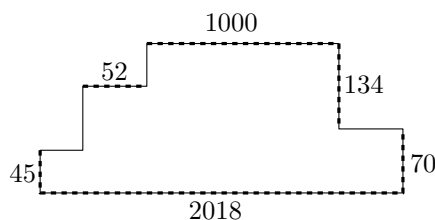


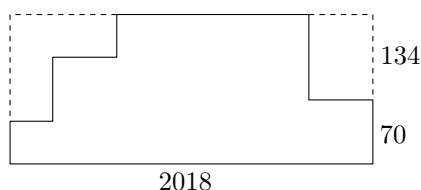
Zadanie 1. Na rysunku widnieje dziesięciokąt, w którym każde dwa sąsiednie boki przecinają się pod kątem prostym. Długości niektórych boków (na rysunku zaznaczonych jako przerywane) są znane i podane (w centymetrach).



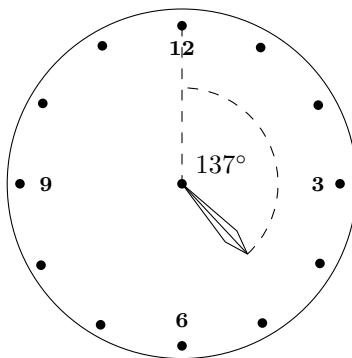
Ile wynosi obwód dziesięciokąta w centymetrach?

Wynik. 4444

Rozwiązanie. Podmieniając „wewnętrzne” rogi na „zewnętrzne”, możemy zamienić dziesięciokąt na prostokąt o wymiarach 2018 i $70 + 134 = 204$. Stąd obwód wynosi $2 \cdot (2018 + 204) = 4444$.



Zadanie 2. W zegarze brakuje minutowej wskazówki. Ile minut minęło od ostatniej pełnej godziny, jeżeli kąt pomiędzy wskazówką godzinową a godziną dwunastą jest równy 137° ?



Wynik. 34

Rozwiązanie. W ciągu godziny wskazówka godzinowa obraca się o $360^\circ : 12 = 30^\circ$, co daje 1° w ciągu 2 minut. Zatem wskazówka ta obróciła się o $137^\circ - 4 \cdot 30^\circ = 17^\circ$ po czwartej godzinie, czyli minęły $17 \cdot 2 = 34$ minuty.

Zadanie 3. Kamil, Łukasz, Mikołaj i Natalia pisali egzamin. Otrzymaliśmy informację, że wyniki przez nich uzyskane to, w pewnej kolejności, 2, 12, 86 i 6. Ponadto:

- wynik Kamila był *pampam* niż wynik Mikołaja,
- wynik Mikołaja był *pampam* niż wynik Łukasza,
- wynik Natalii był *pampam* niż wynik Łukasza,
- wynik Kamila był *pampam* niż wynik Natalii,

gdzie słowo *pampam* znaczy „mniejszy” lub „większy”, jednak nasz informator zapomniał powiedzieć, które z tłumaczeń jest prawdziwe (wiemy jednak, że wszystkie cztery tłumaczą się tak samo). Oblicz, ile punktów uzyskali łącznie Mikołaj i Natalia.

Wynik. 18

Rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że jeśli *pampam* znaczy „większy”, to Kamil uzyskał najwyższy wynik, a Łukasz najmniejszy. Podobnie, jeśli *pampam* znaczy „mniejszy”, to jest dokładnie na odwrót. Tak czy inaczej, Mikołaj i Natalia uzyskali dwa środkowe wyniki, które sumują się do 18.

Zadanie 4. Adam i Andrzej stoją na placu i liczą stojące wokół domy. Każdy z nich liczy domy obracając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, ale zaczynają odliczanie od różnych domów, w związku z czym czwarty dom według Adama jest szesnasty według Andrzeja, a dwunasty według Adama jest siódmy według Andrzeja. Ile domów stoi wokół placu?

Wynik. 17

Rozwiązanie. Skoro czwarty dom według Adama jest szesnasty według Andrzeja, to istnieje pewien fragment, na którym numery według Andrzeja są o 12 większe od numerów według Adama. Ten fragment musi jednak skończyć się, zanim Adam doliczy do 12 — w przeciwnym przypadku dom dwunasty według Adama byłby dwudziesty czwarty według Andrzeja. Kiedy zostanie osiągnięty koniec numeracji, numery zmniejszają się o liczbę domów, a więc jest ona równa $24 - 7 = 17$.

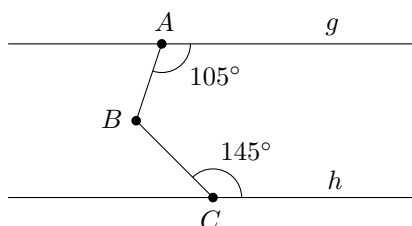
Zadanie 5. Aga chce odkamienić ekspres do kawy. Zgodnie z instrukcją, powinna mieszać 4 miarki wody z jedną miarką roztworu octu o stężeniu 10%. Niestety ma w kuchni jedynie butelkę z roztworem octu o stężeniu 40%. Z iloma miarkami wody Aga powinna mieszać jedną miarkę czterdziestoprocentowego roztworu octu, aby uzyskać żądane stężenie octu?

Roztwór octu o stężeniu $n\%$ składa się z n części octu oraz $100 - n$ części wody.

Wynik. 19

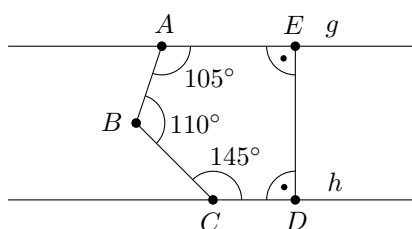
Rozwiązanie. W przepisie z instrukcji ocet stanowi 10% jednej z pięciu miarek. To samo stężenie uzyskamy, jeśli ocet będzie stanowił $40\% = 4 \cdot 10\%$ jednej z $4 \cdot 5 = 20$ miarek. Zatem na jedną miarkę roztworu z butelki potrzebujemy 19 miarek octu.

Zadanie 6. Jeśli proste g i h są równoległe oraz miary kątów przy wierzchołkach A i C wynoszą odpowiednio 105° i 145° jak na rysunku, to jaką miarę ma kąt $\angle CBA$?

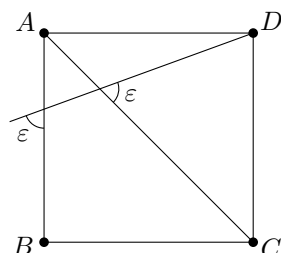


Wynik. 110°

Rozwiązanie. Możemy zaznaczyć punkty D i E leżące odpowiednio na h , g tak, że znane kąty oraz kąt z zadania są kątami wewnętrznymi pięciokąta $ABCDE$. Skoro suma nowo utworzonych kątów wynosi 180° (można założyć, że są to kąty proste jak na rysunku poniżej, choć nie jest to konieczne) i suma kątów wewnętrznych jakiegokolwiek pięciokąta wynosi 540° , to wnioskujemy, że poszukiwana miara kąta jest równa $540^\circ - 180^\circ - 105^\circ - 145^\circ = 110^\circ$.



Zadanie 7. Jeśli $ABCD$ to kwadrat, to jaka jest miara kąta ε (w stopniach)?



Wynik. 67.5°

Rozwiązanie. Niech X i Y będą wierzchołkami kątów o mierze ε . W szczególności mamy $\angle AXY = \angle AYX = \varepsilon$. Skoro $\angle XAY = \angle CAB = 45^\circ$, to kąty wewnętrzne trójkąta XYA spełniają równość

$$45^\circ + \varepsilon + \varepsilon = 180^\circ,$$

skąd $\varepsilon = 67.5^\circ$.

Zadanie 8. Przemek przyszedł na świat w dniu 27. urodzin swojej mamy. Ile co najwyżej razy może się zdarzyć, że wiek Przemka jest taki sam jak wiek jego mamy czytany wspak?

Wiodące zera są pomijane, np. 470 czytane wspak to 74.

Wynik. 7

Rozwiązanie. Oznaczmy wiek Przemka przez c , a jego mamy przez m , gdzie c to odwrócone m . Liczby c i m mają tę samą liczbę cyfr (być może c zawiera wiodące zera, jeśli m kończy się na zero), która wynosi co najmniej 2. Niech a i b będą cyframi jedności odpowiednio c i m . Skoro mama Przemka jest o 27 lat starsza, to $a + 7 = b$ lub $a + 7 = 10 + b$. Jeśli oboje mają co najmniej 100 lat, różnica między pierwszymi cyframi c i m jest równa co najwyżej 1, co nie jest możliwe, ponieważ są to cyfry a i b . A zatem, obie liczby c i m mają 2 cyfry.

Wobec tego chcemy znaleźć wszystkie takie liczby $\overline{ab}$, że

$$\overline{ab} = \overline{ba} + 27.$$

Wiemy, że $a > b$, czyli warunek $a + 7 = b$ nie może być spełniony. Wobec tego zachodzi $a + 7 = 10 + b$, czyli $a = b + 3$. Skoro $a \leq 9$, to mamy $b \leq 6$. Dla każdej cyfry $b \in \{0, 1, \dots, 6\}$ otrzymujemy cyfrę $a = b + 3$. Zauważmy, że warunek $(b + 3)b = b(b + 3) + 27$ zachodzi dla tych cyfr. Zatem opisywana sytuacja wystąpi 7 razy: Kiedy Przemek ma 3, 14, 25, 36, 47, 58 i 69 lat.

Zadanie 9. Ela buduje dużą kostkę o wymiarach $4 \times 4 \times 4$ przy użyciu 32 białych i 32 czarnych sześciątów jednostkowych. Chciałaby, żeby na powierzchni tak uzyskanej kostki znajdowało się jak najwięcej białych ścian sześciątów jednostkowych. Jaka część całej powierzchni kostki będzie biała przy takim ustawieniu?

Wynik. $3/4$

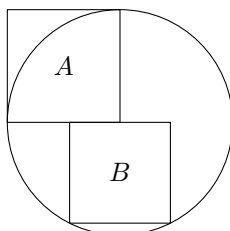
Rozwiązanie. Jeśli sześciąt jednostkowy zostanie umieszczony w rogu dużej kostki, to na powierzchni widoczne będą trzy jego ściany. Jeśli znajduje się na którejś z krawędzi kostki, to widoczne będą jego dwie ściany; w przeciwnym razie co najwyżej jedna ściana jest widoczna. Sześciąt ma 8 rogów i 12 krawędzi, z których każda zawiera (poza narożnikami) dwa sześciąty — w tych miejscach Ela może więc umieścić $8 + 2 \times 12 = 32$ sześciątów i jasne jest, że aby uzyskać możliwie największą białą powierzchnię, musi umieścić tam białe sześciąty jednostkowe. Wówczas na powierzchni każdej ze ścian znajduje się 12 ścian białych sześciątów i 4 ściany czarnych sześciątów. Zatem białe ścianki stanowią $12/16 = 3/4$ całej powierzchni kostki.

Zadanie 10. Na eksperymentalną załogową misję na Merkurego zgłosiło się stu ochotników. Wszystkich potencjalnych astronautów poddano ścisłym testom sprawdzającym kondycję, odporność oraz zdrowie psychiczne. Jedynie dwadzieścia sześć osób zaliczyło testy kondycyjne. Ponadto aż sześćdziesięciu ochotników przeszło co najwyżej jeden test. Wiemy także, że na testach odporności i zdrowia psychicznego odnotowano osiemdziesiąt trzy porażki, ale każdy z kandydatów pomyślnie przeszedł co najmniej jeden z tych dwóch testów. Ilu śmiałków uzyskało pozytywny wynik we wszystkich testach?

Wynik. 3

Rozwiązanie. Ponieważ nikt nie oblał jednocześnie odporności i zdrowia psychicznego, więc każdy kandydat, który nie przeszedł co najmniej dwóch testów, musiał oblać test kondycyjny. Daje nam to $(100 - 26) - 60 = 14$ osób, które odpadły wyłącznie z powodu kondycji. Razem z 83 osobami, które zostały odrzucone z powodu odporności lub zdrowia psychicznego, otrzymujemy łączną liczbę 97 ochotników, którzy tym razem w kosmos nie polecą. Zatem 3 kandydatów zaliczyło wszystkie trzy testy.

Zadanie 11. Kwadrat A ma dwa boki pokrywające się z promieniami okręgu, a kwadrat B ma dwa wierzchołki leżące na tym samym okręgu oraz częściowo współdzieli bok z A . Znajdź stosunek pola kwadratu A do pola kwadratu B .

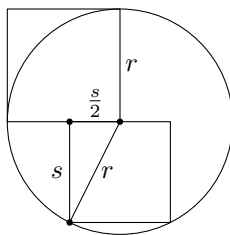


Wynik. 5 : 4

Rozwiązanie. Oznaczmy przez S długość boku B . Zauważmy, że z symetrii środek okręgu dzieli bok B zawierający się w średnicy na dwie równe części o długości $s/2$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{5}{4}s^2$$

i stąd szukany stosunek wynosi 5 : 4.



Zadanie 12. Wyznacz dwie ostatnie cyfry (w zapisie dziesiętnym) iloczynu

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Wynik. 10

Rozwiązanie. Ponieważ w danym iloczynie mamy 2 i 5, więc ostatnią cyfrą na pewno będzie 0. Pozostaje nam wyznaczyć ostatnią cyfrę iloczynu

$$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37,$$

która jest oczywiście taka sama jak ostatnia cyfra iloczynu

$$3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9.$$

Znów, skoro $3 \cdot 7 = 21$, to ostatni iloczyn ma taką samą cyfrę jedności co iloczyn $9 \cdot 9 = 81$, czyli 1.

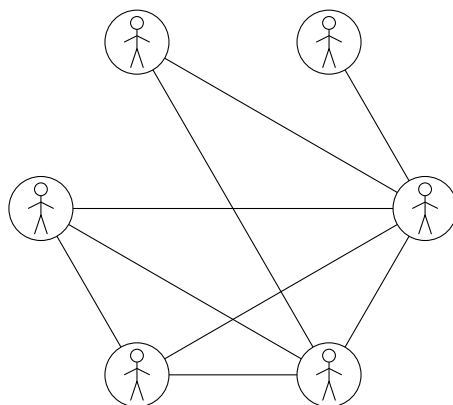
Zadanie 13. Detektyw przesłuchiwał pięciu z sześciu podejrzanych o popełnienie przestępstwa i okazało się, że mają oni odpowiednio 1, 2, 3, 4 i 5 znajomych wśród pozostałych podejrzanych. Ilu znajomych wśród pozostałych podejrzanych ma ostatni podejrzany?

Znajomość jest relacją symetryczną, tzn. jeśli podejrzany A jest znajomym podejrzanego B , to podejrzany B jest znajomym podejrzanego A .

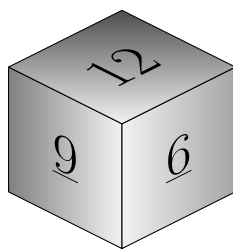
Wynik. 3

Rozwiązanie. Oznaczmy przez n szukaną liczbę znajomych ostatniego podejrzanego. Podejrzany, który ma pięciu znajomych, zna wszystkich pozostałych podejrzanych, więc możemy go pominąć, zmniejszając o 1 liczbę znajomych wszystkich pozostałych podejrzanych. Następnie możemy pominąć także podejrzanego, który ma tylko jednego znajomego, gdyż teraz jego liczba znajomych spadła do zera (po jego pominięciu nie zmienia się już liczby znajomych pozostałych podejrzanych). Zostaje wówczas jedynie czterech podejrzanych, którzy mają odpowiednio 1, 2, 3, $n - 1$ znajomych pomiędzy sobą. Powtarzając powyższą procedurę, możemy pominąć najpierw podejrzanego, który ma trzech znajomych, po czym tego, który ma tylko jednego znajomego. Zostaje wówczas jedynie dwóch podejrzanych — jeden ma jednego znajomego, a drugi ma ich dokładnie $n - 2$. Oczywiście jest wtedy, że $n - 2 = 1$, a zatem $n = 3$.

To rozwiązanie może być wykorzystane do skonstruowania grupy podejrzanych spełniającej warunki zadania. Jest ona przedstawiona na poniższym diagramie:



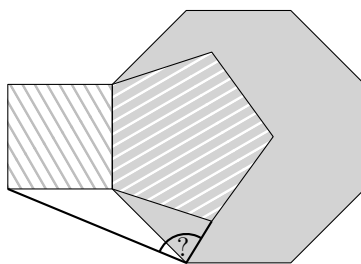
Zadanie 14. Kostka przedstawiona na rysunku na każdej ścianie ma napisaną dodatnią liczbę całkowitą. Ponadto iloczyn liczb na przeciwległych ściankach jest taki sam dla każdej pary takich ścianek. Liczby na ściankach nie muszą być różne. Jaka jest najmniejsza możliwa suma wszystkich liczb napisanych na kostce?



Wynik. 40

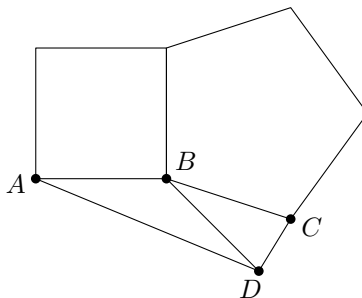
Rozwiązanie. Niech P będzie iloczynem liczb na przeciwległych ściankach. Oczywiście, im większe P , tym większa suma liczb. Ponieważ P musi być podzielne przez wszystkie trzy pokazane liczby, więc najmniejsza możliwa wartość P to najmniejsza wspólna wielokrotność tych liczb, $P = 36$. Przyjmując te założenia, brakujące liczby to 3, 4 i 6, a całkowita suma wynosi $6 + 9 + 12 + 6 + 4 + 3 = 40$.

Zadanie 15. Jeżeli szary ośmiokąt i paskowany pięciokąt są foremne, a paskowany czworokąt jest kwadratem, to jaka jest miara zaznaczonego kąta pomiędzy pogrubionymi odcinkami?



Wynik. 99°

Rozwiązanie. Oznaczmy punkty jak na rysunku.



Miara kąta CBD jest różnicą miar kątów wewnętrznych ośmiokąta i pięciokąta, wobec czego $\angle CBD = 135^\circ - 108^\circ = 27^\circ$. Ponadto z łatwością stwierdzamy, że $\angle ABD = 135^\circ$. Skoro trójkąty ABD i CBD są równoramienne, to

$$\begin{aligned}\angle CDB &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBD) = 76.5^\circ, \\ \angle BDA &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABD) = 22.5^\circ.\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = 99^\circ.$$

Zadanie 16. Minister ma osobistego kierowcę, który codziennie rano wyjeżdża z ministerstwa o ustalonej godzinie, żeby odebrać ministra i zawieźć go do ministerstwa. Minister budzi się każdego dnia o tej samej godzinie, a samochód przyjeżdża po niego dokładnie wtedy, kiedy minister jest gotów do wyjścia. Dziś minister obudził się wcześniej, przez co był gotów godzinę wcześniej niż zazwyczaj. Postanowił więc pójść w kierunku samochodu (który jak zwykle odjeżdża z ministerstwa). Po pewnym czasie spotkał samochód, wsiadł do niego i dotarł do ministerstwa dwadzieścia minut wcześniej niż zazwyczaj. Ile minut szedł minister? Załóż, że samochód porusza się ze stałą szybkością, a czas wsiadania do samochodu jest pomijalnie krótki.

Wynik. 50

Rozwiązanie. Czas, który minister zyskuje wstając wcześniej możemy podzielić na dwie części. Pierwsza to czas t , mówiący jak długo minister idzie do samochodu, natomiast druga to czas, jaki zajęłoby dotarcie kierowcy do domu ministra od miejsca spotkania. Ten drugi to oczywiście połowa całego zaoszczędzonego czasu, tak więc:

$$60 = t + \frac{20}{2}$$

lub $t = 50$.

Zadanie 17. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita o co najmniej dwóch cyfrach, której wartość po usunięciu pierwszej cyfry od lewej jest 29 razy mniejsza?

Wynik. 725

Rozwiązanie. Niech d będzie pierwszą cyfrą szukanej liczby, a k liczbą otrzymaną po usunięciu pierwszej cyfry. Wtedy szukana liczba jest równa $10^n d + k$, gdzie n oznacza liczbę cyfr k . Mamy więc

$$10^n d + k = 29k,$$

czyli

$$10^n d = 28k.$$

Skoro $28 = 2^2 \cdot 7$, a lewa strona musi być podzielna przez 28, to musi zachodzić $d = 7$ oraz $n \geq 2$. Dla $n = 2$ mamy $k = 25$, co daje najmniejszą taką liczbę, czyli 725.

Zadanie 18. Ile razy w ciągu 24 godzin wskazówka minutowa jest prostopadła do wskazówki godzinowej?

Wynik. 44

Rozwiązanie. Wskazówka minutowa robi 24 obroty w 24 godziny, godzinowa robi w tym czasie 2 obroty. Minutowa wskazówka okrąży więc godzinową 22 razy. W każdym takim okrążeniu wskazówki te są prostopadłe po dwa razy, co daje wynik 44.

Zadanie 19. Znajdź wszystkie czterocyfrowe palindromy, które mogą być zapisane jako suma dwóch trzycyfrowych palindromów.

Palindrom to liczba, która czytana od lewej i prawej strony jest taka sama, np. 2018102. Liczba nie może zaczynać się od cyfry 0.

Wynik. 1111, 1221

Rozwiązanie. Niech $\overline{abba}$ będzie szukany palindromem. Ponieważ suma dwóch trzycyfrowych liczb nie przekracza 1998, więc $a = 1$. Niech $\overline{1bb1}$ będzie równe $\overline{cdc} + \overline{xyx}$. Wtedy

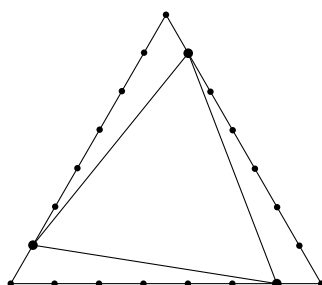
$$1001 + 110b = 101(c + x) + 10(d + y).$$

Ostatnia cyfra lewej strony to 1, więc ostatnia cyfra $c + x$ to również 1. Skoro $1 \leq c, x \leq 9$, to $c + x = 11$. Po wstawieniu i uproszczeniu powyższego wyrażenia dostajemy

$$11(b - 1) = d + y.$$

Prawa strona tej równości nie przekracza 18, więc $b - 1$ jest równe 0 lub 1. Obie opcje są możliwe: $1111 = 505 + 606$, $1221 = 565 + 656$.

Zadanie 20. Boki trójkąta równobocznego podzielono na odcinki będące w stosunku 6 do 1 w taki sposób, że punkty podziału również tworzą wierzchołki trójkąta równobocznego (patrz obrazek). Wyznacz stosunek pola powierzchni mniejszego trójkąta równobocznego do pola powierzchni większego trójkąta równobocznego.



Wynik. 31/49

Rozwiązanie. Pole powierzchni każdego z trzech małych trójkątów wynosi

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{49}$$

poła większego trójkąta, ponieważ odpowiednio ich wysokości wynoszą $1/7$ oraz długości podstaw $6/7$ z odpowiadających im odcinków w większym trójkącie. Dlatego stosunek pola powierzchni mniejszego trójkąta równobocznego do pola powierzchni większego trójkąta równobocznego wynosi

$$1 - 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{31}{49}.$$

Zadanie 21. Znajdź wszystkie takie czwórki (a, b, c, d) dodatnich liczb całkowitych, że jeśli w tablicy poniżej zamiast tych liter wpisujemy przypisane im odpowiednie wartości liczbowe, wówczas a, b, c, d będą dokładnie liczbą jedynek, dwójek, trójek oraz odpowiednio czwórek w poniższej tablicy.

1	2	3	4
a	b	c	d

Wynik. $(2, 3, 2, 1), (3, 1, 3, 1)$

Rozwiązanie. Żadna liczba nie może pojawić się w tablicy więcej niż pięć razy; jednakże numer pięć nie może wystąpić, inaczej zająłby pozycję liczby pojawiającej się pięć razy. Skąd tablica może zawierać jedynie liczby 1, 2, 3, oraz 4.

Pokażemy, że $d = 1$. Jeśli $d = 2$, to jedna z liczb a, b, c musi być równa 4 i ponieważ zostaną już tylko dwa wolne miejsca, to tą liczbą musi być b . Jednakże, $(2, 4, 2, 2)$ w oczywisty sposób nie jest szukaną czwórką. Możliwości $d = 3$ i $d = 4$ również prowadzą do sprzeczności.

Wiemy już, że $a \in \{2, 3\}$. Przyjmując $a = 2$, dostajemy $b, c \in \{2, 3\}$ (nie może być innych jedynek ani czwórek), ale $b = 2$ prowadzi do sprzeczności (będą trzy dwójki), skąd mamy wprost, że $b = 3$ oraz $c = 2$. Jeśli $a = 3$, to w tabeli musi być jeszcze jedna jedynka więcej, a nie może to być c (już jest inna trójka), więc $b = 1$ i znów natychmiastowo otrzymujemy, że $c = 3$.

Zadanie 22. Piotrek zapomniał swojego hasła. Pamięta tylko, że składało się ono z 9 małych liter alfabetu łacińskiego oraz zawierało angielskie słowa „math” i „drama”. Ile różnych hasel spełnia te warunki?

Słowa są zawarte jako spójne podciągi, czyli na przykład „martha” nie zawiera słowa „math”. Alfabet łaciński ma 26 liter.

Wynik. 2030

Rozwiązanie. Rozważmy najpierw przypadek, w którym słowa „math” i „drama” nie nakładają się. Wówczas są dokładnie dwa sposoby połączenia ich: „dramamath” oraz „mathdrama”.

Jeżeli nakładają się na siebie, to muszą tworzyć segment „dramath”. Pozycje pozostałych dwóch liter można wybrać na trzy sposoby: „**dramath”, „*dramath*”, „dramath**”. W każdym z tych przypadków jest dokładnie $26^2 = 676$ możliwości wyboru liter oznaczonych „*”. Wobec tego uzyskujemy łącznie $676 \cdot 3 = 2028$ potencjalnych hasel w tym przypadku.

Łącznie mamy więc $2028 + 2 = 2030$ możliwych hasel.

Zadanie 23. Jeśli wylosujemy dwie różne liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n\}$, to prawdopodobieństwo, że wylosowane liczby będą kolejnymi dodatnimi liczbami całkowitymi wynosi $\frac{1}{21}$. Wyznacz n .

Wynik. 42

Rozwiązanie. Mamy $n - 1$ par kolejnych liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n - 1, n\}$ i jest $\frac{1}{2}n(n - 1)$ możliwości wyboru dwóch różnych dowolnych liczb. Skąd otrzymujemy

$$\frac{n - 1}{\frac{1}{2}n(n - 1)} = \frac{2}{n} = \frac{1}{21},$$

więc ostatecznie $n = 42$.

Zadanie 24. Apoloniusz, Bonifacy i Czesław grali w tenisa stołowego według następujących reguł: w każdej rundzie dwóch z nich grało przeciwko sobie, a trzeci odpoczywał. Zwycięzca rundy grał następnie z uprzednio odpoczywającym zawodnikiem. W pierwszej rundzie Apoloniusz grał przeciwko Bonifacemu. Po pewnej liczbie rund Apoloniusz miał na swoim koncie 17 wygranych, a Bonifacy 22. Ile razy Apoloniusz i Bonifacy grali przeciwko sobie?

Wynik. 20

Rozwiązanie. Zauważmy, że każde zwycięstwo Charliego nie ma wpływu na liczbę rund wygranych przez Artura lub Bena. Nie ma to też wpływu na liczbę rund w których Charlie nie brał udziału. Możemy więc założyć, że Charlie za każdym razem przegrał. Innymi słowy, każde zwycięstwo Bena zwiększa całkowity wynik Artura o 2 (o ile nie jest to ostatnia runda) i na odwrót. Ponieważ liczba zwycięstw Artura jest nieparzysta widzimy, że w ostatniej rundzie musieli rywalizować Ben i Artur, a wygrał w niej Artur. Jeżeli więc dodamy jeszcze jedną rundę (Artur kontra Charlie, zakończoną wygraną Artura) to liczba rund w których Charlie nie brał udziału będzie połową sumy wyników końcowych Artura i Bena, tj. $(18 + 22)/2 = 20$.

Zadanie 25. Klienci sklepu internetowego mogą wyrazić swoją satysfakcję z zamówionego produktu oceniając go w skali od jednej do pięciu gwiazdek (1 gwiazdka = słaby, 5 gwiazdek = świetny). Średnia ocena nowego smartfona jeszcze w ubiegłym tygodniu wynosiła 3.46, ale po oddaniu przez kolejne dwie osoby głosów w obecnym tygodniu, średnia zwiększyła się do 3.5 gwiazdki. Ile osób jak dotąd oceniło nowego smartfona?

Wynik. 52

Rozwiązanie. Niech k będzie liczbą ocen do poprzedniego tygodnia włącznie, a x — sumą tych ocen. Co więcej, niech a oraz b oznaczają dwie nowe oceny oddane w tym tygodniu. Wówczas

$$\frac{x}{k} = 3.46 \quad \text{oraz} \quad \frac{x + a + b}{k + 2} = 3.5$$

czyli

$$x = \left(3 + \frac{23}{50}\right)k, \quad (1)$$

$$x + a + b = \left(3 + \frac{1}{2}\right)k + 7. \quad (2)$$

Z równości (1) wynika, że k jest liczbą podzielną przez 50. Z kolei odejmując (1) stronami od (2), uzyskujemy

$$a + b - 7 = \frac{k}{25}.$$

Skoro $a, b \leq 5$, to lewa strona powyższej równości jest dodatnią liczbą całkowitą nie przekraczającą 3, wobec czego $k \leq 75$. Łącząc powyższe obserwacje, dochodzimy do wniosku, że $k = 50$, więc po dodaniu dwóch głosów z tego tygodnia otrzymujemy 52 dotychczasowe oceny.

Zadanie 26. Dorota ma cztery pary skarpetek odpowiednio z napisami *poniedziałek*, *wtorek*, *środa*, *czwartek*. Na ile sposobów może je nosić od poniedziałku do czwartku, aby każdego dnia obie skarpetki były różne i na żadnej nie była napisana nazwa obecnego dnia?

Każda skarpetka pasuje na każdą nogę (nie ma „lewych” i „prawych” skarpetek). Co więcej, noszenie jednej skarpetki na lewej nodze i innej na prawej liczy się jako ten sam sposób noszenia, co noszenie ich odwrotnie.

Wynik. 9

Rozwiązanie. Dla zwięzłości będziemy używać liczb 1, 2, 3, 4 zamiast nazw dni tygodnia. Zauważmy, że każdemu dniowi przyporządkowane zostaną trzy różne liczby: numer dnia oraz numery skarpet noszonych tego dnia. Zatem równoważnie możemy każdemu dniowi przyporządkować jedną liczbę – czwartą liczbę (różną od numeru dnia i numerów noszonych tego dnia skarpetek). Takie przyporządkowanie będzie spełniać warunki zadania, jeśli będzie permutacją numerów 1, 2, 3, 4 i każdy z nich będzie przyporządkowany dniowi o numerze innym niż on sam.

Liczba takich permutacji może zostać policzona w następujący sposób: liczbę 1 możemy ustawić na 3 sposoby; niech $n \neq 1$ będzie jej pozycją. Wówczas również n może zostać umieszczone w jednym z trzech miejsc (na dowolnym różnym od n). Łatwo zauważyć, że po ułożeniu n pozostałe dwie liczby można ułożyć na dokładnie jeden sposób, zatem mamy $3 \cdot 3$ sposobów noszenia skarpetek.

Zadanie 27. Komisja składająca się z 26 matematyków nominuje (co najmniej) pięć filmów do nagrody na festiwalu filmów matematycznych. Wybierają spośród 16 filmów w następujący sposób: Każdy członek komisji wybiera pięć różnych filmów i nominowanych zostaje pięć filmów z największą liczbą głosów; w przypadku remisu na piątym miejscu, nominowane zostają wszystkie filmy zajmujące to miejsce. Jaka jest najmniejsza liczba głosów, jaką musi otrzymać dany film, żeby został nominowany niezależnie od głosów na pozostałe filmy?

Wynik. 21

Rozwiązanie. W trakcie głosowania filmy otrzymują łącznie $26 \cdot 5 = 130$ głosów. Jeśli dany film otrzymał 20 lub mniej głosów, to pozostałe 110 głosów można rozdzielić pomiędzy pozostałe filmy tak, aby pięć innych filmów otrzymało po 21 głosów. Z drugiej strony, gdyby dany film otrzymał 21 głosów i nie został nominowany, to pięć innych filmów musiałoby otrzymać co najmniej po 22 głosy, co daje w sumie $21 + 5 \cdot 22 = 131$ głosów, a to jest sprzeczne.

Zadanie 28. Funkcja rzeczywista f spełnia równanie

$$f(x) + xf(1-x) = x$$

dla każdej liczby rzeczywistej x . Znajdź $f(-2)$.

Wynik. $4/7$

Rozwiązanie. Podstawiając $x = -2$ dostajemy równanie $f(-2) - 2f(3) = -2$, natomiast dla $x = 3$ mamy $f(3) + 3f(-2) = 3$. Jest to układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi $f(-2)$ i $f(3)$. Po przemnożeniu drugiego równania przez 2 i dodaniu stronami otrzymujemy $f(-2) = \frac{4}{7}$.

Zadanie 29. Liczby dwucyfrowe n, a, b, o, j wybrano w taki sposób, że ich iloczyn $naboj$ jest podzielny przez 4420. Znajdź największą możliwą wartość sumy $n + a + b + o + j$.

Wynik. 471

Rozwiązanie. Zaczniemy od rozłożenia liczby $4420 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$ na czynniki pierwsze. Ponieważ 13 i 17 są pierwsze, więc któraś z liczb n, a, b, o, j musi być podzielna przez 13 oraz tak samo któraś przez 17. Najmniejsza wspólna wielokrotność 13 i 17 wynosi 221, a więc nie istnieje taka liczba dwucyfrowa która jest podzielna przez obie te liczby jednocześnie. Nie tracąc na ogólności możemy przyjąć, że n jest podzielne przez 17 i a jest podzielne przez 13. To oznacza, że $n \leq 85 = 5 \cdot 17$ i $a \leq 91 = 7 \cdot 13$.

Przypuśćmy więc, że $n = 85$ i $a = 91$. Widać, że $n = 85$ jest podzielne przez 5, zatem potrzebujemy jedynie zapewnić podzielność przez 4. Ponieważ n zarówno jak i a są nieparzyste, 4 musi dzielić boj . Stąd, jedna z liczb b, o, j jest podzielna przez 4 lub pewne dwie są podzielne przez 2. W drugim przypadku szukana suma będzie większa, tj. gdy $b = o = 98$ i $j = 99$. Obliczamy wtedy, że $n + a + b + o + j = 85 + 91 + 98 + 98 + 99 = 471$.

Ostatecznie, sprawdzamy przypadek gdy $n < 85$ lub $a < 91$. Ponieważ liczby n i a muszą być podzielne odpowiednio przez 17 i 13, co oznacza, że $n \leq 68 = 85 - 17$ lub $a \leq 78 = 91 - 13$. Wówczas suma $n + a + b + o + j$ może wynosić co najwyżej $68 + 91 + 3 \cdot 99 = 456$ (pierwsza możliwość) lub $85 + 78 + 3 \cdot 99 = 460$ (druga możliwość), jednakże w każdej z tych możliwości dostajemy wynik mniejszy niż w uprzednim przypadku.

Zadanie 30. Ewelina zamówiła przez internet osiem piłek tenisowych i jedną piłkę ręczną. Piłki (z których każda ma kształt idealnej kuli) zostały zapakowane do sześciennego pudełka w taki sposób, że każda piłka tenisowa jest styczna do trzech ścian pudełka i do piłki ręcznej. Promień piłki ręcznej wynosi 10 cm, a promień piłki tenisowej wynosi 5 cm. Wyznacz długość krawędzi pudełka (w centymetrach).

Wynik. $10(1 + \sqrt{3})$

Rozwiązanie. Zauważmy, że główna przekątna pudełka przechodzi przez środki piłki ręcznej i dwóch piłek tenisowych oraz przez punkty styczności tych trzech kul. Jedyne fragmenty przekątnej, które nie znajdują się wewnątrz żadnej z kul to odcinki pomiędzy piłkami tenisowymi a narożnikiem pudełka. Zatem długość przekątnej pudełka to suma następujących odcinków:

- (dwukrotnie) odcinek od środka piłki tenisowej do najbliższego jej rogu;
- (dwukrotnie) promień piłki tenisowej;
- średnica piłki ręcznej.

Odcinek łączący środek piłki tenisowej z najbliższym jej rogiem jest przekątną sześcianu o krawędzi równej promieniowi tej piłki. Zatem jego długość wynosi $5\sqrt{3}$. Promień piłki tenisowej to 5 i średnica piłki ręcznej to 20. Zatem długość przekątnej pudełka to

$$2 \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 5 + 20 = 30 + 10\sqrt{3},$$

a więc długość krawędzi wynosi

$$\frac{30 + 10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10(1 + \sqrt{3}).$$

Zadanie 31. Zapisana w systemie dziesiętnym potęga 2^{29} jest dziewięciocyfrową liczbą, której wszystkie cyfry są różne. Jakiej cyfry nie użyto w tym zapisie?

Wynik. 4

Rozwiązanie. Z jednej strony, potęgę 2^{29} możemy obliczyć na piechotę w przystępny sposób: np. $2^{10} = 1024$, dalej obliczamy 1024^2 i $1024^2 \cdot 1024$. Następnie uzyskany wynik dzielimy przez 2 i dostajemy $2^{29} = 536\,870\,912$.

Z drugiej strony, możemy skorzystać z faktu, że dana liczba całkowita oraz suma jej cyfr dają dokładnie tę samą resztę z dzielenia przez 9. Co więcej, reszta z dzielenia przez 9 potęg 2^n jest okresowa z okresem długości 6. Ponieważ suma wszystkich cyfr zapisu dziesiętnego wynosi 45, ostatecznie otrzymujemy

$$45 - x \equiv 2^{29} \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod{9}$$

gdzie x oznacza pominiętą cyfrę w dziesiętnym przedstawieniu 2^{29} . To daje $x \equiv 4 \pmod{9}$, więc pominiętą cyfrą jest 4.

Zadanie 32. Podczas porządkowania strychu, Zbyszek znalazł stary kalkulator, który potrafi obliczać pierwiastki kwadratowe, jednak jego wyświetlacz pokazuje tylko dwie cyfry po przecinku. Przykładowo, dla $\sqrt{4}$ urządzenie pokaże 2.00, a dla $\sqrt{6} = 2.44949\dots$ będzie to 2.44. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita, nie będąca kwadratem liczby całkowitej, której pierwiastek kalkulator Zbyszka wyświetli z dwoma zerami po przecinku?

Wynik. 2501

Rozwiązanie. Oznaczmy przez $\text{pdc}(n)$ liczbę powstałą z pierwszych dwóch cyfr po przecinku liczby $\sqrt{n}$. Zauważmy, że jeśli $k^2 \leq m \leq n < (k+1)^2$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k , to $\text{pdc}(m) \leq \text{pdc}(n)$. Zatem w poszukiwaniu najmniejszej liczby n , nie będącej kwadratem, dla której $\text{pdc}(n) = 0$, wystarczy ograniczyć się do liczb postaci $k^2 + 1$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą.

Łatwo widać, że część całkowita liczby $\sqrt{k^2 + 1}$ to dokładnie k . Warunek $\text{pdc}(k^2 + 1) = 0$ możemy więc równoważnie przepisać jako $\sqrt{k^2 + 1} - k < \frac{1}{100}$. Przenosząc k na prawą stronę nierówności, podnosząc do kwadratu (obie strony są dodatnie) oraz porządkując wyrazy, otrzymujemy

$$k > 50 \left(1 - \frac{1}{100^2} \right).$$

Ostatecznie, ponieważ prawa strona jest liczbą ściśle pomiędzy 49 a 50, a k jest całkowita, więc $k \geq 50$. Toteż $n = 50^2 + 1 = 2501$ jest szukaną liczbą.

Zadanie 33. W każde z pól tablicy 2018×2018 należy wpisać jedną z liczb od 1 do 9 w taki sposób, żeby suma liczb znajdujących się wewnątrz każdego kwadratu 3×3 była podzielna przez 9. Na ile różnych sposobów można to uczynić?

Wynik. 9^{8068}

Rozwiązanie. Zauważmy, że dowolne wpisanie liczb w 8068 pól, które tworzą dwa dolne wiersze i dwie lewe kolumny pozwala jednoznacznie wyznaczyć liczby wpisane w pozostałe pola (tak, aby warunki zadania były spełnione), gdyż liczby te możemy wpisywać kolejno przekątną po przekątnej — jak na obrazku. Z drugiej strony, dowolne spełniające warunki zadania wpisanie liczb w pola tablicy wyznacza pewien układ liczb na 8068 rozważanych polach. Stąd wniosek, że liczba wszystkich możliwych wypełnień tych pól liczbami jest równa szukanej liczbie wszystkich poprawnych wypełnień całej tablicy.

9	8									→	9	8								→	9	8								→	9	8							
9	7										9	7									9	7									9	7	2						
5	2										5	2									5	2	5								5	2	5	1					
4	1										4	1	1								4	1	1	2							4	1	1	2	2				
3	6	9	9	1	3						3	6	9	9	1	3					3	6	9	9	1	3					3	6	9	9	1	3			
2	9	1	7	4	4						2	9	1	7	4	4					2	9	1	7	4	4					2	9	1	7	4	4			

Zadanie 34. Znajdź wszystkie pary (n, m) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie $4^n + 260 = m^2$.

Wynik. $(3, 18)$, $(6, 66)$

Rozwiązanie. Podane równanie jest równoważne z równaniem $m^2 - (2^n)^2 = 260$, oraz przekształcając lewą stronę dostajemy $(m - 2^n)(m + 2^n) = 260$. Rozkład na czynniki pierwsze $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$ daje następujące przedstawienia:

$$260 = 1 \cdot 260 = 2 \cdot 130 = 4 \cdot 65 = 5 \cdot 52 = 10 \cdot 26 = 13 \cdot 20,$$

biorąc pod uwagę, że $(m - 2^n) < (m + 2^n)$. Ponieważ $(m + 2^n) - (m - 2^n) = 2^{n+1}$, więc mamy dwie możliwości $26 - 10 = 2^4$ i $130 - 2 = 2^7$, co prowadzi do dwóch par $(3, 18)$ i $(6, 66)$ spełniających równanie.

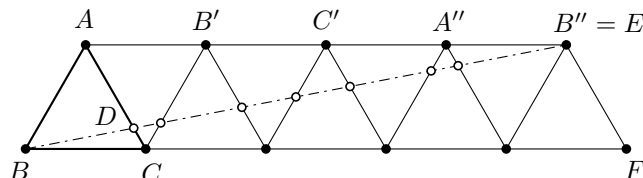
Zadanie 35. W trójkącie równobocznym ABC promień światła wychodzący z punktu B padł na bok AC w takim punkcie D , że $DC : AC = 1 : 2018$, odbijając się od niego zgodnie z zasadą, że kąt padania jest równy kątowi odbicia. Następnie odbijał się podobnie za każdym razem, gdy dotarł do jakiegoś boku trójkąta. Oblicz, ile było w sumie odbić, zanim promień dotarł do pewnego wierzchołka trójkąta ABC .

Wynik. 4033

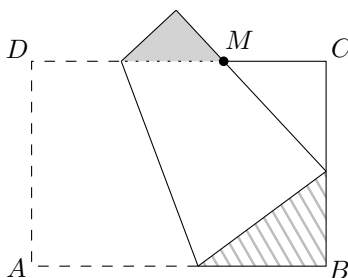
Rozwiązanie. Zamiast odbijać promień, pozwólmy mu przelecieć prosto i następnie odbijmy trójkąt względem boku, na który padło światło. Wykażemy, że w jednym pasku takich trójkątów znajdziemy wierzchołek pewnego trójkąta, w który trafi promień.

Niech E będzie przecięciem półprostej BD z prostą przechodzącą przez A i równoległą do BC oraz niech F będzie takim punktem na BC , że $EF \parallel AC$. Wtedy trójkąty BCD oraz BFE są podobne i $BF = 2018BC$. Stąd punkt E może być otrzymany przez odbijanie trójkąta ABC i jest jasne, że jest to pierwszy taki punkt na BD .

Widać, że odcinek BE przecina $2 \cdot 2017 - 1 = 4033$ odcinków w pasku trójkątów, a to jest równe liczbie odbić promienia światła z treści zadania. Rysunek pokazuje rozwiązanie dla warunku z treści zmienionego na $DC : AC = 1 : 5$.

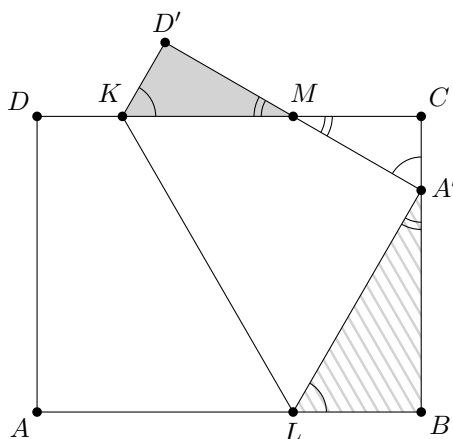


Zadanie 36. Prostokątna kartka papieru $ABCD$ została złożona tak, że wyjściowy punkt A znalazł się na boku BC , a punkt M będący przecięciem boku CD i wyjściowego boku AD był dokładnie w jednej trzeciej długości boku CD , tj. $CD = 3CM$. Jeżeli pole szarego trójkąta jest równe 1, to jakie jest pole paskowanego?



Wynik. 9/4

Rozwiązanie. Oznaczmy na rysunku punkty przecięcia odpowiednich odcinków.



Trójkąty KMD' , $A'MC$, i $LA'B$ są prostokątne i do siebie podobne, co wynika z prostych przeniesień kątów. Chcemy znaleźć skalę podobieństwa dwóch trójkątów z zadania. Wiedząc, że $KD = KD'$ i $LA = LA'$ mamy:

$$D'K + KM = DM = \frac{2}{3}DC = \frac{2}{3}AB$$

oraz:

$$A'L + LB = AB.$$

W powyższym podobieństwie bok $A'L$ odpowiada bokowi KM , a bok LB odpowiada bokowi KD' , z czego wynika, że skala jest równa $3/2$. Stosunek pól wynosi zatem $(3/2)^2 = 9/4$.

Zadanie 37. Po podzieleniu wielomianu $x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018}$ przez $x^2 - 1$ otrzymujemy resztę. Znajdź wartość zmiennej x , dla której ta reszta jest równa 1111.

Wynik. 185

Rozwiązanie. Wielomian ten możemy zapisać jako

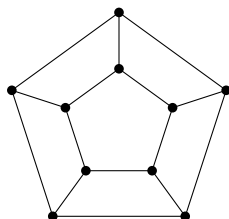
$$\begin{aligned} x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018} &= \\ &= x(x^2 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^6 - 1) + x(x^8 - 1) + x(x^{10} - 1) + x(x^{2016} - 1) + (x^{2018} - 1) + 6x + 1. \end{aligned}$$

Skoro

$$x^{2k} - 1 = (x^2 - 1)(x^{2k-2} + x^{2k-4} + \dots + 1),$$

to każde wyrażenie tej postaci jest podzielne przez $x^2 - 1$. Stopień $6x + 1$ jest mniejszy niż stopień $x^2 - 1$, więc jest to szukana reszta z dzielenia. Po rozwiązaniu równania $1111 = 6x + 1$ otrzymujemy odpowiedź $x = 185$.

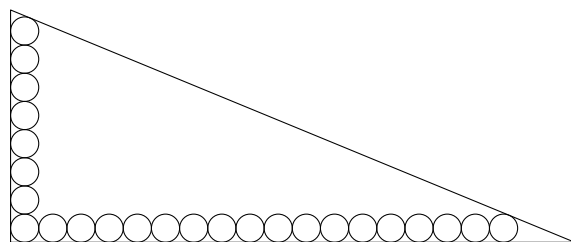
Zadanie 38. W Pentagonii znajduje się dziesięć miast. Każde z nich połączone jest liniami kolejowymi z trzema innymi, zgodnie z poniższym diagramem. Polityka nieufności wymaga, żeby każde dwie linie mające wspólną stację należały do różnych przewoźników. Na ile sposobów można przyporządkować linie trzem przewoźnikom, aby prawo nie zostało złamane?



Wynik. 30

Rozwiązanie. Zauważmy, że na "zewnątrznym pięciokącie", żaden z przewoźników nie może obsługiwać trzech linii, zatem dwóch przewoźników (oznaczonych jako X i Y) musi obsługiwać po dwie linie, natomiast trzeci przewoźnik tylko jedną. Ponadto, jedyna możliwa kolejność tych firm to $XYXYZ$, poczynając od dowolnego miasta. Łatwo pokazać, że przyporządkowanie tych linii jednoznacznie wyznacza pozostałe. Każdy z odcinków w "wewnętrznym pięciokącie" musi być obsługiwany przez tę samą firmę, co jego zewnętrzny odpowiednik, natomiast łączniki muszą należeć do trzeciego, niewystępującego dotąd w danym węźle, przewoźnika. Oznacza to, że liczba poprawnych przyporządkowań sieci jest równa liczbie możliwych przyporządkowań linii na zewnętrznym pięciokącie. Istnieje 6 sposobów na które można przypisać przewoźnikom nazwy X , Y , Z oraz 5 miast, w których można zacząć przyporządkowanie $XYXYZ$. Daje to $5 \cdot 6 = 30$ możliwości.

Zadanie 39. Trójkąt prostokątny zawiera 25 stycznych okręgów o promieniu 1, jak pokazano na rysunku.

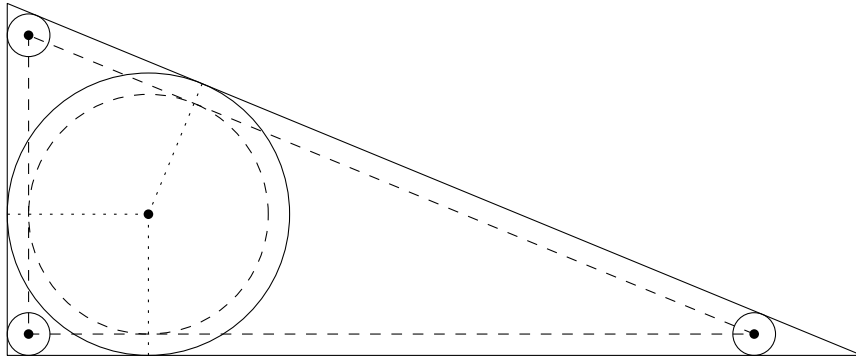


Ile wynosi promień okręgu wpisanego w ten trójkąt?

Wynik. $25 - 13\sqrt{2}$

Rozwiązanie. Rozważmy trójkąt, którego wierzchołki są środkami trzech okręgów w narożnikach. Jest on prostokątny, a jego przyprostokątne mają długości 14 i 34. Na mocy twierdzenia Pitagorsa długość przeciwprostokątnej wynosi $\sqrt{14^2 + 34^2} = 26\sqrt{2}$. Możemy więc wyliczyć promień okręgu wpisanego w ten trójkąt, który wynosi $(14 + 34 - 26\sqrt{2})/2 = 24 - 13\sqrt{2}$. Ponieważ boki wyjściowego trójkąta są równoległe do boków nowego trójkąta i odległe od nich o 1, to środki okręgów wpisanych w oba trójkąty pokrywają się. Promień okręgu wpisanego w wyjściowy trójkąt jest zatem

równy długości promieniowi okręgu wpisanego w nowy trójkąt powiększonej o odległość między bokami, tj. $25 - 13\sqrt{2}$.



Zadanie 40. Madzia wymyśliła operację o nazwie *madzing*, działającą na (skończonych) ciągach liczb całkowitych. Mając dany ciąg bierze jego cztery kopie, zwiększa ich wyrazy kolejno o 0, 2, 3 i 5 oraz łączy ciągi, otrzymując znów pojedynczy ciąg. Na przykład, mając dany ciąg (8, 3) otrzyma (8, 3, 10, 5, 11, 6, 13, 8). Jeżeli Madzia zacznie od jednoelementowego ciągu (0) i będzie wykonywać operację madzingu dopóki nie otrzyma co najmniej 2018 liczb, to jaka będzie liczba 2018-ta? (Wyraz najbardziej na lewo jest uznawany za pierwszy).

Wynik. 17

Rozwiązanie. Dla wygody, numerujemy wyrazy ciągu począwszy od zera. Prosty argument indukcyjny wyjaśnia, że pozycja liczby zapisana w systemie czwórkowym mówi jakie operacje i w jakiej kolejności wykonano na liczbie na danej pozycji. Dla przykładu, po dwóch operacjach madzingu Madzia otrzymała:

$$(0+0, 0+2, 0+3, 0+5, 2+0, 2+2, 2+3, 2+5, 3+0, 3+2, 3+3, 3+5, 5+0, 5+2, 5+3, 5+5).$$

$\begin{matrix} 00 & 01 & 02 & 03 & 10 & 11 & 12 & 13 & 20 & 21 & 22 & 23 & 30 & 31 & 32 & 33 \end{matrix}$

(Liczba poniżej wyrazu mówi numer pozycji pomniejszony o 1 w systemie czwórkowym.) 2017 w tym systemie zapisuje się jako 133201, tak więc liczba na pozycji 2018 to

$$2 + 5 + 5 + 3 + 0 + 2 = 17.$$

Zadanie 41. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n taką, że równanie

$$(x^2 + y^2)^2 + 2nx(x^2 + y^2) = n^2 y^2$$

ma rozwiązanie (x, y) w dodatnich liczbach całkowitych.

Wynik. 25

Rozwiązanie. Na równanie w zadaniu możemy spojrzeć jak na równanie kwadratowe zmiennej n z rozwiązaniem

$$n = \frac{(x^2 + y^2)(x + \sqrt{x^2 + y^2})}{y^2}$$

(drugie rozwiązanie prowadziłoby do ujemnego n gdyż $\sqrt{x^2 + y^2} > x$), tym samym

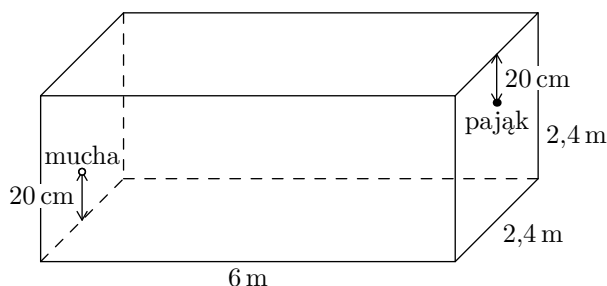
$$ny^2 = (x^2 + y^2)(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Niech $d = \text{NWD}(x, y)$, oraz niech $x = x_0 d$, $y = y_0 d$. Podstawiając i upraszczając mamy

$$ny_0^2 = d(x_0^2 + y_0^2)(x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}).$$

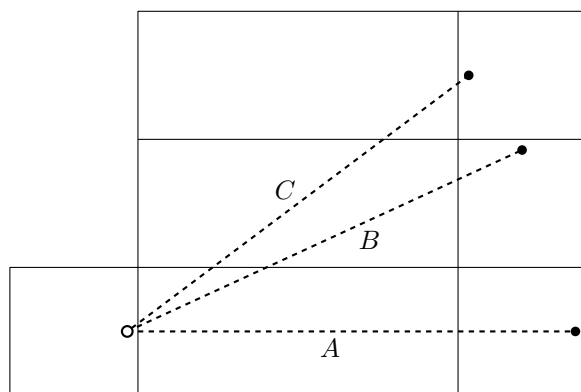
Teraz, ponieważ x_0 i y_0 są względnie pierwsze, więc y_0^2 i $x_0^2 + y_0^2$ są również względnie pierwsze i stąd $x_0^2 + y_0^2 \mid n$. Dalej, wyrażenie $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ pociąga, że $x_0^2 + y_0^2$ jest kwadratem dodatniej liczby całkowitej. Wiadomo, że $5^2 = 25$ jest najmniejszym kwadratem który posiada przedstawienie w postaci sumy dwóch kwadratów, $3^2 + 4^2$. Zatem $n \geq 25$ i podstawienie $x = 3$, $y = 4$ pokazuje, że $n = 25$ istotnie daje rozwiązanie.

Zadanie 42. W prostopadłościennym pokoju o wymiarach $6\text{ m} \times 2,4\text{ m} \times 2,4\text{ m}$ (długość $\times$ szerokość $\times$ wysokość) znajduje się pająk. Siedzi on na jednej ze ścian o wymiarach $2,4\text{ m} \times 2,4\text{ m}$, 20 cm od sufitu i w jednakowej odległości od jej pionowych krawędzi. Mucha, siedząca na przeciwległej ścianie, także znajduje się na jej pionowej osi symetrii, ale 20 cm od podłogi. Mucha nie porusza się, natomiast pająk przemieszcza się po ścianach celem złapania jej. Jaka jest najmniejsza odległość (w m), którą musi on pokonać?



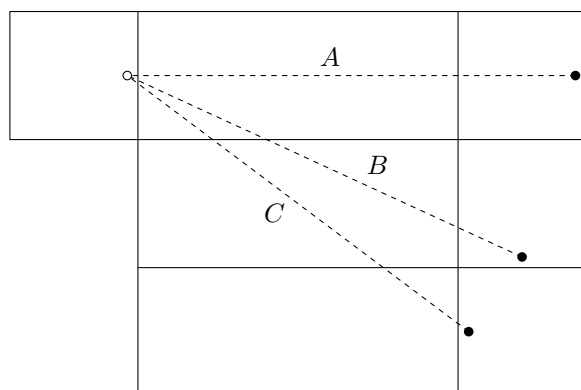
Wynik. 8m

Rozwiązanie. Rozważmy możliwe drogi pająka na siatce bryły. Oczywiście, po rozłożeniu na siatkę najkrótsza ścieżka staje się fragmentem prostej. Na rysunku biały znacznik reprezentuje muchę, natomiast czarny pająka. Jego położenie na płaszczyźnie zależy od sposobu na który rozłożymy prostopadłościan na siatkę.



Z dokładnością do symetrii istnieją trzy możliwe sposoby, na które pająk może dotrzeć do muchy. Przetnie on jedną, dwie albo trzy długie ściany prostopadłościanu; ścieżki oznaczone są na rysunku przez A , B i C . Ścieżka zawierająca cztery z tych ścian może zostać zredukowana do krótszej. Długość ścieżki A wynosi 8.4 m. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że długość ścieżki B w metrach wynosi $\sqrt{66.32}$, natomiast długość ścieżki C wynosi 8. Najmniejsza z tych liczb jest odpowiedzią, tak więc najkrótsza możliwa ścieżka to C , a jej długość to 8.

Poniższy rysunek przedstawia najkrótszą możliwą ścieżkę w trzech wymiarach:



Zadanie 43. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$(6 + 2 \cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2 \sin(x) - \sin(y))^2,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.

Wynik. 49

Rozwiązanie. Definiujemy $V(x, y) = (6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2$. Okrąg $k(S, R)$ o środku $S = [S_1, S_2]$ i promieniu $R > 0$ może zostać sparametryzowany (tzn. współrzędne wszystkich punktów leżących na nim wyrażają się) przez kąt α jako $(x_1, x_2) = (S_1 + R\cos(\alpha), S_2 + R\sin(\alpha))$. Rozważmy punkty $P = [0, 0]$ i $Q = [6, 8]$ oraz okręgi $k_1(P, 1)$ i $k_2(Q, 2)$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $V(x, y) = |AB|^2$ gdzie $A \in k_1$ o kącie x i $B \in k_2$ o kącie y . Zatem minimum $V(x, y)$ to kwadrat odległości najbliższych punktów leżących na k_1 oraz k_2 i możemy ją obliczyć używając odległości pomiędzy środkami i promieni k_1 i k_2 : $\sqrt{6^2 + 8^2} - 1 - 2 = 7$. Stąd minimum $V(x, y)$ równa się $7^2 = 49$.

Zadanie 44. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita o tej własności, że jej cyfrą jedności jest 2, oraz jeśli tę ostatnią cyfrę przeniesiemy przed jej pierwszą cyfrę, to dostaniemy podwojenie wyjściowej liczby?

Wynik. 105 263 157 894 736 842

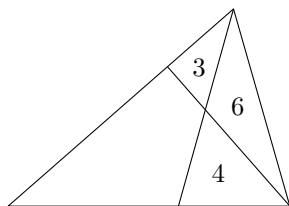
Rozwiązanie. Niech N będzie szukaną liczbą. Kiedy przenosimy cyfrę jedności N na początek, otrzymujemy wszystkie cyfry $2N$ począwszy od pierwszej cyfry na lewo. Stąd, ponieważ N kończy się cyfrą 2, $2N$ musi kończyć się cyfrą 4, a więc cyfrą dziesiątą N jest 4. Niech d_i będzie i -tą cyfrą N , licząc od prawej do lewej (tzn. d_1 oznacza cyfrę jedności). Biorąc pod uwagę jak wygląda mnożenie cyfr przez liczbę dwa, widzimy że cyfry N muszą spełniać

$$d_i = \begin{cases} 2d_{i-1} \bmod 10 & \text{jeśli } d_{i-2} < 5, \\ 2d_{i-1} \bmod 10 + 1 & \text{jeśli } d_{i-2} \geq 5 \end{cases}$$

dla każdego $i > 2$. W ten sposób możemy wprost wypisać wszystkie cyfry N . Kończymy tę procedurę wówczas, gdy otrzymamy cyfrę 1 i w następnym kroku cyfrę 2: Liczbą rozpoczynającą się od tej cyfry 1 musi być N , ponieważ mnożenie N przez 2 dokładnie zmienia ostatnią cyfrę, lecz przenosi 2 na początek. Ostatecznie

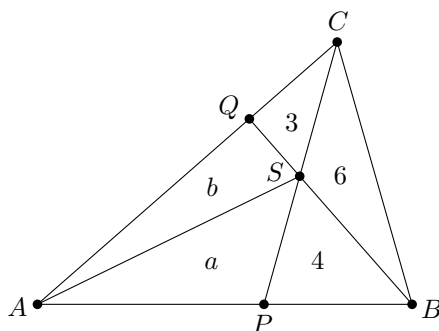
$$N = 105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

Zadanie 45. Dariusz podzielił trójkątny obszar ziemi dwiema liniami na cztery działki. Obszar o polu 6 podarował swojemu synowi Filipowi, o polu 4 oddał swojemu synowi Piotrowi, a najmniejszy o polu 3 przekazał swojemu synowi Mikołajowi. Sam zatrzymał największą działkę. Ile wynosi jej pole?



Wynik. 19/2

Rozwiązanie. Używamy oznaczeń jak na poniższym rysunku.



Ze stosunków pól wynika, że S dzieli QB w stosunku $1 : 2$ oraz PC w stosunku $2 : 3$. Dorysowując odcinek AS i oznaczając pole trójkąta ASQ jako b oraz pole trójkąta APS jako a dochodzimy do następujących dwóch równań:

$$\frac{b}{a+4} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{b+3}{a} = \frac{3}{2}.$$

To jest równoważne

$$2b = a + 4 \quad \text{oraz} \quad 2b + 6 = 3a,$$

co daje rozwiązania $a = 5$ oraz $b = \frac{9}{2}$. Zatem pole czworokąta $APSQ$ wynosi $\frac{19}{2}$.

Zadanie 46. Czterej bracia posiadają w sumie 2018 zł oszczędności. Wiemy, że majątek każdego z nich jest dodatnią liczbą całkowitą, a żadnych dwóch nie posiada takiej samej liczby złotych. Ponadto, jeśli jeden brat jest bogatszy od drugiego, to jego majątek jest podzielny przez majątek biedniejszego. Ile co najmniej złotych musi mieć najbogatszy z braci?

Wynik. 1152

Rozwiązanie. Ponieważ majątek każdego z braci jest wielokrotnością majątku najbiedniejszego, ich suma, 2018, również musi być jego wielokrotnością. Jednakże, rozkład $2018 = 2 \cdot 1009$ na czynniki pierwsze pozostawia jedynie trzy możliwości na najmniejszy z majątków: 1, 2 lub 1009. Jasne jest, że opcja 1009 jest niemożliwa. Dalej, gdyby majątek ten był równy 1, pozostali trzej bracia mieliby w sumie 2017 zł (2017 jest liczbą pierwszą), toteż druga najmniejsza suma również musiałaby wynosić 1 – sprzeczność. Zatem, najbiedniejszy brat musi mieć 2 zł, a pozostali, łącznie, 2016 zł.

Oznaczmy $a < b < c$ majątki pozostałych trzech braci. Zgodnie z warunkami zadania, spełnione są warunki $a \mid b \mid c$ oraz $a + b + c = 2016$. Zauważmy, że podzielność w połączeniu z ostrą nierównością implikuje, że $2a \leq b$ oraz $2b \leq c$ – gdyby istniało rozwiązanie, w którym obie te nierówności stają się równościami, byłoby to oczywiście rozwiązanie z najmniejszą możliwą wartością c . Szczęśliwie, $1 + 2 + 4 = 7$ dzieli 2016, zatem istotnie, sumę można zapisać jako

$$\frac{1}{7} \cdot 2016 + \frac{2}{7} \cdot 2016 + \frac{4}{7} \cdot 2016,$$

więc odpowiedź to $\frac{4}{7} \cdot 2016 = 1152$.

Zadanie 47. Andrzej narysował na tablicy symbol $\clubsuit$. Potem trzynastą razy powtórzył procedurę polegającą na starciu tablicy i zapisaniu nowego ciągu symboli, w którym każdy symbol $\heartsuit$ jest zastąpiony parą $\clubsuit\heartsuit$, a każdy symbol $\clubsuit$ jest zastąpiony parą $\heartsuit\clubsuit$. Przykładowo, w wyniku wykonania tej procedury ciąg $\clubsuit\heartsuit\heartsuit$ zostałby zastąpiony ciągiem $\heartsuit\clubsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\clubsuit$. Ile par $\heartsuit\heartsuit$ (bez żadnego innego symbolu pomiędzy) będzie się znajdowało na tablicy po wykonaniu wszystkich operacji? Liczone pary mogą się nakładać, przykładowo w ciągu $\heartsuit\heartsuit\heartsuit$ są trzy pary $\heartsuit\heartsuit$.

Wynik. 1365

Rozwiązanie. Niech A_n oznacza ciąg zapisany przez Andrzeja na tablicy bezpośrednio po wykonaniu n -tej operacji (oraz $A_0 = (\clubsuit)$), a h_n oznacza liczbę par $\heartsuit\heartsuit$ w A_n . Zauważmy, że każda para $\heartsuit\heartsuit$ w A_n mogła powstać tylko z pary $\heartsuit\clubsuit$ w A_{n-1} , która z kolei mogła powstać albo z $\heartsuit\heartsuit$, albo z $\clubsuit$ w A_{n-2} . Wobec tego $h_n = h_{n-2} + 2^{n-3}$ dla $n \geq 3$, gdyż w A_{n-2} jest dokładnie 2^{n-3} symboli $\clubsuit$. W szczególności dla nieparzystych n uzyskujemy

$$h_n = 2^{n-3} + 2^{n-5} + \dots + 2^0 + h_1 = \frac{1}{3}(2^{n-1} - 1),$$

gdyż $h_1 = 0$. Stąd szukany wynik to $h_{13} = 1365$.

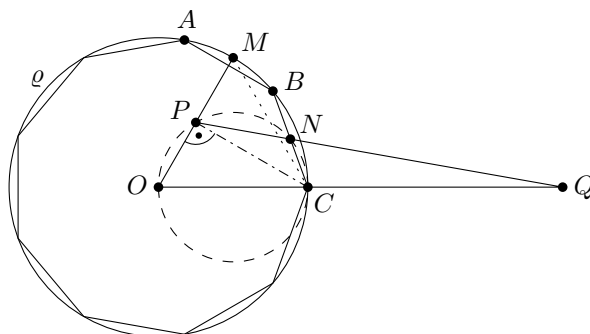
Zadanie 48. Dziewięciokąt foremny $ABCDEFGHI$ jest wpisany w okrąg ϱ o środku w O . Niech M będzie środkiem (krótszego) łuku AB okręgu ϱ , P środkiem odcinka MO , a N środkiem odcinka BC . Niech proste OC i PN przecinają się w punkcie Q . Ile wynosi miara kąta $\angle NQC$ (w stopniach)?

Wynik. 10°

Rozwiązanie. Zauważmy, że skoro C i M leżą na ϱ , to $OC = OM$. Bezpośrednie obliczenia pokazują, że $\angle MOC = 60^\circ$, więc $\triangle OCM$ jest równoboczny. Wobec tego, skoro P jest środkiem OM , to $\angle OPC = 90^\circ$. W połączeniu z $\angle ONC = 90^\circ$ uzyskujemy, że na czworokącie $OCNP$ można opisać okrąg.

Bezpośrednio wyznaczamy miarę kąta $\angle OCN = 70^\circ$, skąd $\angle OPN = 180^\circ - \angle OCN = 110^\circ$ i ostatecznie

$$\angle NQC = \angle PQO = 180^\circ - \angle POQ - \angle QPO = 10^\circ.$$



Zadanie 49. Anna wybrała trzy dodatnie liczby całkowite x, y, z , sumujące się do 2018, oraz powiedziała x Xenie, y Yenie, a z Zenie. Żadna z tej trójki nie знаła pozostałych dwóch liczb, ale wszystkie wiedziały, że $x + y + z = 2018$. Wywiązała się między nimi następująca konwersacja (zakładamy, że nikt nie kłamał):

- Xena: Wiem, że Yena i Zena usłyszały różne liczby.
- Yena: Aha, dzięki tej informacji jestem pewna, że wszystkie trzy usłyszałyśmy różne liczby!
- Zena: W takim razie teraz wiem, co każda z nas usłyszała.

Wyznacz trójkę (x, y, z) .

Wynik. (3, 2, 2013)

Rozwiązanie. Wypowiedź Xeny mówi nam dokładnie tyle, że x jest nieparzysta.

Sprawdźmy, czy y może być nieparzysta. Znaczyłoby to, że Yena od początku wiedziała, że x i z są różne. Jeśli ponadto mielibyśmy $y \geq 1009$, Yena wiedziałaby, że wszystkie liczby są różne od samego początku. Z drugiej strony, gdyby $y \leq 1007$, to mimo komentarza Xeny, Yena nie miałaby pewności, że jej liczba jest różna od x . Wnioskujemy, że y musi być parzysta, a w konsekwencji, z musi być nieparzysta.

Zauważmy, że y nie może być podzielna przez 4. Gdyby tak było, liczba $t = \frac{2018-y}{2}$ byłaby nieparzysta, zatem Yena nie mogłaby wykluczyć możliwości, że $x = z = t$.

Przeanalizujmy teraz wypowiedź Zeny. Możemy łatwo wykazać, że $y = 2$: Zena nie potrafi odróżnić trójki (x, y, z) od $(x + 4, y - 4, z)$, więc skoro ma pełną wiedzę, musi wiedzieć, że $y \leq 4$. Podobnie, x nie może być większa od 4. Ograniczyliśmy więc do dwóch możliwości: $x = 1$ lub $x = 3$. Jednakże, w pierwszym z tych przypadków, Zena, znając $z = 2015$, uzyskałaby pełną informację jeszcze przed uwagą Yeny. Ostatecznie, dedukujemy, że $x = 3, y = 2$ i $z = 2013$.

Zadanie 50. Czarodzieje Arytmetyk i Kombinatoryka rywalizują ze sobą w pojedynku. Każde z nich ma 100 punktów siły (PS). Zakłęcie Arytmetyka trafia Kombinatorykę z prawdopodobieństwem 90% i w przypadku sukcesu zabiera 60 PS. Zakłęcie Kombinatoryki jest skuteczne w 60% przypadków, ale zabiera 130 PS. Czarodzieje rzucają zaklęcia na zmianę; Arytmetyk zaczyna. Pojedynek kończy się, gdy jeden z uczestników straci wszystkie punkty siły. Drugi z nich zostaje wtedy zwycięzcą. Wyznacz prawdopodobieństwo wygranej Arytmetyka.

Wynik. 45/128

Rozwiązanie. Dokładna liczba HP nie jest istotna — Arytmetyk przegrywa, gdy trafi go jedno zakłęcie, natomiast Kombinatoryka, gdy trafią ją dwa zaklęcia. Załóżmy najpierw, że każdy z czarodziejów ginie, gdy trafi go jedno zakłęcie, a pojedynek rozpoczyna Arytmetyk. Oznaczmy prawdopodobieństwo zwycięstwa Arytmetyka przez q . W tym momencie Arytmetyk może wygrać albo jeśli jego zakłęcie będzie skuteczne (co zdarzy się z prawdopodobieństwem 0.9), albo jeśli spudłuje zarówno on jak i Kombinatoryka (co zdarza się z prawdopodobieństwem $0.1 \cdot 0.4$). W drugim przypadku Arytmetyk znów wygrywa z prawdopodobieństwem q . Otrzymujemy więc równanie:

$$q = 0.9 + 0.1 \cdot 0.4 \cdot q,$$

z którego wynika $q = 15/16$.

Policzmy teraz prawdopodobieństwo, że Arytmetyk wygra pojedynek. Oznaczmy je przez p . Jeżeli Arytmetyk trafi, a Kombinatoryka spudłuje (prawdopodobieństwo $0.9 \cdot 0.4$) dochodzimy do sytuacji z poprzedniego paragrafu i Arytmetyk wygrywa z prawdopodobieństwem $q = 15/16$. Z drugiej strony, jeżeli oboje spudłują (prawdopodobieństwo $0.1 \cdot 0.4$) to Arytmetyk wygrywa znów z prawdopodobieństwem p . Możemy więc napisać równanie:

$$p = 0.9 \cdot 0.4 \cdot \frac{15}{16} + 0.1 \cdot 0.4 \cdot p.$$

Rozwiązując je otrzymujemy prawdopodobieństwo wygranej Arytmetyka $p = 45/128$.

Zadanie 51. Niech $a(1), a(2), \dots, a(n), \dots$ będzie rosnącym ciągiem dodatnich liczb całkowitych spełniającym zależność $a(a(n)) = 3n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n . Wyznacz $a(2018)$.

Ciąg jest rosnący jeśli $a(m) < a(n)$ dla $m < n$.

Wynik. 3867

Rozwiązanie. Jeżeli $a(1) = 1$, to również $a(a(1)) = 1 \neq 3 \cdot 1$, co jest niemożliwe. Wobec tego, skoro ciąg jest rosnący, to $1 < a(1) < a(a(1)) = 3$ i w konsekwencji $a(1) = 2$. Wykorzystując warunek dany w treści zadania, uzyskujemy $a(3n) = a(a(a(n))) = 3a(n)$ dla wszystkich n . W oparciu o tę tożsamość łatwo wykazać indukcyjnie, że skoro $a(1) = 2$, to $a(3^m) = 2 \cdot 3^m$ dla każdego m i w konsekwencji $a(2 \cdot 3^m) = a(a(3^m)) = 3^{m+1}$. Istnieje dokładnie $3^n - 1$ liczb całkowitych i o tej własności, że $3^n < i < 2 \cdot 3^n$ oraz dokładnie $3^n - 1$ takich liczb całkowitych j , że $a(3^n) = 2 \cdot 3^n < j < 3^{n+1} = a(2 \cdot 3^n)$, więc skoro ciąg $a(n)$ jest rosnący, to wynika z tego, że $a(3^n + b) = 2 \cdot 3^n + b$ dla wszystkich $0 < b < 3^n$. Wobec tego $a(2 \cdot 3^n + b) = a(a(3^n + b)) = 3^{n+1} + 3b$. Ponieważ $2018 = 2 \cdot 3^6 + 560$, więc ostatecznie $a(2018) = 3^7 + 3 \cdot 560 = 3867$.

Zadanie 52. Trójkąt równoboczny T o boku długości 2018 jest podzielony na 2018^2 małych trójkątów równobocznych o boku długości 1. Zbiór M wierzchołków tych małych trójkątów nazwiemy *niezależnym*, jeżeli dla każdych dwóch różnych punktów $A, B \in M$ odcinek AB nie jest równoległy do żadnego z boków trójkąta T . Jaka jest największa możliwa liczba elementów zbioru niezależnego?

Wynik. 1346

Rozwiązanie. Każdemu wierzchołkowi siatki tworzonej przez małe trójkąty równoboczne przyporządkujemy jego odległości od trzech boków T (przyjmując za jednostkę długość wysokości jednego małego trójkąta). Łatwo zauważyć, że liczby przypisane każdemu z punktów sumują się do 2018. Z drugiej strony dowolna trójka liczb całkowitych nieujemnych o sumie 2018 jednoznacznie wyznacza wierzchołek siatki, któremu przypisane są te trzy liczby (jako odległości od odpowiednich boków), wobec czego zamiast wierzchołków wystarczy rozważać trójki liczb. Każdą taką trójkę nazwiemy *współrzednymi* wierzchołka.

Niezależność zbioru punktów oznacza, że żadne dwa z nich nie mają jednakowej pierwszej, drugiej lub trzeciej współrzędnej. Niech

$$M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_k, y_k, z_k)\}$$

będzie pewnym zbiorem niezależnym. Skoro liczby $x_1, \dots, x_k$ są różnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi, to ich suma jest równa co najmniej

$$0 + 1 + \dots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Analogicznie możemy oszacować wartość sum $y_1 + \dots + y_k$ oraz $z_1 + \dots + z_k$. Z drugiej strony, dla każdego $i = 1, \dots, k$ mamy $x_i + y_i + z_i = 2018$, wobec czego

$$3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \leq (x_1 + \dots + x_k) + (y_1 + \dots + y_k) + (z_1 + \dots + z_k) = 2017k.$$

Stąd wynika, że

$$k \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot 2018,$$

czyli $k \leq 1346$.

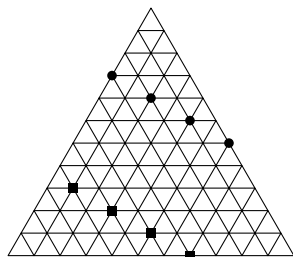
Poniższe dwa ciągi punktów wspólnie tworzą zbiór niezależny wielkości 1346:

$$(0, 672, 1346), (2, 671, 1345), (4, 670, 1344), \dots, (1344, 0, 674);$$

$$(1, 1345, 672), (3, 1344, 671), (5, 1343, 670), \dots, (1345, 673, 1).$$

Stąd wniosek, że szukaną największą liczbą elementów jest 1345.

Na rysunku przedstawiona jest konstrukcja analogicznego zbioru niezależnego dla trójkąta o boku 11 zamiast 2018:



Zadanie 53. Niech ABC będzie trójkątem, w którym $AB = 5$, $AC = 6$, a ω będzie okręgiem opisanym na tym trójkącie. Niech ponadto F i G będą takimi punktami odcinka AC , że $AF = 1$, $FG = 3$, $GC = 2$ oraz niech D i E będą różnymi od B punktami przecięcia odpowiednio prostych BF i BG z okręgiem ω . Jaką długość ma odcinek BC jeśli wiadomo, że proste AC i DE są równoległe?

Wynik. $5\sqrt{5/2}$

Rozwiązanie. Przyjmijmy oznaczenie $x = BC$. Skoro $ACED$ jest trapezem równoramiennym, to możemy również oznaczyć $y = AE = CD$. W końcu niech $p = BF$, $q = DF$, $u = BG$ i $v = GE$.

Kąty BAC i BDC są wpisane w ω i oparte na tym samym łuku, więc są równe. W konsekwencji trójkąty ABF i DCF są podobne, skąd wniosek, że

$$\frac{y}{5} = \frac{q}{1} = \frac{5}{p}.$$

Podobnie otrzymujemy podobieństwo trójkątów BCG oraz AEG i wynikającą zeń równość

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{2} = \frac{4}{u}$$

W końcu skoro AC i DE są równoległe, to

$$\frac{p}{q} = \frac{u}{v}$$

co w połączeniu z dwiema poprzednimi równościami prowadzi do wniosku, że

$$\frac{\frac{25}{y}}{\frac{y}{5}} = \frac{\frac{4x}{y}}{\frac{2x}{y}},$$

czyli $x^2 = 125/2$. Wobec tego $x = 5\sqrt{5/2}$.

Zadanie 54. Wiadomo, że

$$2^{22000} = \underbrace{4569878 \dots 229376}_{6623 \text{ cyfry}}.$$

Dla ilu dodatnich liczb całkowitych $n < 22000$ pierwszą cyfrą liczby 2^n również jest 4?

Wynik. 2132

Rozwiązanie. Jeśli pierwszą cyfrą k -cyfrowej liczby N jest c , to $c10^{k-1} \leq N < (c+1)10^{k-1}$. Wtedy $2c10^{k-1} \leq 2N < (2c+2)10^{k-1}$, czyli pierwsza cyfra liczby $2N$ jest nie mniejsza od pierwszej cyfry liczby $2c$ i nie większa od pierwszej cyfry liczby $2c+1$. Zastosujmy ten fakt do pierwszych cyfr potęg dwójki: dla potęgi dwójki rozpoczynającej się cyfrą 1 wnioskujemy, że pierwsze cyfry kolejno następujących po niej potęg mogą wystąpić w jednym z pięciu następujących układów:

1. 1, 2, 4, 8, 1
2. 1, 2, 4, 9, 1
3. 1, 2, 5, 1
4. 1, 3, 6, 1
5. 1, 3, 7, 1

Liczba 2^0 zaczyna się od 1 i ma jedną cyfrę. Prosta indukcja pokazuje, że dla każdego d istnieje dokładnie jedna liczba $k(d)$ taka, że $2^{k(d)}$ zaczyna się od 1 i ma dokładnie d cyfr oraz dla każdego d liczba $k(d+1) - k(d)$ jest równa 3 (oznaczmy liczbę takich $1 \leq d \leq 6622$ przez x) lub 4 (oznaczmy liczbę takich $1 \leq d \leq 6622$ przez y). Wtedy $x + y = 6622$ oraz $3x + 4y = 21998$, stąd $y = 2132$. Pozostaje zauważyć, że y jest dokładnie liczbą potęg dwójki zaczynających się od 4 o wykładniku mniejszym od 22000.

Zadanie 55. Wyznacz liczby wymierne a, b, c o tej własności, że

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Liczba wymierna to iloraz dwóch liczb całkowitych.

Wynik. $(1/9, -2/9, 4/9)$

Rozwiązanie. Przyjmijmy $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}$ oraz $y = \sqrt[3]{2}$. Skorzystamy z faktu, że liczby $y^3 \pm 1$ są całkowite oraz wykorzystamy wzory skróconego mnożenia dla wyrażeń postaci $A^3 \pm B^3$. Zauważmy najpierw, że

$$1 = y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1),$$

skąd wobec równości $3 = y^3 + 1$ uzyskujemy

$$y^2 + y + 1 = \frac{3y^2 + 3y + 3}{3} = \frac{y^3 + 3y^2 + 3y + 1}{3} = \frac{(y+1)^3}{3}.$$

Zatem $x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2 + y + 1} = \frac{3}{(y+1)^3}$.

Ponadto, skoro $3 = y^3 + 1 = (y+1)(y^2 - y + 1)$, to $\frac{1}{y+1} = \frac{y^2 - y + 1}{3}$ i ostatecznie

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1).$$

Tym samym udowodniliśmy, że trójka $(a, b, c) = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$ spełnia warunki zadania.

Można udowodnić, że przedstawienie x w postaci sumy trzech pierwiastków sześciennych z liczb wymiernych jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności składników.