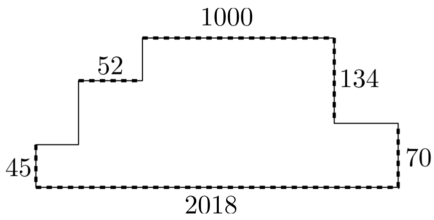
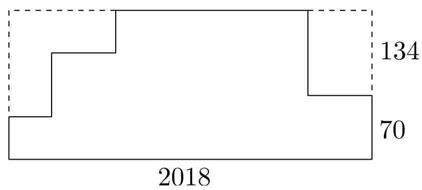
Problema 1. În figură este reprezentat un decagon în care toate laturile formează unghiuri drepte. Lungimile anumitor laturi (cele punctate) se știu și sunt exprimate în cm.



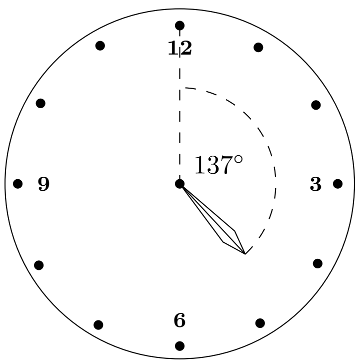
Care este perimetrul decagonului exprimat în cm?

Răspuns. 4444

Soluție. Îndoind colțurile "interioare" în "exterior", decagonul se transformă într-un dreptunghi de dimensiuni 2018 și $70 + 134 = 204$. De aceea perimetrul este $2 \cdot (2018 + 204) = 4444$.



Problema 2. Minutarul acestui ceas lipsește. Câte minute au trecut de la ultima oră exactă (întreagă), dacă unghiul dintre orar și segmentul care unește centrul ceasului cu 12 este de $137°$?



Răspuns. 34

Soluție. Deoarece orarul parcurge $360° : 12 = 30°$ într-o oră, în 2 minute parcurge $1°$. De aceea, a parcurs $137° - 4 \cdot 30° = 17°$ după ora 4, deci au trecut $17 \cdot 2 = 34$ minute.

Problema 3. Patru elevi, Kevin, Liam, Madison, și Natalie, au participat la un test. Știm că punctajele obținute de ei sunt 2, 12, 86 și 6 în această ordine. Mai știm că:

- punctajul obținut de Kevin este *pampam* decât punctajul obținut de Madison,
- punctajul obținut de Madison este *pampam* decât punctajul obținut de Liam,
- punctajul obținut de Natalie este *pampam* decât punctajul obținut de Liam,
- punctajul obținut deKevin este *pampam* decât punctajul obținut de Natalie.

unde *pampam* înseamnă "mai mare" sau "mai mic" (în toate cele patru cazuri cuvântul are același înțeles). Care este suma rezultatelor obținute de Madison și Natalie?

Răspuns. 18

Soluție. Se poate observa că dacă *pampam* înseamnă mai mare, atunci Kevin are cel mai mare punctaj și Liam are cel mai mic punctaj și, dacă *pampam* înseamnă mai mic, atunci situația este inversă. În oricare situație, Madison și Natalie mereu vor avea punctajele din mijloc, adică 6 și 12. De aceea suma punctajelor celor doi este 18.

Problema 4. Jack și John stau într-o piață de forma unui pătrat și numără casele din jurul lor. Fiecare începe să numere (în sensul acelor de ceasornic) de la o casă diferită, așa că numărul 4 al casei lui Jack este numărul 16 al cei lui John, și casa cu numărul 12 a lui Jack corespunde casei cu numărul 7 a lui John. Câte case se află în piață?

Răspuns. 17

Soluție. Deoarece casa 4 a lui Jack este casa cu numărul 16 a lui John, există un segment de case unde numărul caselor lui John este mai mare cu 12. Acest segment de case trebuie să se termine înainte ca Jack să ajungă la casa cu numărul 12, deoarece, altfel, John ar obține $12 + 12 = 24$. Din cauză că întotdeauna numărul scade cu numărul total de case atunci când se ajunge la finalul numărării, observăm că sunt $24 - 7 = 17$ case în piață.

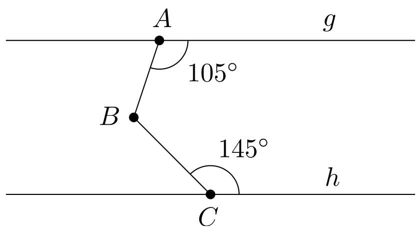
Problema 5. Doris vrea să curețe aparatul de cafea și, conform manualului de instrucțiuni, ea trebuie să folosească o soluție obținută din patru părți apă și o parte oțet de concentrație 10% . Din păcate, ea are la dispoziție oțet de concentrație 40% . Câte părți de apă trebuie să combine cu o parte de oțet de concentrație 40% pentru a putea obține soluția necesară curățării aparatului de cafea?

Notă: Oțetul de concentrație $n\%$ este obținut din n părți oțet și$100 - n$ părți apă.

Răspuns. 19

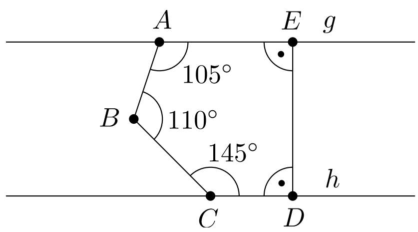
Soluție. În instrucțiuni, soluția este obținută din 1 parte oțet și 5 părți apă. Aceeași soluției se obține din 1 parte oțet de concentrație $40\% = 4 \cdot 10\%$ și $4 \cdot 5 = 20$ părți apă. Deci sunt necesare 19 extra părți de apă.

Problema 6. Dacă g este paralelă cu h și unghiurile A și C sunt de măsură $105°$,respectiv $145°$, așa cum este indicat în figură, care este măsura unghiului $\angle CBA$?

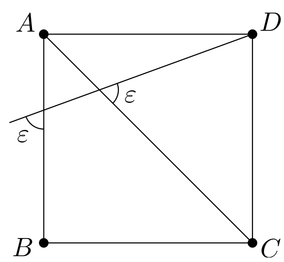


Răspuns. 110°

Soluție. Se consideră punctele D, E pe h, respectiv g, astfel încât ED este perpendiculară pe cele două drepte, formându-se pentagonul $ABCDE$. Cum suma unghiurilor unui pentagon este $540°$, măsura unghiului căutat este $540° - 180° - 105° - 145° = 110°$.



Problema 7. Dacă $ABCD$ este un pătrat, care este măsura unghiului ε (în grade)?



Răspuns. 67.5°

Soluție. Fie X, Y notații pentru unghiurile de măsură ε. Atunci $\angle AXY = \angle AYX = \varepsilon$. Deoarece $\angle XAY = \angle CAB = 45°$, din suma unghiurilor triunghiului XYA obținem

$$45° + \varepsilon + \varepsilon = 180°,$$

adică $\varepsilon = 67.5°$.

Problema 8. Cederic s-a născut în ziua în care mama sa împlinea 27 de ani. De câte ori se poate întâmpla ca vârsta lui Cederic să fie vârsta mamei citită în sens invers?

Notă: Cifra unităților, dacă este zero, se ignoră, adică 470 citit invers este 74.

Răspuns. 7

Soluție. Fie c vârsta lui Cederic și m vârsta mamei, c fiind egal cu m citit invers. Numerele c și m au același număr de cifre (presupunem că c este posibil să înceapă cu cifra zero, dacă m are cifra unităților zero), care este cel puțin 2. Fie a și b cifrele unităților numerelor c și, respectiv m. Cum mama lui Cederic are 27 de ani, se observă că putem avea $a + 7 = b$ sau $a + 7 = 10 + b$. Dacă vârsta mamei ar fi cel puțin egală cu 100, diferența dintre primele cifre ale vârstelor lor poate fi cel mult 1, ceea ce nu este posibil, deoarece ele sunt exact cifrele b și a. În concluzie, numerele c și m au 2 cifre.

Dorim să aflăm toate numerele $\overline{ab}$ astfel încât

$$\overline{ab} = \overline{ba} + 27.$$

Știm că $a > b$, deci condiția $a + 7 = b$ nu este adevărată. Din relația $a + 7 = 10 + b$ obținem $a = b + 3$. Deoarece $a \leq 9$, obținem că $b \leq 6$. Pentru fiecare cifră $b \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, obținem cifra a astfel încât $a = b + 3$. Se observă ușor că pentru aceste cifre relația $\overline{(b+3)b} = \overline{b(b+3)} + 27$ este adevărată. Situația cerută se poate întâmpla de 7 ori: când Cederic are 3, 14, 25, 36, 47, 58 și 69 ani.

Problema 9. Julia folosește 32 de cuburi albe și 32 cuburi negre cu laturile de lungime egală cu 1 pentru a forma un cub mare cu dimensiunea $4 \times 4 \times 4$. Ea vrea ca fețele cubului mare să conțină cât mai multe fețe albe ale cuburilor mici. Care este valoarea maximă a raportului dintre aria părții albe și aria cubului?

Răspuns. 3/4

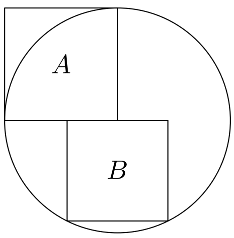
Soluție. Dacă un cubuleț este așezat într-un colț, atunci trei dintre fețele sale sunt vizibile. Dacă este așezat pe muchia cubului mare, două fețe sunt vizibile, iar dacă este așezat în interiorul unei fețe laterale a cubului mare doar o față este vizibilă. Cum sunt opt colțuri și pe fiecare muchie mai putem pune încă două cubulețe, obținem 32 locuri în care putem plasa cubulețele albe, obținând astfel raportul maxim cerut. În acest fel fiecare față laterală a cubului mare arată identic, având doisprezece fețe albe și patru negre. De aceea valoarea raportului este $12/16 = 3/4$.

Problema 10. O sută de persoane au participat la o selecție pentru formarea unui echipaj ce va zbura spre planeta Mercur. Fiecare potențial astronaut a participat la trei teste ce verifică anumite criterii de sănătate, psihologice și experiență profesională. Doar douăzeci și șase de persoane au trecut testul de sănătate. Șaizeci dintre participanți au picat mai mult de un test dintre cele trei. Optzeci și trei de persoane au picat fie testul psihologic, fie testul de experiență profesională, dar niciunul nu a picat ambele teste. Câți participanți au fost aleși pentru misiune, adică au trecut toate testele?

Răspuns. 3

Soluție. Deoarece nimeni nu a picat și testul psihologic și testul de experiență profesională, toți participanții care au picat la cel puțin două teste au ratat misiunea din cauza testului de sănătate. Astfel $(100 - 26) - 60 = 14$ persoane au picat doar testul de sănătate. Cum 83 persoane au picat fie testul psihologic, fie testul de experiență profesională, obținem 97 de persoane care au picat cel puțin un test, deci doar 3 astronauți au fost selectați.

Problema 11. Pătratul A are două laturi ce reprezintă raze în cerc, iar pătratul B are două vârfuri pe același cerc și o parte a unei laturi comună cu o parte a unei laturi a pătratului A. Aflați raportul dintre aria pătratului A și aria pătratului B.

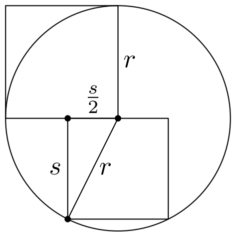


Răspuns. $5 : 4$

Soluție. Fie s lungimea laturii pătratului B. Observăm din simetrie că centrul cercului se află pe mijlocul laturii pătratului B, împărțind-o pe aceasta în două părți de lungime $s/2$. Din teorema lui Pitagora, obținem

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{5}{4}s^2,$$

de unde raportul cerut este 5 : 4.



Problema 12. Determinați ultimele două zecimale ale produsului

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Răspuns. 10

Soluție. Cum în produs avem $2 \cdot 5$, ultima cifră este 0. Cifra zecilor se obține din ultima cifră a produsului $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 37$. Este suficient să folosim ultima cifră din fiecare rezultat obținut în urma unei înmulțiri. Mai mult, putem ignora cifra unu dacă este ultima cifră. Deci va trebui să determinăm ultima cifră a produsului

$$3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9.$$

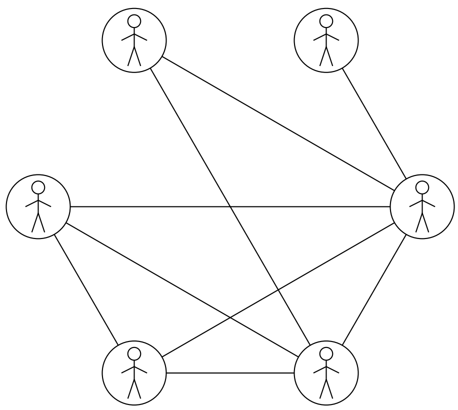
Cum $3 \cdot 7 = 21$ are ultima cifră 1, putem omite perechile de 3 și 7. Rămânem cu $9 \cdot 9$, care are ultima cifră 1. În concluzie, ultimele două zecimale sunt 10.

Problema 13. Când un detectiv a interogat primele cinci din șase persoane suspectate de o infracțiune, el a aflat că au, respectiv, 1, 2, 3, 4 și 5 prieteni dintre toți cei șase suspecți. El știe că prietenia este reciprocă și a decis să-și dea seama de numărul de prieteni ai ultimului suspect înainte de interogatoriu. Câți au fost ei?

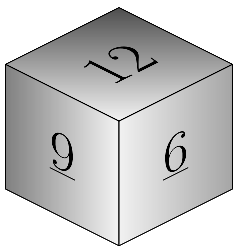
Răspuns. 3

Soluție. Fie n numărul de prieteni ai ultimului suspect. Suspectul cu cinci prieteni este prieten cu toți ceilalți, deci prin omiterea acestuia, numărul de prieteni al celorlalți scade cu unu. Atunci îl omitem și pe cel care avea un singur prieten deoarece numărul său de prieteni a scăzut la zero. În acest fel am obținut un grup de patru suspecți, despre care știm că au 1, 2, 3, și $n-1$ prieteni printre ei. Repetând ultimii doi pași, obținem un grup și mai mic cu valorile 1 și $n-2$; este evident acum că $n-2=1$, adică $n=3$.

Notă: Soluția problemei se poate obține și din diagrama următoare:



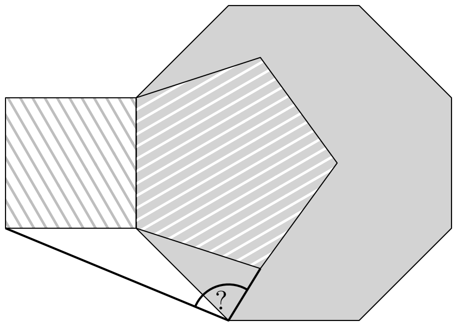
Problema 14. Zarul din imagine are un număr întreg pozitiv scris pe fiecare dintre fețele sale. În plus, produsul numerelor de pe fețele opuse este același pentru toate aceste perechi. Numerele de pe fețe nu trebuie să fie distincte. Care este cea mai mică valoare a sumei tuturor numerelor de pe zaruri?



Răspuns. 40

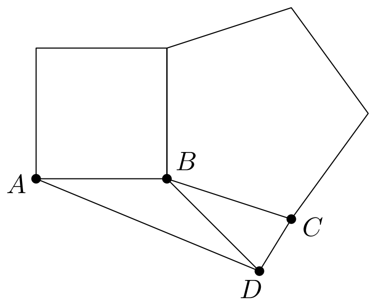
Soluție. Fie P rezultatul numerelor de pe fețele opuse. În mod evident, cu cât P este mai mare, cu atât este mai mare suma totală. Din moment ce P trebuie să fie divizibil cu toate cele trei numere afișate, valoarea cea mai mică a lui P este cel mai mic multiplu comun, $P = 36$. În aceste condiții, numerele afișate pe celelalte fețe sunt 3, 4 și 6, iar suma cerută este de $6 + 9 + 12 + 6 + 4 + 3 = 40$.

Problema 15. Dacă octogonul gri și pentagonul cu dungi sunt regulate, iar patrulaterul dungat este un pătrat, determinați măsura unghiului dintre segmentele îngroșate.



Răspuns. $99°$

Soluție. Notăm anumite vârfuri ca în figură.



Unghiul CBD este diferența dintre unghiurile interioare ale octogonului și pentagonului, deci $\angle CBD = 135° - 108° = 27°$. Se obține ușor că $\angle ABD = 135°$. Cum triunghiurile ABD și CBD sunt isoscele,

$$\angle CDB = \tfrac{1}{2}(180° - \angle CBD) = 76.5°,$$
$$\angle BDA = \tfrac{1}{2}(180° - \angle ABD) = 22.5°.$$

De aceea

$$\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA = 99°.$$

Problema 16. Ministrul are un șofer personal care pleacă de la minister la aceeași oră fixă în fiecare dimineață pentru a îl lua pe ministru de acasă și a-l aduce la minister. Ministrul se trezește la aceeași oră în fiecare zi și mașina vine exact când este gata să plece. Astăzi ministrul s-a trezit devreme și, în consecință, a fost gata să plece cu o oră mai devreme decât de obicei, așa că s-a hotărât să meargă spre mașină (care a plecat de la minister ca de obicei). A întâlnit mașina, a pornit și a ajuns la minister cu douăzeci de minute mai devreme decât de obicei. Câte minute a mers pe jos? Poți să presupui că mașina se mișcă mereu cu aceeași viteză și că ministrului nu îi ia timp să intre în mașină.

Răspuns. 50

Soluție. Timpul pe care ministrul l-a câștigat trezindu-se mai devreme (1 oră) îl împărțim în timpul necesar parcurgerii distanței necunoscute t și timpul rămas mașinii de a parcurge distanța de la punctul de întâlnire la casa ministrului, care este jumătate din timpul salvat, adică

$$60 = t + \frac{20}{2}$$

de unde $t = 50$.

Problema 17. Care este cel mai mic număr natural de cel puțin două cifre care prin eliminarea primei cifre scade de 29 ori?

Răspuns. 725

Soluție. Fie d prima cifră a numărului, k numărul obținut după eliminarea primei cifre, și n numărul de cifre al numărului k. Atunci numărul inițial este egal cu $10^n d + k$ și ipoteza se poate scrie

$$10^n d + k = 29k$$

sau

$$28k = 10^n d.$$

Cum $28 = 2^2 \cdot 7$, și membrul drept trebuie să se dividă cu 28, obținem $d = 7$ și $n \geq 2$. Alegerea $n = 2$ (implică $k = 25$) oferă cel mai mic număr natural 725.

Problema 18. De câte ori în 24 de ore este minutarul unui ceas perpendicular pe orar?

Răspuns. 44

Soluție. Minutarul face 24 de rotații în 24 de ore, iar orarul face 2 rotații în 24 de ore. Din aceste motiv, minutarul se suprapune cu orarul de 22 ori în 24 de ore. În cele 22 de suprapuneri minutarul este perpendicular pe orar de 2 ori, de aceea răspunsul este 44.

Problema 19. Determinați toate numerele palindrom de patru cifre ce pot fi scrise ca sumă de două numere palindrom de trei cifre.

Notă: Un număr palindrom este un număr care rămâne neschimbat atunci când este citit în sens invers, spre exemplu 2018102. Un număr nu poate începe cu zero.

Răspuns. 1111, 1221

Soluție. Fie $\overline{abba}$ un număr palindrom. Cum el se scrie ca sumă de două numere palindrom de trei cifre, acesta nu poate fi mai mare ca 1998, deci $a = 1$. Dacă $\overline{1bb1}$ este egal cu $\overline{cdc} + \overline{xyx}$, atunci

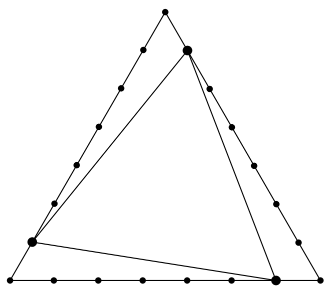
$$1001 + 110b = 101(c + x) + 10(d + y).$$

Cum numărul din membrul stâng se termină cu cifra 1, $c + x$ se termină cu cifra unu. Cum c și x sunt cifre diferite de 0, $c + x = 11$. Prin înlocuire, obținem

$$11(b - 1) = d + y.$$

Cum d și y sunt cifre, membrul drept nu depășește 18, deci $b - 1$ este 0 sau 1. Ambele opțiuni sunt posibile: $1111 = 505 + 606$, $1221 = 565 + 656$.

Problema 20. Laturile unui triunghi echilateral sunt împărțite în 7 segmente astfel încât punctele de divizare să formeze de asemenea un triunghi echilateral (a se vedea figura). Determinați raportul dintre aria triunghiului echilateral mai mic și aria triunghiului echilateral mai mare.



Răspuns. 31/49

Soluție. Aria unui triunghi mic, din cele trei formate, este

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{49}$$

din aria triunghiului mare echilateral, deoarece înălțimea este 1/7 și baza 6/7 din laturile corespunzătoare triunghiului mare. De aceea raportul dintre aria triunghiului mic echilateral și aria triunghiului mare echilateral este

$$1 - 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{31}{49}.$$

Problema 21. Găsiți toate cvadruplurile (a, b, c, d) de numere întregi pozitive astfel încât atunci când vom înlocui literele din tabelul de mai jos cu valorile atribuite, numerele a, b, c, d vor reprezenta câte numere de unu, doi, trei și patru sunt în tabel.

1	2	3	4
a	b	c	d

Răspuns. $(2, 3, 2, 1)$, $(3, 1, 3, 1)$

Soluție. Un număr nu poate să apară în tabel mai mult de cinci ori; oricum, numărul cinci nu poate să apară, deoarece ar ocupa o poziție a numărului ce apare de cinci ori. Deci, doar numerele 1, 2, 3, și 4 pot să apară.

Să arătăm că $d = 1$: Dacă $d = 2$, atunci unul dintre numerele a, b, c trebuie să fie 4, și cum rămân doar două locuri libere, ar trebui să fie b. $(2, 4, 2, 2)$ nu este un cvadruplu valid. Alegerile $d = 3$ și $d = 4$ ne conduc și mai repede la contradicții.

În concluzie, $a \in \{2, 3\}$. Presupunând că $a = 2$, obținem $b, c \in \{2, 3\}$ (nu mai putem avea alți unu și patru), dar $b = 2$ ar contrazice condiția lui b (ar fi trei de doi), deci $b = 3$, și $c = 2$. Dacă $a = 3$, ar trebui să avem în tabel încă un unu, și acesta nu poate să fie c (deja există un alt trei), deci $b = 1$, și $c = 3$.

Problema 22. Peter și-a uitat parola. El își amintește doar că parola era alcătuită din nouă litere latine și conține cuvintele ”mate” și ”drama”. Câte parole îndeplinesc aceste cerințe?

Notă: Cele două cuvinte nu pot fi separate de alte litere, spre exemplu cuvântul ”marte” nu este considerat ca un cuvânt ce conține ”mate”. Alfabetul conține 26 de litere.

Răspuns. 2030

Soluție. În primul rând, considerăm cazul în care cele două cuvinte nu au litere în comun. Există două posibilități de alăturare a acestora: dramamate și matedrama.

Dacă au litere în comun, atunci există o singură posibilitate, și anume: dramate. Există doar trei posibilități de a alege literele lipsă: '**dramate', '*dramate*', 'dramate**'. În fiecare caz există $26^2 = 676$ moduri de a alege cele două litere. De aceea, în aceste situații sunt $676 \cdot 3 = 2028$ parole posibile.

În total, există $2028 + 2 = 2030$ parole posibile.

Problema 23. Dacă se aleg două numere din mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$, probabilitatea ca acestea să fie consecutive este $\dfrac{1}{21}$. Determinați n.

Răspuns. 42

Soluție. Sunt $n-1$ perechi de numere consecutive în mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ și sunt $\frac{1}{2}n(n-1)$ posibilități de a alege două numere diferite. Obținem

$$\frac{n-1}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{2}{n} = \frac{1}{21}$$

de unde $n = 42$.

Problema 24. Arthur, Ben și Charlie au jucat tenis de masă folosind următoarele reguli: în fiecare rundă, doi jucători au jucat unul împotriva celuilalt, iar celălalt s-a odihnit. Câștigătorul rundei a jucat apoi în runda următoare cu jucătorul care s-a odihnit. În prima rundă, Arthur a jucat împotriva lui Ben. După mai multe runde, Arthur a marcat 17 victorii și Ben 22. De câte ori au jucat Arthur și Ben unul împotriva celuilalt?

Răspuns. 20

Soluție. Observăm că, de fiecare dată când Charlie câștigă o rundă, nu are niciun impact asupra numărului de runde câștigate de Arthur sau Ben, nici nu are niciun impact asupra numărului de runde când Charlie nu joacă. Prin urmare, putem presupune că Charlie întotdeauna pierde. Cu alte cuvinte, fiecare victorie a lui Arthur împotriva lui Ben crește scorul general al lui Arthur cu două victorii (dacă nu s-a întâmplat în ultima rundă) și invers. Din moment ce numărul victoriilor lui Arthur este impar, concluzionăm că ultima rundă împotriva lui Arthur sau Ben, este câștigată de Arthur. Prin urmare, dacă vom adăuga încă o rundă (Arthur împotriva lui Charlie, câștigată de Arthur), numărul total de runde când Charlie nu ar juca ar fi o jumătate din suma finală a scorurilor lui Arthur și Ben, adică $(18 + 22)/2 = 20$.

Problema 25. Clienții din magazinul electronic își pot exprima satisfacția față de un articol achiziționat, evaluându-l online folosind o scală de rating de cinci puncte (1 stea = nesatisfăcător, 5 stele = excelent). Rating-ul mediu al unui smartphone nou lansat a fost de 3,46 stele săptămâna trecută, cu toate acestea, în timp ce încă două persoane și-au prezentat evaluările la începutul acestei săptămâni, acesta a crescut la media actuală de 3,5 stele. Câți oameni au evaluat până acum smartphone-ul?

Răspuns. 52

Soluție. Notăm cu k numărul inițial de rating-uri și cu x suma lor. Notăm cu a, b rating-urile din ultima săptămână. Atunci

$$\frac{x}{k} = 3.46 \qquad \text{and} \qquad \frac{x+a+b}{k+2} = 3.5$$

adică

$$x = \left(3 + \tfrac{23}{50}\right) k, \tag{1}$$

$$x + a + b = \left(3 + \tfrac{1}{2}\right) k + 7. \tag{2}$$

Ecuația (1) implică faptul că k este multiplu de 50. Prin scăderea relației (1) din relația (2), obținem

$$a + b - 7 = \frac{k}{25}.$$

Cum $a, b \leq 5$, membrul stâng este un număr natural mai mic ca 3, deci $k \leq 75$. Concluzionăm $k = 50$, deci 52 de persoane au evaluat produsul.

Problema 26. Juliette are patru perechi de șosete și pe fiecare șosetă este scris unul dintre cuvintele luni, marți, miercuri, joi. Câte moduri există pentru a purta toate aceste șosete de luni până joi, dacă cele două șosete pe care Juliette le poartă ar trebui să fie diferite și niciuna dintre ele nu arată ziua curentă? Niciuna dintre șosete nu poate fi purtată în mod repetat.

Notă: Fiecare șosetă poate fi purtată pe oricare picior, deci nu există șosetă pentru picior drept sau stâng. În plus, purtarea unei șosete pe piciorul drept și a unei alte șosete pe piciorul stâng contează la fel ca și purtarea lor inversată.

Răspuns. 9

Soluție. Vom folosi numerele 1, 2, 3, 4 în loc de numele zilelor. Observăm că în fiecare zi sunt atribuite trei numere distincte: Numărul real al zilei și cele două numere ale șosetelor purtate. Prin urmare, putem descrie în mod echivalent atribuirea șosetelor cu un singur număr pentru fiecare zi - singurul număr din cele patru care nu apare în triplele menționate mai sus. Se deduce că asignările valide ale șosetelor corespund permutărilor $(1, 2, 3, 4)$ care nu lasă niciunul din numere în poziția inițială.

Numărul de rearanjări poate fi calculat după cum urmează: există trei opțiuni de plasare a lui 1, lăsându-i poziția $n \neq 1$. Acum, n are și trei opțiuni pentru a fi puse. Este ușor de văzut că celelalte două numere sunt acum atribuite într-un mod unic, deci există $3 \cdot 3 = 9$ rearanjări și același număr de alegeri ale șosetelor lui Juliette.

Problema 27. Un juriu format din 26 de matematicieni urmează să nominalizeze (cel puțin) cinci filme pentru premii la un festival de filme cu tematică matematică. Au fost 16 filme dintre care aceștia au putut alege. Juriul a ales următoarea procedură: fiecare membru al juriului a votat cinci filme distincte, iar cele cinci filme cu cele mai multe voturi au fost nominalizate; dacă a fost egalitate pe locul cinci, toate aceste filme au fost nominalizate. Care este cel mai mic număr de voturi pe care un film l-ar fi putut primi, astfel încât să fie nominalizat indiferent de rezultatele altor filme?

Răspuns. 21

Soluție. În total au fost $26 \cdot 5 = 130$ de voturi. Dacă un film a primit 20 sau mai puține voturi, celelalte 110 voturi rămase pot fi ușor distribuite astfel încât să fie cinci filme care primesc fiecare câte 21 de voturi. Dacă un film primește cel puțin 21 de voturi, atunci ca să nu fie nominalizat ar implica ca alte cinci filme să primească cel puțin 22 de voturi, obținându-se astfel cel puțin $21 + 5 \cdot 22 = 131$ de voturi, deci o contradicție.

Problema 28. O funcție f cu valori reale satisface relația $f(x) + xf(1-x) = x$ pentru fiecare valoare reală a lui x. Aflați $f(-2)$.

Răspuns. $\frac{4}{7}$

Soluție. Alegând $x = -2$, obținem $f(-2) - 2f(3) = -2$. Alegând $x = 3$, obținem $f(3) + 3f(-2) = 3$. Avem astfel două ecuații liniare cu necunoscutele $f(-2)$ și $f(3)$. Prin înmulțirea celei de a doua ecuații cu 2 și adunarea acesteia la prima, obținem $f(-2) = \frac{4}{7}$.

Problema 29. Numerele de două cifre n, a, b, o, j sunt astfel încât produsul lor, *naboj* este divizibil cu 4420. Determinați cea mai mare valoare posibilă a sumei $n + a + b + o + j$.

Răspuns. 471

Soluție. Prin descompunerea în factori primi obținem $4420 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$. Cum 13 și 17 sunt numere prime, unul dintre numerele n, a, b, o, j trebuie să fie divizibil 13 și altul cu 17. Cum cel mai mic multiplu comun al numerelor 13 și 17 este 221, nu există un număr de două cifre divizibil prin ambele. Fără a pierde generalitatea, putem presupune că n este divizibil cu 17 și a este divizibil cu 13. Astfel $n \leq 85 = 5 \cdot 17$ și $a \leq 91 = 7 \cdot 13$.

Deci $n = 85$ și $a = 91$. Cum $n = 85$ este divizibil cu 5, trebuie să ne mai asigurăm de divizibilitatea cu 4. Dar n și a sunt impare, deci 4 trebuie să dividă boj. De aceea, unul dintre numerele b, o, j este divizibil cu 4, sau două dintre numere sunt divizibile cu 2. Suma mai mare se obține în a doua situație, când $b = o = 98$ și $j = 99$. Suma cerută este $n + a + b + o + j = 85 + 91 + 98 + 98 + 99 = 471$.

În final, să verificăm posibilitățile $n < 85$ sau $a < 91$. Deoarece numerele n și a se divid cu 17 și, respectiv 13, ar însemna că $n \leq 68 = 85-17$ sau $a \leq 78 = 91-13$. Atunci suma $n+a+b+o+j$ ar putea fi cel mult $68+91+3\cdot 99 = 456$ (în primul caz) sau $85 + 78 + 3 \cdot 99 = 460$ (în al doilea caz), adică mai mică decât cea obținută anterior.

Problema 30. Naomi a cumpărat opt mingi de tenis și una de handbal de la un magazin online de sport. Mingile (cu o formă sferică perfectă) au fost ambalate într-o cutie cubică, astfel încât fiecare minge de tenis să fie tangentă la trei din cele șase fețe ale cutiei și la mingea de handbal. Raza mingii de handbal este de 10 cm și raza unei mingi de tenis este de 5 cm. Determinați lungimea unei muchii a cutiei, exprimată în centimetri.

Răspuns. $10(1 + \sqrt{3})$

Soluție. Diagonala cutiei trece prin centrele mingii de handbal și a două mingi de tenis, precum și prin punctele de tangență ale acestor trei mingi. Singura zonă în care diagonala nu este în interiorul unei mingi sunt segmentele dintre o minge de tenis și un colț al cutiei; distanța de la centrul unei mingi de tenis la colț este jumătate din diagonala cubului circumscris mingii. Deci, lungimea diagonalei cutiei este suma

- ($2\times$) 1/2 din diagonala unui cub circumscris unei mingi de tenis,
- ($2\times$) raza unei mingi de tenis,
- diametrul mingii de handbal.

Astfel, diagonala cutiei este egală cu

$$10\sqrt{3} + 10 + 20 = 30 + 10\sqrt{3},$$

și lungimea muchiei cutiei este egală cu

$$\frac{30 + 10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10(1 + \sqrt{3}).$$

Problema 31. Scris în sistemul zecimal, puterea 2^{29} este un număr de nouă cifre distincte. Ce cifră lipsește?

Răspuns. 4

Soluție. Pe de o parte, puterea 2^{29} se poate calcula: spre exemplu, folosim $2^{10} = 1024$, calculăm 1024^2 și $1024^2 \cdot 1024$. În final, împărțim rezultatul prin 2 și obținem $2^{29} = 536\,870\,912$.

Pe de altă parte, putem folosi faptul că un număr întreg și suma cifrelor sale au același rest modulo 9. În plus, $2^n \pmod 9$ este periodic de lungime 6. Cum suma tuturor cifrelor este 45, obținem

$$45 - x \equiv 2^{29} \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod 9$$

unde cu x este notată cifra lipsă din scrierea zecimală a puterii 2^{29}. Obținem $x \equiv 4 \bmod 9$. Deci, cifra lipsă este 4.

Problema 32. Făcând curățenie în podul casei, Ben a găsit un calculator vechi, care arată doar primele zecimale după punctul zecimal, dar a putut calcula rădăcinile pătratice. Spre exemplu, pentru $\sqrt{4}$ calculatorul arată 2.00 și pentru $\sqrt{6} = 2.44949\ldots$ acesta arată 2.44. Care este cel mai mic număr natural a cărui rădăcină pătratică nu este un număr natural, dar pentru care calculatorul va arăta după punctul zecimal doi de zero?

Răspuns. 2501

Soluție. Notăm cu $\mathrm{ftd}(n)$ primele două zecimale după punctul zecimal ale numărului $\sqrt{n}$. Este evident că dacă n crește de la un pătrat perfect la altul, $\mathrm{ftd}(n)$ crește de asemenea; cum suntem interesați de cel mai mic număr natural n, acesta trebuie să fie de forma $k^2 + 1$, unde k este un număr natural.

Când $\sqrt{k^2+1}$ este rotunjit la partea sa întreagă, rezultatul este k, de aceea $\sqrt{k^2+1} - k$ este un număr cuprins între 0 și 1. Afirmația $\mathrm{ftd}(k^2+1) = 0$ este echivalentă cu

$$\sqrt{k^2+1} - k < \frac{1}{100}.$$

Adunând k în ambele părți ale relației, ridicând la pătrat (ambii membri sunt pozitivi) și separând k obținem

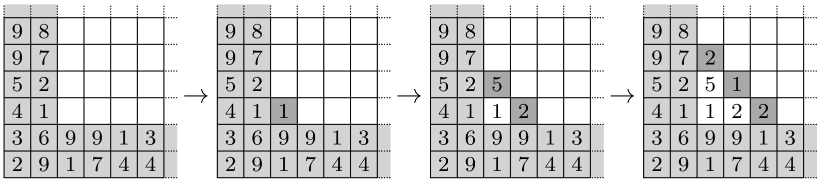
$$k > 50\left(1 - \frac{1}{100^2}\right).$$

Membrul drept este un număr cuprins între 49 și 50; cum k este număr natural, obținem $k \geq 50$. În concluzie, $n = 50^2 + 1 = 2501$ este cel mai mic număr natural căutat.

Problema 33. În fiecare celulă a unei table 2018×2018 este scris un număr de la 1 la 9 astfel încât în orice pătrat 3×3, suma numerelor este divizibilă cu 9. Câte moduri de completare a tablei sunt posibile?

Răspuns. 9^{8068}

Soluție. Umplerea celor 8068 de celule de pe ultimele două rânduri și primele două coloane ale tablei ne oferă o idee de scriere a numerelor în celulele rămase prin umplerea celulelor de pe diagonale consecutive —vezi desenul. Pe de altă parte, este evident că, fiecare umplere corectă induce o umplere a celor 8068 celule. Prin urmare, numărul de umpleri arbitrare a acelor celule este același cu numărul dorit de umpleri corecte ale tabelului.



Problema 34. Determinați toate perechile de numere naturale (n, m) ce satisfac relația $4^n + 260 = m^2$.

Răspuns. $(3, 18)$, $(6, 66)$

Soluție. Ecuația dată este echivalentă cu $m^2 - (2^n)^2 = 260$ care prin factorizarea membrului stâng conduce la $(m - 2^n)(m + 2^n) = 260$. Descompunerea în factori primi a numărului $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$ presupune alegerea următoarelor situații:

$$260 = 1 \cdot 260 = 2 \cdot 130 = 4 \cdot 65 = 5 \cdot 52 = 10 \cdot 26 = 13 \cdot 20,$$

ținând cont că $(m - 2^n) < (m + 2^n)$. Deoarece $(m + 2^n) - (m - 2^n) = 2^{n+1}$, obținem două cazuri $26 - 10 = 2^4$ și $130 - 2 = 2^7$, de unde obținem perechile $(3, 18)$ și $(6, 66)$, care respectă condiția dată.

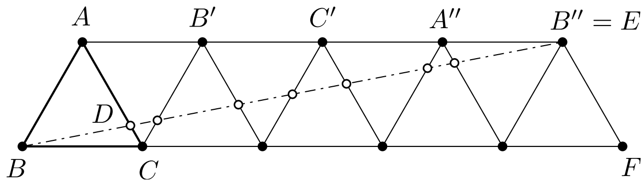
Problema 35. Într-un triunghi echilateral ABC, o rază de lumină ce intră prin vârful B atinge AC în punctul D astfel încât $DC : AC = 1 : 2018$, și este reflectată astfel încât unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie. Reflectarea razei se repetă atâta timp cât raza atinge o latură a $\triangle ABC$. De câte ori a fost raza reflectată (inclusiv prima reflexie) până a ajuns într-un vârf al $\triangle ABC$?

Răspuns. 4033

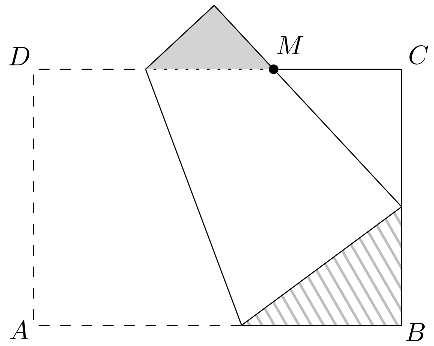
Soluție. În loc să reflectăm raza de lumină, o vom lăsa să meargă drept și reflectăm triunghiul de-a lungul laturii cu care raza este incidentă. Să arătăm că un rând al acestor triunghiuri reflectate este suficient pentru ca raza de lumină să ajungă la un vârf al unuia dintre triunghiuri.

Fie E punctul de intersecție al razei BD cu dreapta ce trece prin A și este paralelă cu BC și, F un punct pe BC astfel încât $EF \parallel AC$. Atunci triunghiurile BCD și BFE sunt asemenea și $BF = 2018BC$. Acest lucru implică faptul că punctul E este obținut prin reflexia triunghiului ABC și că este primul punct astfel obținut pe BD.

Se observă ușor că segmentul BE intersectează $2 \cdot 2017 - 1 = 4033$ laturi de triunghiuri reflectate, care reprezintă numărul de reflexii al razei de lumină. Figura ilustrează soluția problemei cu condiția inițială schimbată în $DC : AC = 1 : 5$.

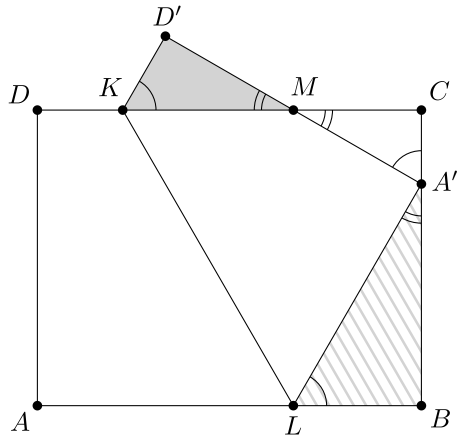


Problema 36. O foaie dreptunghiulară de hârtie $ABCD$ a fost îndoită astfel încât punctul (inițial) A a ajuns pe latura BC și punctul M, unde latura CD intersectează latura (inițială) DA, este exact o treime din CD, adică $CD = 3CM$. Dacă aria triunghiului de culoare gri este 1, care este aria triunghiului hașurat?



Răspuns. 9/4

Soluție. Notăm punctele de intersecție ca în figură.



Triunghiurile KMD', $A'MC$, și $LA'B$ sunt dreptunghice și asemenea, unghiurile congruente fiind marcate pe figură, de aceea vom determine raportul de asemănare dintre două astfel de triunghiuri. Ținând cont de $KD = KD'$ și $LA = LA'$, obținem

$$D'K + KM = DM = \tfrac{2}{3}DC = \tfrac{2}{3}AB$$

și

$$A'L + LB = AB.$$

Deoarece $A'L$ corespunde lui KM și LB corespunde lui KD' în asemănarea menționată mai sus, obținem raportul de asemănare $3/2$. Cum ne interesează raportul ariilor, rezultatul este $(3/2)^2 = 9/4$.

Problema 37. Împărțind polinomul $x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018}$ la polinomul $x^2 - 1$ obținem un rest. Aflați valoare lui x pentru care restul are valoarea 1111.

Răspuns. 185

Soluție. Polinomul se poate scrie

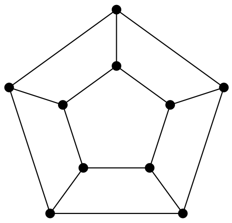
$$\begin{aligned} & x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018} = \\ & \qquad = x(x^2-1) + x(x^4-1) + x(x^6-1) + x(x^8-1) + x(x^{10}-1) + x(x^{2016}-1) + (x^{2018}-1) + 6x + 1. \end{aligned}$$

Dar, cum

$$x^{2k} - 1 = (x^2 - 1)(x^{2k-2} + x^{2k-4} + \cdots + 1),$$

observăm că toate parantezele din membrul drept al egalității se divid cu $x^2 - 1$. Cum gradul polinomului $6x + 1$ este mai mic decât gradul polinomului $x^2 - 1$, concluzionăm că $6x + 1$ este restul căutat. Rezolvând ecuația $1111 = 6x + 1$ obținem răspunsul $x = 185$.

Problema 38. Există zece orașe în Pentagonia, fiecare dintre ele fiind conectate prin trei linii de cale ferată la alte trei orașe, conform diagramei de mai jos. Legislația țării prevede să nu fie două linii de cale ferată cu opriri comune operate de aceeași companie feroviară. În câte moduri pot fi repartizate liniile la trei companii feroviare într-un mod legal?

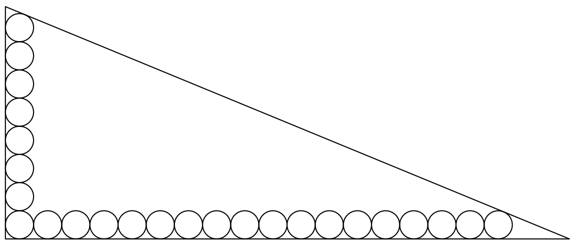


Răspuns. 30

Soluție. Observăm că dacă distribuim liniile din pentagonul exterior, două companii (notate X și Y) vor primi două linii și o companie (Z) doar o linie. Companiile trebuie să fie în ordinea $XYXYZ$ începând de la un anumit oraș. Se arată simplu că, după ce am atribuit aceste linii, restul de linii se vor atribui în mod unic: liniile pentagonului interior sunt atribuite acelorași companii în același mod ca al omologilor lor exteriori și liniile de conectare dintre pentagoane se vor atribui la compania nefolosită.

Aceasta înseamnă că numărul de distribuiri corecte al întregii rețele este egal cu numărul de distribuiri ale pentagonului exterior. Există șase modalități de a aloca cele trei companii la X, Y și Z și cinci posibilități pentru orașul în care începe alocarea $XYXYZ$. Obținem $5 \cdot 6 = 30$ moduri în total.

Problema 39. Un triunghi dreptunghic conține 25 de cercuri de rază 1 tangente la catetele triunghiului, ca în figură.



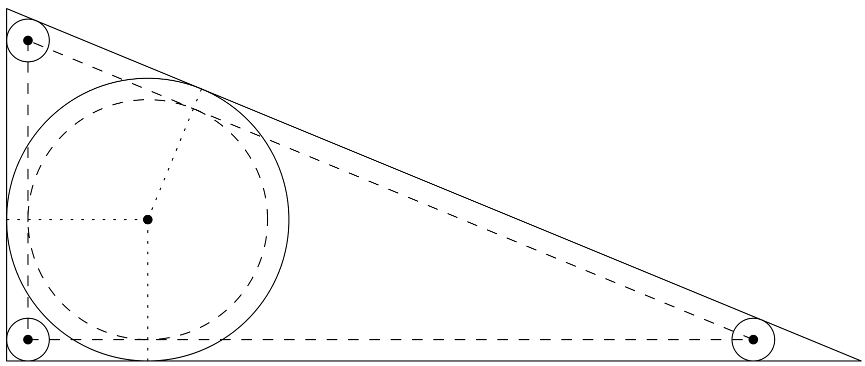
Care este raza cercului înscris în triunghi?

Răspuns. $25 - 13\sqrt{2}$

Soluție. Considerăm triunghiul ale cărui vârfuri sunt centrele cercurilor din colțuri. Aceste este un triunghi dreptunghic de catete de lungimi 14 și, respectiv 34; din teorema lui Pitagora, lungimea ipotenuzei este

$$\sqrt{14^2 + 34^2} = 26\sqrt{2}.$$

În plus, raza cercului înscris în acest triunghi poate fi determinată și este egală cu $(14 + 34 - 26\sqrt{2})/2 = 24 - 13\sqrt{2}$. Cum laturile triunghiului inițial sunt paralele cu laturile noului triunghi și distanța dintre ele este egală cu 1, centrele celor două cercuri coincid și astfel raza cerută este mai mare cu 1 decât raza aflată, adică $25 - 13\sqrt{2}$.



Problema 40. Marge a inventat operația *marging* a unui șir (finit) de numere naturale: având un șir de numere naturale, ea alege patru elemente din șir, le mărește cu 0, 2, 3, și, respectiv 5, și adaugă rezultatele obținute după numerele alese, formând un nou șir. Spre exemplu, fiind dat șirul $(8,3)$, noul șir este $(8,3,10,5,11,6,13,8)$. Dacă Marge începe cu șirul (0) și aplică operația de *marging* până când obține un șir cu cel puțin 2018 numere naturale, care este numărul de pe poziția 2018? (Numărul din stânga este considerat ca fiind primul termen.)

Răspuns. 17

Soluție. Pentru ușurință, vom nota poziția elementelor pornind de la zero. În această situație, prin inducție matematică arătăm că poziția unui număr scris în bază 4 descrie ce operații (și în ce ordine) au fost aplicate pentru a obține numărul din poziția dată. Spre exemplu, șirul obținut de Marge, după două aplicări a operației de *marging*, arată astfel:

$$(\underset{00}{0+0}, \underset{01}{0+2}, \underset{02}{0+3}, \underset{03}{0+5}, \underset{10}{2+0}, \underset{11}{2+2}, \underset{12}{2+3}, \underset{13}{2+5}, \underset{20}{3+0}, \underset{21}{3+2}, \underset{22}{3+3}, \underset{23}{3+5}, \underset{30}{5+0}, \underset{31}{5+2}, \underset{32}{5+3}, \underset{33}{5+5}).$$

(Numerele de pe linia inferioară arată poziția rezultatelor în bază 4.) Cum 2017 scris în baza 4 este133201, numărul de pe poziția 2017 este

$$2+5+5+3+0+2=17.$$

Problema 41. Determinați cel mai mic număr natural n astfel încât ecuația

$$(x^2+y^2)^2+2nx(x^2+y^2)=n^2y^2$$

să admită o soluție (x,y) în numere naturale.

Răspuns. 25

Soluție. Privind ecuația dată ca o ecuație de grad doi în necunoscuta n, obținem soluția

$$n=\frac{(x^2+y^2)\big(x+\sqrt{x^2+y^2}\big)}{y^2}$$

(cealaltă soluție este negativă deoarece $\sqrt{x^2+y^2}>x$), sau

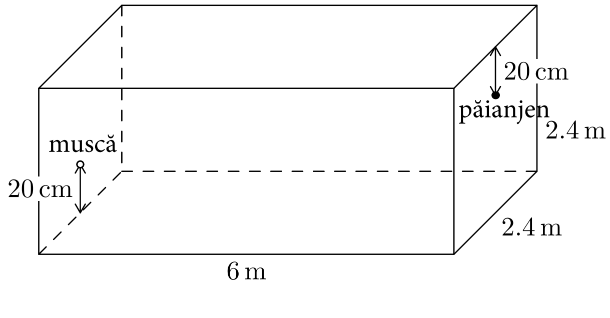
$$ny^2=(x^2+y^2)\big(x+\sqrt{x^2+y^2}\big).$$

Fie $d=(x,y)$ și $x=x_0d$, $y=y_0d$. Prin înlocuire în ecuație, obținem după simplificare

$$ny_0^2=d(x_0^2+y_0^2)\big(x_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2}\big).$$

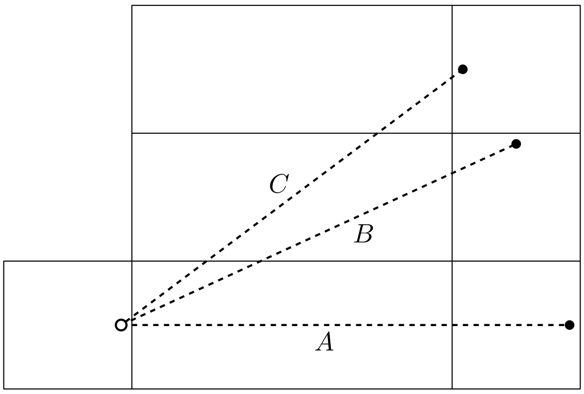
Cum x_0 și y_0 sunt prime între ele, obținem y_0^2 și $x_0^2+y_0^2$ sunt prime între ele, deci $x_0^2+y_0^2 \mid n$. În plus, $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ indică faptul că $x_0^2+y_0^2$ trebuie să fie pătrat perfect. Este cunoscut că $5^2=25$ este cel mai mic pătrat perfect care se poate scrie ca sumă de două pătrate perfecte, 3^2+4^2. Cum $n\geq 25$, prin verificarea în ecuație a valorilor $x=4$, $y=3$, obținem că $n=25$ este valoarea căutată.

Problema 42. Într-o cameră paralelipipedică cu dimensiunile $6\,\text{m}\times 2.4\,\text{m}\times 2.4\,\text{m}$ (lungime $\times$ lățime $\times$ înălțime), un păianjen se află pe un perete $2.4\,\text{m}\times 2.4\,\text{m}$ la $20\,\text{cm}$ față de tavan și la distanțe egale față de muchiile laterale ale peretelui. O muscă, se află pe peretele opus, pe axa verticală de simetrie a acestuia, dar la $20\,\text{cm}$ față de podea. Dacă musca nu se mișcă, care este cea mai scurtă distanță (în metri) pe care păianjenul trebuie să o parcurgă de-a lungul pereților camerei pentru a captura musca?



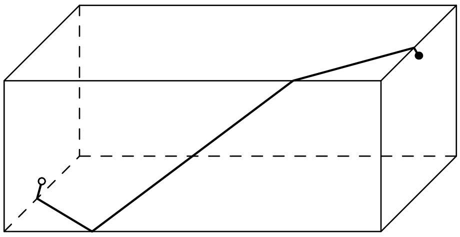
Răspuns. 8

Soluție. Examinând drumurile posibile pe care păianjenul trebuie să le parcurgă, este evident că cel mai scurt este acela în linie dreaptă atunci când camera este desfășurată în plan. Cercul alb reprezintă musca,iar cele negre păianjenul, locația lui în plan depinzând de diferitele moduri în care se poate desfășura încăperea.



Există trei (până la o simetrie) drumuri posibile prin care păianjenul ajunge la muscă, traversând unul, doi sau trei pereți ai camerei; drumurile, în figură, sunt marcate cu A, B, și C. Drumul A este de lungime 8.4 m; folosind teorema lui Pitagora se obține lungimea drumului B egală cu $\sqrt{66.32}$ m și a drumului C egală cu 8 m. Astfel, cel mai scurt drum este C, deci răspunsul este 8 m.

Desenul următor arată cel mai scurt drum în trei dimensiuni:



Problema 43. Alați minimul expresiei

$$(6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2$$

pentru $x, y \in \mathbb{R}$.

Răspuns. 49

Soluție. Fie $V(x, y) = (6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2$. Să ne reamintim că cercul de centru $[C_1, C_2]$ și rază $R > 0$ poate fi parametrizat (adică coordonatele tuturor punctelor de pe cerc pot fi exprimate) prin unghiul α folosind formula $(x_1, x_2) = (C_1 + R\cos(\alpha), C_2 + R\sin(\alpha))$. Să considerăm cercurile k_1 și k_2 de centre $(0, 0)$ și $(6, 8)$ și raze 1 și, respectiv 2. Atunci, din teorema lui Pitagora, obținem că $V(x, y) = |AB|^2$ unde $A \in k_1$ cu unghiul x și $B \in k_2$ cu unghiul y. Rezultă că minimul expresiei $V(x, y)$ este pătratul distanței dintre cele mai apropiate puncte de pe cercurile k_1 și k_2 și poate fi calculată folosind distanța dintre centrele celor două cercuri: $\sqrt{6^2 + 8^2} - 1 - 2 = 7$. Astfel minimul expresiei $V(x, y)$ este egal cu $7^2 = 49$.

Problema 44. Care este cel mai mic număr natural care are ultima cifră 2 și care prin mutarea ultimei cifre în fața primei cifre, se obține un număr de două ori mai mare decât cel inițial?

Răspuns. 105 263 157 894 736 842

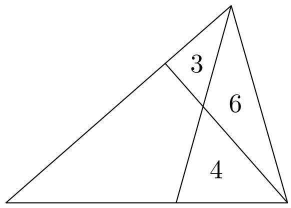
Soluție. Notăm cu N numărul căutat. Cum N se termină cu 2, $2N$ se va termina cu 4, deci cifra zecilor a numărului N este 4. Fie d_i cifra de pe poziția i din numărul N, numărând de la dreapta spre stânga (adică d_1 este cifra unităților). Ținând cont de regulile de modificare a cifrelor unui număr la înmulțirea cu doi, observăm că cifrele numărului N satisfac

$$d_i = \begin{cases} 2d_{i-1} \bmod 10 & \text{if } d_{i-2} < 5, \\ 2d_{i-1} \bmod 10 + 1 & \text{if } d_{i-2} \geq 5 \end{cases}$$

pentru toți $i > 2$. În acest mod putem să scriem cifrele lui N. Ne oprim când obținem cifra 1 și la pasul următor cifra 2: numărul care începe cu 1 este N, deoarece prin înmulțirea cu 2 prima cifră devine 2, adică ultima cifră din numărul inițial. Numărul căutat este

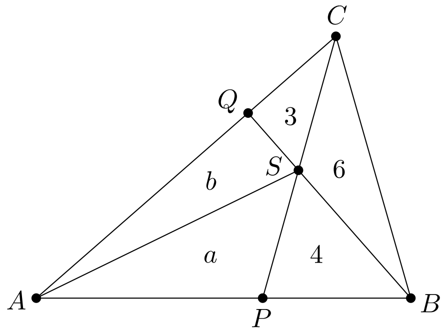
$$N = 105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

Problema 45. Mama Berta împarte prin două linii drepte bucata sa de pământ de formă triunghiulară în patru bucăți și îi oferă bucata de arie 6 fiicei sale Betty, pe cea de arie 4 fiicei sale Barbara și pe cea mai mică, de arie 3, fiicei mai mici Francis. Cea mai mare bucată de pământ o păstrează pentru ea. Care este aria acestei bucăți de pământ?



Răspuns. 19/2

Soluție. Folosim notațiile din figură.



Din raportul ariilor, S divide QB în raportul $1:2$ și PC în raportul $2:3$. Desenând linia AS și notând aria triunghiului ASQ cu b și aria triunghiului APS cu a obținem următoarea ecuație:

$$\frac{b}{a+4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{b+3}{a} = \frac{3}{2}$$

Acestea sunt echivalente cu

$$2b = a + 4$$
$$2b + 6 = 3a,$$

de unde se obține soluția $a = 5$ și $b = \frac{9}{2}$. Aria porțiunii de pământ $APSQ$ este $\frac{19}{2}$.

Problema 46. Patru frați au în total 2018 de euro. Se știe că bogăția fiecăruia este un întreg pozitiv, doi frați nu posedă aceeași sumă de euro și, ori de câte ori un frate este mai bogat decât altul, bogăția celui mai bogat este un multiplu al bogăției celui mai sărac . Care este cel mai mic număr de euro pe care l-ar putea avea cel mai bogat frate?

Răspuns. 1152

Soluție. Din moment ce bogăția fiecărui frate este un multiplu al bogăției celor mai săraci, suma lor, 2018, trebuie să fie divizibilă și prin acest număr. Cu toate acestea, factorizarea inițială $2018 = 2 \cdot 1009$ ne oferă doar trei variante pentru cel mai sărac frate: 1, 2, sau 1009. Evident, 1009 este imposibil, deoarece acesta ar fi cel mai mare dintre sumele rămase. În plus, dacă este 1, restul ar rămâne cu 2017 euro, care este număr prim, deci al doilea frate sărac ar avea tot 1 euro—contradicție. Din aceste motive, cel mai sărac frate are 2 euro și ceilalți trei au împreună 2016.

Fie $a < b < c$ averile celor trei frați; acestea respectă condițiile $a \mid b \mid c$ și $a + b + c = 2016$. Divizibilitatea împreună cu stricta inegalitate implică $2a \leq b$ și $2b \leq c$; dacă am obține egalitate atunci am găsi cea mai mică valoare pentru c. Cum, $1 + 2 + 4 = 7$ divide 2016, putem împărți suma astfel

$$2016 = \tfrac{1}{7} \cdot 2016 + \tfrac{2}{7} \cdot 2016 + \tfrac{4}{7} \cdot 2016$$

și răspunsul este $\frac{4}{7} \cdot 2016 = 1152$.

Problema 47. Andrew a desenat pe tablă simbolul $\clubsuit$. Apoi a repetat de treisprezece ori următoarea procedură: el a șters tabla și a desenat o nouă secvență de simboluri, desenând perechea $\clubsuit\heartsuit$ în loc de fiecare $\heartsuit$ și $\heartsuit\clubsuit$ în loc de fiecare $\clubsuit$ din secvența anterioară. Spre exemplu, secvența $\clubsuit\heartsuit\heartsuit$ este înlocuită cu $\heartsuit\clubsuit\clubsuit\heartsuit\clubsuit\heartsuit$. Câte perechi $\heartsuit\heartsuit$ (fără alte simboluri între) sunt pe tablă în momentul în care Andrew a terminat sarcina sa? Perechile s-ar putea suprapune, spre exemplu în secvența $\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit$, sunt trei perechi $\heartsuit\heartsuit$.

Răspuns. 1365

Soluție. Fie A_n secvența de pe tablă ce apare după ce Andrew termină a n-a oară procedura (cu $A_0 = (\clubsuit)$) și h_n numărul de perechi $\heartsuit\heartsuit$ din A_n. Deoarece fiecare pereche $\heartsuit\heartsuit$ din A_n apare doar din perechea $\heartsuit\clubsuit$ din A_{n-1}, care, pe de altă parte, apare din $\heartsuit\heartsuit$ sau din $\clubsuit$ din A_{n-2}, observăm că $h_n = h_{n-2} + 2^{n-3}$ pentru $n \geq 3$, deoarece sunt exact 2^{n-3} simboluri $\clubsuit$ în A_{n-2}. Astfel, pentru n impar, avem

$$h_n = 2^{n-3} + 2^{n-5} + \cdots + 2^0 + h_1 = \tfrac{1}{3}(2^{n-1} - 1),$$

deoarece $h_1 = 0$. Rezultatul cerut este $h_{13} = 1365$.

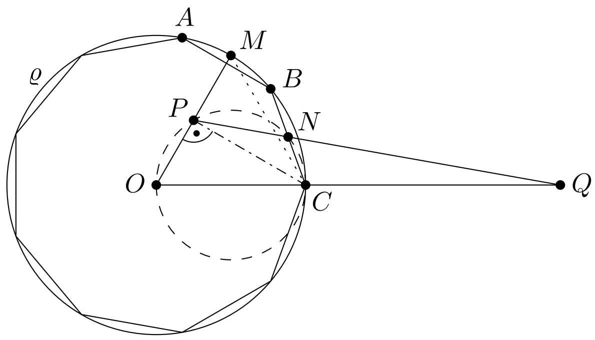
Problema 48. Fie $ABCDEFGHI$ un nonagon regulat înscris în cercul ϱ de centru O. Fie M mijlocul arcului (mai scurt) AB al cercului ϱ, P mijlocul segmentului MO și N mijlocul segmentului BC. Dreptele OC și PN se intersectează în Q. Care este măsura unghiului $\angle NQC$ (în grade)?

Răspuns. 10°

Soluție. Vom arăta că patrulaterul $OCNP$ este inscriptibil; cum $\angle ONC = 90^\circ$, ar trebui să arătăm că $\angle OPC = 90^\circ$. Acest lucru rezultă din: punctele C și M se află pe cercul ϱ, $OC = OM$. Printr-un calcul simplu, se arată că $\angle MOC = 60^\circ$, deci $\triangle OCM$ este echilateral. Punctul P, fiind mijlocul laturii OM, obținem $OPC = 90^\circ$.

Printr-un calcul simplu se arată că $\angle OCN = 70^\circ$, de unde $\angle OPN = 180^\circ - \angle OCN = 110^\circ$. Folosind triunghiul OQP, obținem că

$$\angle NQC = \angle PQO = 180^\circ - \angle POQ - \angle QPO = 10^\circ.$$



Problema 49. Anna a ales un triplet de numere naturale (x, y, z) astfel încât $x + y + z = 2018$ și a spus Xenei cine este x, Yenei cine este y, și Zenei cine este z. Niciuna dintre cele trei nu știe celelalte două numere, dar știu suma numerelor. Următoarea conversație a avut loc:

- Xena: Știu că Yena și Zena au numere diferite.
- Yena: Mulțumită Xenei, acum știu că toate avem numere diferite!
- Zena: Acum știu ce număr a fost comunicat fiecăreia.

Aflați tripletul (x, y, z).

Răspuns. $(3, 2, 2013)$

Soluție. Afirmația Xenei sugerează că x este impar; dacă era par, y și z ar putea fi egale.

Presupunem că y este impar; atunci Yena știa de la început că x și z sunt diferite. Dacă, mai mult, $y \geq 1009$, Yena ar fi știut că x și z sunt diferite de y și nu mai era nevoie de afirmația Xenei. Pe de altă parte, dacă $y \leq 1007$, în ciuda afirmației Xenei, Yena nu putea spune dacă numărul ei este diferit de x. Deci y este par și z este impar.

Dacă y este multiplu de 4, atunci $x + z = 2018 - y \equiv 2 \pmod 4$, adică ar putea fi dublul unui număr impar; caz în care Yena nu putea deduce că x și z sunt diferite. Mai mult, dacă $y \equiv 2 \pmod 4$, atunci x și z ar trebui să aibă resturi distincte modulo 4 și afirmația Yenei este justificată.

În final, să examinăm afirmația Zenei. Mai întâi, $y = 2$, pentru că dacă y ar scădea cu 4 și x ar crește cu 4 atunci Zena nu ar putea observa diferența. Din motive similare, $x \leq 4$, deci $x = 1$ sau $x = 3$. În primul caz, Zena cunoscând $2018 - z = x + y = 3$ ar fi putut determina pe x și y fără afirmația Yenei (folosind doar ce Xena a comunicat). Concluzionăm că $x = 3$ și $z = 2013$.

Problema 50. Vrăjitorii Arithmetix și Combinatorica sunt provocați la un duel. Amândoi vrăjitorii au 100 puncte de lovitură (PL). Vraja lui Arithmetix o lovește pe Combinatorica cu probabilitatea 90% și câștigă 60 PL (dacă vraja reușește), iar vraja Combinatoricei îl lovește pe Arithmetix cu probabilitatea 60% și câștigă 130 PL. Vrăjitorii alternează în aruncarea vrăjilor, Arithmetix fiind cel care începe. Duelul se încheie când un participant nu mai are puncte de lovitură. Determinați probabilitatea ca Arithmetix să câștige duelul.

Răspuns. 45/128

Soluție. Cantitatea exactă de PL nu este importantă - este suficient să știm că Arithmetix suportă o vrajă și Combinatorica două vrăji. Să presupunem că suntem în stare de duel atunci când ambii vrăjitori îndura doar o vrajă și este rândul lui Arithmetix să arunce o vrajă. Notăm probabilitatea ca Arithmetix să câștige cu q. În acest stadiu, Arithmetix poate câștiga fie în cazul în care atacul său reușește, ceea ce se întâmplă cu probabilitatea de 0.9, sau dacă o ratează și la fel și Combinatorica la rândul său - care se întâmplă cu probabilitatea de $0.1 \cdot 0.4$, și ulterior, Arithmetix câștigă din nou cu probabilitate q. Prin urmare, obținem ecuația

$$q = 0.9 + 0.1 \cdot 0.4 \cdot q,$$

ce conduce la $q = 15/16$.

Să determinăm acum probabilitatea p ca Arithmetix să câștige duelul. Dacă Arithmetix lovește și Combinatorica ratează (probabilitatea $0.9 \cdot 0.4$), duelul ajunge în situația prezentată anterior și Arithmetix câștigă cu probabilitatea $q = 15/16$. Pe de altă parte, dacă Arithmetix ratează și Combinatorica ratează de asemenea (probabilitatea $0.1 \cdot 0.4$), atunci Arithmetix poate câștiga cu probabilitatea p. Deci putem scrie ecuația

$$p = 0.9 \cdot 0.4 \cdot \frac{15}{16} + 0.1 \cdot 0.4 \cdot p.$$

Rezolvând-o, obținem că Arithmetix câștigă duelul cu probabilitatea $p = 45/128$.

Problema 51. Fie $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ un șir crescător de numere naturale ce satisface $a(a(n)) = 3n$ pentru orice număr natural n. Determinați $a(2018)$.

Notă: Un șir este *crescător* dacă $a(m) < a(n)$ când $m < n$.

Răspuns. 3867

Soluție. Dacă $a(1) = 1$ atunci $a(a(1)) = 1 \neq 3 \cdot 1$, ceea ce este imposibil. Deoarece șirul este crescător obținem $1 < a(1) < a(a(1)) = 3$, de unde $a(1) = 2$. Din relația dată deducem $a(3n) = a(a(a(n))) = 3a(n)$ pentru orice n. Se demonstrează ușor prin inducție matematică că pentru orice m avem $a(3^m) = 2 \cdot 3^m$. Folosind această relație, obținem $a(2 \cdot 3^m) = a(a(3^m)) = 3^{m+1}$. Există $3^n - 1$ numere naturale i astfel încât $3^n < i < 2 \cdot 3^n$ și există $3^n - 1$ numere naturale j astfel încât $a(3^n) = 2 \cdot 3^n < j < 3^{n+1} = a(2 \cdot 3^n)$. Cum $a(n)$ este crescător, singura opțiune este $a(3^n + b) = 2 \cdot 3^n + b$ pentru orice $0 < b < 3^n$. De aceea $a(2 \cdot 3^n + b) = a(a(3^n + b)) = 3^{n+1} + 3b$. Cum $2018 = 2 \cdot 3^6 + 560$ obținem $a(2018) = 3^7 + 3 \cdot 560 = 3867$.

Problema 52. Triunghiul echilateral T cu lungimea laturii egală cu 2018 se împarte în 2018^2 triunghiuri echilaterale mai mici cu lungimea laturii egală cu 1. Numim mulțimea de vârfuri a acestor triunghiuri mici M, *independentă* dacă pentru orice două puncte distincte $A, B \in M$ segmentul AB nu este paralel cu nici o latură a triunghiului T. Care este cel mai mare număr de elemente al unei mulțimi independente?

Răspuns. 1346

Soluție. Fiecărui vârf din rețea i se pot atribui distanțele la cele trei laturi ale triunghiului T (considerând unitatea înălțimea unui triunghi mic); este ușor de observat că pentru fiecare vârf, cele trei numere au suma egală cu 2018. Pe de altă parte, fiind dat un triplet de numere naturale cu suma 2018, există un singur vârf din rețea pentru care aceste numere reprezintă distanțele de la el la laturile triunghiului mare, de aceea, putem considera aceste triplete în loc de vârfuri. Vom numi aceste trei numere *coordonate.*

Condiția de independență a mulțimii este echivalentă cu faptul că oricare două triplete nu sunt egale. Fie

$$M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)\}$$

o mulțime independentă. Cum numerele $x_1, \ldots, x_k$ sunt naturale și distincte, suma lor este cel puțin

$$0 + 1 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Analog pentru $y_1 + \cdots + y_k$ și $z_1 + \cdots + z_k$. Pe de altă parte, avem $x_i + y_i + z_i = 2018$ pentru fiecare $i = 1, \ldots, k$, și, deci

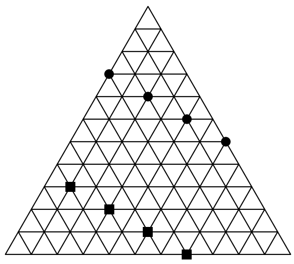
$$3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \leq (x_1 + \cdots + x_k) + (y_1 + \cdots + y_k) + (z_1 + \cdots + z_k) = 2018k.$$

Obținem că
$$k \le 1 + \frac{2}{3} \cdot 2018$$
sau $k \le 1346$.

Următoarele două șiruri de puncte formează o mulțime independentă cu 1346 elemente:
$$(0, 672, 1346),\ (2, 671, 1345),\ (4, 670, 1344),\ \ldots,\ (1344, 0, 674);$$
$$(1, 1345, 672),\ (3, 1344, 671),\ (5, 1343, 670),\ \ldots,\ (1345, 673, 0).$$

În concluzie, numărul maxim de elemente al unei mulțimi independente este 1346.

Următorul desen ilustrează construcția unei mulțimi independente a unui triunghi cu latura de lungime 11:



Problema 53. Fie ABC un triunghi cu $AB = 5$, $AC = 6$ și ω cercul circumscris lui. Fie F, G puncte pe AC astfel încât $AF = 1$, $FG = 3$, $GC = 2$ și, fie intersecțiile dreptelor BF și BG cu ω notate cu D și, respectiv E. Știind că AC și DE sunt paralele, care este lungimea segmentului BC?

Răspuns. $5\sqrt{5/2}$

Soluție. Notăm $x = BC$. Cum $ACED$ este trapez isoscel, putem nota $y = AE = CD$. Notăm $p = BF$, $q = DF$, $u = BG$ și $v = GE$.

Unghiurile BAC și BDC sunt înscise în același cerc, deci au aceeași măsură. Triunghiurile ABF și DCF sunt asemenea, ceea ce implică
$$\frac{y}{5} = \frac{q}{1} = \frac{5}{p}.$$
Mai mult, în același fel obținem că asemănarea triunghiurilor BCG și AEG implică
$$\frac{y}{x} = \frac{v}{2} = \frac{4}{u}.$$
Deoarece AC și DE sunt paralele,
$$\frac{p}{q} = \frac{u}{v}$$
și, folosind relațiile anterioare, rezultă
$$\frac{\frac{25}{y}}{\frac{y}{5}} = \frac{\frac{4x}{y}}{\frac{2y}{x}},$$
adică $x^2 = 125/2$. Se obține $x = 5\sqrt{5/2}$.

Problema 54. Știm că
$$2^{22000} = \underbrace{4569878\ldots229376}_{\text{6623 digits}}.$$
Pentru câte numere naturale $n < 22000$ prima cifră a numărului 2^n este tot 4?

Răspuns. 2132

Soluție. Dacă prima cifră a numărului N de k cifre este c, atunci $c10^{k-1} \le N < (c+1)10^{k-1}$. Rezultă $2c10^{k-1} \le 2N < (2c+2)10^{k-1}$, adică prima cifră a numărului $2N$ este cel puțin prima cifră a numărului $2c$ și cel mult prima cifră a numărului $2c+1$. Aplicăm această observație primei cifre a puterilor lui doi: având o putere a lui doi cu prima cifră egală cu 1, există exact cinci posibilități pentru prima cifră a următoarelor puteri ale lui doi:

1. $1, 2, 4, 8, 1$
2. $1, 2, 4, 9, 1$
3. $1, 2, 5, 1$

4. $1, 3, 6, 1$

5. $1, 3, 7, 1$

Fie k un număr natural astfel încât 2^k să înceapă cu 1 și să aibă d cifre. Atunci există o unică putere a lui 2 ce începe cu 1 și are $d+1$ cifre și, aceasta este fie 2^{k+3} (dacă suntem într-una dintre situațiile (3), (4), (5) de mai sus), fie 2^{k+4} (dacă suntem în cazul (1) sau (2)). Cum 2^0 (are 1 cifră) și 2^{21998} (are 6623 cifre) încep cu 1, putem calcula de câte ori apar situațiile (1) sau (2) atunci când calculăm puteri succesive ale lui doi: de exact $21998 - 3 \cdot 6622 = 2132$ ori.

Să observăm că, situațiile (1) și (2) sunt cele care dau naștere unei puteri a lui doi care începe cu 4, de aceea sunt exact 2132 de numere în intervalul dat.

Problema 55. Aflați numerele raționale a, b, c astfel încât

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Notă: Un număr rațional este raportul dintre două numere întregi.

Răspuns. $(1/9, -2/9, 4/9)$

Soluție. Notămt $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ și $y = \sqrt[3]{2}$. Ideea problemei este de a folosi faptul că numerele $y^3 \pm 1$ sunt întregi și folosind formula $A^3 \pm B^3$ obținem o relație între x și y din care putem exprima x ca sumă de trei numere raționale. În primul rând, să observăm că

$$1 = y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1)$$

și deoarece $3 = y^3 + 1$ obținem

$$y^2 + y + 1 = \frac{3y^2+3y+3}{3} = \frac{y^3+3y^2+3y+1}{3} = \frac{(y+1)^3}{3}.$$

Astfel $x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{3}{(y+1)^3}$.

În al doilea rând, cum $3 = y^3 + 1 = (y+1)(y^2-y+1)$ obținem $\frac{1}{y+1} = \frac{y^2-y+1}{3}$, deci

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1).$$

Am demonstrat că tripletul $(a, b, c) = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$ satisface relația dată.

Este posibil să se demonstreze că reprezentarea lui x ca sumă de rădăcini de ordinul trei a unității sub formă rațională este unică până la o reordonare.