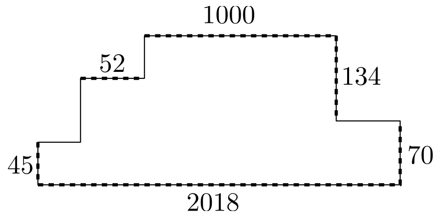
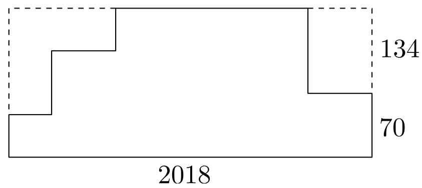
Úloha 1. Na obrázku je zobrazený desaťuholník, ktorý má všetky uhly pravé. Dĺžky niektorých strán (ako na obrázku) sú známe a sú udané v centimetroch.



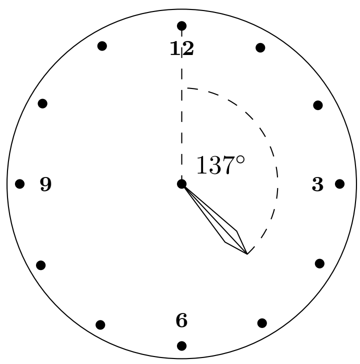
Aký je obvod desaťuholníka v centimetroch?

Výsledok. 4444

Riešenie. Postupným otočením „vnútorných" rohov desaťuholníka na „vonkajšie" rohy dostaneme obdĺžnik. Tento obdĺžnik má rozmery 2018 a $70 + 134 = 204$. Preto je jeho obvod $2 \cdot (2018 + 204) = 4444$.



Úloha 2. Na týchto hodinách chýba minútová ručička. Koľko minút prešlo od poslednej celej hodiny, ak uhol medzi hodinovou ručičkou a dvanástkou je 137°?



Výsledok. 34

Riešenie. Hodinová ručička prejde za hodinu uhol $360° : 12 = 30°$, čiže prejdenie 1° jej zaberie dve minúty. Čiže od štvrtej hodiny prešla $137° - 4 \cdot 30° = 17°$, čo jej zabralo $17 \cdot 2 = 34$ minút.

Úloha 3. Štyria študenti, Adam, Braňo, Cyril a Daniel písali písomku. Vieme, že dosiahli 2, 12, 86 a 6 bodov v nejakom poradí. Taktiež vieme že

- Adamov počet bodov bol *pampam* ako Cyrilov,
- Cyrilov počet bodov bol *pampam* ako Braňov,
- Danielov počet bodov bol *pampam* ako Braňov,
- Adamov počet bodov bol *pampam* ako Danielov.

kde *pampam* znamená „väčší" alebo „menší" (význam je rovnaký pre všetky štyri tvrdenia). Aký je súčet počtu Cyrilových a Danielových bodov?

Výsledok. 18

Riešenie. Dá sa vidieť, že ak *pampam* znamená „väčší", tak Adam dosiahol najviac bodov a Braňo najmenej, ak *pampam* znamená „menší", je to naopak. V oboch prípadoch sa však Cyril a Daniel umiestnili v strede, čiže dosiahli 6 a 12 bodov, čo dáva súčet 18.

Úloha 4. Janko s Dankom stoja na námestí a počítajú domy okolo neho. Obaja počítajú v smere hodinových ručičiek, avšak každý začal od iného domu. Jankov štvrtý dom je Dankov šestnásty a Jankov dvanásty dom je Dankov siedmy. Koľko je na námestí domov?

Výsledok. 17

Riešenie. Keďže Jankov štvrtý dom je Dankov šestnásty, existuje segment domov kde Dankove čísla sú o 12 väčšie. Tento segment však musí skončiť skôr ako Janko napočíta do 12, pretože inak by Danko dostal $12 + 12 = 24$. Keďže poradové číslo sa vždy zníži o celkový počet domov, keď niekto dopočíta na koniec, vidíme že na námestí je $24 - 7 = 17$ domov.

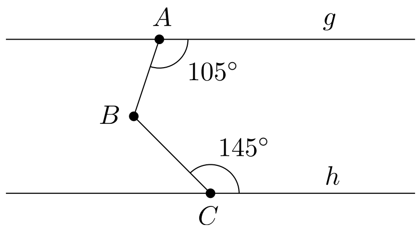
Úloha 5. Petrík dostal za úlohu vyčistiť kávovar od vodného kameňa. Prečítal si návod a zistil, že musí zmiešať štyri diely vody a jeden diel 10 % octového koncentrátu. Nanešťastie má doma iba 40 % koncentrát. Koľko dielov vody musí zmiešať s jedným dielom 40 % koncetnrátu, aby dostal roztok s predpísanou koncentráciou?

Poznámka: n % octový koncentrát pozostáva z n dielov kyseliny octovej a $100 - n$ dielov vody.

Výsledok. 19

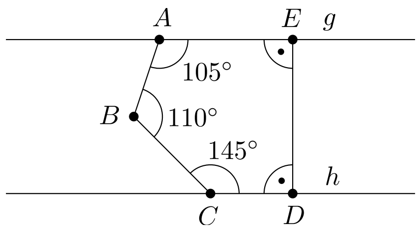
Riešenie. V pôvodnom roztoku tvorí kyselina octová 10 % jedného z piatich dielov. Rovnakú koncentráciu teda možno dostať, ak bude kyselina octová tvoriť $40\,\% = 4 \cdot 10\,\%$ jednej z $4 \cdot 5 = 20$ dielov, čiže ku koncentrátu treba pridať ďalších 19 dielov vody.

Úloha 6. Ak priamka g je rovnobežná s priamkou h a uhly pri vrcholoch A a C sú postupne $105°$ a $145°$ stupňov, ako je naznačené na obrázku, aká je veľkosť uhla CBA?

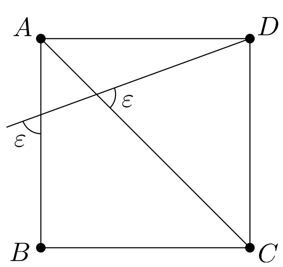


Výsledok. $110°$

Riešenie. Uvažujme body D a E ležiace na priamkach h a g tak, že známe uhly a uhol ktorého veľkosť sa snažíme zistiť tvoria vnútorné uhly päťuholníka $ABCDE$. Keďže súčet veľkostí dvoch novopridaných uhlov je $180°$ (môžme ich spraviť oba pravé ako na obrázku, no nie je to nutné) a súčet veľkostí vnútorných uhlov päťuholníka je $540°$, vieme že hľadaná veľkosť je $540° - 180° - 105° - 145° = 110°$.



Úloha 7. Ak $ABCD$ je štvorec, aká je veľkosť uhla ε (v stupňoch)?



Výsledok. $67.5°$

Riešenie. Pomenujme vrcholy uhlov ε ako X a Y. Potom platí $|\sphericalangle AXY| = |\sphericalangle AYX| = \varepsilon$. Ďalej, keďže $|\sphericalangle XAY| = |\sphericalangle CAB| = 45°$, pre vnútorné uhly trojuholníka XYA bude musieť platiť:

$$45° + \varepsilon + \varepsilon = 180°,$$

takže $\varepsilon = 67{,}5°$.

Úloha 8. Cecil sa narodil jeho mame, keď oslavovala 27. narodeniny. Najviac koľkokrát sa môže stať, že Cecilov vek je rovnaký ako vek jeho mamy prečítaný odzadu?

Poznámka: Prípadné začiatočné nuly čísel sú ignorované, teda napríklad 470 sa odzadu prečíta ako 74.

Výsledok. 7

Riešenie. Nech Cecil má c rokov a jeho mama nech má m rokov, pričom c je rovnaké ako m prečítané odzadu. Čísla c a m majú rovnaký počet cifier (pričom c môže začínať nulami, ak nimi m končí), čo je najmenej 2. Nech a a b sú cifry na mieste jednotiek čísel c a m v tomto poradí. Keďže Cecilova mama je od Cecila o 27 rokov staršia, vidíme, že buď $a + 7 = b$, alebo $a + 7 = 10 + b$. Ak by Cecilova mama mala aspoň 100 rokov, rozdiel prvých cifier ich vekov by mohol byť najviac 1, čo nie je možné, keďže to sú cifry b a a. Z toho vyplýva, že c aj m majú po dve cifry.

Hľadáme teda všetky čísla $\overline{ab}$, pre ktoré platí

$$\overline{ab} = \overline{ba} + 27.$$

Vieme, že $a > b$, takže podmienka $a + 7 = b$ nemôže platiť. Zvážime teda podmienku $a + 7 = 10 + b$ alebo $a = b + 3$. Keďže $a \leq 9$, platí $b \leq 6$. Pre každú cifru $b \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ dostaneme cifru a ako $a = b + 3$. Je zjavné, že pre tieto cifry rovnosť $\overline{(b + 3)b} = \overline{b(b + 3)} + 27$ platí. Takže hľadaná situácia môže nastať sedemkrát: Keď má Cecil 3, 14, 25, 36, 47, 58 a 69 rokov.

Úloha 9. Kikina skúša usporiadať 32 bielych a 32 čiernych kociek s hranou dĺžky 1 do jednej veľkej kocky $4 \times 4 \times 4$. Chce, aby na povrchu veľkej kocky bolo čo najviac bielej. Aká najväčšia časť povrchu veľkej kocky môže byť biela? Výsledok uveďte v tvare zlomku.

Výsledok. 3/4

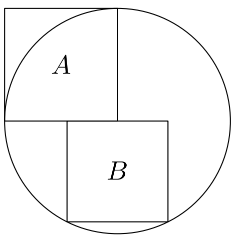
Riešenie. Ak umiestnime malú bielu kocku do rohu veľkej kocky, na povrchu budú tri jej biele steny. Ak ju umiestnime na hranu veľkej kocky, na povrchu budú dve biele steny. Veľká kocka má osem rohov a dvanásť hrán, každá po dve kocky, čo je dokopy 32 kociek. Je jasné, že najviac bielej na povrchu dosiahneme tak, že biele kocky umiestnime práve na tieto miesta. Takto postavená kocka bude mať každú stenu rovnakú – dvanásť bielych častí a štyri čierne. Teda najväčší možný podiel bielej bude $12/16 = 3/4$.

Úloha 10. Sto ľudí sa zúčastnilo výberového konania na let na Merkúr. Každý potenciálny astronaut musí absolvovať tri testy – test fyzickej zdatnosti, psychologický test a praktický test. Iba 26 uchádzačov úspešne prešlo testom fyzickej zdatnosti. Popritom 60 uchádzačov nespravilo aspoň dva z troch testov. Ďalej vieme, že 83 ľudí nespravilo buď psychologický test, alebo praktický test. Nikto neprepadol aj v psychologickom, aj v praktickom teste. Koľko účastníkov bolo prijatých, t. j. splnilo všetky tri testy úspešne?

Výsledok. 3

Riešenie. Keďže nikto neprepadol zároveň v psychologickom aj praktickom teste, každý, kto nespravil aspoň dva testy, musel nespraviť test fyzickej zdatnosti. To nám dáva $(100 - 26) - 60 = 14$ ľudí ktorí prepadli iba v skúške fyzickej zdatnosti. Spolu s 83 ľuďmi, ktorí prepadli buď na psychologickom teste, alebo praktickom teste to dáva 97 vylúčených účastníkov, čiže z celej skupiny boli prijatí iba 3 ľudia.

Úloha 11. Štvorec A má dve strany, ktoré sú zároveň polomerom kružnice. Štvorec B má dva vrcholy na tej istej kružnici a má časť jednej hrany spoločnú so štvorcom A. Nájdite pomer obsahu štvorca A k obsahu štvorca B.

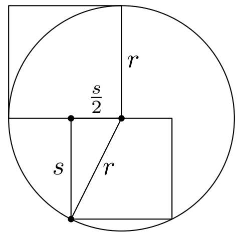


Výsledok. 5 : 4

Riešenie. Označme s dĺžku strany štvorca B a r polomer kružnice. Vďaka symetrii stred kružnice delí stranu štvorca B, ktorá leží na priemere kružnice, na dve rovnaké časti s dĺžkou $s/2$. Potom z Pytagorovej vety máme:

$$r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{5}{4}s^2,$$

čiže hľadaný pomer obsahov je 5:4.



Úloha 12. Zistite dve posledné cifry súčinu

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37.$$

Výsledok. 10

Riešenie. Keďže v súčine sa nachádza $2 \cdot 5$, posledná cifra bude 0. Cifru pred ňou potom dostaneme ako poslednú číslicu súčinu $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 37$. Stačí brať do úvahy iba posledné cifry činiteľov, pričom môžeme ignorovať jednotky. Teda potrebujeme zistiť poslednú cifru súčinu

$$3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 7 = (3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 7) \cdot (9 \cdot 9).$$

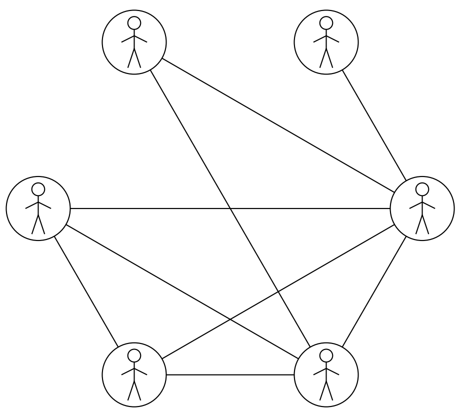
Keďže $7 \cdot 3 = 21$ má poslednú cifru 1, môžeme odstrániť všetky $(3 \cdot 7)$. Ostalo nám $9 \cdot 9$, čo má poslednú cifru opäť 1. Teda posledné dve cifry pôvodného súčinu budú 10.

Úloha 13. Detektív vypočúval šiestich podozrivých zo zločinu. Pri vypočúvaní prvých piatich detektív zistil, že majú postupne 1, 2, 3, 4 a 5 kamarátov spomedzi všetkých šiestich podozrivých. Kamarátstva sú vzájomné. Detektív sa rozhodol zistiť počet kamarátov posledného podozrivého ešte pred jeho vypočúvaním. Koľko kamarátov má posledný podozrivý?

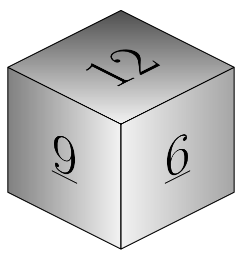
Výsledok. 3

Riešenie. Nech n je počet kamarátov posledného podozrivého. Podozrivý, ktorý má 5 kamarátov, je kamarát s každým podozrivým. Jeho vynechaním sa zníži počet kamarátov každého podozrivého o 1. Taktiež môžme vynechať podozrivého len s jedným kamarátom, pretože po znížení počtu jeho kamarátov na 0 (vynechaním toho podozrivého, ktorý je kamarát s každým) nám už neposkytne žiadnu informáciu, už je nepodstatný. Takto dostaneme skupinu podozrivých, ktorí majú 1, 2, 3 a $n-1$ kamarátov medzi sebou. Opakovaním týchto krokov dostaneme ešte menšiu skupinu, ktorá má 1 a $n-2$ kamarátov medzi sebou. Z toho ľahko vidieť, že $n-2=1$, respektíve $n=3$.

Poznámka: Toto riešenie vieme pozmeniť na tvorenie vyhovujúcej (počtom kamarátov) skupine podozrivých. Výsledok je zobrazený v nasledujúcom grafe:



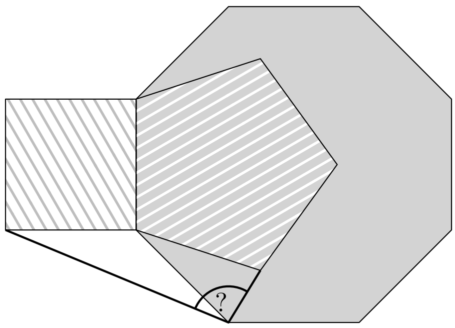
Úloha 14. Kocka na obrázku má na každej svojej stene napísané kladné celé číslo. Súčin čísel na protiľahlých stenách je pre všetky dvojice stien rovnaký. Čísla na stenách nemusia byť rôzne. Aký najmenší môže byť súčet čísel na všetkých stenách kocky?



Výsledok. 40

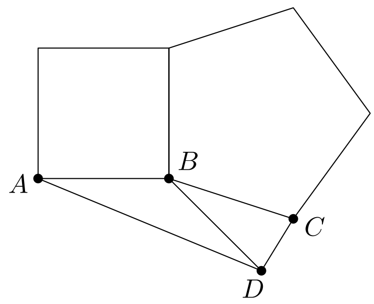
Riešenie. Nech S je súčin čísel na protiľahlých stenách. Čím väčšie S, tým väčší je aj súčet všetkých čísel na stenách. Nakoľko S musí byť deliteľné všetkými troma číslami, ktoré vidíme na kocke, tak najmenšia možná hodnota S je ich najmenší spoločný násobok. Teda $S = 36$. Za týchto podmienok čísla, ktoré nevidíme, sú 3, 4 a 6. Potom súčet čísel na stenách je $6 + 9 + 12 + 6 + 4 + 3 = 40$.

Úloha 15. Zistite veľkosť vyznačeného uhla medzi hrubými úsečkami, pokiaľ viete, že šedý osemuholník a pruhovaný päťuholník sú pravidelné a pruhovaný štvoruholník je štvorec.



Výsledok. 99°

Riešenie. Označme si body tak, ako je uvedené na obrázku.



Uhol CBD je rozdiel vnútorných uhlov osemuholníka a päťuholníka, teda $|\sphericalangle CBD| = 135° - 108° = 27°$. Ďalej ľahko zistíme, že $|\sphericalangle ABD| = 135°$. Keďže trojuholníky ABD a CBD sú rovnoramenné,

$$|\sphericalangle CDB| = \tfrac{1}{2}(180° - |\sphericalangle CBD|) = 76{,}5°,$$
$$|\sphericalangle BDA| = \tfrac{1}{2}(180° - |\sphericalangle ABD|) = 22{,}5°.$$

Z čoho vyplýva

$$|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle CDB| + |\sphericalangle BDA| = 99°.$$

Úloha 16. Minister má osobného šoféra, ktorý každé ráno opúšťa ministerstvo v rovnakej hodine, aby vyzdvihol ministra a doviezol ho na ministerstvo. Minister vstáva každé ráno v rovnaký čas a auto príde vždy presne vtedy, keď je minister pripravený odísť. Dnes sa však minister zobudil skôr a bol ráno pripravený o hodinu skôr, tak sa rozhodol kráčať smerom k autu (ktoré vyrážalo z ministerstva vo svojom zvyčajnom čase). Keď sa stretol s autom, nasadol a prišiel na ministerstvo o dvadsať minút skôr ako zvyčajne. Koľko minút kráčal minister, kým nasadol do auta? Môžete predpokladať, že auto sa hýbe konštantnou rýchlosťou, ministrovi trvá nastupovanie do auta nulový čas a ranná cesta šoféra z ministerstva k ministrovi je tá istá ako od ministra na ministerstvo.

Výsledok. 50

Riešenie. Čas, ktorý minister získal tým, že sa zobudil skôr (1 hodina), sa rozdelí na hľadaný čas kráčania t a čas, ktorý by potrebovalo auto, aby sa dostalo od miesta stretnutia k ministrovmu domu, čo je polovica celkového ušetreného času. Preto

$$60 = t + \frac{20}{2},$$

teda $t = 50$.

Úloha 17. Nájdite najmenšie celé kladné číslo, ktoré má aspoň dve cifry a pre ktoré platí, že keď vymažete jeho prvú číslicu (najviac vľavo), ostane číslo, ktoré je 29-krát menšie.

Výsledok. 725

Riešenie. Označme d prvú cifru hľadaného čísla, k číslo, ktoré ostane, keď túto cifru vymažeme, a n počet cifier čísla k. Potom hľadané číslo možno zapísať v tvare

$$10^n d + k = 29k,$$

resp.

$$28k = 10^n d.$$

Ľavá strana je deliteľná $28 = 2^2 \cdot 7$, preto musí byť aj pravá, z čoho dostávame $d = 7$ a $n \geq 2$. Napokon zvolíme najmenšie možné $n = 2$, z čoho dostávame $k = 25$, teda hľadané číslo je 725.

Úloha 18. Koľkokrát za 24 hodín zvierajú hodinová a minútová ručička pravý uhol?

Výsledok. 44

Riešenie. Minútova ručička urobí za 24 hodín 24 otáčok, hodinová 2 otáčky. Teda hodinová a minútová ručička sa prekryjú 22-krát za 24 hodín. Za každý takýto prekryv sa ručičky vyskytnú v pravom uhle dvakrát, čiže odpoveď je 44.

Úloha 19. Nájdite všetky štvorciferné palindrómy, ktoré môžu byť zapísané ako súčet dvoch trojciferných palindrómov.

Poznámka: Palindróm je číslo, ktoré sa spredu píše rovnako ako zozadu. Napríklad 2018102 je palindróm. Číslo nemôže začínať nulou.

Výsledok. 1111, 1221

Riešenie. Nech $\overline{abba}$ je taký palindróm. Keďže je to súčet dvoch trojciferných čísel, nemôže byť väčšie než 1998, takže $a = 1$. Túto rovnosť môžeme zapísať ako $\overline{1bb1} = \overline{cdc} + \overline{xyx}$, čo vieme prepísať na

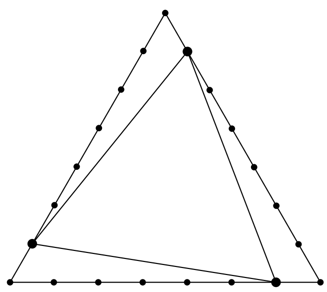
$$1001 + 110b = 101(c + x) + 10(d + y).$$

Na mieste jednotiek na ľavej strane je 1, preto $c + x$ musí mať tiež 1 na mieste jednotiek. Aj c aj x sú aspoň 1 a najviac 9, preto ich súčet musí byť $c + x = 11$. Dosadením zjednodušíme rovnicu na

$$11(b - 1) = d + y.$$

Na pravej strane máme súčet dvoch cifier, čo je číslo od 0 do 18. Pre b tak máme dve možnosti a obe vedú k riešeniu: $1111 = 505 + 606$, $1221 = 565 + 656$.

Úloha 20. Strany rovnostranného trojuholníka sú rozdelené na dve časti v pomere 6 : 1 tak, že deliace body tiež tvoria rovnostranný trojuholník (viď obrázok). Nájdite pomer obsahu menšieho rovnostranného trojuholníka k väčšiemu rovnostrannému trojuholníku.



Výsledok. 31/49

Riešenie. Obsah každého z troch malých trojuholníkov je

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{49}$$

z veľkého rovnostranného trojuholníka, pretože výška je 1/7 z výšky veľkého rovnostranného trojuholníka a jej odpovedajúca strana je 6/7 zo strany veľkého rovnostranného trojuholníka. Z toho vyplýva, že pomer menšieho rovnostranného trojuholníka k obsahu väčšieho rovnostranného trojuholníka je

$$1 - 3 \cdot \frac{6}{49} = \frac{31}{49}.$$

Úloha 21. Nájdite všetky štvorice (a, b, c, d) kladných celých čísel takých, že keď v tabuľke nahradíme písmenká prislúchajúcimi číslami, tak a, b, c, d budú postupne počty všetkých jednotiek, dvojok, trojok a štvoriek v celej tabuľke, a to presne v tomto poradí.

1	2	3	4
a	b	c	d

Výsledok. $(2, 3, 2, 1)$, $(3, 1, 3, 1)$

Riešenie. Vieme zaplniť iba štyri voľné miesta, takže žiadne číslo sa v tabuľke neobjaví viac ako päťkrát. Ani päťka sa neobjaví, lebo by zaplnila piate miesto pre dané číslo. Takže za a, b, c, d dosádzame iba čísla od 1 do 4.

Najprv sporom ukážeme, že $d = 1$. Keby bolo $d = 2$, tak je ešte niekde inde štvorka. Dotyčné číslo tak musí zaplniť všetky voľné miesta okrem tej štvorky, teda musí byť $b = 4$. Evidentne však štvorica $(2, 4, 2, 2)$ nevyhovuje. Ak je $d > 2$, dôjdeme k sporu ešte rýchlejšie.

Vieme povedať, že $a \in \{2, 3\}$ a obe možnosti vedú k riešeniu. Ak $a = 2$, tak $b, c \in \{2, 3\}$, lebo 1 ani 4 už byť nemôžu. Prípad $b = 2$ vedie k sporu, už by boli v tabuľke tri dvojky. $b = 3$ má potom riešenie, keď $c = 2$. Ak $a = 3$, tak v tabuľke musí byť ešte jedna jednotka a nemôže to byť c (lebo už máme dve trojky). Preto $b = 1$ a riešenie uzatvára $c = 3$.

Úloha 22. Peter zabudol svoje heslo. Pamätá si, že heslo pozostáva z deviatich malých písmen latinskej abecedy a že obsahovalo slová „voda“ a „slovo“. Koľko hesiel spĺňa tieto podmienky?

Poznámka: Slová sa vyskytujú celistvé, teda napríklad „sloveso“ <u>ne</u>obsahuje „slovo“. Dohromady je v abecede 26 písmen.

Výsledok. $2030 = 26^2 \cdot 3 + 2$

Riešenie. Najprv uvažujme prípad, keď sa slová „voda“ a „slovo“ neprekrývajú. V tom prípade využijú všetky písmená a sú dve možnosti ako ich zapísať: „slovovoda“ a „vodaslovo“.

Ak sa prekrývajú, tak je iba jedna možnosť ako ich usporiadať: „slovoda“. Sú tri možnosti ako umiestniť dve nevyužité písmená: „**slovoda“, „*slovoda*“, „slovoda**“. Každý prípad má $26^2 = 676$ možností, ako tieto písmená zvoliť. V prípade, keď sa prekrývajú máme spolu $676 \cdot 3 = 2028$ možností.

Dohromady máme pre heslo $2028 + 2 = 2030$ možností.

Úloha 23. Ak náhodne vyberieme dve rôzne čísla z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$, tak pravdepodobnosť, že tieto dve čísla sú po sebe idúce kladné celé čísla, je $\dfrac{1}{21}$. Určte n.

Výsledok. 42

Riešenie. Existuje $n - 1$ párov po sebe idúcich čísel v množine $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Máme $\frac{1}{2}n(n-1)$ možností ako náhodne vybrať dve rôzne čísla z tejto množiny. Z čoho dostávame

$$\frac{n-1}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{2}{n} = \frac{1}{21}$$

a teda $n = 42$.

Úloha 24. Andrej, Boris a Cyril spolu hrali stolný tenis podľa nasledujúcich pravidiel: Každé kolo hrajú proti sebe dvaja hráči a tretí oddychuje. Ten, kto kolo vyhrá, hrá ďalšie kolo proti hráčovi, ktorý predtým oddychoval. V prvom kole hral Andrej proti Borisovi. Po niekoľkých kolách mal Andrej 17 víťazstiev a Boris 22. Koľkokrát hrali proti sebe Andrej a Boris?

Výsledok. 20

Riešenie. Všimnime si, že kedykoľvek kolo vyhrá Cyril, nemá to na počty výhier Andreja a Borisa žiaden vplyv, a taktiež to nemá žiaden vplyv na počet kôl, ktoré Cyril nehrá. Môžme teda rátať s tým, že Cyril vždy prehrá. Inak povedané, každá výhra Andreja nad Borisom zvyšuje Andrejove celkové skóre o dva (ak nenastala v poslednom kole), a naopak. Keďže počet Andrejových výhier je nepárny, vidíme že posledné kolo bolo Andrej proti Borisovi a Andrej vyhral. Ak by sme pridali ešte jedno kolo (Andrej proti Cyrilovi, vyhrá Andrej), celkový počet kôl, ktoré Cyril nehral, bude polovica výsledného súčtu výhier Andreja a Borisa, teda $(18 + 22)/2 = 20$.

Úloha 25. Zákazníci internetového obchodu môžu vyjadriť svoju spokojnosť s nákupom prostredníctvom online hodnotenia na päťbodovej hodnotiacej škále (1 hviezdička = úbohé, 5 hviezdičiek = výborné). Minulý týždeň bolo priemerné hodnotenie práve vydaného smartfónu $3,46$ hviezdičky. Po tom, ako tento týždeň zahlasovali ďalší dvaja ľudia, sa priemer zdvihol na $3,5$ hviezdičky. Koľko ľudí doteraz ohodnotilo smartfón?

Výsledok. 52

Riešenie. Označme k počet pôvodných hodnotení a x súčet ich hviezdičiek. Ďalej nech a, b sú hodnotenia z tohto týždňa. Potom

$$\frac{x}{k} = 3.46 \qquad \text{a} \qquad \frac{x+a+b}{k+2} = 3.5$$

alebo

$$x = \left(3 + \tfrac{23}{50}\right) k, \tag{1}$$

$$x + a + b = \left(3 + \tfrac{1}{2}\right) k + 7. \tag{2}$$

Z rovnice (1) vyplýva, že k je násobok 50. Navyše keď odčítame (1) od (2) dostaneme

$$a + b - 7 = \frac{k}{25}.$$

Keďže $a, b \leq 5$, ľavá strana je celé číslo menšie rovné 3, teda $k \leq 75$. Ostáva teda jediná možnosť, a to, že $k = 50$. Po zarátaní hodnotení z tohto týždňa dostaneme, že doteraz hlasovalo 52 ľudí.

Úloha 26. Hanka má štyri páry ponožiek s nápismi pondelok, utorok, streda a štvrtok. (Každý pár má práve jeden deň ako nápis.) Koľkými spôsobmi môže nosiť tieto ponožky od pondelka do štvrtka, ak nápisy na ponožkách, ktoré nosí, musia byť rôzne a nemôže to byť názov aktuálneho dňa? Ponožky sa v priebehu dňa nemenia a nemôžu sa nosiť opakovane.

Poznámka: Hociktorá ponožka môže byť nosená na hociktorej nohe, t.j. nerozlišujeme pravé a ľavé ponožky. Taktiež nerozlišujeme, ktorú ponožku má Hanka na pravej a ktorú na ľavej nohe.

Výsledok. 9

Riešenie. Pre jednoduchosť budeme používať čísla od 1 po 4 namiesto názvov dní. Ku každému dňu prislúchajú tri čísla: Poradové číslo dňa a dve čísla ponožiek nosených v daný deň. Tieto tri čísla sú rôzne a ekvivalentne môžme v daný deň určiť nosené ponožky pomocou nepoužitého čísla. Odvodíme, že vhodné rozdelenie ponožiek súvisí s permutáciami $(1, 2, 3, 4)$, ktoré nemajú žiadne číslo na pôvodnej pozícii.

Tento počet môže byť vypočítaný nasledovne: Máme tri možnosti, kam umiestnime 1. Keď umiestnime 1 na pozíciu $n \neq 1$, tak môžeme umiestniť n na tri možné miesta. Zvyšné dve čísla už majú umiestnenie určené – aspoň jedno z nich totiž ešte nemá obsadený deň. Dohromady to dáva $3 \cdot 3 = 9$ takýchto preusporiadaní a to je aj počet možností, ktorými môže Hanka nosiť ponožky.

Úloha 27. Porota 26 matematikov rozhodovala o nominácii (aspoň) piatich filmov pre cenu na festivale filmov s matematickou tematikou. Vyberala zo 16 filmov nasledovným spôsobom: Každý porotca volí päť rôznych filmov a päť filmov s najvyšším počtom hlasov je nominovaných. Ak je viacero filmov s rovnakým počtom hlasov na piatom mieste, všetky tieto filmy sú nominované. Aký je najmenší počet hlasov taký, že film, ktorý má daný počet hlasov, bude nominovaný bez ohľadu na počet hlasov ostatných filmov?

Výsledok. 21

Riešenie. Dokopy sa rozdeľuje $26 \cdot 5 = 130$ hlasov. Ak film dostal 20 alebo menej hlasov, tak zvyšných 110 hlasov môže byť rozdelených tak, aby nejakých 5 filmov dostalo po 21 hlasov. Ak film dostal 21 hlasov, tak nebude nominovaný iba ak je iných 5 filmov s aspoň 22 hlasmi. To by však znamenalo, že sa použilo aspoň $21 + 5 \cdot 22 = 131$ hlasov, čo je spor.

Úloha 28. Reálna funkcia f spĺňa $f(x) + xf(1-x) = x$ pre každé reálne číslo x. Nájdite $f(-2)$.

Výsledok. $\frac{4}{7}$

Riešenie. Za x dosadíme -2 a dostaneme $f(-2) - 2f(3) = -2$. Už nám stačí iba určiť $f(3)$. Za x dosadíme 3 a dostaneme $f(3) + 3f(-2) = 3$. Spolu s prvým vzťahom máme dve rovnice o dvoch neznámych $f(-2)$ a $f(3)$. Keď vynásobíme druhú rovnicu 2 a sčítame ich, dostaneme $f(-2) = \frac{4}{7}$.

Poznámka: Funkcia f spĺňajúca zadanie existuje a je jediná: $f(x) = x^2/(x^2 - x + 1)$.

Úloha 29. Máme dvojciferné čísla n, a, b, o, j, ktorých súčin $naboj$ je deliteľný číslom 4420. Určte najväčšiu možnú hodnotu ich súčtu $n + a + b + o + j$.

Výsledok. 471

Riešenie. Najskôr si rozložme $4420 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17$. Keďže 13 a 17 sú prvočísla, jedno z čísel n, a, b, o, j musí byť deliteľné 13 a jedno 17. Keďže najmenší spoločný násobok 13 a 17 je 221, neexistuje dvojciferné číslo, ktoré by bolo deliteľné obomi zároveň. Preto bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že n je deliteľné 17 a a je deliteľné 13. To znamená, že $n \leq 85 = 5 \cdot 17$ a $a \leq 91 = 7 \cdot 13$.

Predpokladajme teraz, že $n = 85$ a $a = 91$. Vidíme, že $n = 85$ je deliteľné 5, takže potrebujeme už len zaručiť deliteľnosť 4. Keďže n a a sú nepárne, 4 musí deliť súčin boj. Preto je jedno z čísel b, o, j deliteľné 4 alebo dve z týchto čísel sú deliteľné 2. Väčší súčet dostaneme v druhom prípade, keď $b = o = 98$ a $j = 99$. Za týchto predpokladov by sme dostali súčet $n + a + b + o + j = 85 + 91 + 98 + 98 + 99 = 471$.

Čo v prípade, keby bolo $n < 85$ alebo $a < 91$? Keďže čísla n a a majú byť deliteľné postupne 17 a 13, znamenalo by to, že $n \leq 68 = 85 - 17$ alebo $a \leq 78 = 91 - 13$. Potom by súčet $n+a+b+o+j$ mohol byť najviac $68+91+3\cdot 99 = 456$ (v prvom prípade) alebo $85 + 78 + 3 \cdot 99 = 460$ (v drohom prípade), a to je menej ako sme dosiahli v predchádzajúcom odseku. Najväčšia možná hodnota súčtu $n + a + b + o + j$ je teda 471.

Úloha 30. Nina si objednala osem tenisových loptičiek a jednu volejbalovú loptu cez internet. Lopty, ktoré majú dokonalý tvar gule, boli zabalené v krabici tvaru kocky. Každá tenisová loptička sa dotýkala troch stien krabice a volejbalovej lopty. Polomer volejbalovej lopty je 10 cm a polomer tenisovej loptičky je 5 cm. Koľko centimetrov má hrana krabice (kocky)?

Výsledok. $10(1 + \sqrt{3})$

Riešenie. Telesová uhlopriečka krabice prechádza cez stredy volejbalovej lopty a dvoch tenisových loptičiek a taktiež cez body, v ktorých sa vzájomne dotýkajú tieto lopty. Jediné kúsky telesovej uhlopriečky, ktoré nie sú v žiadnej lopte sú medzi tenisovými loptičkami a rohom krabice. Vzdialenosť medzi stredom tenisovej loptičky a rohom krabice je polovica telesovej uhlopriečky kocky, ktorej je táto tenisová loptička vpísaná. Teda dĺžka telesovej uhlopriečky krabice je súčet

- (2×) 1/2 telesovej uhlopriečky kocky, ktorej je táto tenisová loptička vpísaná,
- (2×) polomer tenisovej loptičky,
- priemer volejbalovej lopty.

Preto je dĺžka telesovej uhlopriečky krabice

$$10\sqrt{3} + 10 + 20 = 30 + 10\sqrt{3},$$

z čoho dopočítame dĺžku hrany krabice:

$$\frac{30 + 10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10(1 + \sqrt{3}).$$

Úloha 31. V desiatkovej sústave má číslo 2^{29} deväť rôznych cifier. Ktorú cifru toto číslo neobsahuje?

Výsledok. 4

Riešenie. Jedným riešením je to zrátať, najrýchlejšie je asi využiť, že $2^{10} = 1024$, vypočítať 1024^3 a predeliť to 2. Vyjde nám $2^{29} = 536\,870\,912$.

Jednoduchšie je spoľahnúť sa na fakt, že to obsahuje deväť rôznych cifier a zvyšok ich súčtu po delení 9 je rovnaký ako zvyšok 2^{29}. Umocňovanie 2^n dáva po delení 9 zvyšky periodicky s periódou 6. Keďže súčet všetkých cifier je 45, pre chýbajúcu cifru x vieme dostať rovnicu

$$45 - x \equiv 2^{29} \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod 9.$$

Z toho už ľahko zistíme, že $x \equiv 4 \bmod 9$ a chýbajúca cifra je 4.

Úloha 32. Janko robil poriadky na povale a našiel starú kalkulačku, ktorá ukazovala za desatinnou čiarkou len prvé dve cifry z výsledku. Kalkulačka vedela počítať druhé odmocniny. Napríklad pre $\sqrt{4}$ ukázala výsledok 2,00 a pre $\sqrt{6} = 2{,}44949\ldots$ ukázala 2,44. Nájdite najmenšie kladné celé číslo, ktoré nie je druhou mocninou celého čísla, ale Jankova kalkulačka zobrazí jeho druhú odmocninu s dvomi nulami za desatinnou čiarkou.

Výsledok. 2501

Riešenie. Označme pdc(n) prvé dve cifry za desatinnou čiarkou čísla $\sqrt{n}$. Je zrejmé, že ak n je štvorec, pdc(n) bude rovné nule. Ako n klesá k najbližšiemu štvorcu, klesá aj pdc(n). Keďže hľadáme najmenšie n, ktoré má pdc$(n) = 0$, bude sa dať n zapísať ako $k^2 + 1$ pre nejaké celé číslo k.

Hodnota $\sqrt{k^2+1}$ zaokrúhlená nadol na celé číslo je rovná k, čiže $\sqrt{k^2+1} - k$ je číslo medzi 0 a 1, teda desatinná časť výrazu $\sqrt{k^2+1}$. To, že pdc$(k^2 + 1)$ má byť rovné nule možno teda zapísať aj ako

$$\sqrt{k^2+1} - k < \frac{1}{100}.$$

Pričítaním k k obidvom stranám, umocnením (obe strany sú kladné) a následným preusporiadaním dostaneme

$$k > 50\left(1 - \frac{1}{100^2}\right).$$

Pravá strana nerovnosti je číslo medzi 49 a 50. Keďže k je celé číslo, $k \geq 50$. Teda najmenšie možné $n = 50^2 + 1 = 2501$.

Úloha 33. Mišo má tabuľku s 2018×2018 políčkami. Rozhodol sa do každého políčka napísať celé číslo od 1 po 9 tak, aby v každom štvorci 3×3 bol súčet čísel deliteľný 9. Koľkými možnými spôsobmi môže tabuľku takto popísať?

Výsledok. 9^{8068}

Riešenie. Prvé dva stĺpce a riadky môžeme vyplniť ľubovoľne a zároveň tým určíme celú tabuľku. Vždy potom totiž vieme nájsť 3×3 bunku, ktorá je zaplnená celá okrem políčka v poslednom riadku a stĺpci. Toto políčko je jednoznačne určené zvyškom súčtu zvyšných políčok bunky. Po určení prvých dvoch riadkov a stĺpcov tak môžme jednoznačne doplniť celú tabuľku, pozri obrázok. Počet spôsobov, ako vieme vyplniť prvé dva riadky a stĺpce, je riešením, lebo ich vieme vyplniť ľubovoľne (t.j. dolný odhad) a zároveň žiadne dve vyhovujúce popísania nemajú prvé dva riadky a stĺpce zhodné, lebo tie už určia celú tabuľku (horný odhad). Voliteľných políčok je $4 \cdot 2018 - 4 = 8068$, teda možností je 9^{8068}.

9	8				
9	7				
5	2				
4	1				
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7				
5	2				
4	1	1			
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7				
5	2	5			
4	1	1	2		
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

$\rightarrow$

9	8				
9	7	2			
5	2	5	1		
4	1	1	2	2	
3	6	9	9	1	3
2	9	1	7	4	4

Úloha 34. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (n, m) spĺňajúce rovnosť $4^n + 260 = m^2$.

Výsledok. $(3, 18)$, $(6, 66)$

Riešenie. Rovnosť vieme upraviť na $m^2 - (2^n)^2 = 260$. Ľavú stranu vieme rozložiť na súčin a dostávame $(m - 2^n)(m + 2^n) = 260$. Číslo 260 má prvočíselný rozklad $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$, čo nás vedie k nasledovným rozkladom:

$$260 = 1 \cdot 260 = 2 \cdot 130 = 4 \cdot 65 = 5 \cdot 52 = 10 \cdot 26 = 13 \cdot 20.$$

Uvedomme si, že $(m-2^n) < (m+2^n)$. Vďaka tomu, že $(m+2^n)-(m-2^n) = 2^{n+1}$ dostaneme dve možnosti $26-10 = 2^4$ a $130 - 2 = 2^7$. Z nich dostaneme dve dvojice $(3, 18)$ a $(6, 66)$ spĺňajúce rovnosť.

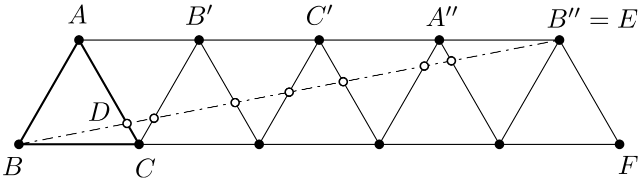
Úloha 35. V rovnostrannom trojuholníku ABC lúč svetla prichádzajúci z bodu B zasiahne stranu AC v bode D takom, že $|DC| : |AC| = 1 : 2018$. Predpokladáme, že uhol odrazu je rovný uhlu dopadu. Podobne sa odrazí vždy, keď zasiahne niektorú stranu trojuholníka ABC. Koľkokrát sa odrazí lúč (vrátane tohto prvého odrazu), kým zasiahne niektorý vrchol trojuholníka ABC?

Výsledok. 4033

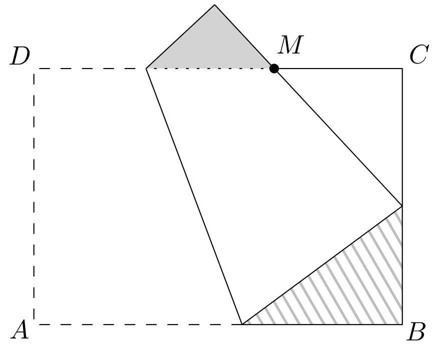
Riešenie. Namiesto toho, aby sme uvažovali nad odrazom lúča, nechajme ho ísť po priamke a vždy, keď narazí na niektorú hranu trojuholníka, preklopíme cez túto hranu trojuholník. Ukážeme, že jeden rad týchto preklopených trojuholníkov stačí na to, aby lúč narazil na niektorý vrchol.

Označme E priesečník polpriamky BD s priamkou, ktorá je rovnobežná s BC a vedie cez bod A a bod F na priamke BC taký, že $EF \parallel AC$. Potom trojuholníky BCD a BFE sú podobné a $BF = 2018\ BC$. Z toho vyplýva, že bod E sa dá dostať postupným preklápaním trojuholníka ABC.

Dá sa vidieť, že BE pretína $2 \cdot 2017 - 1 = 4033$ častí radu trojuholníkov, čo je v reči zadania ekvivalentné 4033 odrazom lúča. Na obrázku je znázornené riešenie pre $DC : AC = 1 : 5$.

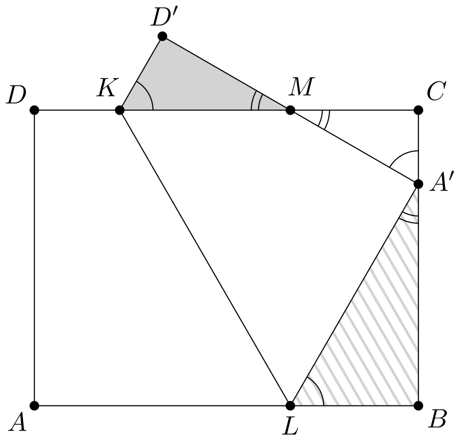


Úloha 36. Obdĺžnikový list papiera $ABCD$ bol preložený tak, že bod A skončil na strane BC a bod M, kde sa strana CD pretína so stranou DA, je presne v jednej tretine CD, t.j. $|CD| = 3|CM|$ (ako na obrázku). Ak obsah šedého trojuholníka je 1, aký je obsah pásikovaného trojuholníka?



Výsledok. 9/4

Riešenie. Označme body tak, ako na obrázku.



Trojuholníky KMD', $A'MC$ a $LA'B$ sú pravouhlé a podobné navzájom, ako je zjavné z jednoduchého počítania uhlov. Preto hľadáme pomer podobnosti medzi dvoma trojuholníkmi v zadaní. Z toho, že $|KD| = |KD'|$ a $|LA| = |LA'|$, máme

$$|D'K| + |KM| = |DM| = \tfrac{2}{3}|DC| = \tfrac{2}{3}|AB|$$

a

$$|A'L| + |LB| = |AB|.$$

Keďže $A'L$ zodpovedá KM a LB zodpovedá KD' v horeuvedenej podobnosti, dokazuje to, že pomer podobnosti je 3/2. Nás však zaujímajú obsahy, a preto výsledok je $(3/2)^2 = 9/4$.

Úloha 37. Keď predelíme polynóm $x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018}$ polynómom $x^2 - 1$, dostaneme nejaký zvyšok (ktorý je tiež polynóm). Nájdite x, pre ktoré je hodnota tohto zvyšku 1111.

Výsledok. 185

Riešenie. Polynóm môžeme zapísať ako

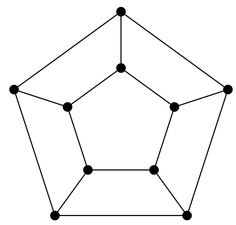
$$\begin{aligned} &x^3 + x^5 + x^7 + x^9 + x^{11} + x^{2017} + x^{2018} = \\ &\quad = x(x^2-1) + x(x^4-1) + x(x^6-1) + x(x^8-1) + x(x^{10}-1) + x(x^{2016}-1) + (x^{2018}-1) + 6x + 1. \end{aligned}$$

Keďže

$$x^{2k} - 1 = (x^2-1)(x^{2k-2} + x^{2k-4} + \cdots + 1),$$

vidíme, že všetky zátvorky na pravej strane rovnosti sú deliteľné $x^2 - 1$. Stupeň polynómu $6x + 1$ je menší ako stupeň polynómu $x^2 - 1$, takže $6x + 1$ je hľadaný zvyšok. Vyriešením $1111 = 6x + 1$ dostaneme riešenie $x = 185$.

Úloha 38. V krajine Pentagónia je 10 miest. Z každého mesta vychádzajú tri železničné trate do iných miest ako na obrázku nižšie. Protimonopolné zákony Pentagónie vyžadujú, aby každé dve trate vychádzajúce zo spoločného mesta boli obsluhované rôznymi železničnými spoločnosťami. Koľkými spôsobmi možno prideliť železničné trate Pentagónie trom spoločnostiam v súlade s protimonopolnými zákonmi krajiny?

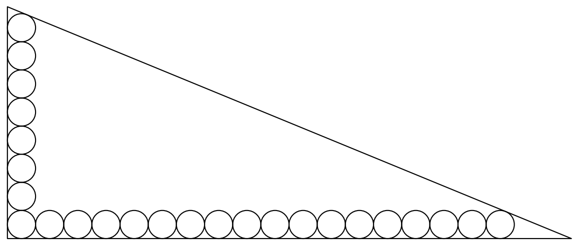


Výsledok. 30

Riešenie. Všimnime si, že keď priraďujeme trate „vonkajšieho päťuholníka“, tak dve spoločnosti (označme ich X a Y) musia obsluhovať dve trate a jedna spoločnosť (Z) musí obsluhovať jednu. Taktiež tieto trete musia byť obsluhované spoločnosťami v poradí $XYXYZ$ začínajúc od niektorého mesta. Ľahko môžeme vidieť, že keď priradíme tieto trate spoločnostiam, zvyšok tratí môže byť priradený práve jedným spôsobom: Pre zvyšné strany vychádzajúce z „vonkajšieho päťuholníka“ do „vnútorného“ je len jedna voľná spoločnosť. Trate „vnútorného päťuholníka“ tak následne musia byť priradené rovnakým spoločnostiam, ako im zodpovedajúce strany vo „vonkajšom päťuholníku“.

To znamená, že počet zákonných priradení všetkých tratí je rovný počtu spôsobov, ako možno priradiť trate „vonkajšieho päťuholníka“ trom spoločnostiam. Máme 6 spôsobov, ako môžeme vybrať spoločnosti X, Y a Z, a 5 spôsobov, ako vybrať mesto, z ktorého začína priradenie $XYXYZ$. To nám dáva spolu $5 \cdot 6 = 30$ možností.

Úloha 39. Pravouhlý trojuholník obsahuje 25 dotýkajúcich sa kružníc s polomerom 1 tak, ako je ukázané na obrázku.



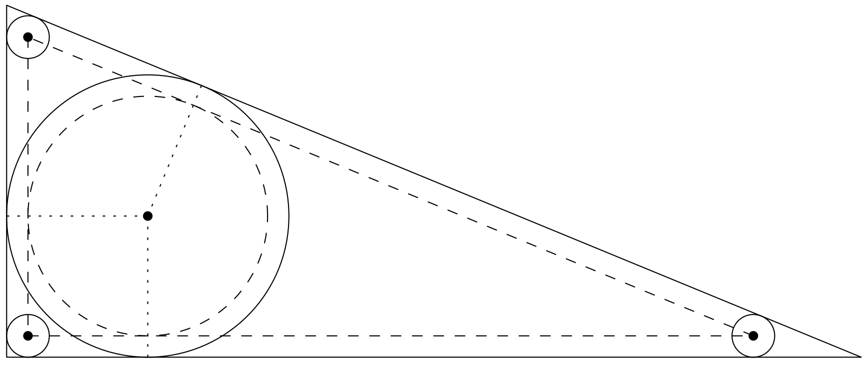
Aký má polomer kružnica vpísaná tomuto trojuholníku?

Výsledok. $25 - 13\sqrt{2} = 34 \cdot 14/(34 + 14 + \sqrt{34^2 + 14^2}) + 1$

Riešenie. Uvažujme trojuholník, ktorého vrcholy sú v strede troch kružníc v rohoch. Je to pravouhlý trojuholník s ramenami dĺžky 14 a 34. Pomocou Pytagorovej vety vieme získať dĺžku prepony:

$$\sqrt{14^2 + 34^2} = 26\sqrt{2}.$$

Polomer jeho vpísanej kružnice vieme vypočítať ako $(14 + 34 - 26\sqrt{2})/2 = 24 - 13\sqrt{2}$. Keďže strany pôvodného trojuholníka sú rovnobežné so stranami nového a ich vzdialenosť je 1, tak stredy ich vpísaných kružníc sú totožné a hľadaný polomer je od toho vypočítaného väčší o 1, teda $25 - 13\sqrt{2}$.



Úloha 40. Mojo vymyslel operáciu *smojenie* postupnosti: Ak má Mojo danú konečnú postupnosť celých čísel, zoberie si štyri jej kópie, zvýši členy v kópiách postupne o 0, 2, 3 a 5 a spojí tieto kópie za sebou do jednej postupnosti. Na príklad, smojením postupnosti $(8, 3)$ dostaneme postupnosť $(8, 3, 10, 5, 11, 6, 13, 8)$. Mojo má na začiatku jednočlennú postupnosť (0) a stále používa na svoju aktuálnu postupnosť smojenie, pokým nemá jeho postupnosť aspoň 2018 členov. Keď Mojo skončí, akú hodnotu bude mať 2018-ty člen jeho postupnosti? (Najľavejší člen použijeme za prvý.)

Výsledok. 17

Riešenie. Pre prehľadnosť si očíslujme pozície v postupnosti tak, aby sme začali nulou. Ďalej vidíme, že môžme prepísať pozície tejto postupnosti do štvorkovej sústavy. Takáto upravená postupnosť vlastne opisuje to, aké operácie a v akom poradí boli na tom čísle páchané. Samozrejme priradíme 0 k 0, 2 k 1, 3 k 2 a 5 k 3. Toto je ukážka postupnosti, ktorá vznikla dvojnásobným použitím operácie smojenie postupnosti:

$$(\underset{00}{0+0}, \underset{01}{0+2}, \underset{02}{0+3}, \underset{03}{0+5}, \underset{10}{2+0}, \underset{11}{2+2}, \underset{12}{2+3}, \underset{13}{2+5}, \underset{20}{3+0}, \underset{21}{3+2}, \underset{22}{3+3}, \underset{23}{3+5}, \underset{30}{5+0}, \underset{31}{5+2}, \underset{32}{5+3}, \underset{33}{5+5}).$$

(Číslo pod rozloženou postupnosťou ukazuje poradie v štvorkovej sústave čísla v postupnosti.) Keďže 2017 je v štvorkovej sústave zapísateľné ako 133 201 tak číslo na pozícií 2017 je

$$2 + 5 + 5 + 3 + 0 + 2 = 17.$$

Úloha 41. Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že rovnica

$$(x^2 + y^2)^2 + 2nx(x^2 + y^2) = n^2y^2$$

má riešenie (x, y) v kladných celých číslach.

Výsledok. 25

Riešenie. Na rovnicu sa môžeme tiež pozrieť ako na kvadratickú rovnicu v n s riešením

$$n = \frac{(x^2 + y^2)\big(x + \sqrt{x^2 + y^2}\big)}{y^2}$$

(druhé riešenie by viedlo k zápornému n, keďže $\sqrt{x^2 + y^2} > x$), a teda

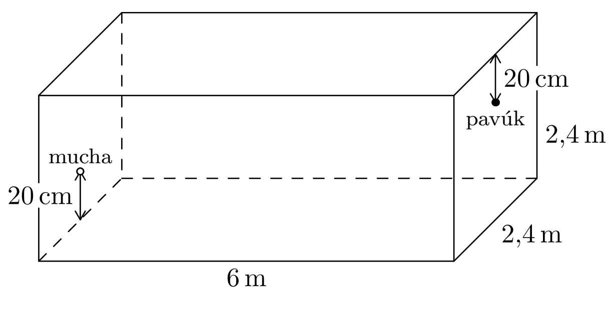
$$ny^2 = (x^2 + y^2)\big(x + \sqrt{x^2 + y^2}\big).$$

Nech $d = \mathrm{NSD}(x, y)$ a nech $x = x_0d$, $y = y_0d$. Dosadením a zjednodušením dostávame

$$ny_0^2 = d(x_0^2 + y_0^2)\big(x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\big).$$

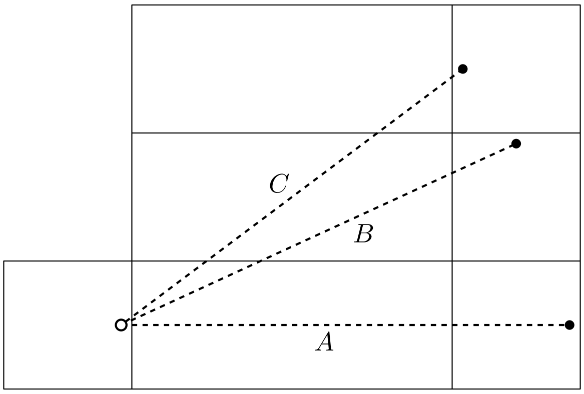
Keďže x_0 a y_0 sú nesúdeliteľné, tiež y_0^2 a $x_0^2 + y_0^2$ sú nesúdeliteľné, z čoho vyplýva $x_0^2 + y_0^2 \mid n$. Navyše, kvôli tomu, že v rovnici je $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, musí byť $x_0^2 + y_0^2$ štvorec. Je známe, že $5^2 = 25$ je najmenší štvorec, ktorý je súčtom dvoch štvorcov, $3^2 + 4^2$. Preto $n \geq 25$ a dosadením $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $d = 2$ alebo $x = 6$, $y = 8$ dostávame, že $n = 25$ je naozaj riešenie.

Úloha 42. V miestnosti tvaru kvádra s rozmermi $6\,\mathrm{m} \times 2.4\,\mathrm{m} \times 2.4\,\mathrm{m}$ (dĺžka × šírka × výška) sa nachádza pavúk na jednej stene rozmerov $2.4\,\mathrm{m} \times 2.4\,\mathrm{m}$ vzdialený 20 cm od stropu a rovnako vzdialený od zvislých hrán steny. Mucha sedí na protiľahlej stene, taktiež je rovnako vzdialená od jej zvislých hrán, ale 20 cm od podlahy. Pokiaľ sa mucha nepohne z miesta, aká je najkratšia celková vzdialenosť (v metroch), ktorú musí pavúk preliezť po povrchoch stien, aby chytil muchu?



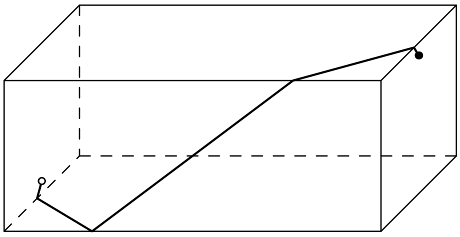
Výsledok. 8

Riešenie. Skúmajme možné cesty pavúka v sieti kvádra. Je zjavné, že najkratšia cesta pavúka sa stane priamkou, keď sieť kvádrovej miestnosti rozložíme do roviny. Reprezentujme si pavúka čiernym krúžkom a muchu bielym krúžkom. Poloha pavúka závisí od toho, akým spôsobom rozložíme kváder do mriežky.



Celkovo máme tri (až na symetriu) možné spôsoby, ako môže pavúk ísť za muchou. Jeho možné cesty, ktoré sú na obrázku označené A, B a C prechádzajú postupne cez jednu, dve a tri dlhé steny kvádra. Zjave cesta, ktorá by prechádzala štyrmi dlhými stenami, by sa dala skrátiť. Dĺžka cesty A je 8.4 m a s využitím Pytagorovej vety dostaneme, že cesta B je dlhá $\sqrt{66.32}$ a cesta C zas 8. Preto cesta C je najkratšia, a teda odpoveď je 8 m.

Obrázok nižšie ilustruje najkratšiu cestu v troch rozmeroch:



Úloha 43. Nájdite najmenšiu hodnotu výrazu

$$(6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2$$

s reálnymi číslami x, y.

Výsledok. 49

Riešenie. Označme $V(x, y) = (6 + 2\cos(x) - \cos(y))^2 + (8 + 2\sin(x) - \sin(y))^2$. Pripomeňme si, že kruh $k(S, r)$ so stredom v bode $S = [S_1, S_2]$ a polomerom $R > 0$ môže byť parametrizovaný (t. j. súradnice všetkých bodov na ňom môžu byť vyjadrené) pomocou uhla α ako $(x_1, x_2) = (S_1 + R\cos(\alpha), S_2 + R\sin(\alpha))$. Uvažujme body $P = [0, 0]$ a $Q = [6, 8]$ a kruhy $k_1(P, 1)$ a $k_2(Q, 2)$. Potom z Pytagorovej vety vieme, že $V(x, y) = |AB|^2$, kde $A \in k_1$ pre uhol x a $B \in k_2$ pre uhol y. Z toho vyplýva, že minimum výrazu $V(x, y)$ je druhá mocnina najbližších bodov na kružniciach k_1 a k_2. Tú môžeme vypočítať pomocou vzdialeností stredov a polomerov kružníc k_1 a k_2: $\sqrt{6^2 + 8^2} - 1 - 2 = 7$, a teda najmenšia hodnota výrazu $V(x, y)$ je $7^2 = 49$.

Úloha 44. Ktoré je najmenšie kladné celé číslo, ktorého posledná (t. j. na mieste jednotiek) cifra je 2 a keď presunieme poslednú cifru dopredu pred prvú cifru, dostaneme dvojnásobok pôvodného čísla?

Výsledok. 105 263 157 894 736 842

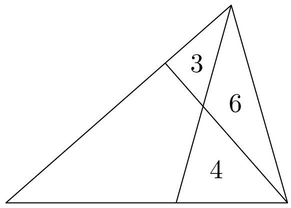
Riešenie. Označme hľadané číslo n. Keď odstránime jeho cifru na mieste jednotiek, dostaneme všetky cifry čísla $2n$ okrem prvej. Keďže n končí cifrou 2, $2n$ musí končiť cifrou 4. Preto cifra na mieste desiatok čísla n je 4. Nech d_i je i-ta cifra čísla N rátajúc tentokrát sprava doľava (t. j. d_1 je na mieste jednotiek). Ak zoberieme do úvahy, ako funguje násobenie po cifrách, vidíme, že cifry čísla n musia spĺňať

$$d_i = \begin{cases} 2d_{i-1} \bmod 10 & \text{ak } d_{i-2} < 5, \\ (2d_{i-1} \bmod 10) + 1 & \text{ak } d_{i-2} \geq 5 \end{cases}$$

pre všetky $i > 2$. Týmto spôsobom vieme priamo písať cifry čísla n. Skončíme, keď napíšeme cifru 1 a v ďalšom kroku cifru 2: číslo začínajúce sa na 1 je n, pretože násobenie dvomi akurát odstráni dvojku na mieste jednotiek a pridá ju vpredu. Dostávame tak výsledok

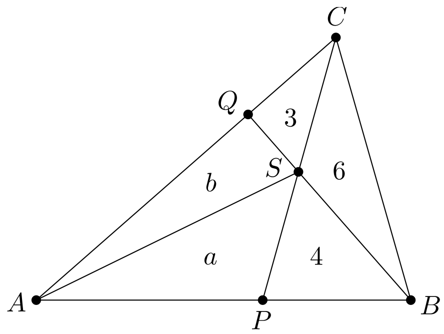
$$N = 105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

Úloha 45. Matka Betka rozdelila svoj pozemok v tvare trojuholníka dvomi úsečkami na štyri časti. Časť s obsahom 6 dala svojej dcére Ivke, časť s obsahom 4 svojej dcére Kike a najmenšiu časť s obsahom 3 svojej dcére Ľudke. Najväčšiu časť pozemku si nechala matka Betka pre seba. Aký obsah má Betkina časť pozemku?



Výsledok. 19/2

Riešenie. Použijeme označenie ako v nasledujúcom obrázku.



Vďaka pomerom obsahov vieme, že bod S delí úsečku QB v pomere $1:2$ a úsečku PC v pomere $2:3$. Dokreslime úsečku AS a označme obsah trojuholníka ASQ ako b a obsah trojuholníka APS ako a. Teraz vieme zapísať rovnice:

$$\frac{b}{a+4} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{b+3}{a} = \frac{3}{2}.$$

Tie sú ekvivalentné rovniciam

$$2b = a + 4,$$
$$2b + 6 = 3a,$$

z ktorých dostaneme riešenie $a = 5$ a $b = \frac{9}{2}$. Preto hľadaný obsah štvoruholníka $APSQ$ je $\frac{19}{2}$.

Úloha 46. Štyria bratia majú spolu 2018 eur. Vieme, že majetok každého brata je celé číslo a žiadni dvaja bratia nemajú rovnaké množstvo eur. Navyše, vždy keď je jeden brat bohatší ako druhý, tak jeho majetok je násobok majetku chudobnejšieho brata. Aký je najmenší počet eur, ktorý môže mať najbohatší brat?

Výsledok. 1152

Riešenie. Keďže majetok každého brata je násobok majetku najchudobnejšieho, súčet ich majetkov, 2018, musí byť deliteľný týmto číslom. Avšak rozklad na prvočísla čísla 2018 je $2018 = 2 \cdot 1009$, ktorý nám dáva len tri možnosti pre majetok najchudobnejšieho brata: 1, 2 alebo 1009. Zjavne 1009 je nemožné, keďže by to bolo viac ako zvyšné tri hodnoty. Taktiež, ak by najmenší mal len 1 euro, zvyšok by musel mať spolu 2017 eur, čo je prvočíslo a druhý najchudobnejší brat by tiež musel mať len 1 euro, čo by bol spor. Preto najchudobnejší brat má 2 eurá a zvyšní traja bratia majú spolu 2016 eur.

Nech $a < b < c$ sú majetky zvyšných troch bratov; platí pre $a \mid b \mid c$ a $a + b + c = 2016$. Deliteľnosti spolu s ostrými nerovnosťami nám vravia, že $2a \leq b$ a $2b \leq c$. Ak by sme mohli dosiahnuť rovnosti, zjavne by sme tak dostali riešenie s najmenšou hodnotou c. Našťastie $1 + 2 + 4 = 7$ je deliteľom čísla 2016, a preto môžeme tento súčet rozdeliť ako

$$2016 = \tfrac{1}{7} \cdot 2016 + \tfrac{2}{7} \cdot 2016 + \tfrac{4}{7} \cdot 2016$$

a riešením je $\frac{4}{7} \cdot 2016 = 1152$.

Úloha 47. Andrej nakreslil na tabuľu symbol ♣. Potom 13-krát zopakoval nasledujúci postup: Zmazal tabuľu a napísal na ňu novú postupnosť symbolov, v ktorej bola dvojica ♣♡ namiesto každého symbolu ♡ a dvojica ♡♣ namiesto každého symbolu ♣ v práve zotrenej postupnosti. Napríklad, postupnosť ♣♡♡ by Andrej nahradil postupnosťou ♡♣♣♡♣♡. Koľko párov ♡♡ (neobsahujúcich žiadne symboly medzi nimi) sa nachádzalo na tabuli, keď Andrej skončil svoju činnosť? Rátané symboly sa môžu prekrývať, takže napr. v postupnosti ♡♡♡♡ sú tri páry ♡♡.

Výsledok. 1365

Riešenie. Nech A_n je postupnosť na tabuli potom, čo Andrej n-tý krát zotrel tabuľu (s tým, že $A_0 = (\clubsuit)$) a nech h_n je počet párov ♡♡ v postupnosti A_n. Všimnime si, že každý pár ♡♡ v postupnosti A_n vznikne iba z párov ♡♣ v postupnosti A_{n-1}, ktorý, na druhú stranu, vzniká buď z ♡♡ alebo ♣ v postupnosti A_{n-2}. Z toho vidíme, že $h_n = h_{n-2} + 2^{n-3}$ pre $n \geq 3$, keďže v postupnosti A_{n-2} je práve 2^{n-3} symbolov ♣. Preto pre nepárne n máme

$$h_n = 2^{n-3} + 2^{n-5} + \cdots + 2^0 + h_1 = \tfrac{1}{3}(2^{n-1} - 1),$$

keďže $h_1 = 0$. Hľadaný výsleok je $h_{13} = 1365$.

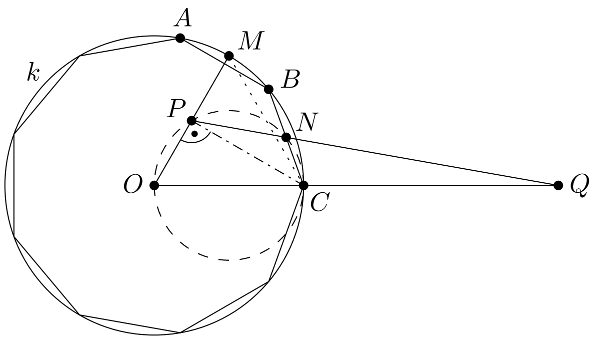
Úloha 48. Nech $ABCDEFGHI$ je pravidelný deväťuholník s opísanou kružnicou k so stredom O. Nech M je stred (kratšieho) oblúka AB kružnice k, P je stred strany MO a N stred strany BC. Nech priamky OC a PN sa pretínajú v bode Q. Aká je veľkosť uhla NQC (v stupňoch)?

Výsledok. $10°$

Riešenie. Ukážeme, že štvoruholník $OCNP$ je tetivový. Keďže $|\sphericalangle ONC| = 90°$, stačí nám ukázať, že $|\sphericalangle OPC| = 90°$. To môžeme ukázať nasledovne: Keďže oba body C a M ležia na kružnici k, $|OC| = |OM|$. Jednoduchým výpočtom zistíme, že $|\sphericalangle MOC| = 60°$, takže trojuholník OCM je rovnostranný. Keďže bod P je stred stanu OM, platí $|\sphericalangle OPC| = 90°$.

Ďalším jednoduchým výpočtom zistíme, že $|\sphericalangle OCN| = 70°$, keďže $|\sphericalangle OPN| = 180° - |\sphericalangle OCN| = 110°$. S využitím trojuholníka OQP, dostaneme, že

$$|\sphericalangle NQC| = |\sphericalangle PQO| = 180° - |\sphericalangle POQ| - |\sphericalangle QPO| = 10°.$$



Úloha 49. Aňa si vybrala trojicu (x, y, z) kladných celých čísel takých, že $x+y+z = 2018$. Hodnotu x povedala Xike, y Yožovi a z Zajovi. Nikto z nich nevedel hodnotu zvyšných dvoch čísel, no bolo im povedané o ich súčte. Následne nasledoval nasledovný rozhovor:

- Xika: Viem, že Yožo a Zajo majú rôzne čísla.
- Yožo: Ďakujem Xika, teraz už viem, že všetci traja máme rôzne čísla!
- Zajo: A ja teraz viem konečne povedať, kto má aké číslo.

Nájdite trojicu (x, y, z).

Výsledok. $(3, 2, 2013)$

Riešenie. Xikin výrok len znamená, že x je nepárne. Keby totiž bolo párne, tak y a z by mohli byť rovnaké.

Predpokladajme (sporom), že y je nepárne. Potom by Yožo od začiatku vedel, že x a z sú rôzne. Ak by navyše bolo $y \geq 1009$, Yožo by od začiatku vedel že x a z sú rôzne od y a nepotreboval by informáciu od Xiky. Ak by však $y \leq 1007$, tak bez ohľadu na Xikin výrok môže mať Yožo s niekým rovnaké číslo. Z tohto vyplýva, že y musí byť párne, a teda z je nepárne.

Ak by bolo y násobkom 4, tak $x + z = 2018 - y \equiv 2 \pmod 4$, inak povedané, ich súčet môže byť dvojnásobok nepárneho čísla a x a z by mohli byť rovnaké a Yožo by nemal ako vedieť, že sú rôzne. Ak však $y \equiv 2 \pmod 4$, tak x a z musia mať rôzne zvyšky modulo 4 a Yožov výrok je opodstatnený.

Nakoniec sa pozrime na Zajov výrok. Je nutné, aby $y = 2$, lebo ak by bolo väčšie, tak by sme ho mohli zmenšiť o 4 a zväčšiť x o 4 a Zajo by nepoznal rozdiel, teda by nemohol povedať, kto má aké číslo. Z rovnakých dôvodov $x \leq 4$, teda $x = 1$ alebo $x = 3$. Zajo však pozná súčet, teda ak by bolo $x = 1$, tak by Zajo vedel, že $x + y = 2018 - z = 3$ a určil by všetky čísla bez Yožovho výroku. Z toho vyplýva, že $x = 3$ a $z = 2013$. (V tomto prípade potrebuje Yožov výrok, aby eliminoval trojicu $(1, 4, 2013)$.)

Úloha 50. Čarodejníci Aritmetix a Kombinatorika začínajú svoj duel. Obaja čarodejníci majú 100 HP (bodov života). Arithmetixovo kúzlo zasiahne Kombinatoriku s pravdepodobnosťou 90 % a spôsobí jej 60 HP poškodenia (ak sa trafí), Kombinatorikine kúzlo zasiahne Arithmetixa s pravdepodobnosťou 60 % a spôsobí mu 130 HP poškodenia. Čarodejníci sa striedajú v zosielaní kúziel, Arithmetix začína. Duel skončí, keď jeden z čarodejníkov príde o všetko svoje HP, čím druhý čarodejník vyhrá. Určte prevdepodobnosť, že duel vyhrá Arithmetix.

Výsledok. 45/128

Riešenie. Presné množstvo HP nie je dôležité – stačí nám vedieť, že Aritmetix vydrží jedno kúzlo a Kombinatorika dve. Predpokladajme, že sme v stave duelu, kedy obaja čarodejníci vydržia už len jedno kúzlo a na rade je Aritmetix. Označme pravdepodobnosť, že Aritmetix vyhrá v tomto stave ako q. Teraz môže Aritmetix vyhrať buď ak sa jeho kúzlo trafí, čo sa stane s pravdepodobnosťou $0,9$, alebo ak sa jeho útok netrafí, taktiež sa netrafí útok od Kombinatoriky, čo sa stane s pravdepodobnosťou $0,1 \cdot 0,4$ a následne Aritmetix vyhrá s pravdepodobnosťou q. Dostávame tak rovnicu

$$q = 0,9 + 0,1 \cdot 0,4 \cdot q,$$

z ktorej vyjde $q = 15/16$.

Vypočítajme teraz pravdepodobnosť p, že Aritmetix vyhrá duel. Ak Aritmetix trafí a Kombinatorika minie (pravdepodobnosť 0,9 · 0,4), duel sa dostane do situácie z predchádzajúceho odseku, v ktorej Aritmetix vyhrá s pravdepodobnosťou $q = 15/16$. Ak sa zas Aritmetix netrafí a Kombinatorika sa netrafí tiež (pravdepodobnosť 0,1 · 0,4), tak Aritmetix môže vyhrať znovu s pravdepodobnosťou p. Takže môžeme zapísať rovnicu

$$p = 019 \cdot 0,4 \cdot \frac{15}{16} + 0,1 \cdot 0,4 \cdot p.$$

Po jej vyriešení dostaneme, že Aritmetix vyhrá duel s pravdepodobnosťou $p = 45/128$.

Úloha 51. Nech $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel, ktorá spĺňa $a(a(n)) = 3n$ pre každé kladné celé číslo n. Vypočítajte $a(2018)$.

Poznámka: Postupnosť je *rastúca*, ak platí $a(m) < a(n)$ pre všetky $m < n$.

Výsledok. 3867

Riešenie. Ak $a(1) = 1$, tak dostávame, že $a(a(1)) = 1 \neq 3 \cdot 1$ čo nie je možné. keďže postupnosť je rastúca, tak platí $1 < a(1) < a(a(1)) = 3$, a teda $a(1) = 2$. Z rovnice vyplýva , že $a(3n) = a(a(a(n))) = 3a(n)$ pre všetky n. Ľahko indukciou ukážeme, že $a(3^m) = 2 \cdot 3^m$ pre všetky m, keďže $f(1) = 2$. Použitím tohto tiež dostávame, že $a(2 \cdot 3^m) = a(a(3^m)) = 3^{m+1}$. Existuje $3^n - 1$ prirodzených čísel i takých, že $3^n < i < 2 \cdot 3^n$ a existuje $3^n - 1$ prirodzených čísel j takých, že $a(3^n) = 2 \cdot 3^n < j < 3^{n+1} = a(2 \cdot 3^n)$. Keďže $a(n)$ je rastúca, tak nemáme inú možnosť, než $a(3^n + b) = 2 \cdot 3^n + b$ pre všetky $0 < b < 3^n$. Preto $a(2 \cdot 3^n + b) = a(a(3^n + b)) = 3^{n+1} + 3b$. A keďže $2018 = 2 \cdot 3^6 + 560$, tak máme $a(2018) = 3^7 + 3 \cdot 560 = 3867$.

Úloha 52. Rovnostranný trojuholník T so stranou dĺžky 2018 je rozdelený na 2018^2 malých rovnostranných trojuholníkov so stranou dĺžky 1. Hovoríme, že množina M vrcholov týchto rovnostranných trojuholníkov je *nezávislá*, ak pre ľubovoľné dva rôzne body $A, B \in M$ úsečka AB nie je rovnobežná so žiadnou stranou T. Aký je najväčší možný počet vrcholov v nezávislej množine?

Výsledok. 1346

Riešenie. Každému vrcholu v mriežke môžeme priradiť trojicu celých čísel, ktoré sú vzdialenosti tohto vrcholu od troch strán T (pričom berieme výšku malého trojuholníka ako jednotku). Je ľahké vidieť, že pre každý vrchol je súčet týchto troch celých čísel 2018. Na druhú stranu, ak si zoberieme trojicu čísel so súčtom 2018, tak je ňou jednoznačne určený vrchol, ktorého vzdialenosti od strán T sú tieto čísla. Preto môžeme ekvivalentne uvažovať tieto trojice namiesto vrcholov. Budeme hovoriť o týchto troch číslach ako o *súradniciach.*

Podmienka nezávislosti sa do reči súradníc preloží tak, že žiadne dve trojice nemajú rovnakú prvú, druhú ani tretiu súradnicu. Nech

$$M = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)\}$$

je nezávislá množina. Keďže čísla $x_1, \ldots, x_k$ sú rôzne nezáporné celé čísla, ich súčet je aspoň

$$0 + 1 + \cdots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

To isté platí pre $y_1 + \cdots + y_k$ a $z_1 + \cdots + z_k$. Na druhú stranu vieme, že $x_i + y_i + z_i = 2018$ pre všetky $i = 1, \ldots, k$, a teda

$$3 \cdot \frac{k(k-1)}{2} \leq (x_1 + \cdots + x_k) + (y_1 + \cdots + y_k) + (z_1 + \cdots + z_k) = 2018k.$$

Z toho vyplýva

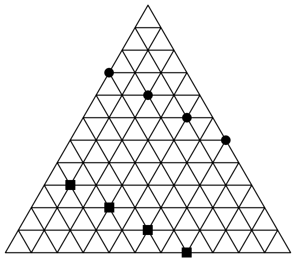
$$k \leq 1 + \frac{2}{3} \cdot 2018,$$

čiže $k \leq 1346$.

Nasledujúce dve postupnosti spolu tvoria nezávislú množinu veľkosti 1346:

$$(0, 672, 1346),\ (2, 671, 1345),\ (4, 670, 1344),\ \ldots,\ (1344, 0, 674);$$
$$(1, 1345, 672),\ (3, 1344, 671),\ (5, 1343, 670),\ \ldots,\ (1345, 673, 0).$$

Z tohto vyplýva, že maximálny počet vrcholov je 1346. Na obrázku je znázornená konštrukcia nezávislej množine pre trojuholník so stranou 11 namiesto 2018:



Úloha 53. Nech ABC je trojuholník s $|AB| = 5$, $|AC| = 6$ a opísanou kružnicou k. Nech F, G sú body na úsečke AC také, že $|AF| = 1$, $|FG| = 3$, $|GC| = 2$ a nech priamky BF a BG pretínajú kružnicu k druhýkrát v bodoch D a E. Ak vieme, že AC a DE sú rovnobežné, aká je dĺžka úsečky BC?

Výsledok. $5\sqrt{5/2}$

Riešenie. Označme $x = |BC|$. $ACED$ je rovnoramenný lichobežník, pretože je vpísaný do kružnice, a preto môžeme označiť $y = |AE| = |CD|$. Napokon, nech $p = |BF|$, $q = |DF|$, $u = |BG|$ a $v = |GE|$.

Uhly BAC a BDC sú zhodné, pretože sú to obvodové uhly nad tetivou BC. Z toho vyplýva, že trojuholníky ABF a DCF sú podobné, z čoho dostávame

$$\frac{y}{5} = \frac{q}{1} = \frac{5}{p}.$$

Úplne rovnakým spôsobom dostaneme podobnosť BCG a AEG, z ktorej máme

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{2} = \frac{4}{u}.$$

Napokon z rovnobežnosti AC a DE plynie

$$\frac{p}{q} = \frac{u}{v}$$

a kombináciou s predošlými rovnicami dostávame

$$\frac{\frac{25}{y}}{\frac{y}{5}} = \frac{\frac{4x}{y}}{\frac{2y}{x}}$$

alebo $x^2 = 125/2$. Preto $x = 5\sqrt{5/2}$.

Úloha 54. Vieme, že

$$2^{22000} = \underbrace{4569878\ldots229376}_{6623 \text{ cifier}}.$$

Pre koľko prirodzených čísel $n < 22000$ je tiež pravda, že prvá cifra 2^n je 4?

Výsledok. 2132

Riešenie. Ak prvá cifra k-ciferného čísla N je c, tak $c10^{k-1} \leq N < (c+1)10^{k-1}$. Z toho vyplýva, že $2c10^{k-1} \leq 2N < (2c+2)10^{k-1}$, t.j. prvá cifra $2N$ je aspoň taká veľká ako prvá cifra $2c$ a najviac taká veľká ako prvá cifra $2c+1$. Použijeme tento fakt na prvé cifry mocnín dvojky: Ak máme mocninu dvoch s prvou cifrou 1, tak máme len nasledujúcich 5 možností na prvé cifry nasledujúcich mocnín 2:

1. $1, 2, 4, 8, 1$
2. $1, 2, 4, 9, 1$
3. $1, 2, 5, 1$
4. $1, 3, 6, 1$
5. $1, 3, 7, 1$

Nech k je nezáporné celé číslo také, že 2^k má prvú cifru 1 a d cifier. Potom existuje jediná mocnina 2, ktorá začína na 1 a má $d+1$ cifier. A je to buď 2^{k+3}, (ak sme v jednej zo situácii (3), (4), (5) vyššie), alebo 2^{k+4} (Vtedy, ak sa vyskytne prípad (1) alebo (2)). Keďže 2^0 (ktoré má 1 cifru) a 2^{21998} (s 6623 ciframi) začínajú na 1, môžeme spočítať koľkokrát sa (1) alebo 2) vyskytlo, keď postupne počítame mocniny dvoch: Je to presne $21998 - 3 \cdot 6622 = 2132$-krát.

Nakoniec si všimnime, že prípady (1) a (2) sú presne tie, ktoré nám dávajú mocninu dvoch, ktorá má prvú cifru 4, a preto je presne 2132 takých čísel v danom intervale.

Úloha 55. Nájdite racionálne čísla a, b, c také, že

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Poznámka: Racionálne číslo je podiel dvoch celých čísel.

Výsledok. $(1/9, -2/9, 4/9)$

Riešenie. Nech $x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}$ a $y = \sqrt[3]{2}$. Myšlienka je využiť fakt, že čísla $y^3 \pm 1$ sú celé a využiť vzorce na rozklad pre $A^3 \pm B^3$ na to, aby sme dostali vzťah medzi x a y, z ktorého už budeme vedieť vyjadriť x ako súčet troch tretích odmocnín z racionálnych čísel. Najprv si všimnime, že

$$1 = y^3 - 1 = (y-1)(y^2+y+1)$$

a keďže $3 = y^3 + 1$, tak máme

$$y^2 + y + 1 = \frac{3y^2+3y+3}{3} = \frac{y^3+3y^2+3y+1}{3} = \frac{(y+1)^3}{3}.$$

Preto $x^3 = y - 1 = \frac{1}{y^2+y+1} = \frac{3}{(y+1)^3}$.

Tiež platí $3 = y^3 + 1 = (y+1)(y^2-y+1)$, z čoho máme $\frac{1}{y+1} = \frac{y^2-y+1}{3}$ a nakoniec

$$x = \frac{\sqrt[3]{3}}{y+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1).$$

Dokázali sme, že trojica $(a,b,c) = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$ funguje.

Dá sa dokázať, že táto reprezentácia x ako súčtu troch tretích odmocnín z racionálnych čísel je jediná, až na poradie.