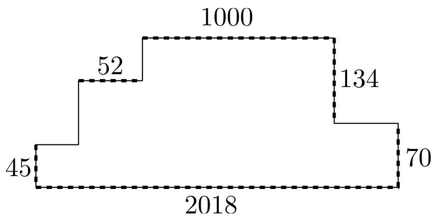
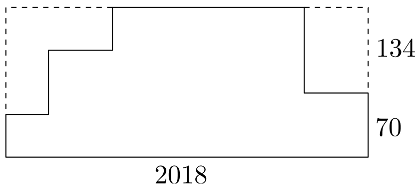
1. Feladat Az ábrán látható tízszög bármely két szomszédos oldala derékszöget zár be. Néhány (szaggatott vonallal jelölt) oldal hosszát ismerjük, centiméterben megadva.



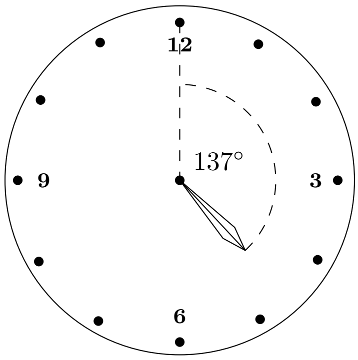
Hány centiméter a tízszög kerülete?

Eredmény. 4444

Megoldás. A konkáv szögeket "kifordítva" át tudjuk alakítani a tízszöget egy téglalappá, amelynek oldalhosszai 2018 és $70 + 134 = 204$. Tehát a kerület $2 \cdot (2018 + 204) = 4444$.



2. Feladat Az ábrán látható óra percmutatója hiányzik. Hány perc telt el a legutóbbi egész óra óta, ha az óramutató és a 12 óra közötti szög 137°?



Eredmény. 34

Megoldás. Mivel az óramutató egy óra alatt $360° : 12 = 30°$-ot fordul, 2 perc alatt fordul 1 fokot. Tehát $137° - 4 \cdot 30° = 17°$ fokot fordult 4 óra óta, ami 34 percbe telt.

3. Feladat Négy diák, Jakab, Klára, Lilla és Mária megírtak egy dolgozatot. Tudjuk, hogy a pontszámaik 2, 12, 86 és 6 valamilyen sorrendben. Továbbá,

- Jakab pontszáma *pampam* mint Lilla pontszáma,
- Lilla pontszáma *pampam* mint Klára pontszáma,
- Mária pontszáma *pampam* mint Klára pontszáma,
- Jakab pontszáma *pampam* mint Mária pontszáma.

ahol *pampam* azt jelenti, hogy "nagyobb" vagy "kisebb" (mind a négy helyen ugyanazt jelenti). Mi Lilla és Mária pontszámainak összege?

Eredmény. 18

Megoldás. Láthatjuk, hogy ha a *pampam* nagyobbat jelent, akkor Jakabnak van legtöbb pontja és Klárának a legkevesebb. Ha a *pampam* kevesebbet jelent, akkor épp fordítva. Mindkét esetben Lilla és Mária kapták a két középső pontszámot, hatot és tizenkettőt. Tehát ezek összege 18.

4. Feladat Jenő és Jani egy téren állnak és megszámolják, hány ház van körölüttük. Mindketten az óramutató járása szerint haladnak, de különböző háztól indulva. Amelyik ház Jenőnek a negyedik, az Janinak a tizenhatodik, és amelyik ház Jenőnek a tizenkettedik, az Janinak a hetedik. Hány ház van a téren?

Eredmény. 17

Megoldás. Mivel Jenő negyedik háza Janinak a tizenhatodik, van egy olyan szakasz, ahol Jani számozása 12-vel nagyobb mint Jenőé. De ennek a szakasznak véget kell érnie melőtt Jenő 12-ig ér, különben Jani erre a házra $12 + 12 = 24$-et mondana. Ha valaki végigér a házak számolásával, azon a helyen az ő számlálója visszaesik 1-re, azaz pont a házak össz-számával kevesebbet mond, mintha folytatta volna tovább. Ezért $24 - 7 = 17$ ház van a téren.

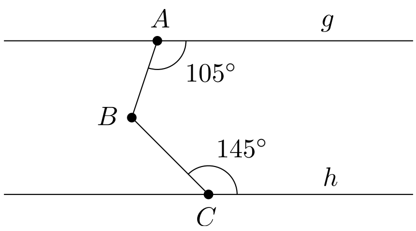
5. Feladat Dóra vízkőmentesíteni szeretné a kávégépet. A használati utasítás szerint négy rész vizet keverjen össze egy rész 10%-os ecettel. De sajnos otthon csak 40%-os ecetet talált. Hány rész vizet keverjen egy rész 40%-os ecethez, hogy pont az előírásban szereplő hígítást érje el?

Megjegyzés: egy n%-os ecet n résznyi ecetet és $100 - n$ résznyi vizet tartalmaz.

Eredmény. 19

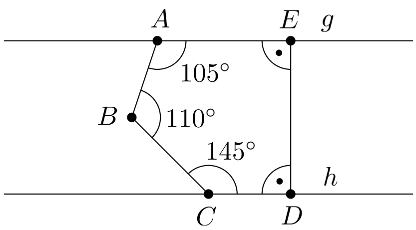
Megoldás. Az eredeti leírásban az ecet a keverék ötödének 10%-át teszi ki, azaz 2% ecetet tartalmazó oldat kell a tisztításhoz. Azonos hígítás érhető el, ha a 40%-os ecetet hússzorosára hígítjuk, azaz még 19 résznyi vizet kell hozzáönteni.

6. Feladat A g és h egyenesek párhuzamosak, az ábrán jelölt szögek az A-nál 105°, és a C-nél 145°. Hány fokos a $CBA\sphericalangle$ szög?

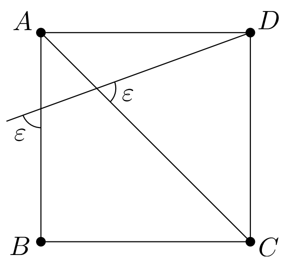


Eredmény. 110°

Megoldás. Vegyük hozzá az ábrához a D és E pontokat, amik rendre a h és g egyeneseken fekszenek. Ekkor az ismert szögek és a keresett szög az $ABCDE$ ötszög belső szögei. Az újonnan hozzáadott szöget összege 180° (lehetnek derékszögek, mint az ábrán, de nem szükséges) és egy ötszög belső szögeinek összege 540°, kapjuk hogy a keresett szög $540° - 180° - 105° - 145° = 110°$.



7. Feladat $ABCD$ egy négyzet. Hány fokos a ε szög?



Eredmény. 67.5°

Megoldás. Legyen X és Y a két pont ahol a ε szög látható. Ekkor $AXY\sphericalangle = AYX\sphericalangle = \varepsilon$. Továbbá, mivel $XAY\sphericalangle = CAB\sphericalangle = 45°$, az XYA háromszög belső szögeire

$$45° + \varepsilon + \varepsilon = 180°$$

azaz $\varepsilon = 67.5°$.

8. Feladat Karcsi aznap született, mikor édesanyja a 27. születésnapját ünnepelte. Legfeljebb hányszor fordulhat elő, hogy Karcsi életkora az szám, amit az anyja életkorában a számjegyeket visszafelé olvasva kapunk?

Megjegyzés: Ha egy szám 0-val kezdődne, akkor azt a nullát kihagyjuk, például 470 visszafelé olvasva 74.

Eredmény. 7

Megoldás. Legyen Karcsi k éves és az anyja m éves, ahol k az m visszafelé olvasva. A k és m számoknak ugyanannyi számjegye van, legalább 2 számjegy. (Megengedve, hogy k nullával kezdődik, ha m nullára végződött.) Legyen a és b rendre k és m utolsó számjegyei. Mivel Karcsi anyja 27 évvel idősebb, $a + 7 = b$ vagy $a + 7 = 10 + b$. Ha az anya 100 évesnél idősebb lenne, akkor az életkoruk első számjegyei között maximum egy lenne a különbség, ami nem lehet, hiszen azok éppen az a és b számjegyek. Tehát k és m kétjegyűek.

Keressük az öszes olyan $\overline{ab}$ számot amelyre

$$\overline{ab} = \overline{ba} + 27.$$

tudjuk hogy $a > b$, tehát az $a + 7 = b$ eset nem lehetséges. Maradt az $a + 7 = 10 + b$ eset, azaz $a = b + 3$. Mivel $a \leq 9$, így $b \leq 6$. Bármely $b \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, számjegyre legyen $a = b + 3$. Könnyű látni, hogy ezekre mint teljesül a $\overline{(b + 3)b} = \overline{b(b + 3)} + 27$ egyenlőség. Tehát a keresett szituáció 7-szer történhet meg, sorra amikor Karcsi 3, 14, 25, 36, 47, 58 és 69 éves.

9. Feladat Juli 32 fehér és 32 fekete egységkockát felhasználva egy $4 \times 4 \times 4$ méretű nagy kockát épít. Azt szeretné, hogy nagy kocka felszíne a lehető legtöbb fehér részt tartalmazza. Mi a fehér felület és a teljes felület arányának elérhető legnagyobb értéke?

Eredmény. 3/4

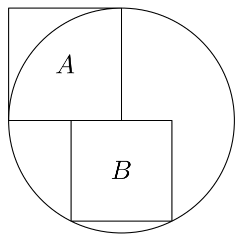
Megoldás. Ha egy kiskockát a sarokba helyez, akkor 3 oldala látható, ha az élre, akkor 2 oldala, egyébként legfeljebb 1 oldala. Nyolc sarok van, és a 12 élen két kiskocka található, ez összesen éppen 32 hely. Tehát ezekre a helyekre helyezzük a fehéreket hogy a legjobb arányt érjük el. Ekkor a nagykocka minden oldala ugyanúgy néz ki: 12 fehér és 4 fekete négyzetből áll, tehát a fehér felület és a teljes felület aránya $12/16 = 3/4$.

10. Feladat Száz ember vett részt az űrhajós-válogatáson egy Merkúrra tartó járatra. Minden űrhajós-jelöltnek három teszten kellett átmennie: egészségügyi, pszichológiai és gyakorlati. Csak 26 ember ment át az egészségügyi teszten. Hatvan jelölt bukott meg több mint egy teszten. Nyolcvanhárom jelölt bukott meg a pszichológiai vagy gyakorlati teszten, de senki sem bukta el ezt a kettőt egyszerre. Hány embert választottak ki a misszióra, azaz hány embernek lett sikeres mind a három teszt?

Eredmény. 3

Megoldás. Mivel senki sem bukott a pszichológiai és a gyakorlati teszten egyszerre, mindenki aki kettőn bukott, az az egészségyügyi teszten sem ment át. Ez alapján $(100 - 26) - 60 = 14$ ember csak az egészségügyin bukott. Ehhez hozzáadva azt a 83 embert, akiknek a pszichológiai vagy gyakorlati teszt nem sikerült, összesen 97 jelentkezőt bocsájtottak el, azaz csak 3 űrhajóst választottak végül ki.

11. Feladat Az A négyzet két oldala egy kör két sugarával esik egybe. A B négyzetnek két csúcsa ezen a körön van, és egyik oldalának egy része ráfekszik A egy oldalának egy részére. Keressétek meg A területének és B területének az arányát.

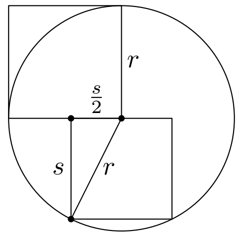


Eredmény. 5 : 4

Megoldás. Legyen a kör sugara r, és a B négyzet oldalhossza s. Szimmetria miatt a kör középpontja felezi B oldalát, tehát az A val közös rész $s/2$ hosszú. A Pitagorasz-tétel alapján

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{5}{4}s^2$$

tehát a keresett arány 5 : 4



12. Feladat Határozzátok meg a

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

szorzat utolsó két számjegyét.

Eredmény. 10

Megoldás. Mivel $2 \cdot 5$ szerepel a szorzatban, az utolsó számjegy 0 lesz. A tízes helyiértéken álló számjegy a $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 37$ utolsó számjegye. Szorzáskor elegendő az utolsó számjegyeket nézni, és az egyeseket elhanyagolhatjuk. Tehát

$$3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9.$$

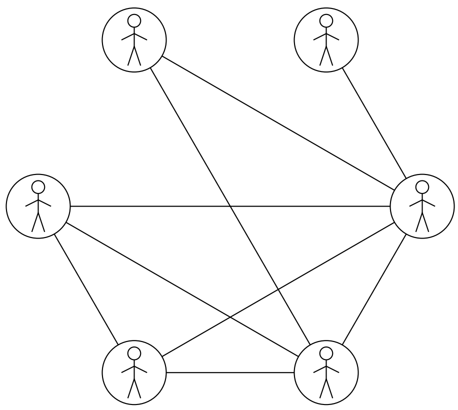
utolsó számjegyét keressük. Mivel $3 \cdot 7 = 21$, ami 1-re végződik, a 3, 7 párokat kihagyhatjuk. Ezután már csak $9 \cdot 9$ marad, aminek szintén 1 az utolsó számjegye. Az eredeti szorzat utolsó két számjegye 10.

13. Feladat Amikor egy detektív kihallgatta a bűncselekény 6 gyanúsítottja közül az első ötöt, azt találta, hogy ennek az öt embernek rendre $1, 2, 3, 4$ és 5 barátja van a 6 gyanúsított közül. Tudja, hogy a barátság kölcsönös. Hány barátja van hatodik embernek a gyanúsítottak közül?

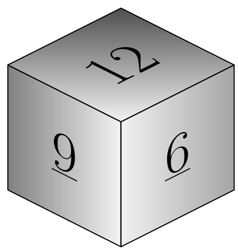
Eredmény. 3

Megoldás. Legyen n az utolsó gyanúsított barátainak száma. Az öt baráttal rendelkező ember barátja mindenkinek, őt törölve mindeki fokszáma eggyel csökken. Ezután akinek eredetileg egy barátja volt, őt is elhagyhatjuk, mert nulla barátja maradt. Maradt 4 ember, sorra 1, 2, 3 és $n-1$ baráttal. Az előző lépést megismételve már csak 2 ember marad, 1 és $n-2$ baráttal egymás között, tehát $n-2=1$, $n=3$

Megjegyzés: Az alábbi ábra mutatja hogy az $n=3$ eset tényleg megvalósítható:



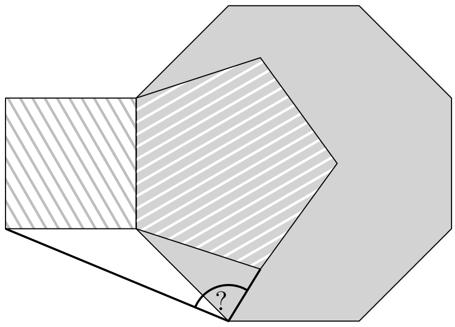
14. Feladat Az ábrán látható kocka minden lapján egy pozitív egész szám található. Továbbá, a szemközti lapokon lévő számok szorzata egyforma (minden szemközti lappárra). Nem szükséges, hogy az összes szám különböző legyen. Mi a lapokra írt számok összegének lehető legkisebb értéke?



Eredmény. 40

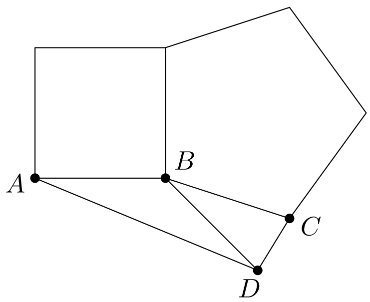
Megoldás. Legyen P a szemközti számok szorzata. Nyilván minél nagyobb P, annál nagyobb az összeg. Mivel P osztható az ábrán látható mindhárom számmal, P lehető legkisebb értéke ezek legkisebb közös többszöröse, azaz $P = 36$. Ebben az esetben a nem látható oldalakon a számok 3, 4 és 6, így a keresett összeg $6 + 9 + 12 + 6 + 4 + 3 = 40$.

15. Feladat A szürke nyolcszög és a csíkos ötszög szabályos, a csíkos négyszög egy négyzet. Számoljátok ki az ábrán látható két vastag szakasz közötti szöget.



Eredmény. 99°

Megoldás. Betűzzük meg a csúcsokat az ábrán látható módon.



A CBD szög a nyolszög egy belső szögének és az ötszög egy belső szögének a különbsége, tehát $CBD\sphericalangle = 135° - 108° = 27°$. Továbbá könnyen megkaphatjuk, hogy $ABD\sphericalangle = 135°$. Mivel az ABD és CBD háromszögek egyenlő szárúak,

$$CDB\sphericalangle = \tfrac{1}{2}(180° - CBD\sphericalangle) = 76,5°,$$
$$BDA\sphericalangle = \tfrac{1}{2}(180° - ABD\sphericalangle) = 22,5°.$$

Tehát

$$CDA\sphericalangle = CDB\sphericalangle + BDA\sphericalangle = 99°.$$

16. Feladat A miniszter sofőrje minden nap ugyanakkor indul a minisztériumtól, elmegy a miniszter házához és beviszi őt a minisztériumba. A miniszter minden nap ugyanakkor kel fel, és az autó pontosan akkor érkezik, mikor készen áll indulni. Ma reggel a miniszter hamarabb kelt fel ezért egy órával hamarabb kész volt elindulni. Így hát elindult gyalog a kocsi irányába (ami a miniszériumtól indult, mint mindig). Találkozott az autóval, beszállt, és így a szokásoshoz képest 20 perccel hamarabb ért be a minisztériumba. Hány percet sétált? Feltesszük, hogy az autó egyenletes sebességel halad és nem kerül időbe beszállni a kocsiba.

Eredmény. 50

Megoldás. Ha beszállás után a kocsi még elment volna a miniszter házához és vissza, akkor pont úgyanakkor ért volna be, mint más napokon. Az 1 óra amennyivel hamarabb indult otthonról két részre oszlik: az séta ismeretlen t időtartama és az idő ami alatt az autó elment volna a miniszter házához, ami a megspórolt idő fele, azaz

$$60 = t + \frac{20}{2}$$

így $t = 50$.

17. Feladat Mi a legkisebb pozitív egész szám, amely legalább kétjegyű és ha az első (azaz legnagyobb helyiértékű) számjegyét töröljük, akkor a szám értéke a 29-ed részére csökken?

Eredmény. 725

Megoldás. Legyen d a keresett szám első számjegye, k az első jegy törlése után kapott szám, és n k számjegyeinek száma. Ekkor az eredeti szám $10^n d + k$ és a feltevés így írható fel:

$$10^n d + k = 29k$$

azaz

$$10^n d = 28k.$$

Mivel $28 = 2^2 \cdot 7$, ahhoz hogy a bal oldali érték osztható legyen 28-cal, $d = 7$ és $n \geq 2$ kell legyen. Legyen $n = 2$ (ekkor $k = 25$), ez adja a legkisebb, a feltételeknek megfelelő számot és ez a szám a 725.

18. Feladat 24 óra alatt hányszor fordul elő, hogy egy óra kismutatója és nagymutatója merőleges egymásra?

Eredmény. 44

Megoldás. A nagymutató 24 óra alatt 24 teljes kört tesz meg, míg a kismutató csak kettőt. Azaz a kismutató 22 alkalommal fogja leelőzni a nagymutatót. Minden előzés előtt és után előáll valamikor hogy épp merőlegesek egymásra, azaz összesen 44 alkalommal lesznek merőlegesek.

19. Feladat Keressétek meg az összes olyan négyjegyű palindrom számot, ami előáll két háromjegyű palindrom szám összegeként.

Megjegyzés: Egy palindrom szám olyan szám, ami ugyanaz marad a számjegyeit visszafele olvasva, például a 2018102 palindrom. Egy szám nem kezdődhet nullával.

Eredmény. 1111, 1221

Megoldás. Legyen $\overline{abba}$ egy ilyen palindrom szám. Mivel előáll két háromjegyű szám összegeként, legfeljebb 1998, tehát $a = 1$. Legyen $\overline{1bb1}$ egyenlő $\overline{cdc} + \overline{xyx}$-vel, azaz

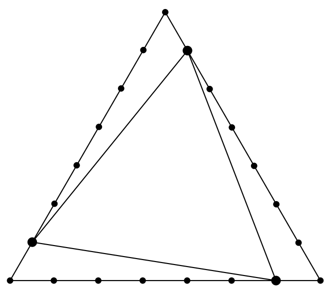
$$1001 + 110b = 101(c + x) + 10(d + y).$$

Mivel a bal oldal 1-re végződik, $c + x$ is 1-re végződik. Mivel c és x egyjegyű számok, $c + x = 11$. Ezt behelyettesítve egyszerűsödik az egyenlet:

$$11(b - 1) = d + y.$$

Mivel d és y számjegyek, a jobb oldal legfeljebb 18, azaz $b - 1$ vagy 0 vagy 1. Mindkét lehetőség megvalósulhat: $1111 = 505 + 606$, $1221 = 565 + 656$.

20. Feladat Egy szabályos háromszög oldalait 6 : 1 arányban osztják az osztópontok, úgy, hogy a kijelölt pontokat összekötve szintén szabályos háromszöget kapunk (lásd az ábrán). Határozzátok meg a kisebb szabályos háromszög területének és a nagy szabályos háromszög területének az arányát.



Eredmény. 31/49

Megoldás. Az ábrán van három egybevágó háromszög, amelyek levágásával megkapjuk a kisebb szabályos háromszöget. Egy ilyen háromszög területe a nagy háromszög területének $\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{49}$ része, mert az alapja az eredeti 6/7-e és a magassága az eredeti 1/7-e. Tehát kisebb szabályos háromszög területének és a nagy szabályos háromszög területének az aránya

$$1 - 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{31}{49}.$$

21. Feladat Keressétek meg az összes olyan (a, b, c, d) pozitív egészekből álló számnégyest, hogy ha az alábbi táblázatban a, b, c, d helyére beírjuk az értékeit, akkor pontosan a darab egyes, b darab kettes, c darab hármas és d darab négyes lesz a táblázatban.

1	2	3	4
a	b	c	d

Eredmény. $(2, 3, 2, 1)$, $(3, 1, 3, 1)$

Megoldás. Egyik szám sem szerepelhet a táblázatban több mint 5-ször. Azonban az ötös nem szerepelhet, mert akkor elvenne egy helyet az ötször szereplő érték elől. Tehát csak az 1, 2, 3, 4 számok szerepelhetnek.

Megmutatjuk, hogy $d = 1$: ha $d = 2$ lenne, akkor a, b, c egyike 4. Mivel ezután már csak 2 szabad hely marad, $b = 4$. De a $(2, 4, 2, 2)$ nem egy megengedhető kitöltés. A $d = 3$ és $d = 4$ esetek még hamarabb ellentmondáshoz vezetnek.

Most már tudjuk, hogy $a \in \{2, 3\}$. Feltételezve hogy $a = 2$, kapjuk hogy $b, c \in \{2, 3\}$ (nem lehet több egyes és négyes) de $b = 2$ ellentmondásra vinne, mert három kettes szerepelne, ezért $b = 3$, ebből következik hogy $c = 2$. Azaz $(2, 3, 2, 1)$ egy jó megoldás. Ha $a = 3$, akkor kell még egy egyes a táblázatba, ami nem lehet c, hiszen már van két hármas. Tehát $b = 1$, ez alapján $c = 3$. $(3, 1, 3, 1)$ a másik helyes megoldás.

22. Feladat Péter elfelejtette a jelszavát. Annyira emlékszik, hogy hogy a jelszó kilenc latin kisbetűből állt, és tartalmazmazta a "math" és "drama" szavakat. Hány olyan jelszó van, ami teljesíti ezeket követelményeket?

Megjegyzés: A tarmalmazás részintervallumként tartalmazást jelent, például "martha" nem tartalmazza a "math" szót. Csak ékezet nélküli betűket használt, összesen 26 betű van a ABC-ben.

Eredmény. 2030

Megoldás. Először nézzük meg, ha math és drama szavaknak nincs közös része. Ekkor két lehetséges sorrend van: dramamath és mathdrama.

Ha van közös részük, akkor egyedül a "dramath" szóba tudjuk összeolvasztani őket. Ezt háromféleképp egészíthetjük ki 9 karakterré: **dramath, *dramath*, dramath**. Mindegyik esetben $26^2 = 676$-féleképpen válaszhatjuk ki a hiányzó 2 betűt, ezért összességében $676 \cdot 3 + 2 = 2028 + 2 = 2030$ lehetséges jelszó van.

23. Feladat Ha valaki a $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ halmazból véletlenszerűen választ két számot, akkor annak valószínűsége, hogy szomszédos egészeket választott, $\frac{1}{21}$. Határozzátok meg n értékét.

Eredmény. 42

Megoldás. A számok között $n - 1$ szomszédos pár található és $\frac{1}{2}n(n-1)$ féleképpen választhatunk ki két tetszőleges számot. Tehát

$$\frac{n-1}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{2}{n} = \frac{1}{21}$$

ami alapján $n = 42$.

24. Feladat Artúr, Béla és Csaba pingpongoztak az alábbi szabályokkal: minden meccset két játékos játszik, ezalatt a harmadik pihen. A következő kört a legutóbbi meccs nyertese játssza az előbb pihenő játékossal. Az első meccset Artúr játszotta Béla ellen. Néhány kör után azt állapították meg, hogy Artúr 17-szer nyert, Béla pedig 22-szer. Hányszor játszott Artúr és Béla egymás ellen?

Eredmény. 20

Megoldás. Vegyük észre, hogy amikor Csaba nyer, az nem számít be Artúr és Béla nyereségeinek számába, és azt sem befolyásolja hányszor játszanak Csaba nélkül. Tehát feltételezhetjük, hogy Csaba mindig veszít. Ez alapján valahányszor Artúr megveri Bélát, az 2-vel növeli Artúr összpontszámát (a következő körben Csabával játszik és őt is megveri), kivéve ha az utolsó körben történt. Mivel Artúr győzelmeinek száma páratlan, az utolsó meccs Artúr vs. Béla volt és Artúr nyert. Ha hozzáadunk még egy kört: Artúr vs. Csaba, Artúr győzelmével, akkor akkor azok a meccsek amit Csaba nélkül játszottak, épp Artúr és Béla öszpontszámának a fele, azaz $(18 + 22)/2 = 20$.

25. Feladat Az e-shop vásárlók kifejezhetik elégedettségüket egy termékről online egy ötpontos skálán (1 csillag=gyenge, 5 csillag=kiváló). Egy nemrég bevezetett okostelefon átlagos értékelése $3,46$ volt múlt héten. De azóta még két ember értékelte, így az átlag mostanra $3,5$-re javult. Hány ember értékelte a telefont eddig összesen?

Eredmény. 52

Megoldás. Jelölje k a korábbi értékelők számát és x a korábbi pontok összegét. Legyen a és b az ezen a héten leadott két értékelés. Ekkor

$$\frac{x}{k} = 3.46 \qquad \text{and} \qquad \frac{x+a+b}{k+2} = 3.5$$

tehát

$$x = \left(3 + \tfrac{23}{50}\right) k, \tag{1}$$
$$x + a + b = \left(3 + \tfrac{1}{2}\right) k + 7. \tag{2}$$

Az (1) egyenlet alapján k az 50 többszöröse, továbbá ha kivonjuk az első egyenletet a másodikból, azt kapjuk hogy

$$a + b - 7 = \frac{k}{25}.$$

Mivel $a, b \leq 5$, a bal oldal egy pozitív egész ami legfeljebb 3, ezért $k \leq 75$. Kapjuk, hogy $k = 50$ és hozzáadva a két új értékelést, összesen 52 ember értékelte a telefont eddig.

26. Feladat Juliskának van 4 pár zoknija, amelyekre rendre a hétfő, kedd, szerda és csütörtök napok vannak ráírva. Hányféleképp veheti fel ezeket a zoknikat hétfőtől csütörtökig úgy, hogy a két lábán különböző feliratú zokni legyen, és ezen feliratok egyike se egyezzen meg az aktuális nap nevével. Egy zoknit csak egyszer vehet fel a héten.

Megjegyzés: Nincsenek külön jobbos és balos zoknik, vagyis az egy párba tartozó két zoknit nem különböztetjük meg, és mindegyik zoknit egyaránt hordhatja a bal- és a jobb lábán is. Továbbá nem számít különböző esetnek, hogy az aznapra kiválasztott két zoknit melyik lábára húzza.

Eredmény. 9

Megoldás. Az egyszerűség kedvéért a napok helyett jelöljük a zoknikat az 1, 2, 3, 4 számokkal. Figyeljük meg, hogy minden naphoz 3 számot rendelhetünk: az adott nap sorszámát, valamint az adott napon viselt két zokni sorszámát. Ezzel ekvivalens módon az adott naphoz hozzárendelhetjük azt a számot az 1, 2, 3, 4 számok közül, ami az iménti számhármasból kimaradt. Így a keresett szám az $(1, 2, 3, 4)$ azon permutációinak száma, ami egyik számot sem hagyja a helyén.

Ezt pedig a következőképp számolhatjuk ki: az 1-es szám 3 helyre kerülhet; ha n jelöli azt a sorszámot, ahová került, n a fennmaradó 3 hely bármelyikére kerülhet; a maradék két szám helye pedig egyértelmű. Ez tehát azt jelenti, hogy Juliska $3 \cdot 3 = 9$ féleképp hordhatja a zokniját.

27. Feladat Egy 26 matematikusból álló zsűri legalább 5 filmet jelölt egy matematikai témájú filmfesztiválra. Ezeket 16 film közül választották ki. A kiválasztás a következőképp zajlott: mindegyik zsűritag szavazott az általa legjobban kedvelt 5 filmre, és az 5 legtöbb szavazatot kapott film kapott jelölést. Amennyiben holtverseny alakult ki az 5. helyen, a holtversenyben álló filmek mindegyike kiválasztásra kerül. Legkevesebb hány szavazatra van szükség ahhoz, hogy egy film biztosan kiválasztásra kerüljön, függetlenül a többi szavazat megoszlásától?

Eredmény. 21

Megoldás. Összesen $26 \cdot 5 = 130$ szavazatot osztott szét a zsűri a filmek között. Egyfelől ha egy film legfeljebb 20 szavazatot kapott, a maradék 110 szavazatot könnyedén el tudjuk úgy osztani, hogy legyen 5 másik film, melyek egyenként legalább 21 szavazatot kaptak. Másrészt viszont ha egy film legalább 21 szavazatot kapott, akkor az csak úgy nem kerülhet a jelöltek közé, ha van 5 film, amire legalább 22 szavazat érkezett. Ez azonban összesen legalább $21 + 5 \cdot 22 = 131$ voksot jelent, ez pedig lehetetlen.

28. Feladat Az f valós függvény kielégíti az $f(x) + x \cdot f(1 - x) = x$ egyenletet minden x valós számra. Adjátok meg $f(-2)$ értékét.

Eredmény. $\frac{4}{7}$

Megoldás. A függvényegyenletbe x helyébe -2-t helyettesítve $f(-2) - 2f(3) = -2$ egyenlet adódik, amiből látható, hogy elegendő $f(3)$ értékének kiszámítása. Ha x helyébe 3-at helyettesítünk, az $f(3) + 3f(-2) = 3$ egyenlet adódik, így egy két ismeretlenes egyenletrendszert kapunk $f(-2)$-re és $f(3)$-ra. Kettővel megszorozva a második egyenletet, majd a két egyenletet összeadva $f(-2) = \frac{4}{7}$ adódik.

29. Feladat Az n, a, b, o, j kétjegyű számok, melyek $naboj$ szorzata osztható 4420-szal. Határozzátok meg az $n+a+b+o+j$ összeg lehetséges legnagyobb értékét.

Eredmény. 471

Megoldás. Először is számítsuk ki 4420 prímtényezezős felbontását: $4420 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$. Így az n, a, b, o, j egyike osztható 13-mal, míg valamelyik másik 17-tel (mivel kétjegyűek a számok, mindkettővel nem lehet osztható egyik sem, hiszen legkisebb közös többszörösük $13 \cdot 17 = 221$). Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy n osztható 17-tel, a pedig 13-mal. Ez tehát azt jelenti, hogy $n \leq 85 = 5 \cdot 17$ és $a \leq 91 = 7 \cdot 13$.

Tegyük fel, hogy $n = 85$ és $a = 91$. Mivel 85 osztható 5-tel, már csak a szorzat 4-gyel való oszthatóságát kell garantálnunk. Mivel n és a páratlanok, így 4-nek osztania kell a boj szorzatot. Tehát a b, o, j valamelyike osztható 4-gyel, vagy legalább 2 közülük páros. A legnagyobb összeget akkor kapjuk, ha $b = o = 98$ és $j = 99$, ekkor pedig $n+a+b+o+j = 85+91+98+98+99 = 471$.

Végül nézzük meg, mi a helyzet ha $n < 85$ vagy $a < 91$. Mivel n osztható 17-tel, a pedig 13-mal, ekkor $n \leq 68 = 85-17$ vagy $a \leq 78 = 91-13$. Ekkor az összeg nem lehet több $68+91+3\cdot 99 = 456$ és $85+78+3\cdot 99 = 460$ maximumánál, ami viszont kevesebb az előző esetben meghatározott maximális összegnél.

30. Feladat Noémi nyolc teniszlabdát és egy kézilabdát rendelt egy sportszereket értékesítő webáruházból. A tökéletes gömb alakú labdákat egy kocka alakú dobozba pakolták úgy, hogy mindegyik teniszlabda a doboz 3 lapját érintette, továbbá a kézilabdát is. A kézilabda sugara 10 cm, míg a teniszlabdáké 5 cm. Hány cm hosszúa a doboz egy éle?

Eredmény. $10(1+\sqrt{3})$

Megoldás. A kocka egy testátlója átmegy a kézilabda középpontján, két teniszlabda középpontján, valamint ezeknek a teniszlabdáknak a kézilabdával vett érintési pontjain is. A testátló csak a kocka csúcsai és a teniszlabdák közti szakaszon halad labdán kívül. Megfigyelhetjük, hogy a testátló labdákon kívül haladó szakaszainak hossza ugyanannyi, mint az egyik teniszlabda köré írt kocka egy testátlójának labdán kívül eső részének hossza. Így tehát a kocka testátlója a következő hosszúságok összege:

- 2-szer egy, a teniszlabda köré írt kocka testátlójának fele,
- 2-szer a teniszlabda sugara,
- a kézilabda átmérője.

Így a testátló hossza

$$10\sqrt{3} + 10 + 20 = 30 + 10\sqrt{3},$$

amiből a kocka élének hosszúsága

$$\frac{30+10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10(1+\sqrt{3}).$$

31. Feladat Tízes számrendszerve átírva a 2^{29} számot, egy kilencjegyű, páronként különböző jegyű számot kapunk. Melyik számjegy nem fordul elő a felírásban?

Eredmény. 4

Megoldás. Egyrészt 2^{29} kiszámítható viszonylag egyszerűen, például $2^{10} = 1024$, ezt köbre emelve, majd az eredményt 2-vel osztva adódik, hogy $2^{29} = 536\,870\,912$.

Másrészt használhatjuk azt a közismert állítást is, miszerint egy egész szám, valamint az adott szám számjegyeinek összege 9-cel osztva ugyanannyit ad maradékul. Ezen felül a 2-hatványok 9-es maradékosztályai 6-os periódusokban ismétlődnek, így mivel a lehetséges számjegyek összege 45,

$$45 - x \equiv 2^{29} \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod 9$$

adódik, ahol x a kimaradó számjegyet jelöli. Ebből $x \equiv 4 \bmod 9$ adódik, így a hiányzó számjegy a 4.

32. Feladat Nagytakarítás közben Peti talált egy régi számológépet, ami minden számítás eredményét a tizedesvessző utáni első két tizedesjegyig jelenít meg, viszont tud négyzetgyököt számolni. Így például $\sqrt{4}$ beütése után a számológép 2.00-t írt ki, míg $\sqrt{6} = 2.44949\ldots$ esetén 2.44-et. Mi a legkisebb pozitív egész, amely nem négyzetszám, de a négyzetgyökét a számológéppel kiszámítva, az a tizedesjegy után két nullát ír ki?

Eredmény. 2501

Megoldás. Jelölje $\mathrm{ftd}(n)$ a $\sqrt{n}$ tizedestört alakjában a tizedesvessző utáni első két számjegy alkotta számot. Világos, hogy ha n két szomszédos négyzetszám között növekszik, $\mathrm{ftd}(n)$ is nő; így tehát a legkisebb megfelelő n szám k^2+1 kell, hogy legyen, valamilyen alkalmas k pozitív egészre.

$\sqrt{k^2+1}$ alsó egészrésze k, hiszen $\sqrt{k^2+1}-k$ szigorúan 0 és 1 közé esik. Így $\mathrm{ftd}(k^2+1)=0$ ekvivalensen átfogalmazható a következőképp:

$$\sqrt{k^2+1}-k<\frac{1}{100}.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához k-t adva, majd négyzetre emelve (mindkét oldal pozitív) átrendezés után kapjuk:

$$k>50\left(1-\frac{1}{100^2}\right).$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalán egy 49 és 50 közötti szám áll; így mivel k egész, $k\geq 50$ adódik. Tehát $n=50^2+1=2501$ a keresett legkisebb szám.

33. Feladat Egy 2018×2018-as táblázat minden mezőjébe egy 1 és 9 közötti pozitív egészet írunk, úgy, hogy minden 3×3-as négyzetben a kis négyzetekbe írt számok összege osztható 9-cel. Hány különböző módon tudjuk kitölteni a táblázatot?

Eredmény. 9^{8068}

Megoldás. Töltsük ki az alsó két sort és a bal oldali két oszlopot tetszőlegesen. Ez már egyértelműen meghatározza az összes többi mezőt: az ábrán látható módon, átlónként haladva. Másrészt, ennek a 2 sornak és 2 oszlopnak bármilyen kitöltése befejezhető a szabályoknak megfelelően, tehát ez megadja az összes szabályos kitöltés számát.

9	8				
9	7				
5	2				
4	1				
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7				
5	2				
4	1	1			
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7				
5	2	5			
4	1	1	2		
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7	2			
5	2	5	1		
4	1	1	2	2	
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

34. Feladat Adjuk meg az összes olyan pozitív egész (n,m) számpárt, amelyek kielégítik a $4^n+260=m^2$ egyenletet.

Eredmény. $(3,18)$, $(6,66)$

Megoldás. A megadott egyenlet $m^2-(2^n)^2=260$ alakban írható, majd a bal oldalt szorzattá bontva $(m-2^n)(m+2^n)=260$ -t kapunk. Mivel $260=2^2\cdot 5\cdot 13$, így a következő lehetőségek jöhetnek szóba:

$$260=1\cdot 260=2\cdot 130=4\cdot 65=5\cdot 52=10\cdot 26=13\cdot 20,$$

figyelembe véve, hogy $(m-2^n)<(m+2^n)$. Mivel $(m+2^n)-(m-2^n)=2^{n+1}$, így a két lehetséges megoldás $26-10=2^4$ és $130-2=2^7$, amelyekből kapjuk a $(3,18)$ és $(6,66)$ számpárokat, és ezek valóban kielégítik az egyenletet.

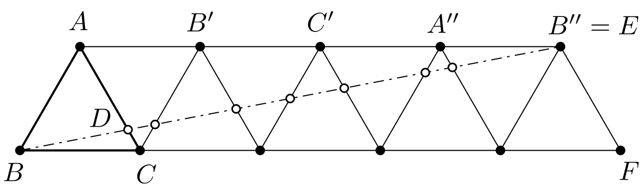
35. Feladat Az ABC szabályos háromszögben a B csúcsból induló fénysugár az AC oldalt a D pontban éri el, amelyre teljesül, hogy $DC:AC=1:2018$, és úgy verődik vissza, hogy a beesés szöge megegyezik a visszaverődés szögével. Ezt követően pedig minden alkalommal visszaverődik, ha egy oldalhoz érkezik. Hányszor verődik vissza a fénysugár a háromszög oldalairól (az első visszaverődést is beleértve), amíg újra eléri az $ABC\triangle$ egyik csúcsát?

Eredmény. 4033

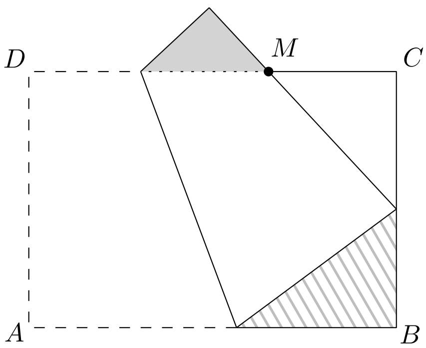
Megoldás. A fény törése helyett tekintsük a fénysugarat egyenesnek és a háromszöget tükrözzük minden alkalommal arra az oldalára, amelyen a fénysugár áthalad. Megmutatjuk, hogy egy sor ilyen tükrözött háromszög elég ahhoz, hogy a fénysugár elérje a háromszög egyik csúcsát.

Legyen E a BD fénysugár és az A-n áthaladó BC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja, F pedig a BC egyenes egy pontja úgy, hogy $EF\parallel AC$. Ekkor BCD és BFE háromszögek hasonlóak és $BF=2018BC$. Ebből következik, hogy az E pont megkapható a háromszög tükrözéseivel, és világos, hogy ez az első ilyen pont BD-n.

Könnyen belátható, hogy a BE szakasz $2\cdot 2017-1=4033$-szor metszi el a tükrözött háromszögek oldalait, ami pont a fénysugár megtöréseinek számát adja. Az ábra a $DC:AC=1:5$ feltétel mellett mutatja a feladat megoldását.

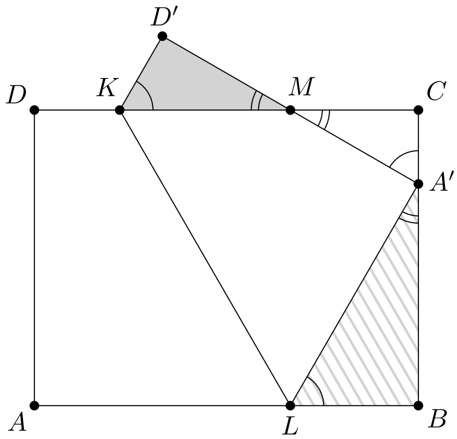


36. Feladat A téglalap alakú $ABCD$ papírlapot úgy hajtottuk be, hogy a lap A csúcsa a BC élre került, az CD oldal pedig a hajtás után a régi DA oldalt az M pontban metszette, ami pont a régi CD él C-hez közelebbi harmadolópontja, azaz $CD = 3CM$. Ha a szürke lelógó háromszög területe 1, akkor mekkora a csíkozott háromszög területe?



Eredmény. 9/4

Megoldás. Vegyük fel a metszéspontokat az ábra szerint.



Egyszerű szögszámolással igazolható, hogy KMD', $A'MC$ és $LA'B$ háromszögek hasonlóak, úgyhogy keressük a két színezett háromszög hasonlósági keressük. Mivel $KD = KD'$ és $LA = LA'$, így

$$D'K + KM = DM = \frac{2}{3}DC = \frac{2}{3}AB$$

és

$$A'L + LB = AB.$$

Mivel $A'L$ KM-nek felel meg a hasonlóságban, LB pedig KD'-nek, így kapjuk, hogy a keresett arány 3/2. Mivel a kérdés a háromszögek területére vonatkozott, a válasz $(3/2)^2 = 9/4$.

37. Feladat Ha az $x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018}$ polinomot az $x^2 - 1$ polinommal elosztjuk, az osztásnak lesz egy maradéka. Adjunk meg egy olyan x-et, amelyre ennek a maradéknak az értéke 1111.

Eredmény. 185

Megoldás. A polinomot az alábbi módon írhatjuk át:

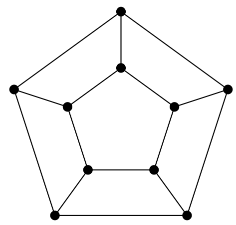
$$\begin{aligned}&x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018} =\\ &\qquad = x(x^2-1) + x(x^4-1) + x(x^6-1) + x(x^8-1) + x(x^{10}-1) + x(x^{2016}-1) + (x^{2018}-1) + 6x + 1\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy:

$$x^{2k} - 1 = (x^2-1)(x^{2k-2} + x^{2k-4} + \cdots + 1)$$

Ennek az egyenletnek a bal oldala tehát osztható $x^2 - 1$-gyel. Mivel $6x + 1$ fokszáma kisebb, mint $x^2 - 1$ fokszáma, láthatjuk, hogy $6x + 1$ a keresett maradék. Megoldva az $1111 = 6x + 1$ egyenletet $x = 185$ adódik.

38. Feladat Pentagóniában tíz város található, mindegyiket három vasútvonal köti össze három másik várossal, az ábrának megfelelően. A trösztellenes törvények megkövetelik, hogy semelyik két vasútvonalat, amelyiknek van egy közös megállóhelye, ne ugyanaz a vasúttársaság irányítsa. Hányféleképpen lehet a vasútvonalakat törvényesen elosztani három vasúttársaság között?

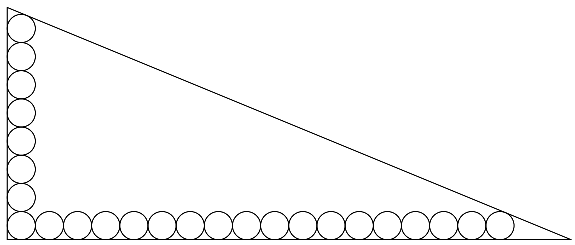


Eredmény. 30

Megoldás. Vegyük észre, hogy a "külső ötszögben" két vasúttársaság (legyenek X és Y) kettő vasútvonalat kell, hogy kapjon, míg a harmadik, Z egyet. Valamelyik városból kiindulva ezek $XYXYZ$ sorrendben kell, hogy kövessék egymást. Könnyen belátható, hogy ha ezeket a vasútvonalakat már hozzárendeltük a vasúttársaságokhoz, a hálózat további része pontosan egyféleképpen fejezhető be. A "belső ötszög" vasútvonalai a külső ötszögön megfelelőkkel azonos társaságokhoz kerülnek, míg az "összekötő" vasútvonalak az egyetlen ott nem használt társasághoz.

Ez azt jelenti, hogy a szabályos hozzárendelések száma a külső ötszögön megvalósítható szabályos hozzárendelések számával egyezik meg. Ezt számoljuk ki. Összesen hatféleképpen választhatjuk ki a három vasúttársaság közül a formátumban szereplő X-et, Y-t és Z-t, és a kör ötféle különböző városban kezdődhet. Ez összesen $6 \cdot 5 = 30$ lehetőség.

39. Feladat Egy derékszögű háromszög az ábrán látható módon tartalmaz 25 érintő egységsugarú kört.



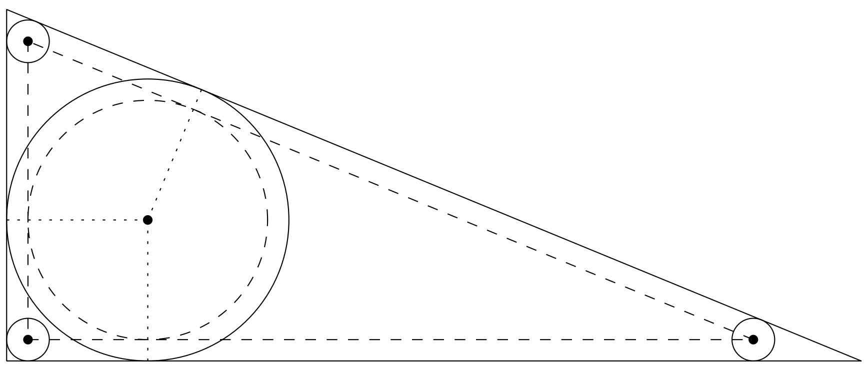
Mekkora a háromszög beírt körének a sugara?

Eredmény. $25 - 13\sqrt{2} = \frac{7 \cdot 34}{24+13\sqrt{2}} + 1$

Megoldás. Vegyük azt a háromszöget, amelynek csúcsai a három sarokban lévő kör középpontjaiba esnek. Ez egy derékszögű háromszög, amelynek befogói 14 és 34 hosszúak, így a Pitagorasz-tétel alapján az átfogó:

$$\sqrt{14^2 + 34^2} = 26\sqrt{2}$$

Továbbá, a beírt kör sugara is kiszámítható: $(14 + 34 - 26\sqrt{2})/2 = 24 - 13\sqrt{2}$. Mivel az eredeti háromszög oldalai párhuzamosak a szóban forgó háromszögével, és 1 egység a távolság közöttük, a beírt köreik középpontja azonos, és a sugaraik különbsége 1. A nagyobbik háromszög beírt körének sugara ezért $25 - 13\sqrt{2}$.



40. Feladat Márk felfedezte a *markolás* műveletét, egész számok egy (véges) listájára. Egy adott lista esetén veszi annak négy másolatát, megnöveli a tagjaikat rendre 0-val, 2-vel, 3-mal és 5-tel, és összeolvassa azt. Például a $(8,3)$ lista esetén a markolás eredmény $(8,3,10,5,11,6,13,8)$. Ha Márk az egyelemű (0) halmazból indul ki, és addig markol, amíg legalább 2018 tagja nem lesz a listának, akkor mi lesz a 2018-adik tag? (A lista legbaloldalibb tagja az első.)

Eredmény. 17

Megoldás. Az egyszerűség kedvéért kezdjük a sorszámozást 0-tól. Vegyük észre, hogy ilyen ,,kódolás” esetén a sorszám 4-es számrendszerbeli alakjában a számjegyek rendre leírják, hogy milyen műveletek során jutottunk el az adott sorszám alatt található listaelemig. Például, két markolás után így néz ki a lista:

$$(\underset{00}{0+0}, \underset{01}{0+2}, \underset{02}{0+3}, \underset{03}{0+5}, \underset{10}{2+0}, \underset{11}{2+2}, \underset{12}{2+3}, \underset{13}{2+5}, \underset{20}{3+0}, \underset{21}{3+2}, \underset{22}{3+3}, \underset{23}{3+5}, \underset{30}{5+0}, \underset{31}{5+2}, \underset{32}{5+3}, \underset{33}{5+5})$$

(A számok a tagok alatt a pozícióik négyes számrendszerbeli alakját mutatják.) Mivel a 2017 felírva 4-es számrendszerben 133201, a 2017-es sorszám alatti tag:

$$2+5+5+3+0+2=17$$

41. Feladat Határozzuk meg a legkisebb olyan n pozitív egész számot, amelyre az

$$(x^2+y^2)^2+2nx(x^2+y^2)=n^2y^2$$

egyenletnek van (x,y) pozitív egészekből álló megoldása.

Eredmény. 25

Megoldás. Az egyenletre tekinthetünk úgy is, hogy n-re másodfokú, és ekkor a gyöke:

$$n=\frac{(x^2+y^2)\big(x+\sqrt{x^2+y^2}\big)}{y^2}$$

(A másik gyöke negatív n-et eredményezne, mivel $\sqrt{x^2+y^2}>x$.) Szorozva y^2-tel:

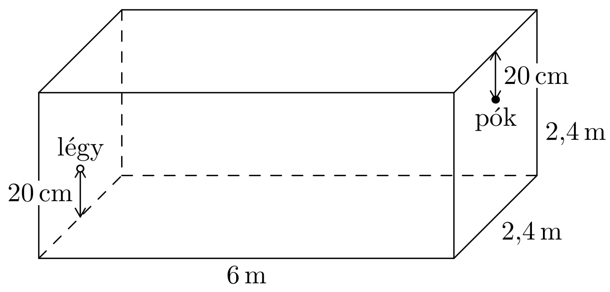
$$ny^2=(x^2+y^2)\big(x+\sqrt{x^2+y^2}\big)$$

Legyen $d=\mathrm{GCD}(x,y)$ (legnagyobb közös osztó), és legyenek $x=x_0d$, $y=y_0d$, ezeket behelyettesítve, majd egyszerűsítve:

$$ny_0^2=d(x_0^2+y_0^2)\big(x_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\big)$$

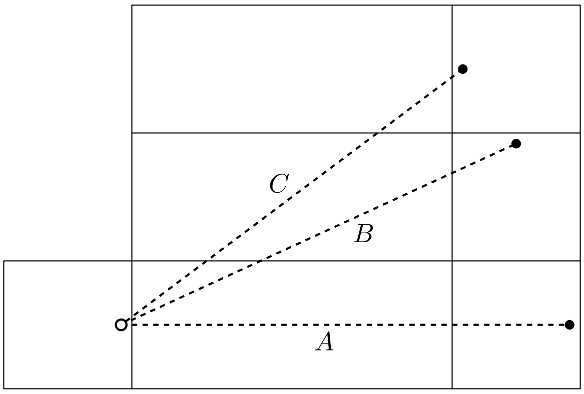
Mivel x_0 és y_0 relatív prímek, y_0^2 és $x_0^2+y_0^2$ is szükségképpen azok, így $x_0^2+y_0^2\mid n$ következik. Ugyanakkor $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ jelenléte miatt a gyök alatt négyzetszám kell, hogy legyen. Ismeretes, hogy $5^2=25$ a legkisebb négyzetszám, amely két másik (pozitív) négyzetszám összege, 3^2+4^2. Mivel $n\geq 25$ és $x=4$, $y=3$ megoldása az egyenletnek $n=25$ esetén, ez a feladat kérdésére a válasz.

42. Feladat Egy $6\,\mathrm{m}\times 2,4\,\mathrm{m}\times 2,4\,\mathrm{m}$ (hosszúság × szélesség × magasság) méretű téglatest alakú szobában egy pók van a $2,4\,\mathrm{m}\times 2,4\,\mathrm{m}$ méretű falon, 20 cm távolságban a plafontól, a fal függőleges éleitől egyenlő távolságra. Egy légy a szemközti falon van éppen, szintén a fal függőleges szimmetriatengelyén, de a padlótól 20 cm távolságban. Ha a légy nem mozdul, a póknak méterben mérve legalább mennyit kell másznia a szoba belső felületein, hogy elkapja a legyet?



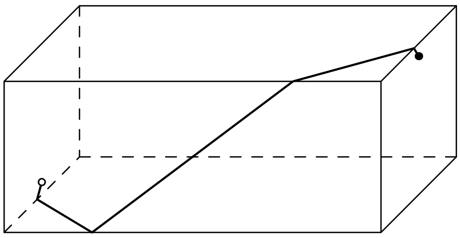
Eredmény. 8

Megoldás. Vizsgáljuk meg a pók különböző lehetséges útvonalait a téglatest testhálóján. Világos, hogy a legrövidebb út egyenes, ha a testhálót síkba kiterítjük. A fehér kör mutatja a légy helyzetét, a fekete kör pedig a pók lehetséges helyzeteit, annak a függvényében, hogyan terítjük ki a testhálót.



Összesen három (a szimmetriától eltekintve) különböző lehetséges útvonala van a póknak, amelyek során rendre egy, kettő, vagy három nagyobb lapot érint. Ezek az útvonalak az A, B és C betűkkel vannak jelölve az ábrán. Nyilvánvalóan egy négy lapot is felhasználó útvonalat le lehetne rövidíteni. Az A út hossza $8,4\,\text{m}$ és a Pitagorasz-tétel alapján B hossza méterben $\sqrt{66,32}$, C hossza pedig 8. Tehát C a legrövidebb út vonal, a válasz $8\,\text{m}$.

Az alábbi ábra demonstrálja a legrövidebb útvonalat térben:



43. Feladat Határozzuk meg a

$$(6+2\cos(x)-\cos(y))^2+(8+2\sin(x)-\sin(y))^2$$

kifejezés legkisebb lehetséges értékét, ha $x, y \in \mathbb{R}$.

Eredmény. 49

Megoldás. Legyen $V(x,y)=(6+2\cos(x)-\cos(y))^2+(8+2\sin(x)-\sin(y))^2$. Felhasználjuk, hogy a $k(S,R)$ kör, amelynek középpontja $S=[S_1,S_2]$ és sugara $R>0$ paraméterezhető (azaz minden pontjának koordinátái kifejezhetőek) egy α szöggel az $(x_1,x_2)=(S_1+R\cos(\alpha), S_2+R\sin(\alpha))$ képlet szerint. Tekintsük a $P=[0,0]$, és $Q[6,8]$ pontokat és a $k_1(P,1)$ és $k_2(Q,2)$ köröket. A Pitagorasz-tétel alapján $V(x,y)=|AB|^2$, ahol $A\in k_1$ az x szöggel, és $B\in k_2$ az y szöggel kifejezve. Ebből az következik, hogy $V(x,y)$ minimuma a k_1 és k_2 legközelebbi pontjainak távolságának a négyzete, amelyet a középpontok távolságából, valamint k_1 és k_2 sugarából egyszerűen kiszámolhatunk: $\sqrt{6^2+8^2}-1-2=7$, ezért $V(x,y)$ lehetséges legkisebb értéke $7^2=49$.

44. Feladat Melyik a legkisebb pozitív egész szám, amelynek az utolsó (vagyis az egyesek helyiértékén álló) számjegye 2, és hogy ha az utolsó számjegyet a legelső elé mozgatjuk, az eredmény az eredeti szám kétszerese lesz?

Eredmény. 105 263 157 894 736 842

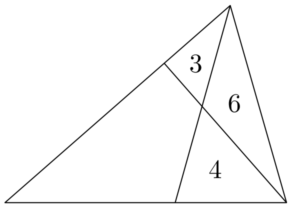
Megoldás. Legyen N a kérdéses szám. Ha töröljük az utolsó számjegyét, akkor az első számjegye nélküli $2N$ az eredmény. Ezért, mivel N 2-re végződik, $2N$ 4-re fog, azaz N tízes helyiértékén 4-es áll. Legyen d_i az N szám i-edik számjegye, balról számozva (vagyis d_1 az egyesek helyén van). A számjegyenkénti szorzás ismert módszere alapján N számjegyeire az alábbiaknak kell teljesülnie minden $i>2$ esetén:

$$d_i=\begin{cases}2d_{i-1} \bmod 10 & \text{ha } d_{i-2}<5,\\ 2d_{i-1} \bmod 10+1 & \text{ha } d_{i-2}\geq 5\end{cases}$$

Ily módon n számjegyeit rekurzívan meghatározhatjuk. Akkor állunk meg, amikor először elérjük az 1-es számjegyet és a következő lépésben így a 2 következik. Ekkor az 1-gyel kezdődő szám az N lesz, és az utolsó 2-est az elejére rakva éppen a $2N$-et kapjuk meg. A végerdmény

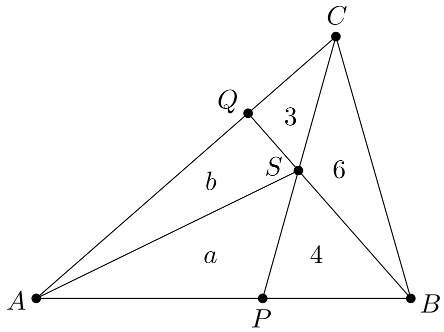
$$N=105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

45. Feladat Berta anyó felosztja a háromszög alakú földjét két egyenes vonallal négy darabra, és a 6 egységnyi területű darabot legidősebb lánya, Betty kapja meg, a 4 egységnyi területűt középső lánya, Barbara kapja meg, míg a legkisebb, 3 egységnyi területű darabot a legkisebb lány, Franciska kapja meg. A legnagyobb darabot megtartja magának. Mekkora területű ez a darab?



Eredmény. 19/2

Megoldás. Az alábbi ábrán szereplő jelöléseket használjuk.



A terület arányok alapján S a QB szakaszt $1:2$ arámyban, a PC szakaszt $2:3$ arányban osztja. Behúzva az AS szakaszt, az ASQ háromszög területe legyen b, az APS háromszög területe pedig a. Ez a következő két egyenlethez vezet:

$$\frac{b}{a+4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{b+3}{a} = \frac{3}{2}$$

Ezek az alábbival ekvivalensek:

$$2b = a + 4$$
$$2b + 6 = 3a,$$

Megoldva az egyenletrendszert, az eredmény $a = 5$ és $b = \frac{9}{2}$, tehát az $APSQ$ négyszög területe $\frac{19}{2}$.

46. Feladat Négy testvérnek együtt 2018 eurója van. Mindegyikük vagyona pozitív egész számú euró, semelyik kettejüknek nem ugyanannyi, és ha bármelyik testvér gazdagabb a másiknál, akkor a gazdagabb testvér vagyona egész számú többszöröse a szegényebb testvér vagyonának. Legkevesebb hány eurója lehet a leggazdagabb testvérnek?

Eredmény. 1152

Megoldás. Mivel minden testvér vagyona többszöröse a legszegényebbnek, az összegük, 2018 is osztható ennyivel. Viszont 2018 prímtényezős felbontása, $2018 = 2 \cdot 1009$ alapján csak háromféle lehet a legszegényebb testvér vagyona: 1, 2, és 1009. Nyilván 1009 nem lehet, mert ekkor a legszegényebb testvér vagyona annyi lenne, mint a másik három vagyon összesen. Továbbá, ha 1 lenne, akkor a többieknek együtt 2017 eurójuk lenne, amely prímszám, de akkor a második legszegényebb testvérnek is kizárólag 1 eurója lehetne, ez ellentmondás. Vagyis, a legszegényebb testvér vagyona 2 euró, a többieknek együtt 2016 eurója van.

Legyen $a < b < c$ a három gazdagabbik testvér vagyona. Ezek alapján $a \mid b \mid c$ és $a + b + c = 2016$. A szigorú egyenlőtlenségek és az oszthatóság miatt $2a \leq b$ és $2b \leq c$. Ha itt egyenlőség lenne, az nyilván a legkisebb lehetséges megoldást adná c értékére. Szerencsére $1 + 2 + 4 = 7$, ami osztója 2016-nak, vagyis feloszthatjuk ezt az összeget az alábbi módon:

$$2016 = \tfrac{1}{7} \cdot 2016 + \tfrac{2}{7} \cdot 2016 + \tfrac{4}{7} \cdot 2016$$

A válasz a kérdésre $\frac{4}{7} \cdot 2016 = 1152$.

47. Feladat András felrajzolta a ♣ jelet a táblára, majd tizenháromszor megismételte az alábbi eljárást: Törölte a táblát, és felrajzolt egy új jelsorozatot, amelyben a ♣♡ pár jelenik meg minden, az eredeti sorozatban szereplő ♡ helyett és a ♡♣ pár jelenik meg minden, az eredeti sorozatban szereplő ♣ helyett. Például, a ♣♡♡ sorozat helyett András a ♡♣♣♡♣♡ sorozatot írta volna fel. Hány ♡♡ pár volt fent a táblán (köztes egyéb jelek nélkül), amikor András végzett? A párok átfedhetik egymást, tehát például a ♡♡♡♡ sorozatban három darab ♡♡ pár található.

Eredmény. 1365

Megoldás. Legyen A_n a sorozat a táblán, amelyet András n darab újraírás után lát (vagyis $A_0 = (♣)$) és h_n az A_n-ben lévő ♡♡ párok száma. Minden ♡♡ pár A_n-ben az A_{n-1}-beli ♡♣ párokból kell, hogy álljon, amely pedig az A_{n-2}-beli ♡♡ vagy ♣ sorozatokból következik. Ez alapján $h_n = h_{n-2} + 2^{n-3}$ minden $n \geq 3$ esetén, mivel pontosan 2^{n-3} darab ♣ szerepel A_{n-2}-ben. Ezírt páratlan n esetén, $h_1 = 0$ miatt:

$$h_n = 2^{n-3} + 2^{n-5} + \cdots + 2^0 + h_1 = \tfrac{1}{3}(2^{n-1} - 1),$$

A keresett eredmény $h_{13} = 1365$.

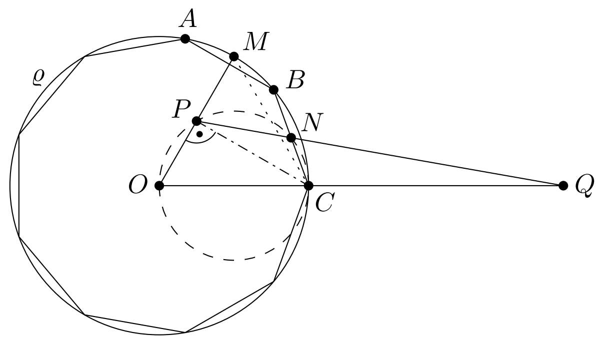
48. Feladat Legyen $ABCDEFGHI$ egy szabályos kilencszög, melynek köréírt köre ϱ, középpontja O. Legyen M az AB (rövidebb) ív felezőpontja, P az MO szakasz középpontja, N pedig a BC szakasz középpontja. Legyen az OC és PN egyenesek metszéspontja Q. Hány fokos az $NQC\sphericalangle$ szög?

Eredmény. 10°

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az $OCNP$ négyszög egy húrnégyszög. Mivel $ONC\sphericalangle = 90°$, ez azzal ekvivalens, hogy $OPC\sphericalangle = 90°$. Ezt pedig az alábi módon lehet belátni: mivel mind C és M a ϱ köréírt körön vannak, $OC = OM$, könnyen kiszámolható, hogy $MOC\sphericalangle = 60°$, tehát az $OCM\triangle$ szabályos, amelynek OM oldalát P felezi, tehát $OPC\sphericalangle = 90°$.

Szintén egyszerű számolással belátható, hogy $OCN\sphericalangle = 70°$, amiből $OPN\sphericalangle = 180° - OCN\sphericalangle = 110°$ következik. Az OQP háromszögben

$$NQC\sphericalangle = PQO\sphericalangle = 180° - POQ\sphericalangle - QPO\sphericalangle = 10°.$$



49. Feladat Anna választott egy (x, y, z) pozitív egészekből álló számhármast, amelyre $x + y + z = 2018$, majd elárulta x-et Xénának, y-t Yénának, z-t Zénának. Nem tudták egymás számait, de tudták az összeget. Az alábbi beszélgetés zajlott le közöttük:

- Xéna: Tudom, hogy Yéna és Zéna különböző számokat hallott.
- Yéna: Eddig nem tudtam, de hála Xénának, most már tudom, hogy mindhárman különböző számokat hallottunk.
- Zena: Eddig nem tudtam, de hála Yénának, most már tudom, hogy ki milyen számot hallott.

Adjuk meg az (x, y, z) számhármast.

Eredmény. $(3, 2, 2013)$

Megoldás. Xéna állítása azt jelenti, hogy x páratlan. Ha páros lenne, y és z lehetne egyenlő.

Tegyük fel most, hogy y páratlan. Ez azt jelenti, hogy Yéna tudta a kezdetektől, hogy x és z különböző. Továbbá, ha $y \geq 1009$, akkor már az elején tudta, hogy x és z különbözik y-tól, tehát nem lett volna szüksége Xéna állítására. Másrészről, ha $y \leq 1007$, akkor Yéna még Xéna állítását figyelembe véve sem tudta volna eldönteni, hogy az ő y száma x-től különbözik-e. Tehát y páros, és z páratlan.

Ha y osztható 4-gyel, akkor $x + z = 2018 - y \equiv 2 \pmod 4$, vagyis egy páratlan szám kétszerese, így Yéna nem tudta volna megmondani, hogy x és z különböznek-e. Ha viszont $y \equiv 2 \pmod 4$, akkor x és z négyes maradéka eltérő kell, hogy legyen, így Yéna állítása helytálló.

Végül vizsgáljuk meg Zéna állítását. Először is, $y = 2$, különben y csökkenthető lenne 4-gyel, x növelhető lenne 4-gyel, és Zéna nem tudná megmondani a különbséget. Hasonló megfontolásból $x \leq 4$, vagyis $x = 1$ vagy $x = 3$. Az utóbbi esetben viszont Zéna tudta volna, hogy $2018 - z = x + y = 3$, és így tudta volna, hogy x és y mennyi, Yéna állítása nélkül is, csak Xéna állítása alapján. Ezért $x = 3$ és $z = 2013$.

50. Feladat Két mágus, Arithmetix és Combinatorica párbajt vívnak egymsásal. Mindkettejüknek 100 életerő pontja van (ÉP). Arithmetix varázslata 90% eséllyel megsebzi Combinatoricát, és ekkor 60 ÉP sebzést okoz (ha sikerül). Combinatorica varázslata 60% eséllyel talál, és 130 ÉP sebzést okoz. A mágusok felváltva használják a varázslataikat, Arithmetix kezd. A párbaj akkor ér véget, ha valamelyik mágus elveszti az összes életerő pontját, ekkor az ellenfele nyer. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy Arithmetix nyeri a párbajt.

Eredmény. 45/128

Megoldás. Az ÉP nem számít, csak az, hogy Arithmetixnek két, Combinatoricának egy sikeres varázslatra van szüksége a győzelemhez. Tegyük fel, hogy a párbaj olyan állapotában vagyunk, amikor mindkettejüknek egy-egy sikeres varázslat kellene a győzelemhez, és Arithmetix következik a varázslással. Legyen q Arithmetix győzelmi esélye. Ekkor Arithmetix nyerni tud, ha ő talál, ennek az esélye $0,9$, vagy ha mindketten elhibázzák, aminek az esélye $0.1 \cdot 0,4$, amely után ismét q esélye lesz Arithmetixnek a győzelemre. Ebből az alábbi egyenlet írható fel:

$$q = 0,9 + 0,1 \cdot 0,4 \cdot q$$

Ez alapján $q = 15/16$.

Most legyen p annak az esélye, hogy Arithmetix megnyeri (az eredeti) párbajt. Ha Arithmetix első varázslata talál és Combinatorica hibázik (amelynek esélye $0,9 \cdot 0,4$), akkor az előző bekezdésben vázolt szituáció lép fel, amelyben Arithmetix $q = 15/16$ eséllyel nyer. Ha viszont Arithmetix és utána Combinatorica is hibázik (aminek az esélye $0,1 \cdot 0,4$), akkor Arithmetix ismét p eséllyel néz a folytatás elébe. Ezúttal tehát az alábbi egyenletet írhatjuk fel:

$$p = 0,9 \cdot 0,4 \cdot \frac{15}{16} + 0,1 \cdot 0,4 \cdot p$$

Ezt megoldva azt kapjuk, hogy Arithmetix $p = 45/128$ valószínűséggel nyeri az eredeti felállást.

51. Feladat Legyen $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ pozitív egész számok egy szigorúan monoton növekvő sorozata, amelyre $a(a(n)) = 3n$ teljesül minden n pozitív egész szám esetén. Határozzuk meg $a(2018)$ értékét.

Megjegyzés: Egy sorozatot akkor nevezünk szigorúan monoton növekvőnek, ha $a(m) < a(n)$, valahányszor $m < n$.

Eredmény. 3867

Megoldás. Ha $a(1) = 1$, akkor $a(a(1)) = 1 \neq 3 \cdot 1$, ami ellentmondás. Mivel a sorozat növekvő, ezért $1 < a(1) < a(a(1)) = 3$, vagyis $a(1) = 2$. Az egyenletből azt is megkaphatjuk, hogy $a(3n) = a(a(a(n))) = 3a(n)$ minden n-re. Teljes indukcióval beláthatjuk, hogy $a(1) = 2$ miatt minden m-re $a(3^m) = 2 \cdot 3^m$. Ezt felhasználva $a(2 \cdot 3^m) = a(a(3^m)) = 3^{m+1}$. Összesen $3^n - 1$ olyan i egész szám van, amelyre $3^n < i < 2 \cdot 3^n$, és $3^n - 1$ olyan j egész szám, amelyre $a(3^n) = 2 \cdot 3^n < j < 3^{n+1} = a(2 \cdot 3^n)$. Mivel $a(n)$ szigorúan monoton növekvő, nincs más lehetőség, mint hogy $a(3^n + b) = 2 \cdot 3^n + b$ minden $1 \leq b \leq 3^n$ esetén. Ez alapján $a(2 \cdot 3^n + b) = a(a(3^n + b)) = 3^{n+1} + 3b$. Mivel $2018 = 2 \cdot 3^6 + 560$, azt kapjuk, hogy $a(2018) = 3^7 + 3 \cdot 560 = 3867$.

52. Feladat Egy szabályos T háromszöget, amelynek oldalhossza 2018, feldaraboltunk 2018^2 egységnyi oldalú szabályos háromszögre. A kis háromszögek csúcsainak egy M halmazát *függetlennek* nevezzük, ha bármelyik két különböző $A, B \in M$ esetén AB nem párhuzamos T egyik oldalával sem. Legfeljebb hány eleme lehet egy független halmaznak?

Eredmény. 1346

Megoldás. Minden csúcsnak a rácson megfeleltethetjük a T-től vett távolságát (az egységnyi háromszög magasságában mérve). Könnyen belátható, hogy minden csúcsra ezek egész számok, amelyek összege 2018. Másrészről, bármely nemnegatív egész számhármas, amelynek az összege 2018, egyértelműen megad egy csúcsot a rácson. Emiatt egyértelműen megfeleltethetjük a számhármasokat és a csúcsokat. A továbbiakban a számhármas elemeit *koordinátáknak* hívjuk.

A függetlenségi feltétel a feladatban azt jelenti, hogy semelyik két számhármas nem egyezik sem az első, sem a második, sem a harmadik koordinátájában. Legyen

$$M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)\}$$

egy független halmaz. Mivel $x_1, \ldots, x_k$ mind különböznek, az összegük legalább

$$0 + 1 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Ugyanez érvényes az $y_1 + \cdots + y_k$ és $z_1 + \cdots + z_k$ összegekre. Másrészről, $x_i + y_i + z_i = 2018$ minden $i = 1, \ldots, k$ esetén, ami miatt:

$$3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \leq (x_1 + \cdots + x_k) + (y_1 + \cdots + y_k) + (z_1 + \cdots + z_k) = 2018k$$

Ebből az következik, hogy

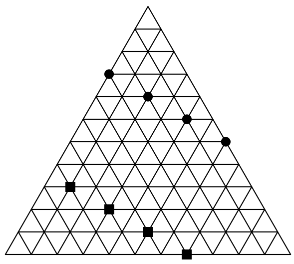
$$k \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot 2018$$

vagy másképpen $k \leq 1346$.

Az alábbi két sorozat együtt leír egy 1346 elemű független halmazt, tehát ez a méret lesz a megoldás.

$$(0, 672, 1346),\ (2, 671, 1345),\ (4, 670, 1344),\ \ldots,\ (1344, 0, 674);$$
$$(1, 1345, 672),\ (3, 1344, 671),\ (5, 1343, 670),\ \ldots,\ (1345, 673, 0).$$

Az alábbi ábrán egy 11 egységnyi oldalú háromszög esetén láthatjuk az optimális független halmaz konstrukcióját.



53. Feladat Adott egy ABC háromszög, amelyre $AB = 5$, $AC = 6$ és ω a köréírt köre. Legyenek F és G olyan pontok AC-n, amelyekre $AF = 1$, $FG = 3$ és $GC = 2$, valamint legyenek BF és BG metszéspontjai az ω-val rendre D és E. Tudjuk, hogy AC és DE párhuzamosak. Mekkora a BC szakasz hossza?

Eredmény. $5\sqrt{5/2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$

Megoldás. Legyen $x = BC$. Mivel $ACED$ húrtrapéz, legyen $y = AE = CD$. Továbbá legyen let $p = BF$, $q = DF$, $u = BG$ és $v = GE$.

A $BAC\sphericalangle$ és $BDC\sphericalangle$ kerületi szögek egyazon ívhez, ezért egyenlők. Emiatt az ABF and DCF háromszögek hasonlóak, ez alapján:

$$\frac{y}{5} = \frac{q}{1} = \frac{5}{p}$$

Ezen felül, hasonló meggondolással a BCG és AEG háromszögek is hasonlóak, ami miatt:

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{2} = \frac{4}{u}$$

Végül, mivel AC párhuzamos DE-vel:

$$\frac{p}{q} = \frac{u}{v}$$

Összerakva ezt az első két egyenlettel, az alábbi állítást kapjuk:

$$\frac{\frac{25}{y}}{\frac{y}{5}} = \frac{\frac{4x}{y}}{\frac{2y}{x}}$$

Ebből $x^2 = 125/2$ következik, vagyis $x = 5\sqrt{5/2}$.

54. Feladat Tudjuk, hogy

$$2^{22000} = \underbrace{4569878\ldots229376}_{\text{6623 számjegy}}.$$

Hány olyan $n < 22000$ pozitív egész szám van, amelyre 2^n első számjegye 4?

Eredmény. 2132

Megoldás. Ha egy k-jegyű N szám első számjegye c, akkor $c10^{k-1} \leq N < (c+1)10^{k-1}$. Ebből az következik, hogy $2c10^{k-1} \leq 2N < (2c+2)10^{k-1}$, vagyis $2N$ első számjegye legalább akkora, mint $2c$ első számjegye, de legfeljebb akkora, mint $2c + 1$ első számjegye. Ezt alkalmazzuk a kettőhatványok első számjegyeire. Ha egy kettőhatvány első számjegye 1, akkor öt lehetőség van a rákövetkező kettőhatványok első számjegyeire:

1. $1, 2, 4, 8, 1$
2. $1, 2, 4, 9, 1$
3. $1, 2, 5, 1$

4. $1, 3, 6, 1$

5. $1, 3, 7, 1$

Legyen k nemnegatív egész szám, amelyre 2^k első számjegye 1, és d számjegye van. Ekkor van egy egyértelmű kettőhatvány, amelyiknek 1 az első számjegye, de $d+1$ számjegye van, és ez a hatvány vagy 2^{k+3} (ha a fenti felsorolásban a 3., 4. vagy 5. eset áll fenn), vagy 2^{k+4} (ha az 1. vagy 2. eset áll fenn). Mivel 2^0 (1 jeggyel) és 2^{21998} (6623 jeggyel) mindketten az 1 számjeggyel kezdődnek, kiszámolhatjuk, hogy hányszor fordul elő az 1. és 2. eset együttesen, szemben a 3., 4. és 5. esettel. Az eredmény $21998 - 3 \cdot 6622 = 2132$.

Végül vegyük észre, hogy pontosan az 1. és 2. esetben szerepel a 4 számjeggyel kezdődő kettő hatvány is a sorozatban, pontosan egyszer, tehát összsen 2132 ilyen szám van.

55. Feladat Adjuk meg az a, b, c racionális számokat úgy, hogy az alábbi teljesüljön:

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Megjegyzés: Egy szám racionális, ha előáll két egész szám hányadosaként.

Eredmény. $(1/9, -2/9, 4/9)$

Megoldás. Legyen $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}$ és $y = \sqrt[3]{2}$. Vegyük észre, hogy $y^3 \pm 1$ egész számok, és alkalmazzuk a $A^3 \pm B^3$ nevezetes szorzattá alakításokat, hogy x és y viszonyára egyenleteket írhassunk fel, és kifejezzük x-et három racionális köbgyök összegeként. Először is

$$1 = y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$$

és mivel $3 = y^3 + 1$, azt kapjuk, hogy:

$$y^2 + y + 1 = \frac{3y^2 + 3y + 3}{3} = \frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 1}{3} = \frac{(y + 1)^3}{3}$$

Emiatt $x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{3}{(y+1)^3}$.

Ezután, mivel $3 = y^3 + 1 = (y + 1)(y^2 - y + 1)$, azt kapjuk, hogy $\frac{1}{y+1} = \frac{y^2-y+1}{3}$ és végül:

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y + 1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1)$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy az $(a, b, c) = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$ számhármas teljesíti a feltételeket.

Azt is be lehet bizonyítani, hogy x felírása három racionális köbgyök összegeként egyértelmű, csak a fenti megoldásnak a permutációi jók még.