celých čísel. Nakoniec všetky tieto novozískané čísla spočítal. Aký je najmenší možný súčet, ktorý mohol Harry dostať?

Výsledok. 72

Riešenie. Nech $a_1, \ldots, a_5$ sú pôvodné čísla nasprejované na stene. Hľadáme najmenšiu hodnotu výrazu

$$W = \sum_{1 \le i < j \le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor,$$

kde $\lfloor x \rfloor$ označuje najväčšie celé číslo, ktoré neprevyšuje x. Tento výraz môžeme prepísať do tvaru

$$\sum_{1 \le i < j \le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor = \sum_{1 \le i < j \le 5} (a_i + a_j) - \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\} = 80 - \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\},$$

kde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ je časť x. Našim cieľom je maximalizovať súčet

$$S = \sum_{1 \le i < j \le 5} \{a_i + a_j\}.$$

Ten môžeme ďalej rozdeliť na dva súčty

$$\sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+1}\} + \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+2}\}$$

(položíme $a_6 = a_1$ a $a_7 = a_2$). Teraz rovnice

$$S_1 = \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+1}\} = 40 - \sum_{i=1}^{5} \lfloor a_i + a_{i+1} \rfloor,$$
$$S_2 = \sum_{i=1}^{5} \{a_i + a_{i+2}\} = 40 - \sum_{i=1}^{5} \lfloor a_i + a_{i+2} \rfloor$$

ukazujú, že S_1 aj S_2 sú celé čísla. Ďalej sú obe súčtom piatich čísel menších ako 1 a teda obe sumy sú najviac rovné 4; z čoho vyplýva $S \le 8$. Pre pôvodnú sumu tak dostávame $W \ge 72$ a rovnosti vieme získať, keď budú všetky desatinné časti $a_1, \ldots, a_5$ rovné $0,4$.

Úloha 37. Máme zložené prirodzené číslo n. Výraz $\mathrm{M}(n)$ označuje súčet troch najmenších deliteľov n a výraz $\mathrm{V}(n)$ označuje súčet dvoch najväčších deliteľov n. Nájdite všetky zložené čísla n, pre ktoré $\mathrm{V}(n) = (\mathrm{M}(n))^4$.

Poznámka: Za deliteľa daného čísla považujeme aj to samotné číslo.

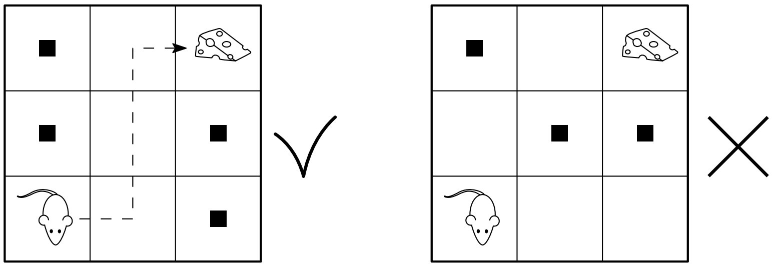
Výsledok. 864

Riešenie. Najmenším deliteľom čísla n je 1. Nech druhý a tretí najmenší deliteľ čísla n sú p, q v tomto poradí (p je prvočíslo a q je buď prvočíslo alebo $q = p^2$). Potom $\mathrm{M}(n) = 1 + p + q$ a $\mathrm{V}(n) = n + n/p$. Po vynásobení číslom p môžeme podmienku napísať ako

$$n(p + 1) = p(1 + p + q)^4.$$

Pravá strana je deliteľná $p + 1$ a keďže p a $p + 1$ sú nesúdeliteľné, $p + 1 \mid (1 + p + q)^4$. Ak obe p, q sú nepárne, potom $p + 1$ je párne a delí nepárne $(1 + p + q)^4$, čo ale nie je možné. Preto $p = 2$ (2 musí byť deliteľom n a p je najmenší prvočíselný deliteľ). Teraz úpravou $(1 + p + q)^4 = (3 + q)^4$ cez binomický rozvoj a vynechaním výrazov deliteľných 3 dostávame $3 \mid q^4$, teda $3 \mid q$. Možnosť $q = p^2$ zjavne nie je splniteľná. Z toho máme, že q je prvočíslo a teda $q = 3$. Nakoniec $n \cdot 3 = 2 \cdot 6^4$, takže $n = 2^5 \cdot 3^3 = 864$.

Úloha 38. V tabuľke 3×3 sedí myš v ľavom dolnom políčku. Jej úlohou je dostať sa ku kusu syra v pravom hornom políčku, pričom sa môže premiestňovať len na vedľajšie políčko toho, na ktorom práve stojí. Koľkými spôsobmi môžeme vyplniť niektoré (prípadne žiadne) z neobsadených políčok prekážkami tak, aby sa myš stále vedela dostať k syru?



Výsledok. 51

Riešenie. Najprv uvažujme prípad, keď na stredné políčko tabuľky umiestnime prekážku. V tomto prípade sa myš dostane k syru, len keď pôjde okolo, teda pozdĺž kraja tabuľky. Takže ďalšie prekážky môžeme umiestniť len k jednému z týchto krajov (ciest). Každá cesta sa skladá z troch políčok, takže máme $2^3 = 8$ možností, ako vyplniť jedno z nich a $8 + 8 - 1 = 15$ možností, ako nechať aspoň jednu cestu priechodnú (-1 je tam preto, aby sme možnosť s oboma voľnými cestami nezapočítali dvakrát).

Ak by bolo prostredné políčko voľné, cesta k syru existuje práve vtedy, keď aspoň jedno z políčok susedných k syru a zároveň jedno susedné k myši je voľné. Z toho dostávame tri možnosti pre voľné políčko pri myši a tri možnosti pre voľné políčko pri syre. Zároveň máme dve možnosti pre každý z neuvažovaných rohov tabuľky. Takže počet možných umiestnení prekážok v tomto prípade je $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$.

Spolu dostávame $15 + 36 = 51$ možností.

Úloha 39. Zo všetkých dvojíc reálnych čísel (x, y), ktoré vyhovujú rovnici

$$x^2y^2 + 6x^2y + 10x^2 + y^2 + 6y = 42,$$

je (x_0, y_0) to s minimálnou hodnotou x_0. Nájdite y_0.

Výsledok. -3

Riešenie. Najprv si všimneme, že ak pripočítame 10 k obom stranám rovnice, dvojčlen $x^2 + 1$ môžeme na ľavej strane vybrať pred zátvorku

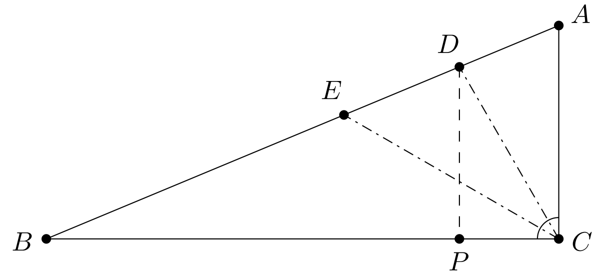
$$(x^2 + 1)(y^2 + 6y + 10) = 52.$$

Výraz na ľavej strane môžeme vnímať ako výsledok súčinu dvoch kvadratických funkcií $f(x) = x^2+1$ a $g(y) = y^2+6y+10$. Riešeniami našej rovnice sú teda všetky dvojice (x, y) pre ktoré platí $f(x)g(y) = 52$. Keďže $f(x) = f(-x)$, hľadané najmenšie x_0 bude nekladné. Pre nekladné čísla x platí, že čím menšie x zoberieme, tým väčšia bude hodnota $f(x)$, a teda tým menšia musí byť hodnota $g(y)$. Najmenšie možné x teda zodpovedá najmenšej možnej hodnote $g(y)$. Takže stačí zistiť, kde $g(y) = (y + 3)^2 + 1$ má svoje minimum a z toho vieme, že odpoveďou je $y_0 = -3$.

Úloha 40. Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C. Body D a E ležia na hrane AB, pričom D leží medzi bodmi A a E tak, že úsečky CD a CE delia uhol ACB na tri rovnaké časti. Ak $|DE| : |BE| = 8 : 15$, zistite pomer $|AC| : |BC|$.

Výsledok. $\frac{4\sqrt{3}}{11}$

Riešenie. Nech P je bod ležiaci na BC tak, že $DP \parallel AC$. Keďže trojuholníky ABC a DBP sú podobné, tak $|AC| : |BC| = |DP| : |BP|$.



Úsečka CE je os uhla v trojuholníku BCD. Veta o osi uhla (pomer dĺžok dvoch strán trojuholníka je rovnaký ako pomer dĺžok úsekov, ktoré vytne os uhla, ktorý zvierajú, na tretej strane trojuholníka) nám teda hovorí, že $|CD| : |CB| = |ED| : |EB| = 8 : 15$. Taktiež, $|DP| = |CD| \cdot \sin 60°$ a $|BP| = |CB| - |CP| = |CB| - |CD| \cdot \cos 60°$, takže

$$\frac{|DP|}{|BP|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}|CD|}{\frac{15}{8}|CD| - \frac{1}{2}|CD|} = \frac{4\sqrt{3}}{11}.$$

Úloha 41. Miško sa hrá nasledovnú hru. Jeho úlohou je nájsť celé číslo medzi 1 a N (vrátane nich). V každom ťahu vyberie celé číslo z tohto intervalu, ak je to správne číslo, hra skončila, inak sa dozvie, či je jeho číslo príliš malé alebo príliš veľké. Avšak, ak je Miškovo číslo príliš veľké, musí zaplatiť 1 €, ak je príliš malé, musí zaplatiť 2 € (neplatí, ak uhádol). Aké je najväčšie celé číslo N také, že Miško vie vždy skončiť hru, pričom minie najviac 10 €?

Výsledok. 232

Riešenie. Označme N_k maximálne N také, že s k eurami vie Miško nájsť celé číslo z intervalu $1, \ldots, N$ (alebo tiež ľubovoľnú množinu za sebou idúcich N celých čísel). Naším cieľom je vypočítať N_{10}. Očividne $N_0 = 1$ a $N_1 = 2$. Ukážeme, že čísla spĺňajú rekurentný vzťah

$$N_{k+2} = N_{k+1} + N_k + 1.$$

Naozaj, ak má Miško $k+2$ eur a vyberie číslo $N_{k+1} + 1$, tak buď je to správne číslo, alebo je to príliš veľké číslo (v tejto situácii mu zostáva $k+1$ peňazí a N_{k+1} za sebou idúcich celých čísel) alebo príliš malé (Miško pokračuje s k peniazmi a N_k možností). Z tohto nám vyplýva, že $N_{k+2} \geq N_{k+1} + N_k + 1$. Avšak, ak by sme mali na výber viac ako $N_{k+1} + N_k + 1$ čísel a ak by sme vybrali číslo väčšie ako $N_{k+1} + 1$, mohli by sme sa dostať k viac ako N_{k+1} možnostiam ale len s $k+1$ peniazmi (Miško vybral príliš veľké číslo) a podobne, výberom čísla menšieho ako $N_{k+1} + 2$ sa môžme dostať k N_k možnostiam s práve k peniazmi (Miško vybral príliš malé číslo). Tým sme dokázali spomenutý rekurentný vzťah.

Číslo $N_{10} = 232$, mohli sme ho vypočítať priamo z rekurentného vzťahu.

Úloha 42. Kladné celé čísla a, b, c spĺňajú $a \geq b \geq c$ a

$$a + b + c + 2ab + 2bc + 2ca + 4abc = 2017.$$

Nájdite všetky možné hodnoty čísla a.

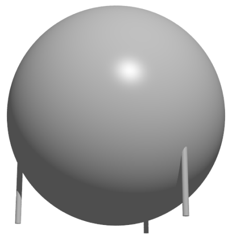
Výsledok. 134

Riešenie. Všimnime si, že keď vynásobíme ľavú stranu číslom 2 a pripočítame 1, dostaneme

$$1 + 2a + 2b + 2c + 4ab + 4bc + 4ca + 8abc = (2a+1)(2b+1)(2c+1).$$

Keď rovnakú operáciu spravíme s pravou stranou, dostávame $2 \cdot 2017 + 1 = 4035$. Prvočíselný rozklad čísla 4035 je $3 \cdot 5 \cdot 269$, a nakoľko $a \geq b \geq c \geq 1$, musia platiť tieto rovnosti $2a + 1 = 269$, $2b + 1 = 5$, a $2c + 1 = 3$. Teda, výsledok je $a = 134$.

Úloha 43. Vesmírna loď má tvar presnej gule s polomerom R, pričom je podopretá troma rovnobežnými zvislými piliermi s dĺžkou 1 vm (vesmírny meter) a zanedbateľnou hrúbkou. Spodné konce týchto pilierov sa nachádzajú vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka s dĺžkou strany 9 vm. Keď je vesmírna loď položená na rovnom povrchu, najnižší bod gule sa dotýka povrchu. Ako dlhý je polomer R (v jednotkách vm)?

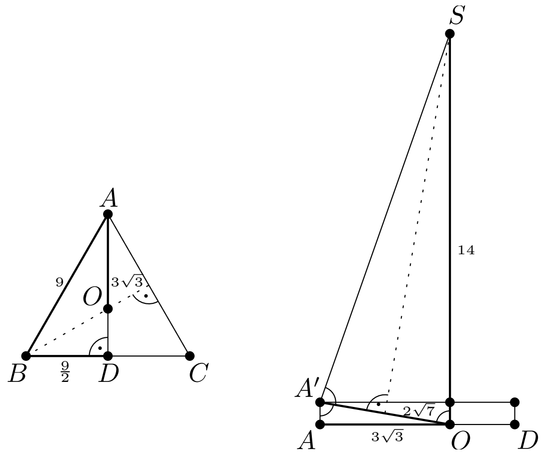


Výsledok. 14

Riešenie. Označme miesta dotyku pilierov so zemou ako A, B, C a najvyššie body pilierov ako A', B', C' (v tomto poradí). Nech O je stredom trojuholníka ABC (bod dotyku gule so zemou), S je stredom vesmírnej lode (gule) a $D = AO \cap BC$. Dostávame $|AO| = |AB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{vm}$, $|AA'| = 1\,\mathrm{vm}$ a $|SO| = |SA'| = R$. Z Pytagorovej vety vieme

$$(|SO| - |AA|')^2 + |AO|^2 = |SA'|^2 \quad \text{alebo} \quad (R-1)^2 + 27 = R^2,$$

z čoho dostávame $R = 14\,\mathrm{vm}$.



Úloha 44. Štyria bratia Andrej, Braňo, Cecil a Denis v lese nazbierali veľkú kopu orechov. Uprostred noci sa Andrej zobudil s obrovskou chuťou jesť, takže sa rozhodol zjesť nejaké z orechov, čo nazbierali. Keď ich spočítal, zistil, že keby odobral jeden orech, zvyšok by sa dal rozdeliť na štyri rovnaké časti. Zahodil preč teda jeden orech a zjedol jednu štvrtinu z toho, čo zostalo. Potom šiel znova spať. Neskôr v noci sa kvôli hladu zobudil aj Braňo a znovu zistil, že keď zahodí jeden orech, zvyšok sa bude dať rozdeliť na štvrtiny. Takže ho zahodil a zjedol štvrtinu zvyšku. Do rána sa presne to isté stalo aj Cecilovi a Denisovi. Keď sa všetci ráno zišli, zistili, že počet orechov bol stále deliteľný štyrmi po odstránení jedného orechu. Koľko najmenej orechov mohli mať na začiatku?

Výsledok. 1021

Riešenie. Pridajme tri „falošné“ orechy na začiatok noci. Potom počet všetkých orechov bude deliteľný štyrmi. Po Andrejovej neskorej večeri bude počet zostávajúcich orechov stále násobok štyroch a stále tam budú naše tri falošné orechy. Opakovaním tohto argumentu zistíme že počet orechov, aj s falošnými, bude 4^5k pre nejaké prirodzené k, takže skutočný počet orechov bude $4^5k - 3$. Dosadením $k = 1$ dostávame hľadané minimum $4^5 - 3 = 1021$.

Úloha 45. Číslo nazývame *praktické*, ak nemá iné prvočíselné delitele ako 2, 3 a 7. Koľko praktických čísel je medzi číslami 1000, 1001, ..., 2000?

Výsledok. 19

Riešenie. Začneme s pozorovaním: Pre reálne číslo $x > 1/2$ existuje práve jedna (celočíselná) mocnina dvoch, na polootvorenom intervale $\langle x, 2x)$.

Ďalej nazveme číslo *veľmi praktické*, ak všetky jeho prvočíselné delitele sú 2 alebo 3. Počet veľmi praktických čísel v intervale $\langle x, 2x)$ zistíme nasledovne: Vieme, že sa tam nachádza práve jedna mocnina dvoch. Ďalej vieme, že na intervale $\langle x, 2x)$ sa nachádza najviac jedno veľmi praktické číslo (nazvime ho c_1) deliteľné tromi, ale nie deliteľné 3^2. Číslo $c_1/3$ je zas jedinou mocninou dvojky na intervale $\langle x/3, 2x/3)$ pričom $x > 1/6$. Takýmto spôsobom vieme nájsť veľmi praktické číslo c_2 deliteľné 3^2 ale nie 3^3 a tak ďalej, až kým $\langle x/3^k, 2x/3^k) \cap \mathbb{N} = \emptyset$ t. j., $x < 3^{-k}/2$. Z toho usudzujeme, že počet veľmi praktických čísel na intervale $\langle x, 2x)$ je $1+$ najväčšie k také, že $3^k < 2x$; označíme ho ako $\ell_3(x)$.

Na získanie počtu praktických čísel na intervale $\langle x, 2x)$ použijeme podobnú techniku: Hľadané číslo je suma všetkých veľmi praktických čísel na intervaloch $\langle x, 2x)$, $\langle x/7, 2x/7)$, $\langle x/7^2, 2x/7^2)$, atď. Ale počet vieme vypočítať ako $\ell_3(x) + \ell_3(x/7) + \ell_3(x/7^2) + \dots$, pričom $\ell_7(x)$ definujeme podobne ako $\ell_3(x)$.

Nakoniec 2000 nie je praktické číslo, a teda našou úlohou je vypočítať

$$\ell_3(1000) + \ell_3(1000/7) + \ell_3(1000/49) + \ell_3(1000/343) = 7 + 6 + 4 + 2 = 19,$$

čo je náš hľadaný počet.

Úloha 46. Cisár Decimus zakázal používanie cifry 0 (zavedenej jeho predchodcom Nullusom) a nariadil, aby sa namiesto nej používala cifra D, reprezentujúca množstvo 10, a tak zaviedol *Decimovu notáciu.* Každé prirodzené číslo má stále jednoznačný zápis, napr.

$$3\mathrm{DD}6 = 3 \cdot 1000 + 10 \cdot 100 + 10 \cdot 10 + 6 \cdot 1 = 4106.$$

Aby sa zjednodušil prechod na nový systém, napísal sa zoznam všetkých čísel od 1 do DDD (vrátane). Koľko výskytov novej cifry D je v zozname? Viacnásobné výskyty v jednom čísle sa počítajú podľa násobnosti, napr. DD je rátané ako dve D-čka.

Výsledok. 321

Riešenie. Všimnime si, že všetky k-ciferné čísla (v Decimovej notácii) sú reprezentované práve reťazcami

$$\underbrace{1\ldots1}_{k}, \ldots, \underbrace{\mathrm{D}\ldots\mathrm{D}}_{k}.$$

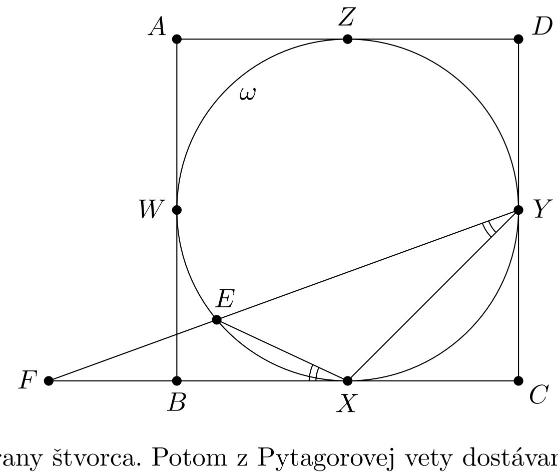
Preto na to, aby sme spočítali celkový počet výskytov číslice D v k-ciferných číslach, môžeme dať dokopy čísla majúce D na prvej pozícii, druhej, atď. až k-tej pozícii. Existuje práve 10^{k-1} takých čísel pre každú pozíciu, lebo musíme vyplniť zvyšných $k-1$ pozícii symbolmi $1, \ldots, 9, \mathrm{D}$. Keďže pre každé číslo rátame všetky výskyty D, môžeme rozdeliť tie čísla s viacerými výskytami do všetkých zodpovedajúcich skupín a výsledok zostane správny, takže je presne $k \cdot 10^{k-1}$ číslic D medzi k-cifernými číslami.

Z toho dostávame to, že medzi číslami $1, \ldots, \mathrm{DDD}$, sa cifra D objaví $1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 = 321$ krát.

Úloha 47. Štvorec $ABCD$ má vpísanú kružnicu ω, ktorá sa dotýka štvorca v bodoch W, X, Y, Z, ktoré ležia postupne na stranách AB, BC, CD, DA. Nech E je vnútorný bod (kratšieho) oblúku kružnice ω medzi bodmi W a X a nech F je priesečník priamok BC a EY. Ak vieme, že $|EF| = 5$ a $|EY| = 7$, vypočítajte obsah trojuholníka FYC.

Výsledok. 21

Riešenie. Z vlastností úsekového uhla vieme, že $|\sphericalangle EXF| = |\sphericalangle EYX|$. Z toho vyplýva, že trojuholníky FEX a FXY sú podobné (majú tiež spoločný uhol pri F), a preto $|EF| : |XF| = |XF| : |YF|$ alebo $|XF|^2 = |EF| \cdot |YF| = 5 \cdot 12 = 60$ (fakt tiež známy ako mocnosť bodu ku kružnici).



Nech $t = \frac{1}{2}|AB|$ je polovica strany štvorca. Potom z Pytagorovej vety dostávame, že

$$|YF|^2 = t^2 + (t + |XF|)^2 = 2t^2 + 2t \cdot |XF| + |XF|^2 = 2t(t + |XF|) + |XF|^2,$$

teda hľadaný obsah trojuholníka vieme vypočítať ako

$$\frac{1}{2} \cdot |YC| \cdot |CF| = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (t + |XF|) = \frac{1}{4}(|YF|^2 - |XF|^2) = 21.$$

Úloha 48. V algebrograme

$$WE \cdot LIKE = NABOJ$$

rôzne písmená zastupujú rôzne číslice. Okrem toho vieme, že $\mathrm{S}(WE) = 11$, $\mathrm{S}(LIKE) = 23$ a $\mathrm{S}(NABOJ) = 19$, kde $\mathrm{S}(n)$ označuje ciferný súčet čísla n. Žiadne z týchto čísel nemôže začínať nulou. Nájdite 5-ciferné číslo $NABOJ$.

Výsledok. 60 724

Riešenie. Keďže sa v algebrograme vyskytuje 10 rôznych písmen, tak zastupujú všetky rôzne cifry $0, 1, \ldots, 9$. Súčet všetkých cifier je 45. Sčítaním troch ciferných súčtov dostaneme $11 + 23 + 19 = 53$, čo sa rovná $45 + E$. Z toho vyplýva, že $E = 8$. Posledná cifra ľavej strany musí byť 4, preto $J = 4$. Využitím $\mathrm{S}(WE) = 11$ dostaneme tiež $W = 3$.

Ďalej si všimneme, že

$$LIKE < \frac{100000}{38} < 2636.$$

Preto môže platiť len $L = 1$ alebo $L = 2$. V prípade $L = 2$ ciferný súčet $LIKE$ vedie k $I + K = 13$, čo znamená, že (I, K) alebo (K, I), musí byť jedna z dvojíc $(4, 9)$, $(5, 8)$ alebo $(6, 7)$. Ale ani jedna z nich nie je možná, lebo 4 a 8 sú už použité a v prípade $(6, 7)$ by činiteľ $LIKE$ prekročil hornú hranicu vyššie. Z tohto vieme usúdiť, že $L = 1$. Potom z ciferného súčtu $LIKE$ vyplýva $I + K = 14$, čo obmedzuje možnosti na dvojicu (I, K) alebo (K, I) na dvojicu $(5, 9)$. Ľahkým výpočtom zistíme, že iba $(I, K) = (5, 9)$ je riešením. Z $38 \cdot 1598 = 60\,724$ dostávame hľadané číslo $NABOJ = 60\,724$.

Úloha 49. Nájdite všetky prirodzené čísla n s vlastnosťou, že súčet všetkých netriviálnych deliteľov čísla n je 63.

Poznámka: Netriviálny deliteľ d čísla n spĺňa $1 < d < n$.

Výsledok. 56, 76, 122

Riešenie. Označme $s(n)$ súčet všetkých netriviálnych deliteľov n. Je ľahké zistiť, že neexistuje riešenie úlohy, ak n má troch alebo viacerých prvočíselných deliteľov: $s(2 \cdot 3 \cdot 5) = 41$, $s(2 \cdot 3 \cdot 7) = 53$ a vyššie hodnoty n dávajú $s(n)$ väčšie ako 63. Navyše, keby n bolo mocninou prvočísla p, $s(n)$ by bolo deliteľné p, takže $p = 3$ alebo $p = 7$. Avšak môžeme jednoducho vyskúšať, že žiadna mocnina 3 ani 7 nespĺňa danú podmienku.

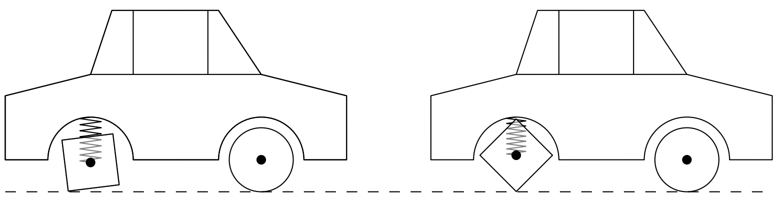
Preto n má práve dvoch rôznych prvočíselných deliteľov p, q a vyhovujúce riešenie môžeme vyjadriť ako $n = p^\alpha \cdot q^\beta$. Ak $\alpha = \beta = 2$, tak $p = 2$, $q = 3$ dáva $s(n) = 54$ a všetky ostatné kombinácie prvočíselných deliteľov, prípadne väčšie exponenty spôsobia, že $s(n) > 63$. Preto aspoň jeden z exponentov musí byť menší ako 2; špeciálne n nie je druhá mocnina a musí mať párny počet (netriviálnych) deliteľov. Keby n bolo nepárne, tak by $s(n)$ bolo párne, čo ale nie je, preto zisťujeme, že (Bez ujmy na všeobecnosti) $q = 2$.

Z rovnakého dôvodu, počet nepárnych netriviálnych deliteľov, (ktoré sú práve p, p^2, $\ldots$, p^α) je nepárny, teda α je nepárne. Avšak aj pre $p = 3$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$ $s(n)$ presiahne 63, a preto nutne $\alpha = 1$. Môžeme usúdiť, že

$$s(n) = 2 + 2^2 + \cdots + 2^\beta + p + 2p + \cdots + 2^{\beta-1}p = (2^\beta - 1)(p + 2).$$

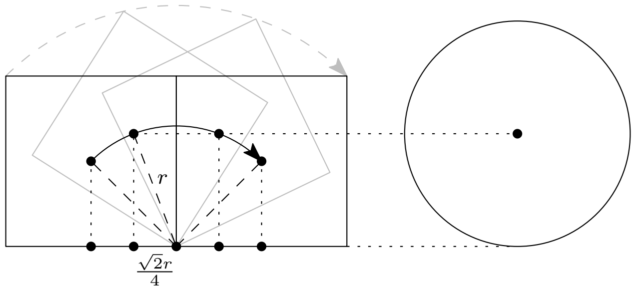
Zo všetkých deliteľov čísla 63, iba 1, 3 a 7 sú v tvare $2^\beta - 1$. To nám dáva 61, 19 a 7 ako zodpovedajúce hodnoty p a možné hodnoty n sú $2 \cdot 61 = 122$, $2^2 \cdot 19 = 76$ a $2^3 \cdot 7 = 56$.

Úloha 50. Jožo má štýlové auto so štvorcovými zadnými kolesami (predné kolesá sú štandardné okrúhle). Také auto by sa normálne šoférovalo veľmi nepríjemne, ale Jožo nainštaloval veľmi dobré tlmiče pre zadné kolesá tak, aby auto ostalo v pevnej pozícii rovnobežnej s povrchom počas jazdy na rovnej ceste. Dĺžka strany zadného kolesa je 40 cm a jeho náprava je v pevnej pozícii vzhľadom na auto v horizontálnom smere (teda vzhľadom na auto sa hýbe len dohora a dodola). Aký je polomer predného kolesa (v cm), ak vieme, že keď sa auto hýbe konštantnou rýchlosťou dopredu, tak je náprava zadného kolesa presne polovicu času vyššie a polovicu času nižšie nad povrchom ako náprava predného kolesa?



Výsledok. $10\sqrt{7}$

Riešenie. Uvažujme trajektóriu stredu štvorca počas toho, ako sa auto hýbe dopredu. Pozostáva so štvrťkružníc so stredmi vo vrcholoch štvorca.



Ak auto zachováva konštantnú rýchlosť, tak sa môžeme na tento oblúk pozerať ako na graf výšky zadnej nápravy ako funkcie od času. Preto hľadaný polomer predného kolesa je výška v presne jednej štvrtine horizontálnej vzdialenosti. Nech r je polomer oblúku; potom sa táto jedna štvrtina rovná $\sqrt{2}r/4$. Použitím Pytagorovej vety dostaneme, že výška v tom momente je

$$\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}r\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{8}}r.$$

K výsledku sa dopracujeme dosadením $r = 20\sqrt{2}$.

Úloha 51. Mesto Budúcnosti má tvar pravidelného 2017-uholníka. Vo vrcholoch mesta je 2017 staníc metra, očíslovaných $1, 2, \ldots, 2017$ proti smeru hodinových ručičiek. V meste premávajú dve linky metra: *stranová* a *uhlopriečna*. Stranová linka zabezpečuje priame spojenie zo stanice a do b (ale nie v opačnom smere) práve vtedy, keď $a - b + 1$ je deliteľné číslom 2017, a jedna taká jazda trvá 1 minútu. Uhlopriečna linka premáva zo stanice a do b práve vtedy, keď $2b - 2a + 1$ je deliteľné číslom 2017, a jedna jazda trvá 15 minút. Mr. Miro je vášnivý cestovateľ metrom a začínajúc zo stanice 1, chce nájsť cestu do stanice n s nasledujúcou vlastnosťou: Najkratší možný čas potrebný na to, aby sme sa dostali metrom do tejto stanice, je najväčší medzi všetkými stanicami. Nájdite všetky hodnoty n možných cieľových staníc pre Mr. Mira.

Výsledok. 1984, 1985

Riešenie. Najprv si uvedomíme, že stranovou linkou sa dostaneme zo stanice a o jednu stanicu ďalej (proti smeru hodinových ručičiek), a uhlopriečnou sa dostaneme o 1008 staníc ďalej. Preto nezáleží na tom, v akom poradí používame stranové a uhlopriečne linky.

Všimnime si, že ak $n \geq 1009$, tak použitím uhlopriečnej linky raz a použitím stranovej linky $(n - 1009)$-krát sa Mr. Miro dostane do stanice n za $15 + (n - 1009)$ minút. Ak by cestoval iba uhlopriečnou linkou, tak sa dostane do stanice n za $2 \cdot (2018 - n) \cdot 15$ minút. Je nemožné, aby existovala (časovo) kratšia cesta do stanice n: ak by obsahovala aspoň dve uhlopriečne spojenia a jedno stranové, tak sa dá nahradiť časovo kratšou cestou tak, že z nej tieto spojenia odstránime.

Takže chceme nájsť $n \geq 1009$, pre ktoré je $M(n) = \min\{n - 994, 30 \cdot 2018 - 30n\}$ najväčšie možné. Vieme, že

$$n - 994 \leq 30 \cdot 2018 - 30n \iff n \leq \frac{30 \cdot 2018 + 994}{31} = \frac{31 \cdot 2018 - 1024}{31} = 2018 - 33 - \frac{1}{31} = 1985 - \frac{1}{31}.$$

Preto pre $1009 \leq n \leq 1984$: $M(n) = n - 994 \leq 1984 - 994 = 990$ a pre $n \geq 1985$: $M(n) = 30 \cdot (2018 - n) \leq 30 \cdot (2018 - 1985) = 990$, teda hľadané najväčšie minimum je rovné 990 a dosahuje sa pre $n = 1984$ a $n = 1985$.

Ostáva overiť, že pre $n < 1009$ je možné dostať sa do stanice n za menej ako 990 minút: pre $n \leq 990$ Mr. Miro môže cestovať $n - 1$ minút ak použije iba stranové linky a pre $n \geq 991$ môže cestovať $15 \cdot (2 \cdot (1009 - n) + 1) \leq 15 \cdot 37 = 555$ minút iba uhlopriečnymi.

Úloha 52. Nech $f(n)$ je počet prirodzených čísel, ktoré majú presne n cifier a ktorých cifry majú súčet 5. Určte, koľko z 2017 prirodzených čísel $f(1), f(2), \ldots, f(2017)$ má cifru na mieste jednotiek rovnú 1.

Výsledok. 202

Riešenie. Každé n-ciferné číslo s ciferným súčtom 5 môžeme reprezentovať ako 5 jednotiek priradených niektorým n miestam tohto čísla. Každému miestu môže byť priradených aj viac jednotiek a prvému miestu (zľava) musí byť priradená aspoň jedna. Preto je počet n-ciferných čísel s ciferným súčtom 5 rovný počtu spôsobov, ako rozmiestniť 4 jednotky do n miest. Inými slovami počítame počet kombinácii 4-tej triedy z n prvkov s opakovaním, teda

$$f(n) = \binom{n + 4 - 1}{4} = \frac{(n + 3)(n + 2)(n + 1)n}{24}.$$

Ďalej už budeme uvažovať f ako tento výraz namiesto pôvodnej kombinatorickej definície.

Poďme spočítať počet čísel $f(n)$, ktorých cifra na mieste jednotiek je 1. Ak n dáva zvyšok po delení piatimi 0, 2, 3 alebo 4, tak n, $n+3$, $n+2$ alebo $n+1$ je deliteľné piatimi. Keďže 24 a 5 sú nesúdeliteľné, $f(n)$ je tiež deliteľné piatimi, a preto je jeho posledná cifra 0 alebo 5. Teda posledná cifra $f(n)$ môže byť 1, iba ak n dáva zvyšok 1 po delení piatimi.

Všimnime si ešte, že $f(n)$ a $f(n+40)$ majú rovnakú poslednú cifru. Pretože ak spočítame $f(n+40) - f(n)$ a pozrieme sa iba na čitateľov, môžeme pokračovať roznásobením výrazu

$$24f(n+40) = \big(40 + (n)\big)\big(40 + (n+1)\big)\big(40 + (n+2)\big)\big(40 + (n+3)\big),$$

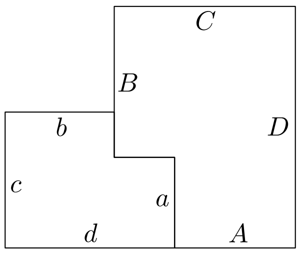
kde vnútorné zátvorky necháme neroznásobené. Po odčítaní člena $24f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, budú zvyšné členy súčinom štyroch čísel, z ktorých aspoň dve sú 40 alebo presne tri sú zátvorky obsahujúce n. V prvom prípade je člen deliteľný 40^2, v druhom prípade aspoň dve zo zátvoriek sú po sebe idúce čísla, a preto je člen deliteľný 80. Takže po vydelení $24 = 8 \cdot 3$, bude rozdiel deliteľný 10-timi, ako sme chceli. Z toho vyplýva, že nám stačí skontrolovať cifry čísla $f(n)$ na mieste jednotiek pre ľubovoľnú množinu 40-tich po sebe idúcich celých čísel n.

Ľahko sa dá overiť, že

$$f(n) = f(-3-n). \tag{$\star$}$$

Keď zoberieme do úvahy všetky fakty, potrebujeme spočítať len $f(1) = 1$, $f(6) = 126$, $f(11) = 1001$ a $f(16) = 3876$. Z rovnosti ($\star$) vyplýva, že medzi zvyšnými štyrmi číslami tvaru $f(5k+1)$, t. j. $f(-4)$, $f(-9)$, $f(-14)$ a $f(-19)$, majú dve poslednú cifru 1 a dve 6. Preto $4 \cdot 2000/40 = 200$ z čísel $f(1), \ldots, f(2000)$ má poslednú cifru 1 a z čísel $f(2001), \ldots, f(2017)$, to platí pre $f(2001)$ a $f(2011)$. Spolu máme 202 takých čísel.

Úloha 53. Na obrázku sú dva (nepriamo) podobné šesťuholníky, ktorých niektoré zo strán majú dĺžku a, b, c, d a A, B, C, D. Ak ich dáme dohromady tak, ako na obrázku, dostaneme nový šesťuholník, ktorý je s nimi tiež podobný (priamo podobný tomu napravo). Nájdite pomer $A : a$.



Výsledok. $\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

Riešenie. Budeme tri podobné šesťuholníky nazývať malý, stredný a veľký. Označme p hľadaný pomer. Z podobnosti malého a stredného šesťuholníka máme

$$p = A : a = B : b = C : c = D : d.$$

Navyše, zrejme platí $D = B + a$ a $C + b = A + d$. Pomer $B : A$ v strednom šesťuholníku zodpovedá pomeru $C : c$ vo veľkom. Preto máme $B : A = p$, dôsledkom čoho je $B = p^2 a$. Analogickými pozorovaniami v stredom a veľkom šesťuholníku dostaneme $b : a = C : B = D : C$, a preto

$$d : a = \frac{d}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a} = p^3.$$

Dosadením týchto výsledkov do rovnice $D = B + a$ dostávame $pd = p^2 a + a = a(p^2+1)$, a teda $p^4 = p^2 + 1$. Jediné nezáporné riešenie rovnice $p^4 - p^2 - 1 = 0$ ako kvadratickej rovnice s neznámou p^2 je $p^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ako dôsledok máme, že

$$p = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$

teda druhá odmocnina zo zlatého rezu je hľadaný výsledok.

Úloha 54. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel (a, b), pre ktoré sú všetky korene oboch rovníc

$$x^2 - ax + a + b - 3 = 0,$$
$$x^2 - bx + a + b - 3 = 0$$

tiež prirodzené čísla.

Výsledok. $(2,2)$, $(6,6)$, $(7,8)$, $(8,7)$

Riešenie. Nech k, l sú korene prvej rovnice a m, n korene druhej. Je ľahké vidieť, že ak máme riešenie (k, l, m, n), môžeme vymeniť k a l alebo m a n, alebo obe a dostaneme ďalšie riešenie — preto budeme uvádzať len jedno z týchto riešení. Z Vietovych vzťahov vieme, že

$$k + l = a, \quad m + n = b, \quad kl = mn = a + b - 3.$$

Spojením týchto rovností dostávame

$$kl + mn = 2a + 2b - 6 = 2k + 2l + 2m + 2n - 6,$$

čo môžeme upraviť do tvaru

$$(k - 2)(l - 2) + (m - 2)(n - 2) = 2.$$

Ak sú oba sčítance $(k - 2)(l - 2)$ a $(m - 2)(n - 2)$ kladné, t. j. rovné 1, dostávame riešenia $(k, l, m, n) = (3, 3, 3, 3)$ a $(k, l, m, n) = (1, 1, 1, 1)$. Ak je jeden zo sčítancov nula, tak máme riešenia $(k, l, m, n) = (2, 6, 3, 4)$ a $(3, 4, 2, 6)$.

Ostal nám prípad, keď jeden zo sčítancov je záporný; aby sa to stalo, musí byť jedno z čísel k, l, m, n rovné 1. Bez ujmy na všeobecnosti nech $k = 1$, potom $l = mn$ a môžeme upraviť rovnicu na

$$2 = -(l - 2) + (m - 2)(n - 2) = -mn + 2 + mn - 2m - 2n + 4 = -2m - 2n + 6,$$

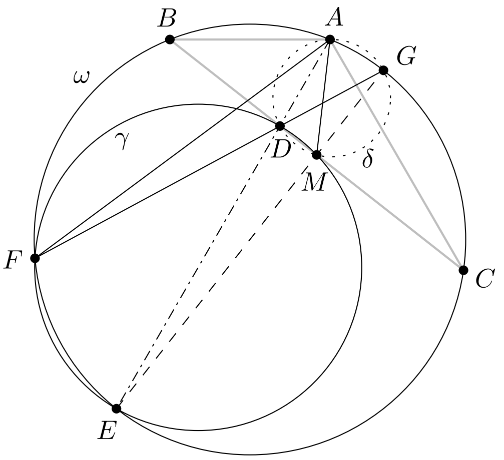
teda $m + n = 2$, z čoho máme $m = n = 1$ a $l = mn = 1$. Z toho môžeme usúdiť, že neexistuje riešenie so záporným sčítancom.

Preto možné hodnoty $(a, b) = (k + l, m + n)$ sú $(6, 6)$, $(8, 7)$, $(7, 8)$, $(2, 2)$. Môžeme jednoducho overiť, že tieto hodnoty (a, b) naozaj spĺňajú podmienky zo zadania.

Úloha 55. Trojuholník ABC s $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, a $|AC| = 5$ je vpísaný do kružnice ω. Os uhla BAC pretína stranu BC v bode D a kružnicu ω po druhýkrát v bode E. Nech γ je kružnica s priemerom DE. Kružnice ω a γ sa pretínajú v bodoch E a F. Určte dĺžku úsečky AF.

Výsledok. $\frac{30}{\sqrt{19}}$

Riešenie. Je známy fakt, že os úsečky BC prechádza bodom E. Nech táto os pretína kružnicu ω po druhýkrát v bode G (takže EG je priemer ω) a nech M je stred BC.



Využitím Tálesovej vety v kružniciach ω a γ zisťujeme, že $|\sphericalangle GFE| = |\sphericalangle DFE| = 90°$, z čoho vyplýva, že body G, D, F ležia na jednej priamke. Navyše, $|\sphericalangle GMD| = 90°$ a $|\sphericalangle GAD| = |\sphericalangle GAE| = 90°$ (opäť Tálesova veta), čo dokazuje, že body D, M, G, A ležia na jednej kružnici; označme túto kružnicu δ. Teraz použitím obvodových uhlov (v kružniciach napísaných nad znamienkom rovnosti) dostávame

$$|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle AFG| \overset{\omega}{=} |\sphericalangle AEG| = |\sphericalangle AEM|$$

a tiež

$$|\sphericalangle FAD| = |\sphericalangle FAE| \overset{\omega}{=} |\sphericalangle FGE| = |\sphericalangle DGM| \overset{\delta}{=} |\sphericalangle DAM| = |\sphericalangle EAM|.$$

Z toho vyplýva, že trojuholníky AFD a AEM sú podobné. Podobne odvodíme, že

$$|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ACB| \overset{\omega}{=} |\sphericalangle AEB|,$$

čo spolu s $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle EAB|$ (AE je os uhla), dokazuje podobnosť trojuholníkov CAD a EAB. Preto

$$|AF| = |AE| \cdot \frac{|AD|}{|AM|} = |AE| \cdot \frac{|AB| \cdot \frac{|AC|}{|AE|}}{|AM|} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{|AM|}.$$

Dĺžka AM sa dá vypočítať zo vzorca na dĺžku ťažnice ako

$$|AM| = \frac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{19},$$

z čoho plynie

$$|AF| = \frac{3 \cdot 5}{\frac{1}{2}\sqrt{19}} = \frac{30}{\sqrt{19}}.$$

Úloha 56. Určte počet usporiadaných trojíc (x, y, z), kde x, y, z sú nezáporné celé čísla menšie ako 2017 také, že výraz

$$(x + y + z)^2 - 704xyz$$

je deliteľný číslom 2017.

Výsledok. $2017^2 + 1 = 4\,068\,290$

Riešenie. Podmienka $2017 \mid (x + y + z)^2 - 704xyz$ môže byť prepísaná ako $(x + y + z)^2 \equiv 704xyz \pmod{2017}$. Všetky nasledujúce kongruencie budeme uvažovať modulo 2017. Keďže 2017 je prvočíslo, tak pre každé prirodzené číslo $a < 2017$ existuje práve jedno prirodzené číslo menšie ako 2017, ktoré budeme označovať a^{-1}, spĺňajúce $a \cdot a^{-1} \equiv 1$.

Najprv uvažujme trojice (x, y, z) kde všetky tri čísla x, y, a z sú nenulové. Nech $y \equiv kx$ a $z \equiv lx$ (také k a l vždy existujú: $k \equiv y \cdot x^{-1}$, $l \equiv z \cdot x^{-1}$). Dosadením do podmienky zo zadania dostávame $(x + kx + lx)^2 \equiv 704klx^3$ a po vynásobení $(x^{-1})^2$ dostávame, že $(1 + k + l)^2 \equiv 704klx$. Nakoniec vynásobíme kongruenciu $(704kl)^{-1}$, z čoho dostaneme

$$x \equiv (704kl)^{-1}(1 + k + l)^2.$$

Z toho vyplýva, že pre každé k, $l \in \{1, 2, \ldots, 2016\}$ existuje práve jedno x spĺňajúce podmienku zo zadania (všetky úpravy môžeme obrátiť). Také k a l môžeme zvoliť 2016^2 spôsobmi. Avšak, x musí byť nenulové — to bude práve vtedy, keď $k + l \not\equiv 2016$. Existuje 2015 takých dvojíc (k, l), jedna pre každé nenulové k okrem 2016. Preto existuje $2016^2 - 2015$ hľadaných trojíc (x, y, z) za podmienky $x, y, z \neq 0$.

Ak $x = 0$ a y a z sú nenulové, tak máme $(y + z)^2 \equiv 0$, čo platí práve vtedy, keď $y \equiv -z$; existuje 2016 takých trojíc $(0, y, z)$. Tak isto dostávame 2016 trojíc pre $y = 0$ a $z = 0$. Ak sú dve z čísel x, y, z rovné nule, tak tretie musí byť tiež nulové, takže máme ešte jednu trojicu $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Celkový počet trojíc (x, y, z) je preto

$$2016^2 - 2015 + 3 \cdot 2016 + 1 = 2016^2 + 2 \cdot 2016 + 1 + 1 = 2017^2 + 1.$$

Úloha 57. Slavo a Pedro hrajú hru so spravodlivou kockou, ktorá má dve červené steny, dve zelené a dve modré. Striedavo hádžu kockou, až dokým jeden z nich neuvidí pri svojich hodoch všetky tri farby na vrchu kocky. Ten hráč, ktorému sa to podarí, sa stáva víťazom. S akou pravdepodobnosťou Slavo vyhrá, za predpokladu, že on je prvý, ktorý hádže kockou?

Výsledok. 81/140

Riešenie. Označme $P_1(x, y)$ pravdepodobnosť, že hráč, ktorý práve ide hodiť kockou, vyhrá za predpokladu, že už doteraz videl x farieb a druhý hráč videl y farieb. Nech $P_2(x, y)$ je tá istá pravdepodobnosť, ale pre hráča, ktorý práve nehádže (takže $P_1(x, y) + P_2(x, y) = 1$). Našim cieľom je určiť $P_1(1, 1)$, t. j. pravdepodobnosť, že začínajúci hráč vyhrá po tom, ako obaja hráči raz hodili kockou.

Keďže $P_2(2, 2) = \frac{2}{3}P_1(2, 2)$, tak z toho vyplýva, že $P_1(2, 2) = \frac{3}{5}$, $P_2(2, 2) = \frac{2}{5}$. Navyše, zo vzťahov

$$\begin{aligned} P_2(2, 1) &= \tfrac{2}{3}P_1(1, 2), \\ P_1(1, 2) &= \tfrac{1}{3}P_2(2, 1) + \tfrac{2}{3}P_2(2, 2) \end{aligned}$$

dostávame $P_1(1, 2) = \frac{12}{35}$, $P_2(1, 2) = \frac{23}{35}$, $P_1(2, 1) = \frac{27}{35}$ a $P_2(2, 1) = \frac{8}{35}$. Na záver máme

$$P_1(1, 1) = \tfrac{1}{3}P_2(1, 1) + \tfrac{2}{3}P_2(1, 2),$$

z čoho dostávame $P_1(1, 1) = \frac{81}{140}$.

Úloha 58. Pre danú rovnicu

$$k(k+1)(k+3)(k+6) = n(n+1)$$

nájdite najväčšie celé číslo n, pre ktoré existuje celočíselné riešenie tejto rovnice (k, n).

Výsledok. 104

Riešenie. Najprv si všimneme, že ak máme riešenie (k, n), tak jediné rôzne riešenie pre tú istú hodnotu k je $(k, -1-n)$. Z dvoch celých čísel n, $-1-n$ je jedno vždy nezáporné a druhé záporné. Keďže nás zaujíma najväčšia možná hodnota n, môžeme predpokladať $n \geq 0$. Pre kladné n je $n(n+1)$ rastúce ako funkcia od n, takže na to, aby bolo n čo najväčšie, musíme maximalizovať ľavú stranu rovnosti.

Označme $P(k)$ polynóm na ľavej strane $k(k+1)(k+3)(k+6) = k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k$. Využijeme fakt, že medzi dvoma po sebe idúcimi číslami tvaru z pravej strany rovnosti (t.j. $n(n+1)$ a $(n+1)(n+2)$) sa nenachádza žiadne ďalšie číslo tohto tvaru. Skúsme aproximovať $P(k)$ polynómom $(k^2 + ak + b)(k^2 + ak + (b+1))$ s premennou k a celočíselnými koeficientami a a b. Porovnaním koeficientov pri k^3, dostávame $a = 5$. Roznásobením dostávame

$$\begin{aligned}(k^2 + ak + b)(k^2 + ak + (b+1)) &= (k^2 + 5k + b)(k^2 + 5k + (b+1)) \\ &= k^4 + 10k^3 + (26 + 2b)k^2 + (10b + 5)k + (b^2 + b).\end{aligned}$$

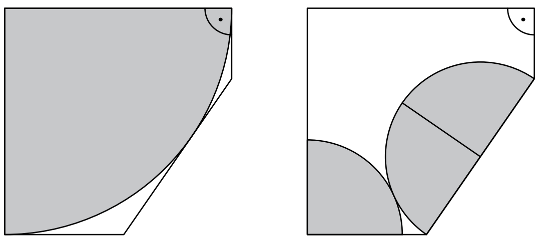
Teraz neexistuje celé číslo b spĺňajúce $26 + 2b = 27$. Preto dosadením $b = 0$, resp. $b = 1$, dostaneme pre dostatočne veľkú absolútnu hodnotu k nerovnosti

$$k^4 + 10k^3 + 26k^2 + 5k \overset{(1)}{<} k^4 + 10k^3 + 27k^2 + 18k \overset{(2)}{<} k^4 + 10k^3 + 28k^2 + 15k + 2.$$

Pre k spĺňajúce toto je teda $P(k)$ medzi dvoma po sebe idúcimi číslami tvaru $n(n+1)$. Preto musíme zistiť, pre aké hodnoty k sú tieto nerovnosti platné. Nerovnosť (1) sa zjednoduší na $0 < k^2 + 13k = k(k+13)$, teda $k > 0$ alebo $k < -13$. Podobne, (2) dáva $0 < k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2)$, takže $k > 2$ alebo $k < 1$. Preto pre $k < -13$ alebo $k > 2$ sú obe nerovnosti splnené a $P(k)$ je medzi dvoma po sebe idúcimi číslami tvaru $n(n+1)$. Preto musíme analyzovať len možnosti s $-13 \leq k \leq 2$.

Nahradením nerovností (1), (2) rovnosťami, dostaneme vyhovujúce hodnoty k, lebo potom sa $P(k)$ rovná číslu tvaru $n(n+1)$; a teda existuje riešenie (k, n) pre $k = -13$, 0, 1, 2. Keďže $P(k)$ je rastúce pre $k \geq 0$ a my hľadáme maximálnu možnú hodnotu $P(k)$, hodnoty $P(0)$ a $P(1)$ nie sú podstatné. Podobne, keďže $P(k)$ je zjavne klesajúce pre $k \leq -6$, tak nám ostáva vyskúšať $k = -5$, -4, -3, -2, -1. Avšak $P(k) \leq 0$ pre $-6 \leq k \leq -3$ a $-1 \leq k \leq 0$, teda iba $P(-2)$ je zaujímavé. Je ľahko vidieť, že spomedzi hodnôt $P(-13)$, $P(-2)$, $P(2)$, je prvá najväčšia. Pre $k = -13$ sa nerovnosť (1) stane rovnosťou, a preto $n = k^2 + 5k = 104$ je hľadané číslo.

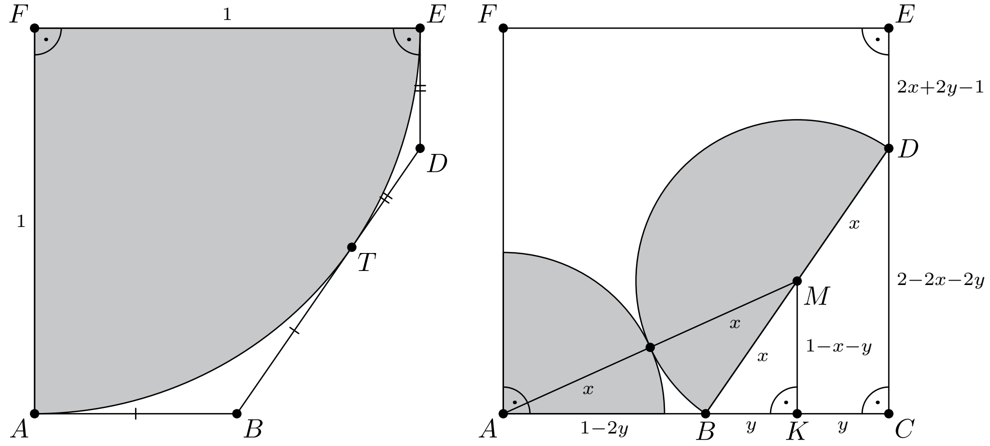
Úloha 59. Pizzéria Štvrť roznáša pizze v špeciálnych päťuholníkových škatuliach, ktoré sú vhodné aj pre štvrtinu veľkej pizze, aj pre tri štvrtiny malej pizze (ako na obrázku). Aký je polomer malej pizze (v cm), ak polomer veľkej pizze je 30 cm?



Výsledok. $5(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4})$

Riešenie. Nech $ABDEF$ je päťuholník podobný so škatuľou na pizzu s $|EF| = 1$ (ak zoberieme 30 cm ako jednotku, tak dostaneme podmienky z úlohy). Všimnime si, že $|AF| = |EF|$ (polomer veľkej pizze) a $|\sphericalangle AFE| = |\sphericalangle BAF| = 90°$ (stredové uhly v štvrťkruhoch), takže existuje bod C taký, že $ACEF$ je štvorec. Nech K, M sú postupne stredy úsečiek

BC, BD a nech T je bod dotyku veľkej pizze a úsečky BD.



Nech x je hľadaný polomer malej pizze, t. j. $|BD| = 2x$, a nech $y = |BK| = |KC|$. Vďaka viacerým dotykom dostávame $|AM| = 2x$ a $|AB| = |BT|$, $|DE| = |DT|$, takže $|DE| = |BD| - |AB| = 2x + 2y - 1$, $|CD| = 2 - 2x - 2y$ a $|KM| = |CD|/2 = 1 - x - y$. Použitím Pytagorovej vety v trojuholníkoch BKM a AKM, dostávame

$$y^2 + (1 - x - y)^2 = x^2 \quad \text{a} \quad (1 - y)^2 + (1 - x - y)^2 = 4x^2.$$

Teda,

$$y^2 + 4x^2 - (1 - y)^2 = x^2, \quad \text{takže} \quad y = \frac{1 - 3x^2}{2}.$$

Dosadením tohoto do jednej z rovníc vyššie a zjednodušení máme

$$9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 = 0.$$

Všimnime si, že

$$\begin{aligned} 9x^4 - 6x^3 - 2x + 1 &= (3x^2)^2 + (x - 1)^2 - 2 \cdot 3x^2(x - 1) - 7x^2 \\ &= (3x^2 - x + 1)^2 - 7x^2 \\ &= (3x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7} + 1)x + 1), \end{aligned}$$

takže dostávame rovnicu

$$(3x^2 + (\sqrt{7} - 1)x + 1)(3x^2 - (\sqrt{7} + 1)x + 1) = 0.$$

Teraz je ľahko vidieť, že ľavá zátvorka nemá reálne korene a pravá zátvorka má korene v tvare

$$\frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{7} \pm \sqrt{2\sqrt{7} - 4}\right).$$

Avšak väčší z dvoch koreňov je zrejme väčší ako $1/2$, čo je spor s nerovnosťou

$$2|BD| = |BD| + |AB| + |DE| < |BC| + |CD| + |AB| + |DE| = 2.$$

To znamená, že $x = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4})$ takže odpoveď je

$$30x = 5\left(1 + \sqrt{7} - \sqrt{2\sqrt{7} - 4}\right) \text{cm}.$$