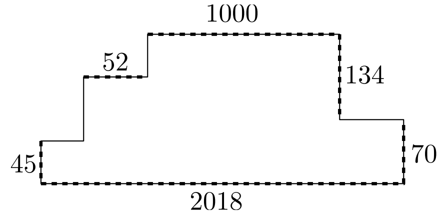
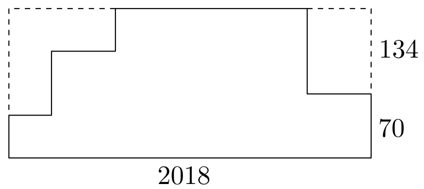
Úloha 1. Sousední strany desetiúhelníku svírají pravý úhel. Délky některých jeho stran v centimetrech jsou znázorněny na obrázku.



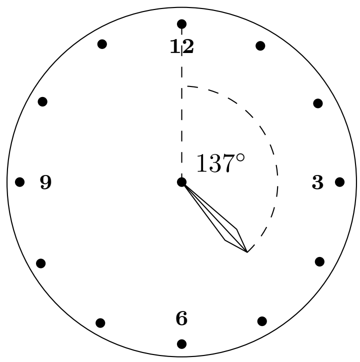
Jaký je obvod desetiúhelníku v centimetrech?

Výsledek. 4444

Řešení. Nahradíme-li „vnitřní“ rohy „vnějšími“, dostaneme obdélník o stranách 2018 a $70 + 134 = 204$, který má zřejmě stejný obvod jako původní desetiúhelník. Obvod obdélníku spočteme jako $2 \cdot (2018 + 204) = 4444$.



Úloha 2. Záškodník ulomil minutovou ručičku stolních hodin. Kolik minut uběhlo od poslední celé hodiny, jestliže je úhel mezi hodinovou ručičkou a dvanáctou hodinou 137°?



Výsledek. 34

Řešení. Hodinová ručička urazí $360° : 12 = 30°$ za hodinu, což dělá 1° za dvě minuty. Jelikož $137° = 4 \cdot 30° + 17°$, urazila hodinová ručička od 12:00 čtyři celé hodiny a $17 \cdot 2 = 34$ minut.

Úloha 3. Jirka, Karel, Lucien a Marta testovali nábojové úlohy. Počty bodů, které získali, jsou 2, 12, 86 a 6, ovšem ne nutně v tomto pořadí. Také víme, že

- Jirka získal *pampam* bodů než Lucien,
- Lucien získal *pampam* bodů než Karel,
- Marta získala *pampam* bodů než Karel,
- Jirka získal *pampam* bodů než Marta.

kde *pampam* znamená buď „více“, nebo „méně“ (stejný význam ve všech čtyřech případech). Jaký je součet bodů Marty a Luciena?

Výsledek. 18

Řešení. Pokud *pampam* znamená méně, pak Jirka získal nejvíce bodů a Karel nejméně, a pokud *pampam* znamená více, je tomu právě naopak. V každém případě Lucien a Marta dosáhli prostředních dvou výsledků, to je 6 a 12 bodů. Hledaný součet je tedy 18.

Úloha 4. Kuba a Kubikula stojí uprostřed náměstí a (po směru hodinových ručiček) počítají okolní domy. Každý však začne v jiném místě, takže Kubův dům č. 4 je Kubikulův dům č. 16 a Kubův dům č. 12 má u Kubikuly č. 7. Kolik je na náměstí celkem domů?

Výsledek. 17

Řešení. Jelikož Kubův dům č. 12 má u Kubikuly č. 7, je zřejmě Kubův dům č. $6 = 12 - 6$ Kubikulovým č. $1 = 7 - 6$. Zároveň má Kubův dům č. $5 = 4 + 1$ pro Kubikulu číslo $17 = 16 + 1$; na náměstí tudíž stojí 17 domů.

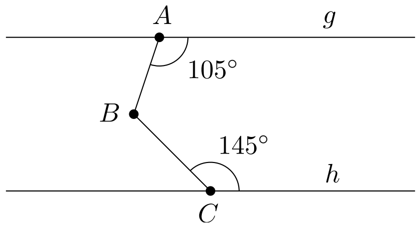
Úloha 5. Bára potřebuje odvápnit kávovar. Podle příručky by měla smíchat čtyři díly vody a jeden díl 10% octového koncentrátu. Bohužel má jenom 40% octový koncentrát. Kolik dílů vody musí smíchat s jedním dílem 40% octového koncentrátu, aby získala koncentraci předepsanou pro odvápnění kávovaru?

Poznámka: n% octový koncentrát se skládá z n dílů octa a $100 - n$ dílů vody.

Výsledek. 19

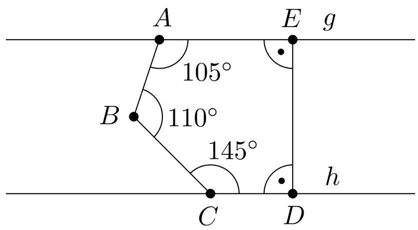
Řešení. Podle původního návodu tvoří ocet deset procent jednoho z pěti dílů. Stejné koncentrace je dosaženo, pokud ocet tvoří $40 = 4 \cdot 10$ procent jednoho z $4 \cdot 5 = 20$ dílů. Potřebujeme tedy přidat 19 dílů vody.

Úloha 6. Jestliže jsou g a h rovnoběžné přímky a úhly u vrcholů A a C jsou po řadě $105°$ a $145°$ jako na obrázku, jaká je velikost úhlu CBA?

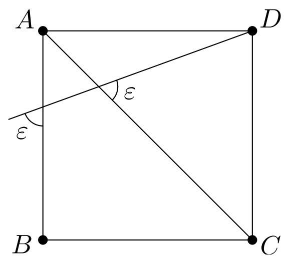


Výsledek. $110°$

Řešení. Doplňme body D a E ležící po řadě na h a g tak, aby úhly v zadání byly vnitřními úhly pětiúhelníku $ABCDE$. Jelikož součet nově přidaných úhlů je $180°$ (můžeme dokonce zvolit D a E stejně jako na obrázku tak, aby úhly u nich byly pravé) a součet vnitřních úhlů pětiúhelníku je $540°$, odvodíme, že hledaná hodnota je $540° - 180° - 105° - 145° = 110°$.



Úloha 7. Je-li $ABCD$ čtverec, určete velikost úhlu ε (ve stupních).



Výsledek. $67{,}5°$

Řešení. Označme X, Y ony dva body, u nichž je na obrázku znázorněn úhel ε. Pak $|\sphericalangle AXY| = |\sphericalangle AYX| = \varepsilon$. Navíc $|\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle CAB| = 45°$, takže vnitřní úhly trojúhelníku XYA splňují rovnost

$$45° + \varepsilon + \varepsilon = 180°$$

a $\varepsilon = 67{,}5°$.

Úloha 8. Zuzka se narodila v den 27. narozenin své matky. Kolikrát nejvýše se mohlo stát, že Zuzčin věk byl stejný jako věk její matky čtený pozpátku?

Poznámka: Případné nuly na začátku nevadí, například 470 se pozpátku přečte jako 74.

Výsledek. 7

Řešení. Uvažme situaci, kdy je Zuzce z let, její matce m let a z je m pozpátku. Čísla z a m mají stejný počet číslic (ovšem z může začínat nulou, pokud m nulou končí) a tento počet je nejméně 2. Označme a a b po řadě číslice na místě jednotek z a m. Zuzčina matka je o 27 let starší, takže buď $a + 7 = b$, nebo $a + 7 = 10 + b$. Pokud je matce alespoň 100 let, pak rozdíl prvních číslic jejich věků je nejvýše 1, což není možné, protože tyto číslice jsou právě b a a. Takže z i m mají dvě číslice.

Potřebujeme tedy najít všechna čísla $\overline{ab}$ splňující

$$\overline{ab} = \overline{ba} + 27.$$

Zjevně $a > b$, takže podmínka $a + 7 = b$ nemůže být splněna. Tudíž $a + 7 = 10 + b$ neboli $a = b + 3$. Z $b \geq 0$ plyne, že $a \geq 3$. Pro každou číslici $b \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ dostaneme $a = b + 3$. Je snadné ověřit, že pro tyto číslice je rovnost $\overline{(b+3)b} = \overline{b(b+3)} + 27$ splněna. Hledaná situace nastane sedmkrát, a to pro Zuzčin věk 3, 14, 25, 36, 47, 58 a 69 let.

Úloha 9. Marian má 32 bílých a 32 černých kostek se stranou délky 1. Lepí z nich krychli o rozměrech $4 \times 4 \times 4$. Chce, aby její povrch krychle obsahoval co nejvíce bílých stěn jednotkových kostek. Jaký největší podíl povrchu krychle může být bílý?

Výsledek. 3/4

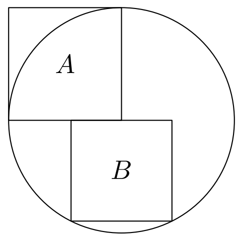
Řešení. Pokud je kostka v rohu krychle, pak jsou viditelné tři její stěny, pokud je v jedné z hran, jsou viditelné dvě, pokud je ve stěně, je vidět jedna, a pokud je uvnitř, není z ní vidět nic. Krychle má celkem osm rohů a každá z jejích dvanácti hran obsahuje dvě kostky – to je celkem 32 pozic. Je zřejmé, že největšího podílu bílého povrchu je dosaženo umístěním bílých krychlí právě na tyto pozice. V tomto uspořádání vypadá každá stěna krychle stejně a obsahuje dvanáct bílých a čtyři černé stěny. Maximální podíl bílé v celém povrchu je tedy $12/16 = 3/4$.

Úloha 10. Sto lidí se zúčastnilo výběrového řízení na posádku vesmírné lodi pro let na Merkur. Každý potenciální astronaut musel projít třemi testy, které hodnotily jeho zdraví, psychologické předpoklady a zkušenosti. Pouze dvacet šest kandidátů prošlo úspěšně zdravotním testem. Šedesát účastníků selhalo ve více než jednom testu. Celkem osmdesát tři lidí selhalo v psychologickém nebo zkušenostním testu, ale nikdo neselhal v obou těchto testech zároveň. Kolik účastníků bylo vybráno pro misi, tj. kolik jich prošlo všemi třemi testy?

Výsledek. 3

Řešení. Jelikož nikdo neselhal v psychologickém a zkušenostním testu zároveň, všichni účastníci, kteří selhali v alespoň dvou testech, selhali ve zdravotním testu. Tedy $(100 - 26) - 60 = 14$ lidí selhalo ve zdravotním testu. Společně s 83 lidmi, kteří selhali z hlediska psychologie nebo zkušeností, je to celkem 97 neúspěšných kandidátů. Vybráni byli tedy pouze 3 astronauti.

Úloha 11. Kružnice na obrázku má střed v jednom vrcholu čtverce A a poloměr rovný délce jeho strany. Na této kružnici leží dále dva vrcholy čtverce B, který má se čtvercem A společnou část jedné strany. Jaký je poměr obsahů čtverců A a B?

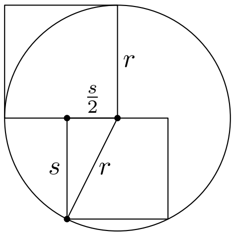


Výsledek. 5 : 4

Řešení. Označme s délku strany čtverce B. Ze symetrie je zřejmé, že střed kružnice dělí stranu čtverce B, která leží na průměru kružnice, na dva stejné díly o délce $s/2$. Za pomoci Pythagorovy věty spočteme

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{5}{4}s^2,$$

a tudíž je poměr obsahů 5 : 4.



Úloha 12. Určete, jaké jsou poslední dvě číslice součinu

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Výsledek. 10

Řešení. V součinu se vyskytuje $2 \cdot 5$, takže číslice na místě jednotek je 0. Číslice na místě desítek je poslední cifrou součinu $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 37$. Stačí se zabývat číslicemi na místě jednotek činitelů, tedy hledáme poslední číslici součinu

$$3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9.$$

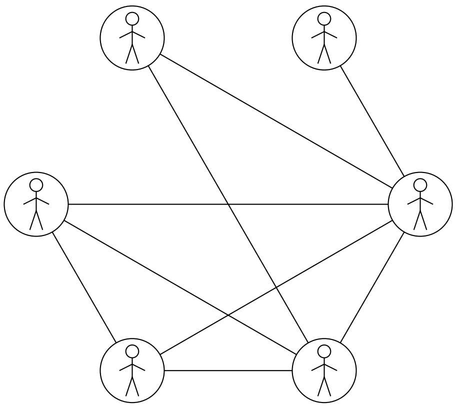
Jelikož $3 \cdot 7 = 21$ má 1 na místě jednotek, můžeme spárovat 3 a 7 a tyto páry odstranit. Zbyde nám $9 \cdot 9$, což dává číslici 1 na místě jednotek. Poslední dvě číslice součinu jsou tedy 10.

Úloha 13. Po vyslechnutí pěti ze šesti podezřelých si vyšetřovatel uvědomil, že mají po řadě 1, 2, 3, 4 a 5 přátel mezi ostatními podezřelými. Navíc ví, že přátelství je vždy vzájemné. Rozhodl se tedy určit počet přátel posledního podezřelého ještě před výslechem. Kolik přátel má poslední podezřelý?

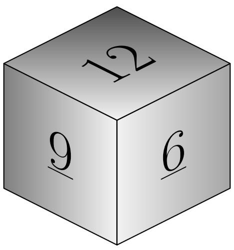
Výsledek. 3

Řešení. Označme n počet přátel posledního podezřelého. Podezřelý s pěti přáteli se zná s každým, takže jeho vyřazením ze skupiny snížíme počet známých všech ostatních o jedna. Pak můžeme vyřadit podezřelého s jediným přítelem, jelikož počet jeho přátel klesl na nulu a jeho odstraněním neovlivníme počet známých ostatních. Zůstane nám skupina čtyř podezřelých, kteří mají po řadě 1, 2, 3 a $n-1$ známých mezi ostatními. Po zopakování předchozích dvou kroků obdržíme pár s počtem známých 1 a $n-2$; nyní je zřejmé, že $n-2=1$ neboli $n=3$.

Poznámka: Toto řešení vede ke konstrukci skupiny podezřelých, která splňuje podmínky zadání. Výsledek konstrukce je znázorněn následujícím grafem:



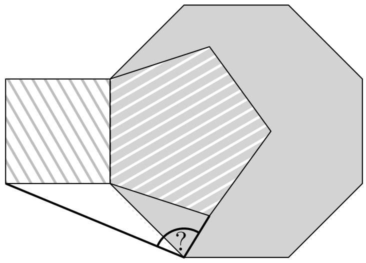
Úloha 14. Kostka na obrázku má na každé stěně napsané kladné celé číslo, přičemž čísla na různých stěnách mohou být stejná. Vynásobíme-li čísla napsaná na libovolné dvojici protilehlých stěn, dostaneme vždy stejný výsledek. Jaký je nejmenší možný součet všech čísel na kostce?



Výsledek. 40

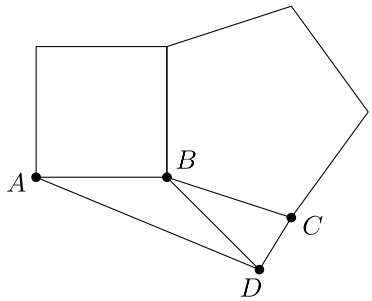
Řešení. Označme P součin čísel na protilehlých stěnách. Čím větší je P, tím větší je celkový součet, chceme tedy co nejmenší P. Číslo P musí být dělitelné všemi třemi čísly na obrázku, takže nejmenší hodnota je dána nejmenším společným násobkem těchto čísel, což je $P = 36$. Z toho plyne, že čísla, která nejsou vidět, jsou 3, 4 a 6 a celková suma činí $6 + 9 + 12 + 6 + 4 + 3 = 40$.

Úloha 15. Na obrázku je znázorněn pravidelný pětiúhelník a pravidelný osmiúhelník. Jestliže je vyšrafovaný čtyřúhelník čtverec, určete velikost úhlu mezi tučnými čárami, označeného na obrázku otazníkem.



Výsledek. 99°

Řešení. Označme body jako na následujícím obrázku.



Úhel CBD je dán rozdílem vnitřních úhlů osmiúhelníku a pětiúhelníku. Z toho $|\sphericalangle CBD| = 135° - 108° = 27°$. Snadno též spočteme, že $|\sphericalangle ABD| = 135°$. Protože jsou trojúhelníky ABD a CBD rovnoramenné, platí, že

$$|\sphericalangle CDB| = \tfrac{1}{2}(180° - |\sphericalangle CBD|) = 76{,}5°,$$
$$|\sphericalangle BDA| = \tfrac{1}{2}(180° - |\sphericalangle ABD|) = 22{,}5°.$$

Odtud dostáváme

$$|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle CDB| + |\sphericalangle BDA| = 99°.$$

Úloha 16. Ministr má osobního šoféra, který každé ráno v pevně stanovenou dobu opouští ministerstvo, aby vyzvedl ministra u něj doma a zavezl ho na ministerstvo. Ministr se každý den probouzí ve stejnou dobu a auto přijíždí přesně v moment, kdy je připraven. Dnes se však ministr probudil časně a byl připraven odejít o hodinu dřív. Rozhodl se tedy vyrazit autu (které vyjelo z ministerstva ve stejný čas jako obvykle) naproti. Když se s ním setkal, nasedl a dorazil na ministerstvo o dvacet minut dříve, než je u něj zvykem. Kolik minut strávil chůzí? Můžete předpokládat, že auto se pohybuje stále stejnou rychlostí a že nasednutí do něj nezabere žádný čas.

Výsledek. 50

Řešení. Hodina, kterou ministr získal časným vstáváním, je rozdělena na neznámý čas t, který strávil chůzí, a čas, který by šofér obvykle strávil cestou z místa jejich dnešního setkání k ministrovu domu, což je polovina ušetřeného času. Tedy

$$60 = t + \frac{20}{2}$$

a $t = 50$.

Úloha 17. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má alespoň dvě cifry a po odstranění první cifry (tj. té nejvíce vlevo) klesne jeho hodnota 29krát.

Výsledek. 725

Řešení. Označme d první číslici, k číslo obdržené vymazáním první číslice a n počet číslic k. Potom je původní číslo rovno $10^n d + k$ a máme

$$10^n d + k \;= 29k$$

neboli

$$28k = 10^n d.$$

Obě strany rovnice jsou dělitelné $28 = 2^2 \cdot 7$, takže $d = 7$ a $n \geq 2$. Pokud vyzkoušíme $n = 2$, dostaneme $k = 25$, což je nejmenší možné řešení.

Úloha 18. Kolikrát během 24 hodin je minutová ručička kolmá na hodinovou?

Výsledek. 44

Řešení. Minutová ručička se během 24 hodin otočí 24krát dokola, zatímco hodinová jen dvakrát. Minutová ručička tedy hodinovou během 24 hodin 22krát předběhne. V každém z 22 časových úseků mezi „předběhnutími“ je minutová ručička dvakrát kolmá na hodinovou. Odpověď je tedy 44.

Úloha 19. Najděte všechny čtyřciferné palindromy, které lze napsat jako součet dvou trojciferných palindromů.

Poznámka: Palindrom je číslo, které zůstane stejné, když převrátíme pořadí jeho cifer – například 2018102 je palindrom. Číslo nemůže začínat nulou.

Výsledek. 1111, 1221

Řešení. Označme nějaký palindrom vyhovující zadání jako $\overline{abba}$. Protože je součtem dvou trojciferných čísel, nemůže být větší než 1998, takže $a = 1$. Dále nechť $\overline{1bb1}$ se rovná $\overline{cdc} + \overline{xyx}$. Pak platí

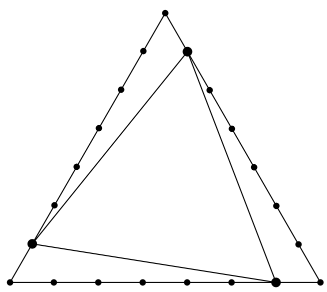
$$1001 + 110 \cdot b = 101(c + x) + 10(d + y).$$

Protože levá strana končí 1, musí $c + x$ také končit jedničkou. Ale c a x jsou aspoň jedna a nejvýše devět, takže musí být $c + x = 11$. Dosazením do předchozího vztahu po zjednodušení dostaneme

$$11(b - 1) = d + y.$$

Protože d a y jsou číslice, pravá strana může být nejvýše 18, takže $b - 1$ je buď 0, nebo 1. Obě možnosti vedou k hledaným palindromům: $1111 = 505 + 606$, $1221 = 565 + 656$.

Úloha 20. Strany rovnostranného trojúhelníku rozdělíme v poměru 6 : 1 tak, aby dělicí body také tvořily rovnostranný trojúhelník (viz obrázek). Určete poměr obsahu menšího rovnostranného trojúhelníku a obsahu původního trojúhelníku.



Výsledek. 31/49

Řešení. Obsah každého ze tří malých shodných postranních trojúhelníků je roven

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{49}$$

obsahu původního rovnostranného trojúhelníku, protože výška malého trojúhelníku je 1/7 a základna 6/7 příslušných délek v původním trojúhelníku. Proto je hledaný poměr obsahů roven

$$1 - 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{31}{49}.$$

Úloha 21. Najděte všechny čtveřice (a, b, c, d) celých kladných čísel s následující vlastností: doplníme-li čísla a, b, c, d do tabulky níže, pak a udává celkový počet výskytů číslice 1 v tabulce, b počet výskytů dvojky, c počet výskytů trojky a d počet výskytů čtyřky.

1	2	3	4
a	b	c	d

Výsledek. $(2, 3, 2, 1)$, $(3, 1, 3, 1)$

Řešení. Zjevně se v tabulce nemůže žádné číslo vyskytovat více než pětkrát, a dokonce ani právě pětkrát. Kdyby se tam totiž objevilo číslo pět, zabíralo by místo tomu číslu, které se v tabulce vyskytuje pětkrát. Můžeme tedy doplňovat jen čísla 1, 2, 3 a 4.

Ukažme nyní, že $d = 1$. Kdyby $d = 2$, muselo by jedno z čísel a, b, c být rovno 4. V tabulce by pak byla jedna jednička, dvě dvojky, jedna trojka a dvě zatím neznámé hodnoty, takže by se nabízelo pouze doplnění $b = 4$ a $a = c = 2$. Nicméně $(2, 4, 2, 2)$ evidentně není vyhovující čtveřice. Možnosti $d = 3$ a $d = 4$ vedou ke sporu ještě rychleji.

Nyní tedy víme, že $d = 1$, odkud plyne $a \in \{2, 3\}$. Pokud $a = 2$, platí $b, c \in \{2, 3\}$ (v tabulce už nesmí být další jedničky a čtyřky). Možnost $b = 2$ nevyhovuje, neboť v tu chvíli již máme v tabulce tři dvojky. Tedy $b = 3$, což nám dává vyhovující čtveřici $(2, 3, 2, 1)$. Pokud $a = 3$, musí se v tabulce objevit ještě jedna jednička. Vzhledem k tomu, že tabulka obsahuje už dvě trojky, je nutně $b = 1$. Dostáváme tak vyhovující čtveřici $(3, 1, 3, 1)$.

Úloha 22. Honza zapomněl své heslo. Pamatuje si jen, že se skládalo z devíti malých písmen a obsahovalo slova „sele“ a „prase“. Kolik takových hesel připadá v úvahu?

Poznámka: Daná slova jsou obsažena jako podřetězce, tedy např. „steleme“ neobsahuje „sele“. Pracujeme s anglickou abecedou, používáme 26 písmen.

Výsledek. 2030

Řešení. Nejprve uvažujme případ, kdy se slova „sele“ a „prase“ nepřekrývají. Pak z nich lze vytvořit právě dvě různá hesla: „seleprase“ a „prasesele“.

Pokud se slova překrývají, existuje jen jeden způsob, jak je uspořádat: „prasele“. Potom máme tři možnosti, jak určit místa pro dvě zbývající písmena: „**prasele“, „*prasele*“, „prasele**“.

V každém z těchto případů lze dvojici doplňujících písmen vybrat $26^2 = 676$ způsoby. Při překryvu tedy existuje $676 \cdot 3 = 2028$ možných hesel.

Dohromady má Honza $2028 + 2 = 2030$ hesel na vyzkoušení.

Úloha 23. Pokud náhodně zvolíme dvě různá čísla z množiny $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$, budou to s pravděpodobností $\dfrac{1}{21}$ po sobě jdoucí čísla. Určete n.

Výsledek. 42

Řešení. V množině $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$ je $n - 1$ párů po sobě jdoucích čísel. Dále máme $\frac{1}{2}n(n-1)$ možností pro vybrání dvou různých čísel. Platí tedy rovnice

$$\frac{n-1}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{2}{n} = \frac{1}{21},$$

jejímž vyřešením dostaneme $n = 42$.

Úloha 24. David, ET a Felicie hráli stolní tenis. V každém kole se utkali dva z nich, zatímco třetí odpočíval. Nejprve hrál David s ETm, v dalších kolech pak vždy vítěz předchozího kola s tím, kdo si právě odpočinul. Po několika kolech měl David na svém kontě 17 vítězství a ET 22. Kolikrát se spolu David a ET utkali?

Výsledek. 20

Řešení. Kdykoli Felicie vyhraje, nemá to žádný vliv na počet her vyhraných Davidem nebo ETm ani to neovlivňuje počet her, které spolu ti dva sehráli. Můžeme tedy předpokládat, že Felicie vždy prohraje. Jinými slovy každé vítězství Davida nad ETm zvýší Davidovo celkové skóre o dva (pokud to nebyl poslední zápas) a naopak. Jelikož počet Davidových vítězství je lichý, poslední kolo muselo být mezi Davidem a ETm a vyhrál jej David. Pokud přidáme ještě jedno, fiktivní kolo (David vs. Felicie, kde David vyhrál), pak celkový počet kol, kdy Felicie nehrála, bude polovinou součtu konečného skóre Davida a ETho, tj. $(18 + 22)/2 = 20$.

Úloha 25. Zákazníci e-shopu mají možnost vyjádřit svou spokojenost s pořízeným produktem hodnocením na pětibodové stupnici (1 hvězdička = velmi nespokojen, 5 hvězdiček = velmi spokojen). Průměrné hodnocení nového smartphonu bylo minulý týden 3,46 hvězdičky. Poté, co v tomto týdnu ohodnotili smartphone další dva lidé, stouplo jeho hodnocení na současnou úroveň 3,5 hvězdičky. Kolik lidí dosud ohodnotilo tento smartphone?

Výsledek. 52

Řešení. Označme k původní počet hodnocení a x jejich součet. Dále označme a a b dvě nová hodnocení z tohoto týdne. Pak

$$\frac{x}{k} = 3{,}46 \qquad \text{a} \qquad \frac{x+a+b}{k+2} = 3{,}5$$

a

$$x = \left(3 + \tfrac{23}{50}\right) k, \tag{1}$$
$$x + a + b = \left(3 + \tfrac{1}{2}\right) k + 7. \tag{2}$$

Z rovnice (1) plyne, že k je násobek 50. Po odečtení (1) od (2) dostaneme

$$a + b - 7 = \frac{k}{25}.$$

Jelikož $a, b \leq 5$, je levá strana rovnice kladné číslo menší nebo rovné 3, takže $k \leq 75$. Z toho odvodíme, že $k = 50$, a po přidání dvou nových hodnocení vidíme, že celkový počet hodnocení je 52.

Úloha 26. Viki má čtyři páry ponožek s nápisy „pondělí“, „úterý“, „středa“ a „čtvrtek“. Kolika způsoby si může od pondělka do čtvrtka obléct postupně všechny tyto ponožky, jestliže každý den chce mít na nohou dvojici ponožek s různými nápisy, z nichž se navíc ani jeden neshoduje s tím, jaký je zrovna den v týdnu? Žádnou z ponožek si Viki nemůže vzít víckrát.

Poznámka: Obě ponožky v páru jsou stejné, tedy neexistují žádné „levé“ a „pravé“ ponožky. Stejně tak nehraje roli, která ponožka je v daný den na které noze.

Výsledek. 9

Řešení. Pro přehlednost budeme místo názvů dnů v týdnu používat čísla 1, 2, 3, 4. Všimněme si, že pro libovolný způsob splňující uvedené požadavky je každý den určen třemi navzájem různými čísly: číslem dne a čísly dvou nošených ponožek. Ekvivalentně tedy můžeme přiřadit každému dni jedno číslo: to zbývající, které se v trojici nevyskytuje. Není těžké si uvědomit, že počet způsobů je díky tomu roven počtu permutací čtveřice $(1, 2, 3, 4)$, které nenechají žádné z čísel na jeho původní pozici.

Máme tři možnosti, kam umístit jedničku. Je-li $n \neq 1$ její pozice, pak pro n máme také tři možnosti. Snadno si rozmyslíme, že po umístění jedničky a n už jsou ostatní dvě pozice jednoznačně určeny. To nám dává $3 \cdot 3 = 9$ způsobů, jak si obléct oněch osm ponožek.

Úloha 27. Komise 26 matematiků měla navrhnout nejméně pět filmů na ocenění na festivalu matematických filmů. Celkem vybírali z 16 filmů. Komise se usnesla na následujícím postupu: Každý člen dá po hlase pěti různým filmům a pět filmů s největším počtem hlasů bude nominováno; v případě rovnosti na pátém místě budou všechny filmy na sdílené páté pozici nominovány. Jaký je nejmenší počet hlasů, který filmu zaručí, že bude nominován bez ohledu na ostatní výsledky?

Výsledek. 21

Řešení. Celkem bylo mezi filmy rozděleno $26 \cdot 5 = 130$ hlasů. Pokud film získal 20 bodů, zbývajících 110 hlasů mohlo být snadno rozděleno tak, aby pět jiných filmů získalo 21 hlasů. Na druhou stranu pokud film obdržel 21 hlasů a nebyl nominován, pak každý z alespoň pěti jiných filmů získal nejméně 22 hlasů. Celkový počet hlasů je pak alespoň $21 + 5 \cdot 22 = 131$, což je spor.

Úloha 28. Reálná funkce f splňuje $f(x) + xf(1-x) = x$ pro všechna reálná x. Určete hodnotu $f(-2)$.

Výsledek. $\frac{4}{7}$

Řešení. Z rovnice $f(-2) - 2f(3) = -2$ plyne, že ekvivalentně stačí určit hodnotu $f(3)$. Jelikož $f(3) + 3f(-2) = 3$, dostaneme dvě lineární rovnice pro neznámé $f(-2)$ a $f(3)$. Vynásobením druhé rovnice dvěma a jejím přičtením k první dostaneme $f(-2) = 4/7$.

Úloha 29. Součin dvouciferných čísel n, a, b, o, j je dělitelný 4420. Určete největší možnou hodnotu $n+a+b+o+j$.

Výsledek. 471

Řešení. Rozložme 4420 jako $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$. Jelikož 13 a 17 jsou prvočísla, jedno z čísel n, a, b, o, j je dělitelné 13 a jedno je dělitelné 17. Nejmenší společný násobek 13 a 17 je 221, takže žádné dvouciferné číslo není dělitelné oběma z nich. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že n je dělitelné 17 a a je dělitelné 13. To znamená, že $n \leq 85 = 5 \cdot 17$ a $a \leq 91 = 7 \cdot 13$.

Uvažme případ, kdy $n = 85$ a $a = 91$. Pak $n = 85$ je dělitelné 5, takže potřebujeme pouze zaručit dělitelnost 4. Jak n, tak i a jsou lichá, takže 4 dělí boj. Jedno z čísel b, o, j je dělitelné 4 nebo dvě z nich jsou dělitelná 2. Větší součet obdržíme v druhém případě pro $b = o = 98$. Potom $n + a + b + o + j = 85 + 91 + 98 + 98 + 99 = 471$.

Poslední možností je $n < 85$ nebo $a < 91$. Jelikož jsou n a a po řadě dělitelná 17 a 13, dostaneme $n \leq 68 = 85 - 17$ nebo $a \leq 78 = 91 - 13$. Pak by součet $n + a + b + o + j$ byl nejvýše $68 + 91 + 3 \cdot 99 = 456$ (v prvním případě) nebo $85 + 78 + 3 \cdot 99 = 460$ (v druhém případě), a to je méně než 471.

Úloha 30. Martina si v online sportovním obchodě objednala osm tenisových míčků a míč na házenou. Dokonale kulové míčky a míč dorazily v krychlové krabici sbalené tak, že se každý míček dotýkal tří ze šesti stěn krabice a míče na házenou. Poloměr míče na házenou je 10 cm a poloměr tenisových míčků je 5 cm. Určete délku hrany krabice v centimetrech.

Výsledek. $10(1 + \sqrt{3})$

Řešení. Tělesová úhlopříčka krychle prochází středem míče na házenou a dvěma tenisovými míčky. Prochází také body, v nichž se tyto tři koule dotýkají. Jediná část úhlopříčky, která není uvnitř žádné koule, je úsek mezi tenisovým míčkem a rohem krabice. Vzdálenost od středu tenisové koule do rohu krabice je polovina tělesové úhlopříčky krychle opsané tenisovému míčku. Takže délka úhlopříčky krabice je součtem

- (2×) 1/2 tělesové úhlopříčky krychle opsané tenisovému míčku,
- (2×) poloměru tenisového míčku,
- průměru míče na házenou.

Délka tělesové úhlopříčky krabice je tedy

$$10\sqrt{3} + 10 + 20 = 30 + 10\sqrt{3}$$

a délka hrany se rovná

$$\frac{30 + 10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10(1 + \sqrt{3}).$$

Úloha 31. Pokud zapíšeme 2^{29} v desítkové soustavě, dostaneme devíticiferné číslo, jehož číslice jsou po dvou různé. Která číslice chybí?

Výsledek. 4

Řešení. Víme, že $2^{10} = 1024$. Hodnotu 2^{29} můžeme spočítat přímo jako $1024^2 \cdot 1024/2$. Dostaneme $2^{29} = 536\,870\,912$.

Alternativně lze využít faktu, že přirozené číslo dává po dělení devíti stejný zbytek jako jeho ciferný součet. Navíc zbytková třída 2^n modulo 9 je periodická s periodou 6. Součet všech deseti číslic je 45, z čehož odvodíme

$$45 - x \equiv 2^{29} \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod 9,$$

kde x značí chybějící číslici v desítkové reprezentaci 2^{29}. Po zjednodušení $x \equiv 4 \pmod 9$ a chybějící číslice je 4.

Úloha 32. Při úklidu půdy našel Olin starou kalkulačku, která zobrazovala pouze první dvě číslice za desetinnou čárkou. Například pro $\sqrt{4}$ zobrazila 2,00 a pro $\sqrt{6} = 2{,}44949\ldots$ zobrazila 2,44. Jaké je nejmenší přirozené číslo, které není druhou mocninou celého čísla, ale pro jehož odmocninu zobrazí Olinova kalkulačka dvě nuly za desetinnou čárkou?

Výsledek. 2501

Řešení. Označme $\mathrm{pdc}(n)$ první dvě cifry za desetinnou čárkou čísla $\sqrt{n}$. Je zřejmé, že s n zvyšujícím se od jedné druhé mocniny k následující roste i $\mathrm{pdc}(n)$. Jelikož hledáme nejmenší možné číslo, n musí být ve tvaru $k^2 + 1$ pro nějaké přirozené číslo k.

Číslo $\sqrt{k^2+1}$ zaokrouhleno dolů je k, takže $\sqrt{k^2+1} - k$ je ostře mezi 0 a 1. Tvrzení $\mathrm{pdc}(k^2 + 1) = 0$ je tedy ekvivalentní

$$\sqrt{k^2+1} - k \ < \frac{1}{100}.$$

Po přičtení k k oběma stranám nerovnosti, umocnění na druhou (obě strany jsou kladné) a zjednodušení dostaneme

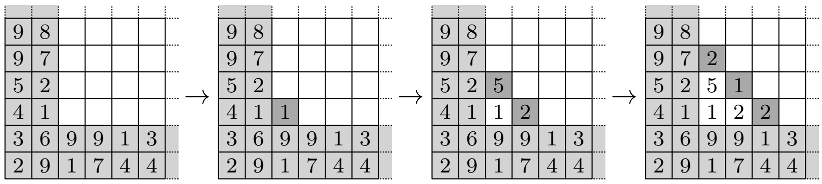
$$k \ > 50\left(1 - \frac{1}{100^2}\right).$$

Pravá strana je ostře mezi 49 a 50, a jelikož k je celé číslo, dostaneme $k \geq 50$. Hledaná hodnota je $n = 50^2 + 1 = 2501$.

Úloha 33. V každém poli šachovnice 2018×2018 má být zapsáno jedno z čísel od 1 do 9 tak, aby součet čísel v každém čtverci 3×3 byl dělitelný 9. Kolika různými způsoby toho lze dosáhnout?

Výsledek. 9^{8068}

Řešení. Vyplnění 8068 polí, která tvoří dvě spodní řady a dva levé sloupce, určí jednoznačně hodnoty v ostatních polích, neboť zbývající pole můžeme vyplnit diagonálu po diagonále – viz obrázek. Na druhou stranu každé správné vyplnění celé šachovnice určí vyplnění těchto 8068 polí. Takže počet libovolných vyplnění těchto polí je stejný jako hledaný počet vyplnění celé tabulky.



Úloha 34. Nalezněte všechny dvojice kladných celých čísel (n, m), které splňují $4^n + 260 = m^2$.

Výsledek. $(3, 18)$, $(6, 66)$

Řešení. Rovnice v zadání je ekvivalentní $m^2 - (2^n)^2 = 260$. Úpravou levé strany dostaneme $(m - 2^n)(m + 2^n) = 260$. Prvočíselný rozklad $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$ vede k roznásobení

$$260 = 1 \cdot 260 = 2 \cdot 130 = 4 \cdot 65 = 5 \cdot 52 = 10 \cdot 26 = 13 \cdot 20,$$

když vezmeme v potaz, že $(m - 2^n) < (m + 2^n)$. Protože platí $(m + 2^n) - (m - 2^n) = 2^{n+1}$, ověříme tento vztah pro jednotlivá roznásobení a dostaneme možnosti $26 - 10 = 2^4$ a $130 - 2 = 2^7$, které vedou ke dvěma řešením $(3, 18)$ a $(6, 66)$.

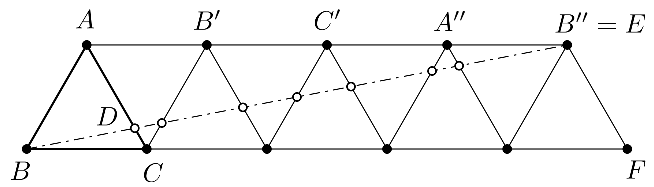
Úloha 35. V rovnostranném trojúhelníku ABC jsme z vrcholu B vyslali světelný paprsek, který se od strany AC odrazil v bodě D splňujícím $|DC| : |AC| = 1 : 2018$. Úhel dopadu byl stejný jako úhel odrazu. Paprsek pokračoval dál a odrazil se pokaždé, když narazil na nějakou stranu trojúhelníku ABC. Kolikrát se odrazil (počítáme-li i první odraz), než se dostal do nějakého vrcholu trojúhelníku ABC?

Výsledek. 4033

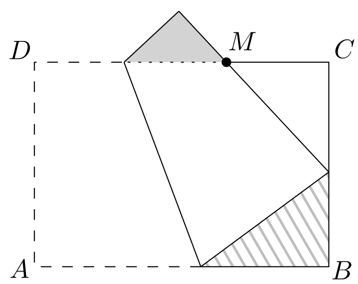
Řešení. Namísto sledování odrazů paprsku v trojúhelníku necháme paprsek pokračovat rovně a budeme převracet trojúhelníky podle příslušné strany, na kterou zrovna paprsek narazil. Ukážeme, že jedna řada takto zobrazených trojúhelníků už stačí k tomu, aby paprsek dorazil do vrcholu.

Označme E průsečík polopřímky BD s přímkou vedenou bodem A rovnoběžnou s BC. Dále označme F bod na přímce BC, pro který je $EF \parallel AC$. Potom jsou trojúhelníky BCD a BFE podobné a platí $|BF| = 2018 \cdot |BC|$. To znamená, že převracením trojúhelníku ABC se jedním z vrcholů po čase dostaneme do bodu E a bod E je zřejmě prvním bodem na polopřímce BD s touto vlastností.

Snadno zjistíme, že úsečka BE protíná $2 \cdot 2017 - 1 = 4033$ stran v řadě trojúhelníků, což odpovídá počtu odrazů světelného paprsku v původní úloze. Obrázek ilustruje řešení se změněnou počáteční podmínkou na $|DC| : |AC| = 1 : 5$.

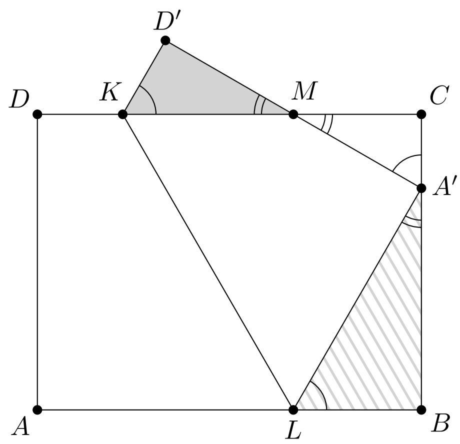


Úloha 36. Obdélníkový list papíru $ABCD$ jsme přeložili tak, aby se bod A přesunul na stranu BC a aby bod M, v němž se nyní strana CD protíná se stranou DA, byl přesně ve třetině strany CD, tedy $|CD| = 3|CM|$. Jestliže je obsah šedého trojúhelníku roven 1, jaký je obsah šrafovaného trojúhelníku?



Výsledek. 9/4

Řešení. Označme jednotlivé průsečíky jako na obrázku.



Všechny tři trojúhelníky KMD', $A'MC$ a $LA'B$ jsou pravoúhlé a navzájem podobné, což snadno zjistíme nalezením shodných úhlů v obrázku. Hledáme tedy koeficient podobnosti mezi vyznačenými trojúhelníky. Všimneme si, že $|KD| = |KD'|$ a $|LA| = |LA'|$, a dostaneme

$$|D'K| + |KM| = |DM| = \tfrac{2}{3}|DC| = \tfrac{2}{3}|AB|$$

a

$$|A'L| + |LB| = |AB|.$$

Protože ve výše zmíněné podobnosti trojúhelníků si odpovídají strany $A'L$ a KM a strany LB a KD', je hledaný koeficient 3/2. Poměr obsahů je tedy $(3/2)^2 = 9/4$.

Úloha 37. Zkusíme-li vydělit polynom $x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018}$ polynomem $x^2 - 1$, dostaneme nenulový zbytek. Najděte hodnotu x, pro kterou je tento zbytek roven 1111.

Výsledek. 185

Řešení. Daný polynom můžeme přepsat do tvaru

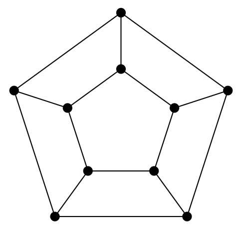
$$\begin{aligned} &x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018} = \\ &= x(x^2-1) + x(x^4-1) + x(x^6-1) + x(x^8-1) + \\ &+ x(x^{10}-1) + x(x^{2016}-1) + (x^{2018}-1) + 6x + 1. \end{aligned}$$

Dále protože platí

$$x^{2k} - 1 = (x^2-1)(x^{2k-2} + x^{2k-4} + \cdots + 1),$$

jsou zjevně všechny závorky na pravé straně předchozí rovnosti dělitelné $x^2 - 1$. Jelikož stupeň polynomu $6x + 1$ je menší než stupeň $x^2 - 1$, je jistě $6x + 1$ hledaný zbytek. Nyní už stačí vyřešit rovnici $1111 = 6x + 1$, čímž dostaneme odpověď $x = 185$.

Úloha 38. V Pentagonii je deset měst a každé z nich je propojeno přímou železniční tratí se třemi jinými městy jako na obrázku. Antimonopolní zákony vyžadují, aby žádné dvě tratě, které vedou do stejného města, nebyly provozovány stejným dopravcem. Kolika způsoby lze přiřadit tratě třem dopravcům a neporušit přitom předpisy?

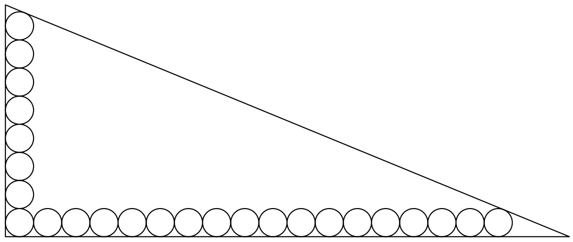


Výsledek. 30

Řešení. V platném přiřazení tratí „vnějšího pětiúhelníku" mají dvě společnosti (řekněme X a Y) po dvou tratích a jedna společnost (Z) jednu trať. Společnosti také musí být v pořadí $XYXYZ$ počínaje nějakým městem. Je snadné ukázat, že přiřazení zbylých tratí je pak jednoznačné: tratě „vnitřního pětiúhelníku" jsou přiřazeny stejným společnostem jako odpovídající strany vnějšího pětiúhelníku a tratě spojující pětiúhelníky musí být přiřazeny poslední zbývající společnosti.

To znamená, že počet platných přiřazení celé sítě je roven počtu přiřazení vnějšího pětiúhelníku. Máme šest možností, jak přiřadit třem společnostem označení X, Y a Z, a pět možností pro město na počátku posloupnosti $XYXYZ$. Celkem tedy dostáváme $5 \cdot 6 = 30$ možností.

Úloha 39. Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku je 25 kružnic o poloměru 1 jako na obrázku.



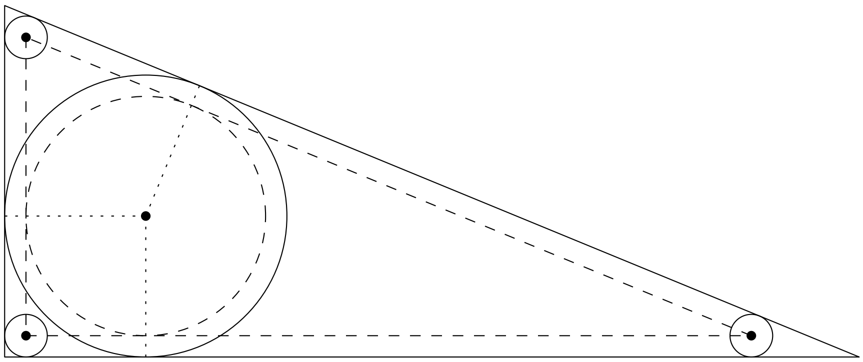
Jaký je poloměr kružnice vepsané tomuto trojúhelníku?

Výsledek. $25 - 13\sqrt{2}$

Řešení. Uvažme trojúhelník, jehož vrcholy jsou středy tří kružnic v rozích. Tento trojúhelník je pravoúhlý s délkami odvěsen 14 a 34. Z Pythagorovy věty spočteme délku přepony jako

$$\sqrt{14^2 + 34^2} = 26\sqrt{2}.$$

Poloměr kružnice vepsané tomuto trojúhelníku je $(14+34-26\sqrt{2})/2 = 24-13\sqrt{2}$. Jelikož strany původního trojúhelníku jsou rovnoběžné se stranami nového trojúhelníku a leží od nich ve vzdálenosti 1, středy kružnic vepsaných oběma trojúhelníkům splývají a hledaný poloměr je $25 - 13\sqrt{2}$.



Úloha 40. Pája vymyslela operaci *spájení* na (konečném) seznamu celých čísel: vezme čtyři kopie tohoto seznamu, zvětší hodnoty v nich postupně o 0, 2, 3 a 5 a výsledek napíše za sebe do jediného seznamu. Například pro seznam $(8, 3)$ je výsledek spájení $(8, 3, 10, 5, 11, 6, 13, 8)$. Pokud Pája začne s jednoprvkovým seznamem (0) a opakovaně provádí spájení, dokud nedostane seznam o alespoň 2018 prvcích, jaký bude 2018. prvek výsledného seznamu? Pořadí prvků bereme zleva doprava.

Výsledek. 17

Řešení. Pro zjednodušení notace očíslujme pozice v seznamu od nuly. V takovém případě plyne ze snadného indukčního argumentu, že pozice čísla zapsaná ve čtyřkové soustavě popisuje, jaké operace (a v jakém pořadí) byly aplikovány na číslo na dané pozici. Pro ilustraci – takto vypadá Pájin seznam po dvou iteracích spájení:

$$\begin{gathered}(\underset{00}{0+0}, \underset{01}{0+2}, \underset{02}{0+3}, \underset{03}{0+5}, \underset{10}{2+0}, \underset{11}{2+2}, \underset{12}{2+3}, \underset{13}{2+5}, \\ \underset{20}{3+0}, \underset{21}{3+2}, \underset{22}{3+3}, \underset{23}{3+5}, \underset{30}{5+0}, \underset{31}{5+2}, \underset{32}{5+3}, \underset{33}{5+5}).\end{gathered}$$

(Čísla pod prvky udávají pozici ve čtyřkové soustavě.) Jelikož 2017 je 133201 ve čtyřkové soustavě, číslo na pozici 2017 neboli 2018. prvek seznamu je

$$2 + 5 + 5 + 3 + 0 + 2 = 17.$$

Úloha 41. Určete, pro které nejmenší kladné celé číslo n má rovnice

$$(x^2 + y^2)^2 + 2nx(x^2 + y^2) = n^2 y^2$$

řešení (x, y) v kladných celých číslech.

Výsledek. 25

Řešení. Tato rovnice je kvadratická v n s řešením

$$n = \frac{(x^2 + y^2)\big(x + \sqrt{x^2 + y^2}\big)}{y^2}$$

(druhé řešení je záporné, neboť $\sqrt{x^2 + y^2} > x$) neboli

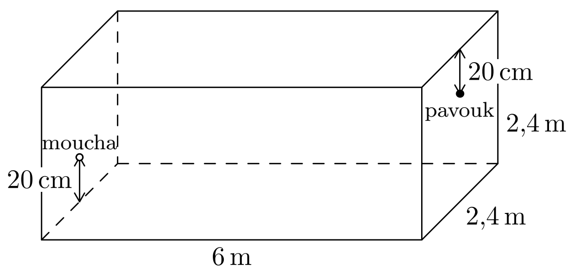
$$ny^2 = (x^2 + y^2)\big(x + \sqrt{x^2 + y^2}\big).$$

Definujme $d = \mathrm{NSD}(x, y)$ a $x = x_0 d$, $y = y_0 d$. Po dosazení a zjednodušení dostaneme

$$ny_0^2 = d(x_0^2 + y_0^2)\big(x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\big).$$

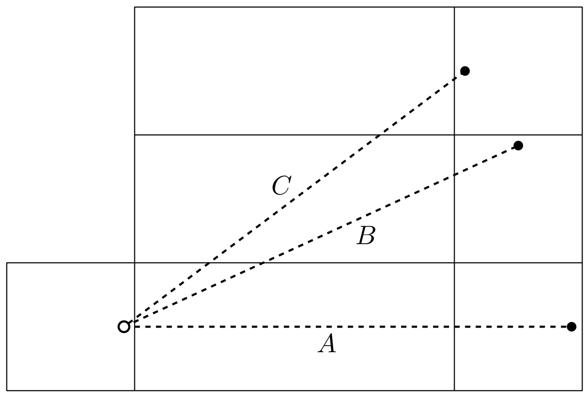
Jelikož x_0 a y_0 jsou nesoudělná, také y_0^2 a $x_0^2 + y_0^2$ jsou nesoudělná, takže $x_0^2 + y_0^2 \mid n$. Navíc $x_0^2 + y_0^2$ musí být druhá mocnina nějakého přirozeného čísla. Je dobře známý fakt, že $5^2 = 25$ je nejmenší čtverec, který může být zapsán jako součet dvou čtverců, jmenovitě $3^2 + 4^2$. Takže $n \geq 25$ a dosazením $x = 4$, $y = 3$ dostaneme, že $n = 25$ je skutečně řešení.

Úloha 42. V pokoji s obdélníkovým půdorysem, který má rozměry 6 m × 2,4 m × 2,4 m (délka × šířka × výška), sedí na jedné čtvercové stěně 2,4 m × 2,4 m pavouk. Nachází se 20 cm od stropu, přesně uprostřed mezi svislými hranami stěny. Na protější stěně sedí moucha – také přesně uprostřed, jen 20 cm od podlahy. Pokud se moucha nepohne a pavouk smí lézt jen po stěnách, po stropě a po podlaze, jakou nejkratší vzdálenost v metrech musí urazit, aby ji chytil?



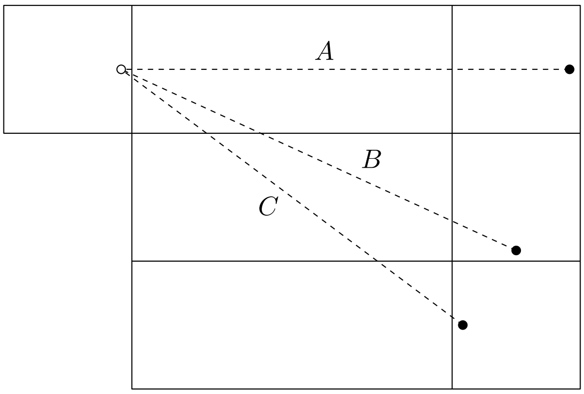
Výsledek. 8

Řešení. Pavoukova nejkratší cesta bude na síti kvádru zřejmě rovnou úsečkou. Na obrázku znázorňuje bílé kolečko mouchu, černé pavouka. Poloha černého kolečka závisí na způsobu rozvinutí pláště kvádru.



Až na symetrii existují tři možné cesty pavouka k mouše, postupně procházející přes jednu, dvě a tři obdélníkové stěny kvádru. V obrázku je značíme A, B a C. (Cestu, která by využívala čtyři obdélníkové stěny, bychom evidentně mohli zkrátit.) Snadno spočteme, že cesta A měří 8,4 m. Pomocí Pythagorovy věty zjistíme, že cesty B a C mají postupně délku $\sqrt{66{,}32}$ m a 8 m. Nejkratší je tedy cesta C.

Následující obrázek ukazuje nejkratší cestu ve třech dimenzích:



Úloha 43. Najděte minimum výrazu

$$(6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2$$

pro $x, y \in \mathbb{R}$.

Výsledek. 49

Řešení. Označme zkoumaný výraz jako $V(x, y)$. Připomeňme, že kružnice $k(S, R)$ se středem $S = [S_1, S_2]$ a poloměrem $R > 0$ se dá parametrizovat (tj. souřadnice všech bodů ležících na ní můžeme vyjádřit) pomocí úhlu α jako $[x_1, x_2] = [S_1 + R\cos(\alpha), S_2 + R\sin(\alpha)]$. Uvažme body $P = [0, 0]$ a $Q = [6, 8]$ a kružnice $k_1(P, 2)$ a $k_2(Q, 1)$. Pak z Pythagorovy věty plyne, že $V(x, y) = |AB|^2$, kde $A \in k_1$ odpovídá úhlu x a $B \in k_2$ úhlu y. Z toho dostaneme, že minimum $V(x, y)$ je druhá mocnina vzdálenosti nejbližších bodů na k_1 a k_2, což můžeme spočítat ze vzdáleností středů a poloměrů k_1 a k_2: $\sqrt{6^2 + 8^2} - 2 - 1 = 7$. Minimum $V(x, y)$ je tedy rovno $7^2 = 49$.

Úloha 44. Jaké je nejmenší přirozené číslo, jehož poslední číslicí (tj. číslicí na místě jednotek) je 2 a zároveň jejím přesunutím před první číslici dostaneme dvojnásobek původního čísla?

Výsledek. 105 263 157 894 736 842

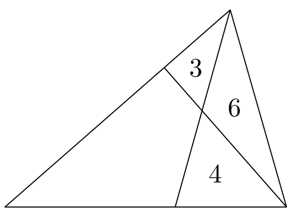
Řešení. Označme hledané číslo jako N. Když odstraníme poslední číslici, dostaneme všechny číslice čísla $2N$ kromě té nejvíce vlevo. Protože N končí na 2, musí $2N$ končit na 4, neboli číslice na místě desítek čísla N je 4. Jako d_i označme i-tou číslici N, tentokrát počítanou zprava doleva (tj. d_1 je číslice na místě jednotek). Když uvážíme, jak funguje násobení dvěma, zjistíme, že číslice N musí splňovat

$$d_i = \begin{cases} 2d_{i-1} \bmod 10 & \text{pro } d_{i-2} < 5, \\ 2d_{i-1} \bmod 10 + 1 & \text{pro } d_{i-2} \geq 5 \end{cases}$$

pro všechna $i > 2$. Díky těmto pravidlům můžeme rovnou psát číslice N. Zastavíme se, když napíšeme 1, za níž by následovala 2. Číslo začínající touto 1 je N, protože násobení dvěma přesně odstraní číslici na místě jednotek a přidá dvojku před číslo. Výsledek je

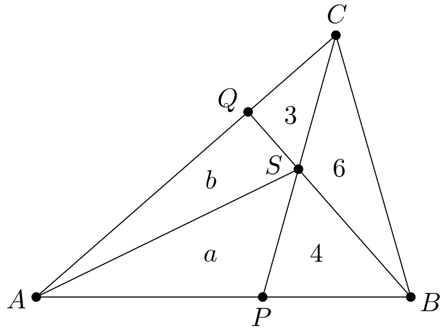
$$N = 105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

Úloha 45. Madam Verča rozdělila své trojúhelníkové pole dvěma rovnými ploty na čtyři části. Pozemek o velikosti 6 dala své dceři Beátě, ten o velikosti 4 své dceři Blance a nejmenší kus o velikosti 3 věnovala své nejmladší dceři Barbaře. Největší část pole si nechala. Jak velká je tato část?



Výsledek. 19/2

Řešení. Budeme používat značení jako na obrázku.



Z poměrů obsahů vyplývá, že bod S dělí úsečku QB v poměru $1:2$ a úsečku PC v poměru $2:3$. Doplňme úsečku AS a označme obsahy trojúhelníků APS a ASQ postupně jako a a b. Dostáváme rovnice

$$\frac{b}{a+4} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{b+3}{a} = \frac{3}{2},$$

ekvivalentně

$$2b = a + 4,$$
$$2b + 6 = 3a.$$

To nám dá řešení $a = 5$ a $b = \frac{9}{2}$. Obsah čtyřúhelníku $APSQ$ je tedy $\frac{19}{2}$.

Úloha 46. Čtyři bratři mají dohromady 2018 korun. Víme, že jmění každého z nich je kladné celé číslo, žádní dva nevlastní stejně korun a kdykoli je jeden z bratrů bohatší než jiný, je jeho jmění celočíselným násobkem jmění toho chudšího. Kolik nejméně korun může nejbohatší bratr mít?

Výsledek. 1152

Řešení. Protože jmění každého bratra je násobkem majetku toho nejchudšího, jejich součet, tedy 2018, musí být také jeho násobkem. Nicméně prvočíselný rozklad $2018 = 2 \cdot 1009$ dává pro počet korun nejchudšího jen tři možnosti: 1, 2, nebo 1009. Zjevně není možné, aby měl 1009 korun, protože pak by nejchudší bratr měl víc než kterýkoli jiný. Dále kdyby měl jen korunu, na ostatní bratry by zbylo 2017 korun, což je prvočíslo, takže druhý nejchudší bratr by musel mít také jen korunu, což ale odporuje podmínkám ze zadání. Nejchudší bratr tedy má 2 koruny a zbylí tři vlastní dohromady 2016 korun.

Nechť $a < b < c$ jsou počty korun zbylých tří bratrů. Musí splňovat podmínky $a \mid b \mid c$ a $a+b+c = 2016$. Dělitelnost spolu s ostrou nerovností implikuje, že $2a \leq b$ a $2b \leq c$. Kdybychom dokázali splnit rovnosti, zjevně bychom dostali řešení s nejmenší hodnotou c. Naštěstí $1 + 2 + 4 = 7$ dělí 2016, můžeme tedy opravdu součet rozdělit na

$$2016 = \tfrac{1}{7} \cdot 2016 + \tfrac{2}{7} \cdot 2016 + \tfrac{4}{7} \cdot 2016.$$

Odpověď je $\frac{4}{7} \cdot 2016 = 1152$.

Úloha 47. Michal nakreslil na tabuli symbol ♣. Potom třináctkrát zopakoval následující postup: Smazal tabuli a napsal na ni novou posloupnost symbolů, přičemž místo každého ♣ v předchozí posloupnosti nyní napsal dvojici ♡♣ a místo každého ♡ v předchozí posloupnosti nyní napsal ♣♡. Například posloupnost ♣♡♡ by Michal přepsal jako ♡♣♣♡♣♡. Kolik dvojic ♡♡ (bez dalšího symbolu mezi nimi) zůstalo na tabuli, když to Michala přestalo bavit? Počítané dvojice se mohou překrývat, tedy např. v posloupnosti ♡♡♡♡ jsou tři dvojice ♡♡.

Výsledek. 1365

Řešení. Nechť A_n je posloupnost symbolů, které zůstaly na tabuli po n-tém zopakování celé procedury ($A_0 = (\clubsuit)$). Dále h_n bude značit počet dvojic ♡♡ v A_n. Protože dvojice ♡♡ v A_n vznikne jen z dvojice ♡♣ v A_{n-1}, která zase vznikne jen z ♡♡ nebo ♣ v A_{n-2}, vidíme, že $h_n = h_{n-2} + 2^{n-3}$ pro $n \geq 3$, protože v A_{n-2} je přesně 2^{n-3} symbolů ♣. Pro lichá n tedy máme

$$h_n = 2^{n-3} + 2^{n-5} + \cdots + 2^0 + h_1 = \tfrac{1}{3}(2^{n-1} - 1),$$

protože $h_1 = 0$. Hledaný počet dvojic je $h_{13} = 1365$.

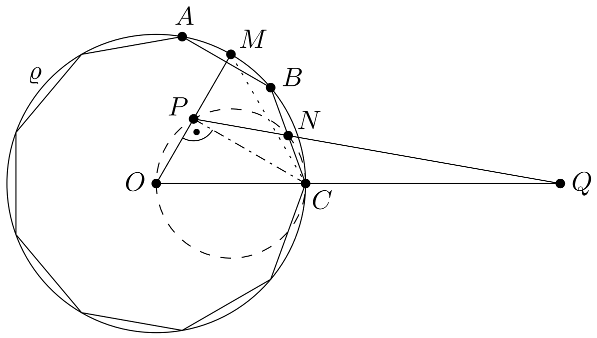
Úloha 48. Nechť $ABCDEFGHI$ je pravidelný devítiúhelník s kružnicí opsanou ϱ a středem O. Označme M bod uprostřed kratšího oblouku AB kružnice ϱ, P střed úsečky MO a N střed úsečky BC. Průsečík přímek OC a PN nazveme Q. Jaká je velikost úhlu NQC (ve stupních)?

Výsledek. $10°$

Řešení. Dokážeme, že čtyřúhelník $OCNP$ je tětivový. Protože $|\sphericalangle ONC| = 90°$, stačí ukázat, že $|\sphericalangle OPC| = 90°$. To ověříme následovně: Protože body C i M leží na ϱ, platí $|OC| = |OM|$. Snadným výpočtem zjistíme, že $|\sphericalangle MOC| = 60°$, takže $\triangle OCM$ je rovnostranný. Nakonec P je středem úsečky OM, a tak platí $|\sphericalangle OPC| = 90°$.

Dalším snadným výpočtem dostaneme $|\sphericalangle OCN| = 70°$, tedy $|\sphericalangle OPN| = 180° - |\sphericalangle OCN| = 110°$. Využitím trojúhelníku OQP dostaneme

$$|\sphericalangle NQC| = |\sphericalangle PQO| = 180° - |\sphericalangle POQ| - |\sphericalangle OPQ| = 180° - 60° - 110° = 10°.$$



Úloha 49. Jana si vymyslela trojici (x, y, z) kladných celých čísel takovou, že $x + y + z = 2018$. Číslo x pošeptala Xeně, y Yeně a z Zeně. Žádná z těchto tří neznala zbylá dvě čísla a jediné, co jim Jana prozradila, byl onen součet. Následovala tato konverzace:

- Xena: Vím, že Yena a Zena mají různá čísla.
- Yena: Díky Xeně nyní vím, že všechna naše čísla jsou navzájem různá!
- Zena: A já teď už vím, která z nás má jaké číslo.

Najděte trojici (x, y, z).

Výsledek. $(3, 2, 2013)$

Řešení. Výrok Xeny znamená, že x je liché. Kdyby bylo sudé, mohlo by být $y = z$.

Předpokládejme nyní, že y je liché. To znamená, že Yena od začátku věděla, že x a z jsou různá. Kdyby bylo navíc $y \geq 1009$, Yena by už také věděla, že x a z jsou různá od y, a nepotřebovala by Xenin výrok. Kdyby však $y \leq 1007$, pak by navzdory Xenině výroku Yena pořád neuměla říct, jestli je její číslo různé od x. Můžeme z toho vyvodit, že y je sudé, a tedy že z je liché.

Kdyby y bylo násobkem čtyř, platilo by $x + z = 2018 - y \equiv 2 \pmod 4$, jinými slovy $x + z$ by bylo dvojnásobkem lichého čísla. V takovém případě by ale Yena nemohla usoudit, že x a z jsou různá. Kdyby naopak $y \equiv 2 \pmod 4$, pak by čísla x a z musela dávat různé zbytky modulo 4 a Yenin výrok by tím byl vysvětlený.

Nakonec prozkoumejme Zenin výrok. Musí platit $y = 2$, protože jinak by y mohlo být o 4 menší a x o 4 větší a Zena by nepoznala rozdíl. Z podobných důvodů je $x \leq 4$, takže buď $x = 1$, nebo $x = 3$. Nicméně v prvním případě by Zena, která věděla, že $2018 - z = x + y = 3$, mohla určit x a y i bez Yenina výroku. Proto $x = 3$ a $z = 2013$.

Úloha 50. Čaroděj Aritmetix a čarodějka Kombinatorika spolu soupeří v duelu. Na začátku mají oba 100 životů. Aritmetixova kouzla zasáhnou Kombinatoriku s pravděpodobností 90 % a v případě zásahu ji zraní za 60 životů. Kombinatoričina kouzla zasáhnou Aritmetixe s pravděpodobností 60 % a zraňují za 130 životů. Soupeři se střídají v sesílání kouzel a Aritmetix začíná. Souboj končí, jakmile některému z čarodějů dojdou životy, prohrou tohoto čaroděje. Určete pravděpodobnost Aritmetixova vítězství.

Výsledek. $45/128$

Řešení. Přesný počet životů není tak důležitý – stačí vědět, že Aritmetix prohraje, jakmile je poprvé zasažen, a Kombinatorika prohraje po dvou zásazích. Uvažme stav, kdy Kombinatorika již byla jednou zasažena a Aritmetix je na řadě se sesíláním kouzla. Označme pravděpodobnost Aritmetixovy výhry za tohoto stavu q. Aritmetix může za této situace vyhrát buď jistě tím, že úspěšně zasáhne (což se stane s pravděpodobností $9/10$), nebo možná v případě, že mine a pak mine i Kombinatorika (což se stane s pravděpodobností $1/10 \cdot 4/10$); tím se totiž opět dostaneme do stavu, v němž Aritmetix vyhraje s pravděpodobností q. Obdrželi jsme tedy rovnici

$$q = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot q,$$

ze které plyne $q = 15/16$.

Nyní spočítejme pravděpodobnost p Aritmetixova vítězství z výchozí situace. Pokud Aritmetix zasáhne a Kombinatorika mine (pravděpodobnost $9/10 \cdot 4/10$), dostaneme se do situace popsané v předchozím odstavci a Aritmetix vyhraje s pravděpodobností $q = 15/16$. Na druhou stranu, pokud Aritmetix mine a Kombinatorika také mine (pravděpodobnost $1/10 \cdot 4/10$), pak Aritmetix zvítězí s pravděpodobností p. Máme tedy

$$p = \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{15}{16} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot p.$$

Vyřešením rovnice dostaneme, že Aritmetix vyhraje duel s pravděpodobností $p = 45/128$.

Úloha 51. Nechť $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ je rostoucí posloupnost kladných celých čísel splňujících $a(a(n)) = 3n$ pro každé kladné celé n. Spočítejte $a(2018)$.

Poznámka: Posloupnost je *rostoucí*, pokud $a(m) < a(n)$, kdykoli $m < n$.

Výsledek. 3867

Řešení. Pokud $a(1) = 1$, musí platit také $a(a(1)) = 1 \neq 3 \cdot 1$, což není možné. Protože je posloupnost rostoucí, platí tudíž $1 < a(1) < a(a(1)) = 3$, a tedy $a(1) = 2$. Ze zadané rovnice také vhodným dosazením vyvodíme vztah $a(3n) = a(a(a(n))) = 3a(n)$ pro každé n. Vyjdeme-li z rovnosti $a(1) = 2$, snadno pak pro každé m indukcí odvodíme $a(3^m) = 2 \cdot 3^m$. Využitím tohoto vztahu dále dostaneme $a(2 \cdot 3^m) = a(a(3^m)) = 3^{m+1}$.

Existuje $3^n - 1$ přirozených čísel i, pro něž je $3^n < i < 2 \cdot 3^n$, a podobně $3^n - 1$ přirozených čísel j, pro něž je $a(3^n) = 2 \cdot 3^n < j < 3^{n+1} = a(2 \cdot 3^n)$. Protože $a(n)$ je rostoucí, nemáme jinou možnost než $a(3^n + b) = 2 \cdot 3^n + b$ pro všechna $0 < b < 3^n$. Z toho $a(2 \cdot 3^n + b) = a(a(3^n + b)) = 3^{n+1} + 3b$ pro $0 < b < 3^n$. Protože $2018 = 2 \cdot 3^6 + 560$, máme $a(2018) = 3^7 + 3 \cdot 560 = 3867$.

Úloha 52. Rovnostranný trojúhelník T se stranou délky 2018 je rozdělený na 2018^2 rovnostranných trojúhelníčků se stranou délky 1. Množinu M vrcholů těchto trojúhelníčků nazveme *nezávislou*, pokud pro každé dva různé body $A, B \in M$ platí, že úsečka AB není rovnoběžná s žádnou stranou trojúhelníku T. Kolik nejvíce vrcholů může nezávislá množina obsahovat?

Výsledek. 1346

Řešení. Každému vrcholu v mřížce můžeme přiřadit trojici jeho vzdáleností od tří stran trojúhelníku T (jako jednotku této vzdálenosti budeme brát výšku trojúhelníčku). Součet těchto vzdáleností je vždy roven 2018. Naopak, libovolná trojice nezáporných celých čísel se součtem 2018 udává právě jeden vrchol mřížky. Můžeme tedy namísto vrcholů pracovat ekvivalentně jen s těmito trojicemi, kterým budeme říkat *souřadnice*.

Podmínka nezávislosti v řeči souřadnic znamená, že žádné dvě trojice v množině nesmí mít stejnou první, druhou nebo třetí souřadnici. Nechť

$$M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)\}$$

je nezávislá množina. Protože $x_1, \ldots, x_k$ jsou navzájem různá nezáporná celá čísla, jejich součet je aspoň

$$0 + 1 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Totéž platí pro součty $y_1 + \cdots + y_k$ a $z_1 + \cdots + z_k$. Na druhé straně máme $x_i + y_i + z_i = 2018$ pro každé $i = 1, \ldots, k$, tedy

$$3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \leq (x_1 + \cdots + x_k) + (y_1 + \cdots + y_k) + (z_1 + \cdots + z_k) = 2018k.$$

Z toho plyne, že

$$k \ \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot 2018$$

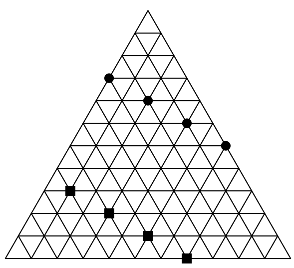
neboli $k \leq 1346$.

Následující dvě posloupnosti bodů tvoří dohromady nezávislou množinu o velikosti 1346:

$$(0, 672, 1346),\ (2, 671, 1345),\ (4, 670, 1344),\ \ldots,\ (1344, 0, 674);$$
$$(1, 1345, 672),\ (3, 1344, 671),\ (5, 1343, 670),\ \ldots,\ (1345, 673, 0).$$

Hledaný maximální možný počet prvků nezávislé množiny je tedy 1346.

Na obrázku je konstrukce nezávislé množiny pro trojúhelník se stranou délky 11:



Úloha 53. Nechť ABC je trojúhelník s $|AB| = 5$, $|AC| = 6$ a opsanou kružnicí ω. Dále nechť F, G jsou body na straně AC takové, že $|AF| = 1$, $|FG| = 3$ a $|GC| = 2$, a nechť přímky BF a BG protínají kružnici ω postupně v bodech D a E. Pokud jsou úsečky AC a DE rovnoběžné, jaká je délka strany BC?

Výsledek. $5\sqrt{5/2}$

Řešení. Označme $x = |BC|$. Protože $ACED$ je rovnoramenný lichoběžník, můžeme položit $y = |AE| = |CD|$. Nakonec ještě označme $p = |BF|$, $q = |DF|$, $u = |BG|$ a $v = |GE|$.

Úhly BAC a BDC jsou stejně velké, protože body A a D leží na stejném oblouku BC kružnice ω. Z toho plyne, že trojúhelníky ABF a DCF jsou podobné, takže

$$\frac{y}{5} = \frac{q}{1} = \frac{5}{p}.$$

Stejným způsobem dostaneme podobnost trojúhelníků BCG a AEG, z čehož plyne

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{2} = \frac{4}{u}.$$

Protože jsou úsečky AC a DE rovnoběžné, platí

$$\frac{p}{q} = \frac{u}{v}.$$

Dosazením z předchozích rovností dostaneme

$$\frac{\frac{25}{y}}{\frac{y}{5}} = \frac{\frac{4x}{y}}{\frac{2y}{x}}$$

neboli $x^2 = 125/2$. Proto $x = 5\sqrt{5/2}$.

Úloha 54. Víme, že

$$2^{22000} = \underbrace{4569878\ldots229376}_{6623 \text{ číslic}}.$$

Pro kolik kladných celých čísel $n < 22000$ je první cifrou 2^n rovněž 4?

Výsledek. 2132

Řešení. Pokud první cifra k-ciferného čísla N je c, pak $c \cdot 10^{k-1} \leq N < (c+1) \cdot 10^{k-1}$. Z toho plyne, že $2c \cdot 10^{k-1} \leq 2N < (2c+2) \cdot 10^{k-1}$, speciálně je první cifra čísla $2N$ aspoň tak velká jako první cifra $2c$ a nejvýš tak velká jako první cifra $2c+1$. Toto pozorování aplikujeme na první cifry mocnin dvojky. Pro mocninu dvojky začínající jedničkou máme pět možností, jak budou vypadat první cifry u následujících mocnin dvojky:

(1) $1, 2, 4, 8, 1$;

(2) $1, 2, 4, 9, 1$;

(3) $1, 2, 5, 1$;

(4) $1, 3, 6, 1$;

(5) $1, 3, 7, 1$.

Nechť k je nezáporné celé číslo takové, že 2^k začíná jedničkou a má d cifer. Pak existuje právě jedna mocnina dvojky, která začíná jedničkou a má $d+1$ cifer, a je to buď 2^{k+3} (pokud jsme v situaci (3), (4) nebo (5) výše), nebo 2^{k+4} (v případě (1) nebo (2)). Jelikož 2^0 (jednociferné číslo) a 2^{21998} (6623ciferné číslo) začínají jedničkou, můžeme spočítat, kolikrát při počítání po sobě jdoucích mocnin dvou nastává případ (1) nebo (2). Je to přesně $21998 - 3 \cdot 6622 = 2132$krát.

Nakonec si ještě všimneme, že případy (1) a (2) jsou přesně ty, po kterých vzniknou mocniny dvojky začínající čtyřkou. V daném rozmezí se tedy nachází 2132 čísel splňujících podmínku v zadání.

Úloha 55. Najděte racionální čísla a, b, c, pro která platí

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Poznámka: Racionální číslo je takové, které lze zapsat jako podíl dvou celých čísel.

Výsledek. $(a, b, c) = (1/9, -2/9, 4/9)$

Řešení. Položme $y = \sqrt[3]{2}$ a $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{y - 1}$. Chtěli bychom využít faktu, že čísla $y^3 \pm 1$ jsou celá, a pomocí vzorců pro $A^3 \pm B^3$ najít vztah mezi x a y ve vhodném tvaru, abychom pak mohli x vyjádřit jako součet tří třetích odmocnin z racionálních čísel. Nejprve si povšimněme, že

$$1 = y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1),$$

a protože $3 = y^3 + 1$, platí

$$y^2 + y + 1 = \frac{3y^2 + 3y + 3}{3} = \frac{3y^2 + 3y + y^3 + 1}{3} = \frac{(y + 1)^3}{3}.$$

Dáme-li odvozené vztahy dohromady, dostaneme $x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{3}{(y+1)^3}$.

Dále $3 = y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$, a tedy platí $\frac{1}{y+1} = \frac{y^2-y+1}{3}$. Dosazením do předešlého odvodíme

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y + 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1).$$

Dokázali jsme, že trojice $(a, b, c) = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$ vyhovuje zadání.

Dokonce je možné dokázat, že toto vyjádření x ve tvaru součtu tří třetích odmocnin racionálních čísel je jednoznačné až na přeuspořádání.