Úloha 1. Pět přátel tráví příjemný večer nad deskovou hrou. V každém kole získá některý z nich jeden bod. Hra končí, jakmile kterýkoli z nich dosáhne 10 bodů. Kolik nejvíce kol může mít jedna partie?

Výsledek. 46

Řešení. Na konci hry má vítěz 10 bodů a ostatní hráči mohou mít nejvýše 9 bodů. Nejvyšší možný počet proto bude $10 + 4 \cdot 9 = 46$.

Úloha 2. Honza postupně na čtyři papírky napsal číslice 1, 2, 3 a 6. Chce ze všech papírků sestavit dvě čísla A a B, a to tak, aby A bylo násobkem B. Může tedy vytvořit třeba čísla $A = 36$ a $B = 12$. Kolika různými způsoby to lze provést?

Výsledek. 21

Řešení. Podívejme se na dva případy:

I. B je jednociferné, A trojciferné. Uvažme možné hodnoty B:

- $B = 1$: A je libovolná permutace $2, 3, 6 \to 6$ možností.
- $B = 2$: A musí končit číslicí $6 \to 2$ možnosti.
- $B = 3$: A je libovolná permutace zbylých číslic, protože ciferný součet je dělitelný $3 \to 6$ možností.
- $B = 6$: A má ciferný součet 6, tedy dělitelný 3, navíc ale musí končit číslicí $2 \to 2$ možnosti.

II. A a B jsou dvouciferné. Pak je jistě podíl A/B menší než 6, takže může být 1, 2, 3, 4 nebo 5. Rozeberme všechny tyto možnosti:

1: To není možné, protože by muselo platit $A = B$.

2: A musí končit cifrou 2 nebo 6. Pokud A končí 2, pak B musí končit 6 nebo 1. V prvním případě máme čísla 32 a 16, ve druhém 62 a $31 \to 2$ možnosti. Pokud A končí 6, pak B musí končit 3, což splňují čísla 26 a $13 \to$ 1 možnost.

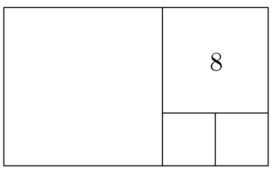
3: A musí začínat 6 nebo 3. V prvním případě musí B začínat 2, máme tedy 63 a 21. Ve druhém případě musí B začínat 1, což splňují čísla 36 a $12 \to 2$ možnosti.

4: A musí začínat 6 a končit 2, protože musí být sudé. Takže $A = 62$, což ale není dělitelné 4.

5: A musí končit cifrou 5 nebo 0, ale tyto číslice Honza na papírky nenapsal.

Dohromady má Honza 21 možností, jak čísla A a B poskládat.

Úloha 3. Na obrázku vidíme čtyři čtverce, přičemž ten označený má obsah 8. Jaký je obsah největšího čtverce?



Výsledek. 18

Řešení. Poměry délek stran jednotlivých čtverců jsou 3 : 2 : 1. Obsah největšího čtverce je proto $\left(\frac{3}{2}\sqrt{8}\right)^2 = \frac{9}{4} \cdot 8 = 18$.

Úloha 4. Po parku se procházejí matematici, kentauři a straky. Dohromady mají 15 ocasů a 94 rukou. Kolik mají celkem nohou?

Poznámka: Matematici mají dvě ruce, dvě nohy a žádný ocas; kentauři mají dvě ruce, čtyři nohy a jeden ocas; straky nemají ruce a mají dvě nohy a jeden ocas.

Výsledek. 124

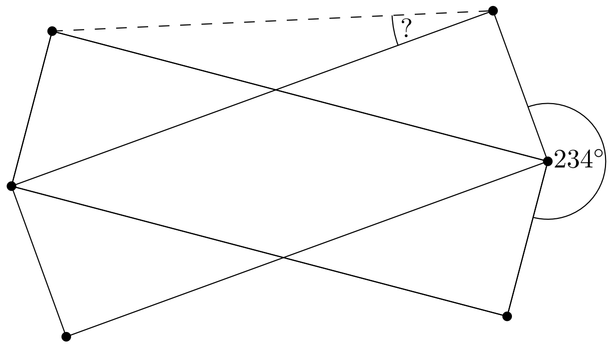
Řešení. Počty matematiků, kentaurů a strak označíme jako M, K a S. Díky podmínce o počtu ocasů platí $K + S = 15$ a ze znalosti počtu rukou dostáváme $2M + 2K = 94$. Počet nohou je roven $2M + 4K + 2S$, což spočítáme jako $2(K + S) + (2M + 2K) = 2 \cdot 15 + 94 = 124$.

Úloha 5. Televize v Kocourkově nabízí tři různé kanály s čísly 1, 2 a 3. Vždy můžete přepínat jen mezi kanály, jejichž čísla se liší právě o 1; z kanálu číslo 1 je tak možné přepnout pouze na kanál číslo 2. Začali jste sledováním kanálu číslo 2 a následně jste 11krát přepnuli. Kolik různých posloupností sledovaných kanálů jste přepínáním mohli vytvořit?

Výsledek. 64

Řešení. V posloupnosti bude 12 kanálů. Na lichých pozicích bude vždy kanál číslo 2, na sudých pak kanál s číslem 1 nebo 3. V posloupnosti je 6 sudých pozic, možných posloupností tak je $2^6 = 64$.

Úloha 6. Na obrázku jsou dva shodné obdélníky. Víme, že vyznačený úhel má velikost 234°. Určete velikost úhlu označeného otazníkem (ve stupních).



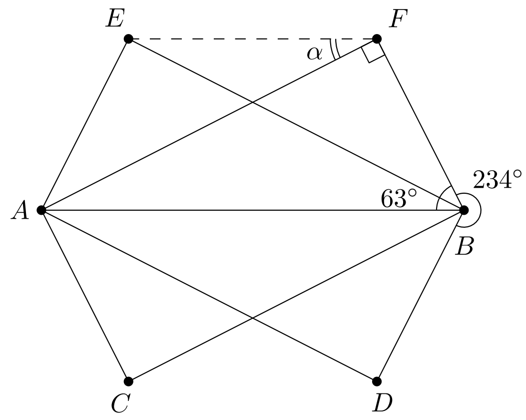
Výsledek. 27°

Řešení. Body označíme jako na obrázku níže. Společná diagonála AB je osou úhlu FBD, platí tak

$$|\sphericalangle FBA| = \frac{360^\circ - 234^\circ}{2} = 63^\circ.$$

Jelikož je přímka EF rovnoběžná s AB, platí $|\sphericalangle EFB| + |\sphericalangle FBA| = 180^\circ$. Odečtením pravého úhlu AFB dostáváme

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ.$$



Úloha 7. Jakou hodnotu má výraz $x^3 - 14x + 2024$, pokud platí $x^2 - 4x + 2 = 0$?

Výsledek. 2016

Řešení. Od výrazu $x^3 - 14x + 2024$ odečteme $x(x^2 - 4x + 2) = 0$, abychom se zbavili členu x^3. Dostaneme tak výraz $4x^2 - 16x + 2024$. Abychom se zbavili členu $4x^2$, odečteme $4(x^2 - 4x + 2) = 0$, a získáme tak 2016, což je řešením.

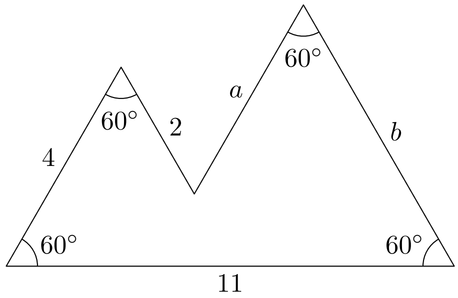
Úloha 8. Jarda našel kladné celé číslo n a zapsal na papír vedle sebe počet jeho sudých cifer, lichých cifer a všech cifer (v tomto pořadí). Když přečetl tato tři čísla jako jedno kladné celé číslo zleva doprava a ignoroval případné nuly na začátku, dostal opět číslo n. Jaké nejmenší možné n mohl Jarda najít?

Například pokud by Jarda našel číslo 2024, potom by počet sudých cifer byl 4, počet lichých cifer 0 a počet všech cifer také 4, takže by přečetl číslo 404.

Výsledek. 123

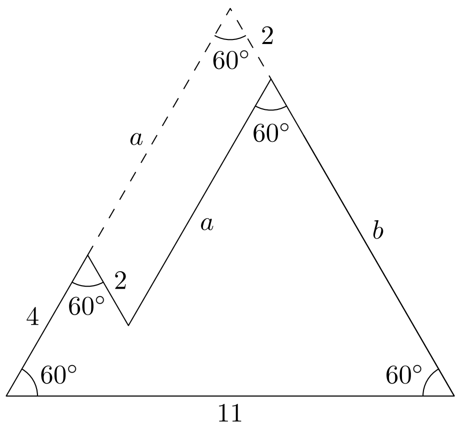
Řešení. Hledané číslo nemůže být jednociferné, jelikož jeho cifra je buď sudá, nebo lichá, a bude tak započítaná do počtu všech cifer a zároveň do počtu sudých nebo lichých cifer. Zároveň n nemůže být dvouciferné číslo, jelikož by končilo cifrou 2, která je sudá, ale zároveň by jeho počet sudých cifer musel být 0. Předpokládejme, že má číslo 3 cifry. Potom součet počtů sudých a lichých cifer je také 3. Možná čísla jsou tak 123, 213 a 303. Pokud číslo upravíme podle zadání, ze všech čísel dostáváme 123. Číslo 123 je tak hledaným řešením.

Úloha 9. Na obrázku je pětiúhelník, v němž známe velikosti čtyř úhlů a délky tří stran. Určete délku $a + b$.



Výsledek. 16

Řešení. Pětiúhelník rozšíříme pomocí rovnoběžníku na rovnostranný trojúhelník s délkou strany $11 = 4 + a = 2 + b$ jako na obrázku.



Dostáváme tedy $a = 7$, $b = 9$ a $a + b = 16$.

Úloha 10. Ve slovenské lidové písni *Kopala studienku* dívka chce, aby její studna byla stejně hluboká jako široká. Studnu definujeme jako válec s výškou odpovídající hloubce studny a průměrem podstavy odpovídajícím šířce studny. Dívka by potřebovala týden, aby vykopala studnu o požadované šířce a $\frac{1}{3}$ požadované hloubky, zatímco Janko Matúška by za týden zvládl vykopat studnu, která je dostatečně hluboká, ale má jen poloviční šířku. Úsilí je přímo úměrné objemu odebrané zeminy. Kolik dní budou potřebovat, aby společně vykopali požadovanou studnu?

Výsledek. 12

Řešení. Čas potřebný k vykopání studny je uvažovaný jako přímo úměrný jejímu objemu, který spočítáme jako objem válce: $V = \frac{\pi}{4} \cdot h \cdot d^2$, kde h značí hloubku a d šířku čili průměr studny. Víme tedy, že dívka potřebuje 7 dní na vykopání $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{h}{3} \cdot d^2 = \frac{1}{3}V$ zeminy, takže by potřebovala 21 dní na vykopání celého objemu V studny. Podobně Janko potřebuje 7 dní na vykopání $\frac{\pi}{4} \cdot h \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}V$ zeminy, takže by potřeboval 28 dní na vykopání celého objemu V studny. Dívka tedy zvládne vykopat $\frac{1}{21}$ studny za den, zatímco Janko vykope $\frac{1}{28}$ studny za den. Dohromady za den vykopou $\frac{1}{21} + \frac{1}{28} = \frac{1}{12}$ studny. Vykopat celou studnu by jim tedy dohromady trvalo 12 dní.

Úloha 11. Kolik je úseček délky $\sqrt{5}$, které spojují některé dva vrcholy čtverců v čtvercové mřížce 10×10? (Délka strany malého čtverečku je 1.)

Výsledek. 360

Řešení. Nejdříve si všimněme, že každý obdélník 2×1 obsahuje právě 2 úhlopříčky délky $\sqrt{5}$. Chceme tedy spočítat, kolik je v mřížce obdélníků 2×1. Nejprve se podívejme třeba na svislé obdélníky. Jejich umístění určuje 10 možných sloupců a 9 možných řádků. V mřížce 10×10 je tedy 90 takových obdélníků. Vodorovně můžeme obdélník umístit stejným počtem možností (jen v úvaze vyměníme sloupce za řádky a naopak). Každý z $90 + 90 = 180$ obdélníků má dvě úhlopříčky, dohromady tedy máme 360 úseček požadované délky.

Úloha 12. Víme, že M, A, T a H značí různé nenulové cifry a že platí rovnice

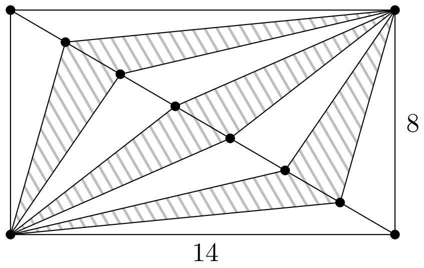
$$2024 + HAHA = MATH.$$

Jaká je nejvyšší možná hodnota čtyřciferného čísla $MATH$?

Výsledek. 5963

Řešení. Čísla $MATH$ a $HAHA$ mají stejnou číslici na místě stovek, přičemž odpovídající číslice v 2024 je 0, z čehož víme, že při sčítání desítkových cifer čísel na levé straně rovnice nepřekročíme deset. Platí tedy $24 + HA = TH$ a $2 + H = M$. Naopak při sečtení A a 4 musíme překročit deset, protože jinak by platilo $T = H + 2 = M$, ale přitom ze zadání jsou cifry různé. Z toho plyne, že $H = A + 4 - 10 = A - 6$, a s využitím předchozího také $M = A - 4$ a $T = A - 3$. Z toho už snadno vyvodíme, že pod $MATH$ se mohou skrývat čísla 3741, 4852 nebo 5963, přičemž největší je to poslední.

Úloha 13. V zebrovitém obdélníku se stranami délky 14 a 8 je úhlopříčka rozdělená na sedm stejně dlouhých úseček. Jaký obsah má šrafovaná oblast?



Výsledek. 48

Řešení. Obsah trojúhelníku lze spočítat jako polovinu součinu délky jedné strany a výšky na ni, $S = \frac{1}{2}a \cdot v_a$. Pokud za stranu a vezmeme vždy stranu ležící na úhlopříčce, mají všechny trojúhelníky v pravé horní polovině obdélníku stejnou výšku – vede z vrcholu obdélníku a je kolmá na úhlopříčku. Podobně pro levou dolní polovinu, přičemž tyto dvě výšky jsou stejně dlouhé. Všechny trojúhelníky mají tedy stejný obsah a šrafované trojúhelníky tak tvoří $\frac{6}{14}$ celkového obsahu obdélníku. Řešením je $\frac{6}{14} \cdot 8 \cdot 14 = 48$.

Úloha 14. Pokud by se do matematického kroužku přidala jedna holka a 20 % kluků ho opustilo, bylo by v něm holek stejně jako kluků. Kdyby z kroužku naopak jedna holka odešla, ale později se počet holek zvýšil o 30 %, počty kluků a holek by se také vyrovnaly. Kolik dětí chodí do matematického kroužku?

Výsledek. 116

Řešení. Označme počet holek jako h a počet kluků jako k. Zadání můžeme přepsat do soustavy rovnic:

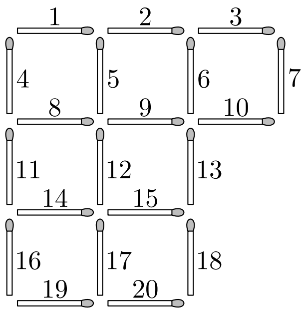
$$\begin{aligned} h + 1 &= \frac{4}{5}k, \\ \frac{13}{10}(h-1) &= k. \end{aligned}$$

Dosazením $k = \frac{5}{4}h + \frac{5}{4}$ z první rovnice do druhé dostaneme

$$\frac{5}{4}h + \frac{5}{4} = \frac{13}{10}h - \frac{13}{10}.$$

Řešením je $h = 51$, takže $k = \frac{13}{10} \cdot 50 = 65$. Odpověď je tedy $h + k = 51 + 65 = 116$.

Úloha 15. Dvacet sirek na obrázku tvoří devět čtverců. Klárka z nich odebrala tři sirky tak, že zbylo právě pět čtverců, a přitom každá zbylá sirka byla i nadále součástí některého čtverce. Potom sečetla čísla odebraných sirek. Jaké nejvyšší číslo jí mohlo vyjít?



Výsledek. 50

Řešení. Sirky tvoří 7 čtverců o straně délky 1 a dva čtverce o straně délky 2. Abychom počet čtverců snížili na 5, musíme rozbít přesně 4 čtverce.

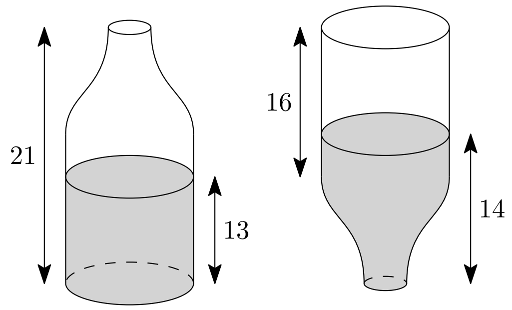
Pro odstranění čtverce ohraničeného sirkami $3, 7, 6, 10$ je potřeba odebrat aspoň tři z nich. Tento čtverec tedy určitě zůstane na místě. Nelze odebrat ani sirku 6, protože by to tento čtverec rozbilo a už bychom nemohli odebrat jeho ostatní sirky.

Odstraněním sirky 11 nebo 13 rozbijeme oba velké čtverce najednou (a zároveň vždy jeden malý). Pak bychom museli odebráním dalších dvou sirek rozbít jeden čtverec. Kdybychom odebrali sirku 11, pak bychom mohli odebrat dvojici sirek 12, 13 nebo dvojici 18, 20. Kdybychom odebrali sirku 13, měli bychom na výběr z dvojice 1, 4, dvojice 11, 12 a dvojice 16, 19. Z těchto možností má nejvyšší součet hodnot 11, 18 a 20, a to 49.

Kdybychom nechali na místě oba velké čtverce, mohli bychom odebrat pouze sirky 5, 12 a 17. Výsledná konfigurace ale odporuje pravidlům ze zadání.

Nakonec se podíváme možnost rozbití právě jednoho velkého čtverce: Protože nemůžeme odebrat sirku 6, je nutné odebrat obě sirky z jedné z následujících dvojic: 18, 20 nebo 16, 19 nebo 1, 4. Tím se rozbijí dva čtverce najednou, jeden velký a jeden malý. Poté musíme odebráním poslední sirky rozbít právě dva malé čtverce. V případě dvojice 18, 20 je vyhovující sirkou s nejvyšším číslem 12, čímž dostaneme celkový součet 50. Sirku 13 nemůžeme odebrat, protože pak by 15 nebyla součástí žádného čtverce. Podobně dojdeme k tomu, že po odebrání dvojice 16, 19 bychom odebrali i 13, čímž bychom dostali ale pouze součet 48. Zbylé možnosti není třeba rozebírat, protože výsledný součet bude jistě menší. Proto je $12 + 18 + 20 = 50$ hledané řešení.

Úloha 16. Naty má láhev o výšce 21. Láhev se skládá z válcovité části o výšce 16 a nepravidelné části tvořící její hrdlo. Naty do láhve napustila trochu vody a pak změřila, že hladina vody dosahuje výšky 13. Následně láhev uzavřela, otočila dnem vzhůru a zjistila, že nyní hladina vody dosahuje výšky 14. Určete, z kolika procent je láhev naplněná.



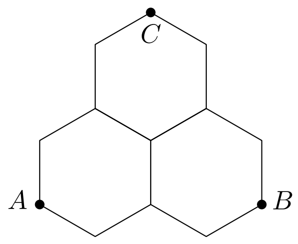
Výsledek. 65

Řešení. Průměr dna láhve označíme r. Poté co Naty nalije do láhve vodu, objem vody odpovídá $13\pi r^2$. Po otočení láhve pak objem vzduchu odpovídá $(21 - 14)\pi r^2 = 7\pi r^2$. Z toho plyne, že celkový objem láhve je $(13 + 7)\pi r^2 = 20\pi r^2$ a voda tak tvoří

$$\frac{13\pi r^2}{20\pi r^2} = \frac{13}{20} = 65\,\%$$

objemu láhve.

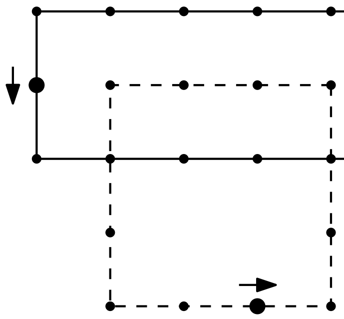
Úloha 17. Ondra bydlí v Hexagonii. V tomto zvláštním městě jsou všechny ulice dlouhé 1 km a každá z nich je stranou alespoň jednoho ze tří pravidelných šestiúhelníků. Chce nejdřív vyzvednout svou milou a potom s ní jít do kina. Situace je zachycena na mapce: Ondra začíná v bodě A, jeho milá bydlí v bodě B a kino se nachází v bodě C. Ondra nechce jít žádnou ulicí více než jednou. Jaký je součet délek všech možných tras, které může zvolit (v kilometrech)?



Výsledek. 28

Řešení. Z bodu A do bodu B existují čtyři trasy, které neprocházejí bodem C. Jedna z nich nabízí dvě možnosti, jak se dostat do bodu C, jedna trasa právě jednu možnost, jak se dostat do C, a pro další dvě trasy není možné dostat se do bodu C, aniž by Ondra prošel některou ulicí dvakrát. Dohromady má tři možné trasy, jak vyzvednout svou milou, a pak se dostat do kina. Dvě z nich jsou dlouhé 10 kilometrů, jedna pouze 8 kilometrů, dohromady tedy 28 kilometrů.

Úloha 18. Dva strážníci hlídkují na obdélníkových obchůzkových trasách zakreslených na obrázku. Oba strážníci se pohybují stejnou rychlostí, z jedné značky na následující se vždy přesunou za jednu minutu. Každý začíná ve zvýrazněné značce na své trase a pohybuje se ve směru šipky, která je vedle ní. Po kolika minutách se poprvé potkají?



Výsledek. 44

Řešení. Označme strážce na obdélníkové trase písmenem A, strážce na čtvercové cestě písmenem B. Strážce A obejde svoji trasu za 14 minut, strážce B za 12. Existují dvě značky, na kterých se strážci mohou potkat. Pokud se potkají na levé značce poté, co A celou trasu obešel a-krát a B celou svoji trasu b-krát, musí platit

$$14a + 2 = 12b + 8.$$

Rovnost můžeme zjednodušit na $7a = 6b + 3$, z čehož plyne $7 \mid 6b + 3$. Když vyzkoušíme $b \in \{0, 1, 2 \dots\}$, dostáváme $b = 3$ a $a = 3$ jako nejmenší řešení. Obdobně aby se strážci potkali na pravé značce, musí platit

$$14a + 5 = 12b + 3,$$

což upravíme na $7a = 6b - 1$. Dostáváme $7 \mid 6b - 1$, z čehož plyne $b \geq 6$. Strážci se tak poprvé potkají po $14 \cdot 3 + 2 = 44$ minutách.

Úloha 19. Kladná celá čísla a, b a c splňují rovnosti

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 172} = c,$$
$$\sqrt{c^2 + b^2 - 220} = a.$$

Jaká je největší možná hodnota součtu $a + b + c$?

Výsledek. 26

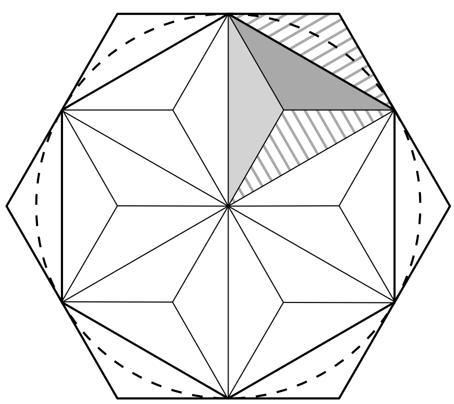
Řešení. Obě rovnosti umocníme, jejich sečtením pak dostáváme $2b^2 = 392$. Jelikož je b kladné, $b = 14$ je jediné řešení. Dosazením této hodnoty do umocněné první rovnice dostáváme $a^2 + 24 = c^2$, tedy $c^2 - a^2 = 24$. Označíme $d = c - a$, potom d je sudé číslo, jelikož c a a jsou obě sudá nebo obě lichá.

Hodnota $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ je zdola omezená $d(d + 2)$, což je pro $d \geq 6$ alespoň 48, tedy víc než 24. Máme tak pouze dvě možnosti $d = 2$ a $d = 4$. V prvním případě dostáváme $a + c = 12$ s řešením $a = 5$ a $c = 7$. V druhém případě máme $a + c = 6$ s řešením $a = 1$ a $c = 5$. Z toho plyne, že největší možná hodnota $a + b + c$ je $5 + 14 + 7 = 26$.

Úloha 20. Bára nakreslila kružnici a pak jí modrou barvou opsala pravidelný šestiúhelník a následně do ní vepsala žlutý pravidelný šestiúhelník. Jakou část obsahu modrého šestiúhelníku pokrývá žlutý šestiúhelník?

Výsledek. $\frac{3}{4}$

Řešení. Rozdělením šestiúhelníků na rovnostranné trojúhelníky jako na obrázku a následným počítáním dospějeme k odpovědi $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.



Alternativní řešení. Nechť r je poloměr kružnice. Každý šestiúhelník můžeme rozdělit na 6 rovnostranných trojúhelníků. Ty ve vepsaném šestiúhelníku budou mít výšku o délce $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,r$, zatímco ty v opsaném r. Koeficient podobnosti pro délku je tedy $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, pro obsah pak $k^2 = \frac{3}{4}$.

Úloha 21. Kulaté narozeniny zná každý. *Čtvercové* nazveme takové narozeniny, kde věk oslavence je celé číslo $n > 1$ splňující následující požadavek: Kdykoli nějaké prvočíslo p dělí n, pak také p^2 dělí n. Například $n = 8 = 2^3$ podmínkám vyhovuje, kdežto $n = 56 = 8 \cdot 7$ ne. Děda Lebeda letos oslavil 196. narozeniny. Kolik čtvercových narozenin měl za dobu svého života?

Výsledek. 20

Řešení. Každé číslo čtvercových narozenin se skládá z jednoho nebo více činitelů ve tvaru p^k, kde $k > 1$. Všichni takoví činitelé menší nebo rovni 196 jsou $S = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 125, 128, 144, 169, 196\}$. Můžeme si všimnout, že součin alespoň dvou prvků S větších než 27 buď patří do S, nebo je větší než 196. Mezi čísly menšími než 28 pouze $8 = 2^3$ a $27 = 3^3$ nejsou druhé mocniny. Jelikož součin druhých mocnin je také druhá mocnina, součin dvou druhých mocnin z S buď v S je, nebo je větší než 196. Zbývají tedy pouze součiny obsahující 8 nebo 27 jako jednoho z činitelů a jiná čísla z S jako další činitele. Taková, která jsou menší než 196 a nejsou v S, jsou $27 \cdot 4 = 108$ a $8 \cdot 9 = 72$. Celkem tak děda Lebeda oslavil $18 + 2 = 20$ čtvercových narozenin.

Úloha 22. Matematická soutěž Mathematical Charge se pořádá již 10 let. V n-tém ročníku zahrnovala $n + 2$ příkladů, přičemž byly číslovány běžným způsobem od 1 do $n + 2$. Pro 11. ročník soutěže chtějí organizátoři vybrat po jedné úloze z každého z předchozích ročníků tak, aby mohli sestavit sadu 10 příkladů očíslovaných od 1 do 10 při použití původních čísel. Kolik různých sad takto mohou vytvořit, pokud víme, že žádné dvě úlohy z předchozích ročníků nejsou stejné?

Výsledek. $3^8 \cdot 2 = 13122$

Řešení. Z prvního ročníku organizátoři mohou vybrat třemi způsoby. Ze druhého mají na výběr ze $4 - 1 = 3$ možných příkladů, protože jedno číslo úlohy už je zabrané. Je jasné, že dál to funguje stejně, tedy že v k-tém ročníku je již $k - 1$ příkladů nedostupných kvůli (nějakým) předchozím volbám. Pro všechny ročníky jsou tedy tři možnosti až do 9. ročníku, který obsahuje příklad číslo 11, což už je příliš velké číslo, takže organizátoři mohou volit jen ze dvou úloh. V sadě 10. ročníku jsou příklady 11 a 12, které nelze vybrat, takže zbývá jen jedna volná úloha. Dohromady lze vytvořit $3^8 \cdot 2 = 13122$ vyhovujících sad.

Úloha 23. Určete nejmenší kladné celé číslo, které začíná cifrou 1 a splňuje následující podmínku: Pokud přesuneme cifru 1 na konec čísla, výsledné číslo je trojnásobkem původního čísla.

Příklad přesunutí první cifry: $174 \to 741$.

Výsledek. 142857

Řešení. Jelikož víme, že poslední cifra je 1, můžeme zpětně zrekonstruovat celé číslo:

$$\begin{aligned}
\dots x \cdot 3 &= \dots 1 & &\Rightarrow & x &= 7\\
\dots y7 \cdot 3 &= \dots 71 & &\Rightarrow & y &= 5\\
\dots z57 \cdot 3 &= \dots 571 & &\Rightarrow & z &= 8\\
\dots t857 \cdot 3 &= \dots 8571 & &\Rightarrow & t &= 2\\
\dots s2857 \cdot 3 &= \dots 28571 & &\Rightarrow & s &= 4\\
\dots r42857 \cdot 3 &= \dots 428571 & &\Rightarrow & r &= 1.
\end{aligned}$$

Skutečně, $142857 \cdot 3 = 428571$ splňuje podmínky.

Alternativní řešení. Každé kladné celé číslo s alespoň dvěma ciframi začínající cifrou 1 lze zapsat jako $10^k + a$ pro nějaké celé číslo $k \geq 1$ a k-ciferné číslo a. Po přesunutí cifry 1 ze začátku na konec se číslo změní na $10a + 1$. Z toho plyne, že chceme najít řešení rovnice

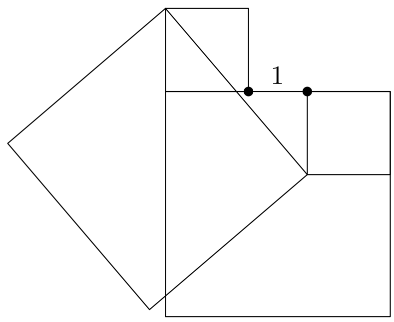
$$3 \cdot (10^k + a) = 10a + 1$$

pro k a a. Rovnici zjednodušíme na

$$3 \cdot 10^k - 1 = 7a.$$

Číslo na levé straně není nic jiného než cifra 2 následovaná k devítkami. Zkoušíme postupně čísla 29, 299, 2999 atd., dokud nenarazíme na první, které je dělitelné sedmi. Dostáváme tak $a = 299999/7 = 42857$; řešením tedy je 142857.

Úloha 24. Na obrázku vidíme dvě dvojice shodných čtverců (s kladnými délkami stran). Vzdálenost mezi dvěma vyznačenými body je 1. Jaký je součet obsahů těchto čtyř čtverců?

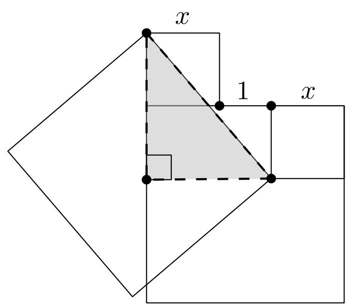


Výsledek. 58

Řešení. Označme x délku strany menších čtverců. Pak z Pythagorovy věty použité na šedý pravoúhlý trojúhelník na obrázku plyne

$$(2x)^2 + (1+x)^2 = (1+2x)^2.$$

Tato rovnice se zjednoduší na $x^2 = 2x$, takže $x = 2$. Odpověď je tedy $2(2^2 + 5^2) = 58$.



Úloha 25. Lezec Adam je spouštěn dolů ze svislé stěny. To znamená, že je přivázán na konci lana, které vede nahoru, prochází pevným bodem na horním okraji stěny a pak vede zase dolů k Ondrovi, jenž stojí na zemi a kontrolovaně lano popouští. Lano je elastické a Adamova váha prodlužuje zatíženou část (mezi Adamem a Ondrou) o 20 %. Uprostřed lana je značka. Když Adam klesá, setká se s touto značkou ve třetině výšky stěny od země. To ho uklidní, že je lano dostatečně dlouhé, a začne dumat, jak je vlastně stěna vysoká. Když se dotkne země, ale Ondra lano ještě neuvolní, stále zbývá 10 metrů volného lana. Pokud zanedbáme výšku lidí a délku lana spotřebovanou na uzly, jaká je výška stěny v metrech?

Výsledek. 18

Řešení. Označme délku volného lana l a výšku stěny h. Když se Adam setká se značkou, polovina lana (ale natažená) odpovídá dvojnásobku vzdálenosti lezce od horního okraje stěny. Platí tedy

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{l}{2} = 2 \cdot \frac{2h}{3}.$$

Když se Adam dotkne země, podobně platí

$$\frac{6}{5}(l - 10) = 2h.$$

Po dosazení $l = \frac{20h}{9}$ z první rovnice dostaneme výsledek $h = 18$.

Úloha 26. Na dně skříně se válí n ponožek, které se liší jen barvou. Olin se chystá náhodně vytáhnout dvě z nich a doufá, že takto získá černý pár. Pravděpodobnost, že uspěje, je ovšem jen 2/15. Jaká je nejmenší možná hodnota n?

Výsledek. 10

Řešení. Označme b počet černých ponožek v krabici. Pak se pravděpodobnost, že jsou obě vytažené ponožky černé, dá spočítat jako $\frac{b}{n} \cdot \frac{b-1}{n-1}$. Ze zadání víme, že je to rovno $\frac{2}{15}$, platí tedy následující rovnice:

$$15 \cdot b \cdot (b-1) = 2 \cdot n \cdot (n-1)$$

Protože 3 a 5 dělí levou stranu rovnice, přičemž obě čísla jsou nesoudělná s 2, musí dělit i $n \cdot (n-1)$ na pravé straně. Vyzkoušejme tedy malá n, pro která je $n \cdot (n-1)$ dělitelné 15. Prvním takovým je $n = 6$, což vede na $15 \cdot b \cdot (b-1) = 2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$. Nicméně $b \cdot (b-1) = 4$ neplatí pro žádné celé číslo, takže $n = 6$ není řešením. Dále pokud $n = 10$, pak $b \cdot (b-1) = 12$, a to je splněno pro $b = 4$. Řešením úlohy je tedy $n = 10$.

Úloha 27. Najděte největší celé číslo, které splňuje následující podmínky:

- má právě sedm cifer,
- žádné dvě jeho cifry nejsou stejné,
- je násobkem 11.

Výsledek. 9876504

Řešení. Použijeme pravidlo dělitelnosti 11: číslo je dělitelné 11, právě když je rozdíl součtu jeho cifer na sudých pozicích a součtu jeho cifer na lichých pozicích dělitelný 11.

Ze všech čísel s daným počtem cifer (v tomto případě se sedmi) jsou největší ta, která začínají nejvyššími číslicemi. Proto budeme hledat řešení začínající na 98765. Součet cifer na lichých pozicích je zatím $9+7+5=21$ a součet cifer na sudých pozicích je $8+6=14$, rozdíl je tedy zatím 7. Číslo musíme doplnit dalšími dvěma různými číslicemi z množiny $\{0,1,2,3,4\}$. Rozdíl dělitelný 11 dostaneme jedině přidáním 0 do sudé skupiny a 4 do liché skupiny. Máme tak číslo 9876504. Protože všechna jiná čísla splňující podmínky ze zadání by začínala menší posloupností pěti cifer než 98765, je to skutečně největší vyhovující číslo.

Alternativní řešení. Začněme s největším sedmiciferným číslem, které nemá žádné dvě stejné cifry: 9876543. To ale není dělitelné 11, jak zjistíme použitím pravidla dělitelnosti nebo písemným dělením. Největší násobek 11 menší než náš první kandidát je číslo 9876537, které ale nemá cifry po dvou různé. Zkusíme tedy odečíst 11 a zkontrolovat, jestli nově získané číslo splňuje podmínku různých cifer. Po několika krocích

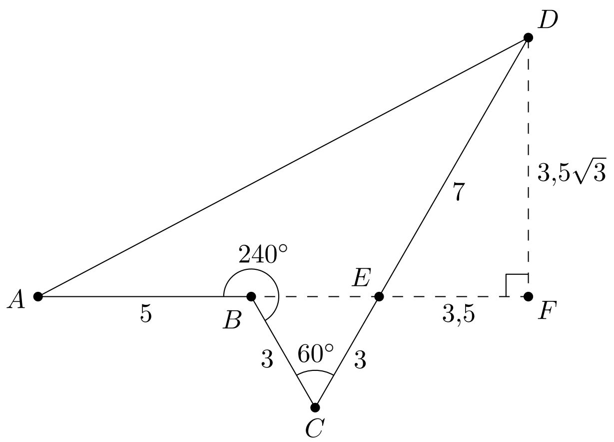
$$9876537 \longrightarrow 9876526 \longrightarrow 9876515 \longrightarrow 9876504$$

získáme hledané číslo 9876504.

Úloha 28. Uvažme čtyřúhelník $ABCD$ se stranami $|AB|=5$, $|BC|=3$ a $|CD|=10$. Velikost vnitřního úhlu u vrcholu B je $240°$, zatímco u vrcholu C má vnitřní úhel $60°$. Spočítejte délku strany AD.

Výsledek. 13

Řešení. Díky velikostem vnitřních úhlů ze zadání můžeme na stranu CD doplnit bod E tak, aby byl BCE rovnostranný trojúhelník. Pak v trojúhelníku AED platí, že $|AE|=8$, $|ED|=7$ a $|\sphericalangle DEA|=120°$. Použitím kosinové věty dostaneme $|AD|^2=8^2+7^2-2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos 120°=169$, a tedy $|AD|=13$.



Alternativní konec řešení bez použití kosinové věty. Trojúhelník AED zvětšíme o polovinu rovnostranného trojúhelníku u strany ED délky 7. Pak použijeme Pythagorovu větu a dostaneme $|AD|^2=(5+3+3{,}5)^2+(3{,}5\cdot\sqrt{3})^2=169$.

Úloha 29. Kolik uspořádaných čtveřic kladných celých čísel (a,b,c,d) splňuje rovnici

$$2024=(2+a)\cdot(0+b)\cdot(2+c)\cdot(4+d)?$$

Výsledek. 18

Řešení. Nejdříve rozložíme číslo 2024 na prvočísla:

$$2024=2^3\cdot 11\cdot 23.$$

Protože a, b, c i d jsou kladná celá čísla, jistě platí $2+a\geq 3$, $2+c\geq 3$ a $4+d\geq 5$. Činitel 1 nebo 2 se tedy může na pravé straně objevit pouze jednou ve výrazu $(0+b)$ a činitel 4 pak pouze jako $(2+a)$ nebo $(2+c)$.

Protože součin na pravé straně se skládá ze čtyř činitelů a nanejvýš jeden z nich může být menší než 4, existují následující čtyři možné rozklady čísla 2024:

$$2024 = 1 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 23 \quad \text{a} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 22 \cdot 23 \quad \text{a} \quad 2024 = 1 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 46 \quad \text{a} \quad 2024 = 2 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 23.$$

Pro první rozklad máme $b = 1$, ostatní činitele můžeme přiřadit ke členům $a+2$, $c+2$ a $d+4$ v libovolném pořadí, čímž dostáváme 6 řešení. Ve druhém rozkladu máme $b = 1$ a dále buď $a + 2 = 4$, nebo $c + 2 = 4$. V obou těchto případech můžeme ostatní činitele určit dvěma způsoby, takže pro druhý rozklad máme celkem 4 řešení. Analogicky existují 4 řešení pro třetí i čtvrtý rozklad. Dohromady tedy existuje 18 různých řešení:

rozklad 2024	řešení			
	a	b	c	d
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 23$	6	1	9	19
$2024 = 8 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 11$	6	1	21	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 23$	9	1	6	19
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 8$	9	1	21	4
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 11$	21	1	6	7
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 8$	21	1	9	4
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 23$	2	2	9	19
$2024 = 4 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 11$	2	2	21	7
$2024 = 11 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 23$	9	2	2	19
$2024 = 23 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 11$	21	2	2	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 22 \cdot 23$	2	1	20	19
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 23 \cdot 22$	2	1	21	18
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 46 \cdot 11$	2	1	44	7
$2024 = 4 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 46$	2	1	9	42
$2024 = 22 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 23$	20	1	2	19
$2024 = 23 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 22$	21	1	2	18
$2024 = 46 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 11$	44	1	2	7
$2024 = 11 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 46$	9	1	2	42

Úloha 30. Pro kladná celá čísla x a y platí

$$2^x \cdot 3^y = \left(24^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}}\right) \cdot \left(24^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^2 \cdot \left(24^{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{60}}\right)^3 \cdots \left(24^{\frac{1}{60}}\right)^{59}.$$

Určete hodnotu $x + y$.

Výsledek. 3540

Řešení. Uvažme $2^x \cdot 3^y = 24^k$, pak platí

$$\begin{aligned}
k &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \cdots + \frac{59}{60}\right) = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{59}{2} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+59) \cdot 59}{2} = \\
&= 15 \cdot 59.
\end{aligned}$$

To znamená, že $2^x \cdot 3^y = (2^3 \cdot 3^1)^{15 \cdot 59}$ neboli $x = 3 \cdot 15 \cdot 59 = 45 \cdot 59$ a $y = 15 \cdot 59$. Platí tedy $x + y = 60 \cdot 59 = 3540$.

Úloha 31. Anička ráda sestavuje barevné posloupnosti z červených a zelených jablek. Její oblíbená posloupnost se skládá z 18 jablek, která jsou uspořádaná tak, že každý tucet po sobě jdoucích jablek obsahuje alespoň 7 zelených. Kolik existuje různých posloupností splňujících tuto podmínku a zároveň obsahujících nejvýše 8 zelených jablek?

Výsledek. 21

Řešení. Zaměříme se nejprve na poslední a první tucet jablek v posloupnosti. Pokud šest jablek uprostřed (tedy jablka 7–12) má zelenou barvu, v prvním i posledním tuctu chybí pouze 1 zelené jablko, stačí tak umístit jedno zelené jablko do prvního půltuctu a jedno do posledního půltuctu, čímž umístíme do posloupnosti celkem 8 zelených jablek. Kdyby nějaké jablko v prostředním půltuctu bylo červené, bylo by pro splnění podmínek potřeba celkem více než 8 jablek, jelikož každé zelené jablko odebrané z prostředního půltuctu odpovídá dvěma jablkům, která musíme umístit do prvního a posledního půltuctu. Celkem je tak potřeba alespoň 8 zelených jablek rozložených tak, že šest z nich je v prostřední části posloupnosti a zbývající dvě jsou v první a poslední třetině posloupnosti. Zbylá dvě zelená jablka mohou být v rámci daného půltuctu umístěna více způsoby. Aby platila podmínka ze zadání, nesmí být vzdálenost mezi prvním a posledním zeleným jablkem větší než 12, tedy pokud je první zelené jablko na pozici 2, poslední musí být na pozici 13 nebo 14. V závislosti na pozici prvního zeleného jablka tak máme 1 až 6 možných pozic posledního jablka. Celkem tak máme $1+2+3+4+5+6=21$ možných posloupností.

Úloha 32. Daník má mince s hodnotami 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč. Konkrétně vlastní 33 jednokorunových mincí, 106 dvoukorun a 31 pětikorun. Chtěl by mince rozdělit na dvě hromádky, aby na každé byl stejný počet mincí a obě hromádky měly stejnou hodnotu. Potom si jednu z hromádek nechá a druhou dá sestře. Kolika různými způsoby to může provést? Mince stejné hodnoty jsou nerozlišitelné.

Výsledek. 12

Řešení. Počty mincí korun, dvoukorun a pětikorun na hromádce pro sestru označíme po řadě a, b, c. Potom platí

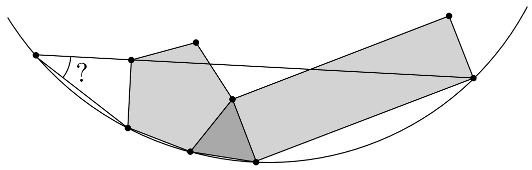
$$a+b+c=\frac{1}{2}(33+106+31)=85$$

a hromádka má hodnotu

$$a+2b+5c=\frac{1}{2}(33+2\cdot 106+5\cdot 31)=200.$$

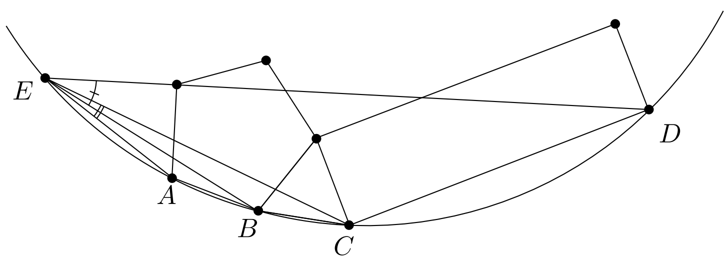
Odečtením první rovnice od druhé dostáváme $b+4c=115$. Tato rovnost má řešení ve tvaru $b=115-4c$ pro libovolné c. Z podmínek $0<115-4c<106$ pro b plyne $c\in\{3,4,\dots,28\}$. Ne všechna taková řešení ale obsahují validní počet mincí hodnoty 1 Kč. Přidáme tak podmínku $0\le 85-(115-4c+c)=-30+3c\le 33$ pro c. Potom pouze c z množiny $\{10,11,\dots 21\}$ splňují všechny podmínky a rovnosti, celkem je tak 12 možností.

Úloha 33. Obrázek zachycuje rovnostranný trojúhelník, pravidelný pětiúhelník a obdélník, jejichž některé vrcholy leží na kružnici (z níž vidíme jen část). Spočítejte velikost vyznačeného úhlu (ve stupních).



Výsledek. 36°

Řešení. Připomeňme si, že kdykoli máme kružnici ω a na ní ležící body X, Y, Z, pak je úhel, pod nímž je úsečka XY vidět z bodu Z, dán pouze tím, zda Z leží na kratším, nebo delším z oblouků s krajními body X a Y. Navíc je součet těchto dvou možných hodnot roven 180°.



Označíme si body jako na obrázku a budeme využívat známe velikosti úhlů v pravidelném pětiúhelníku a rovnostranném trojúhelníku. Takto můžeme spočítat

$$|\sphericalangle AEC|=180^\circ-|\sphericalangle ABC|=180^\circ-60^\circ-108^\circ=12^\circ.$$

Obdobně dostaneme

$$|\sphericalangle BED|=180^\circ-|\sphericalangle BCD|=180^\circ-60^\circ-90^\circ=30^\circ.$$

Jelikož je ABC rovnoramenný trojúhelník, dostaneme dále

$$|\sphericalangle BEC|=|\sphericalangle BAC|=\frac{180^\circ-|\sphericalangle ABC|}{2}=\frac{180^\circ-108^\circ-60^\circ}{2}=6^\circ.$$

Protože se tyto tři úhly překrývají ve vrcholu E, spočítáme na závěr

$$|\sphericalangle AED|=12^\circ+30^\circ-6^\circ=36^\circ.$$

Úloha 34. Kolika různými způsoby je možné umístit 9 věží na šachovnici 4×4 tak, aby každá věž byla ohrožena některou jinou? Dvě věže se ohrožují, pokud jsou ve stejném řádku nebo sloupci.

Výsledek. 11296

Řešení. Určíme počet možných rozmístění takových, že je v nich alespoň jedna věž, která není ohrožena žádnou jinou. Neohrožená věž musí byt nutně sama v řádku i sloupci, taková věž může být nejvýše jedna. Neohrožená věž může být umístěna $4 \cdot 4 = 16$ způsoby. Po odstranění patřičného sloupce a řádku zbývá devět políček, na kterých je rozmístěno zbylých osm věží, je tak 9 možností, jak vybrat, které políčko zůstane neobsazené. Máme $16 \cdot 9 = 144$ možností. Celkem existuje $\binom{16}{9} = 11440$ možností, jak vybrat devět políček ze šestnácti, hledaný počet možností je tedy $11440 - 144 = 11296$.

Úloha 35. Najděte největší kladné celé číslo N, které není prvočíslo a zároveň jsou všichni jeho dělitelé vyjma N menší než 100.

Výsledek. 9409

Řešení. Jelikož N není prvočíslo, je to buď 1, nebo existuje prvočíslo $p < N$, které dělí N. Z podmínky $p < 100$ plyne $p \leq 97$. Můžeme si všimnout, že $N = 97^2 = 9409$ splňuje podmínky ze zadání.

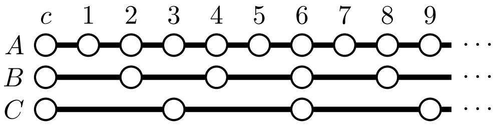
Předpokládejme, že existuje $N' > 9409$ splňující podmínky. Pokud $p \leq 97$ je prvočíslo, které dělí N', podíl $\frac{N'}{p}$ je kladné celé číslo větší 97. Z toho plyne $\frac{N'}{p} \in \{98, 99\}$, protože každý dělitel N' je menší než 100. Potom je N' dělitelné $k \in \{2, 3\}$ a z podmínek vyplývá

$$N' = k \cdot \frac{N'}{k} \leq 3 \cdot 99 < 97^2,$$

což je spor.

Proto je hledaným číslem opravdu $N = 9409$.

Úloha 36. V obci Dlouhá Dědina mají tři autobusové linky, centrální stanici a autobusové zastávky, které jsou očíslované kladnými celými čísly $1, 2, 3, \ldots$ Všechny tři linky začínají na centrální stanici, na schématu označené jako c. Dále projíždějí vzestupně očíslovanými zastávkami. Linka A zastavuje na všech zastávkách (čísla $1, 2, 3, \ldots$), linka B staví na každé druhé (čísla $2, 4, 6, \ldots$) a linka C zastavuje na každé třetí zastávce (čísla $3, 6, 9, \ldots$). David nastupuje na centrální stanici, vybere si autobus a chce se dostat na zastávku číslo 17. Na každé zastávce, na níž jeho aktuální autobus zastaví, může buď vystoupit a pokračovat jiným, nebo jet dál stejným autobusem na jeho další zastávku. Kolika různými způsoby se David může dostat do své cílové stanice, pokud trasy lišící se jen časem čekání považujeme za stejné?



Výsledek. 845

Řešení. Zastávku, na které staví všechny tři autobusy, označme s_0. Dále jako s_k označme k-tou zastávku po s_0 na trase linky A. Spočítáme, kolika způsoby se David může dostat na zastávku s_6 ze zastávky s_0.

1. David se na zastávku s_1 může dostat právě jedním způsobem, a to autobusem A.

2. Na zastávku s_2 může dojet dvěma způsoby, autobusem A ze zastávky s_1 nebo linkou B ze zastávky s_0.

3. K cestě na zastávku s_3 může využít autobus C ze zastávky s_0 nebo autobus A ze zastávky s_2, na kterou se mohl dostat 2 způsoby. Dohromady má tedy 3 možnosti.

4. Na zastávku s_4 může přijet linkou A ze zastávky s_3 nebo linkou B ze zastávky s_2, celkem je to tedy $3 + 2 = 5$ způsobů.

5. Pro cestu na s_5 existuje jen jeden způsob, a to autobusem A ze zastávky s_4. Ze stanice s_0 je to tedy 5 možností.

6. A konečně na zastávku s_6 může David dorazit linkou A ze zastávky s_5, linkou B z s_4 nebo linkou C ze zastávky s_3. Dohromady je to $3 + 5 + 5 = 13$ možností.

Všechny autobusy staví na centrální stanici c, na zastávce číslo 6 a na zastávce 12. Tyto zastávky tedy můžeme považovat za s_0. Proto existuje 13 způsobů, jak se David může dostat z centrální stanice na zastávku číslo 6, a také 13 způsobů, jak může cestovat ze zastávky 6 na 12. Stejně tak cesta ze zastávky číslo 12 na 17 odpovídá cestě z s_0 na s_5, pro kterou existuje 5 možných tras. Jelikož jsou zmíněné úseky nezávislé, David má na výběr $5 \cdot 13 \cdot 13 = 845$ způsobů, jak se dostat na zastávku číslo 17.

Alternativní řešení. Zastávky budeme značit jejich čísly, přičemž doplníme $c = 0$. Každá zastávka s je dosažitelná linkou A, takže každou trasu na předchozí zastávku $s - 1$ lze prodloužit na zastávku s autobusem A. Pokud linka B

staví na zastávce s, pak lze autobusem B prodloužit trasu ze zastávky $s-2$ na s. Podobné tvrzení platí o zastávce s, na které staví linka C. Pokud tedy označíme $J(s)$ počet způsobů, kterými se David může dostat na zastávku s, pak pro $s \geq 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} J(s) = J(s-1)& \\ &+ J(s-2) \text{ je-li } s \text{ dělitelné } 2 \\ &+ J(s-3) \text{ je-li } s \text{ dělitelné } 3. \end{aligned}$$

Protože centrální stanice je „dosažitelná“ pouze jedním způsobem, máme $J(0) = 1$ a můžeme $J(17)$ určit pomocí těchto rekurentních vztahů. Šipky pod tabulkou ukazují, které hodnoty se přičítají do které buňky.

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$J(s)$	1	1	2	3	5	5	13	13	26	39	65	65	169	169	338	507	845	845

Úloha 37. Symbolem $\lfloor x \rfloor$ značíme největší celé číslo, které není větší než reálné číslo x. Buď $a_1, a_2, \ldots$ posloupnost reálných čísel, taková, že $a_1 = \sqrt{3}$ a pro každé $n \geq 1$ platí

$$a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}.$$

Určete hodnotu a_{2024}.

Výsledek. $3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{6069+\sqrt{3}}{2}$

Řešení. Všimněme si, že a_1 má desetinnou část $a_1 - \lfloor a_1 \rfloor = \sqrt{3} - 1$. Můžeme tedy a_1 zapsat jako $a_1 = 1 + (\sqrt{3} - 1)$. Nyní si spočítáme prvních pár členů posloupnosti

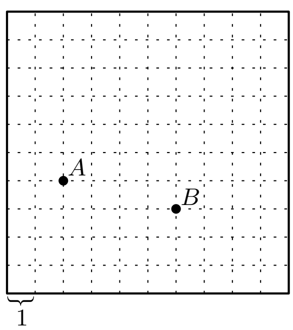
$$\begin{aligned} a_2 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ a_3 &= 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2 + \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = 2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + 1 + (\sqrt{3}-1), \\ a_4 &= 4 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 4 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3 + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že a_1 a a_3 mají stejnou desetinnou část $\sqrt{3} - 1$ a jejich rozdíl je $a_3 - a_1 = 3$. Obdobně a_2 a a_4 mají desetinnou část $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ a rozdíl $a_4 - a_2 = 3$. Vidíme tedy, že po $k = 0$ a $k = 1$ platí vztahy $a_{2k+1} = 3k + 1 + (\sqrt{3} - 1)$ a $a_{2k+2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Platnost těchto vztahů pro všechna k dokážeme indukcí: Dosadíme-li do definičního vzthau $a_{n+1} = \lfloor a_n \rfloor + \frac{1}{a_n - \lfloor a_n \rfloor}$, dostáváme

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= \lfloor a_{2k+1} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+1} - \lfloor a_{2k+1} \rfloor} = 3k + 1 + \frac{1}{\sqrt{3}-1} = 3k + 1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 3k + 2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \\ a_{2(k+1)+1} &= \lfloor a_{2k+2} \rfloor + \frac{1}{a_{2k+2} - \lfloor a_{2k+2} \rfloor} = 3k + 2 + \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 3k + 2 + \frac{2 \cdot (\sqrt{3}+1)}{2} = 3 \cdot (k+1) + 1 + (\sqrt{3}-1). \end{aligned}$$

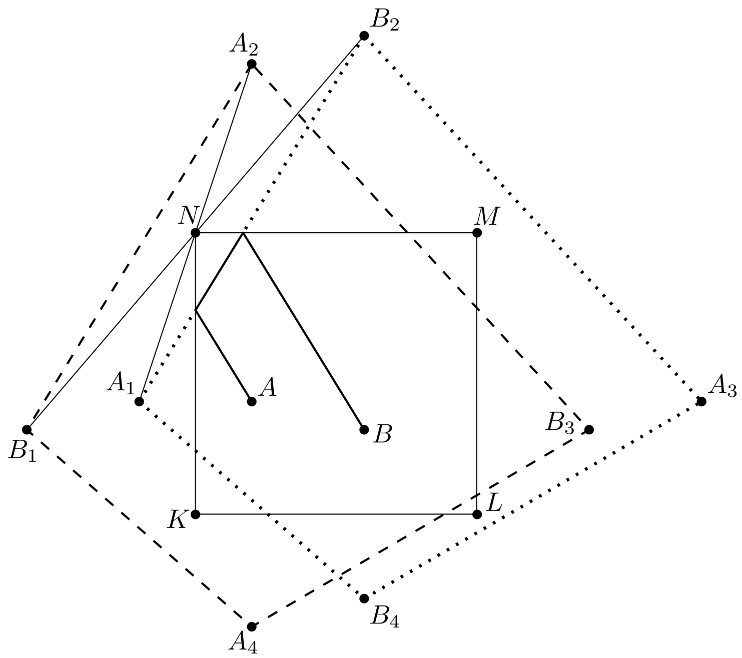
Tím je platnost vztahu dokázána. Proto $a_{2024} = a_{2 \cdot 1011 + 2} = 3035 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 3034 + \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Úloha 38. Na kulečníkovém stole 10×10 jsou umístěny dvě koule jako na obrázku. Každou z nich bereme jako bod, který se pohybuje po přímce, dokud nenarazí na mantinel. Od mantinelu se vždy odrazí tak, že úhel odrazu je roven úhlu dopadu. Určete součet druhých mocnin délek trajektorií vedoucích z bodu A do bodu B, během nichž se koule právě dvakrát odrazí od mantinelu (a nikdy ne v rohu).



Výsledek. 2520

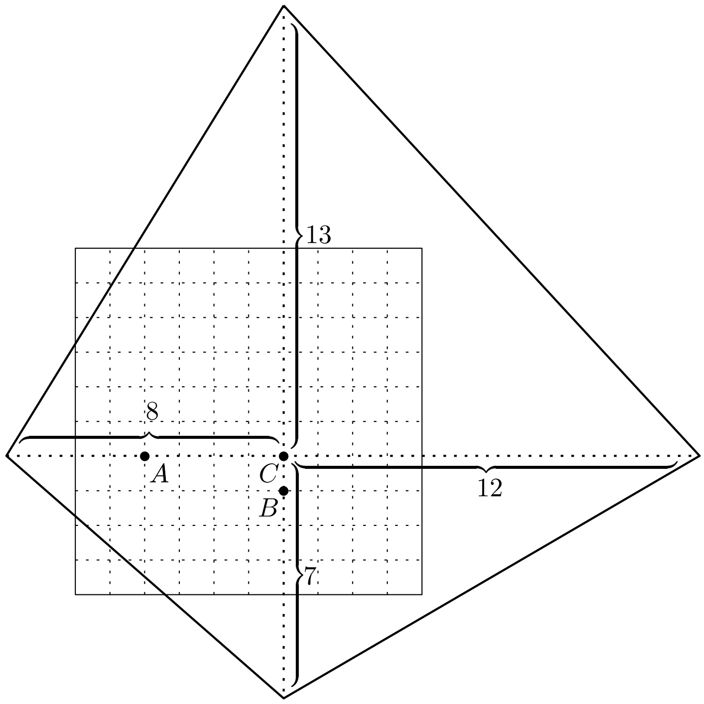
Řešení. Zjevně se koule nemůže odrazit dvakrát za sebou od stěny stolu. Součet čtverců délek těch trajektorií, kdy dochází k odrazům od dvojice sousedních stěn, označíme d_{sous}, součet čtverců délek trajektorií s odrazy od dvojice protilehlých stěn označíme d_{prot}. Máme tedy za úkol určit $d_{\mathrm{sous}} + d_{\mathrm{prot}}$. Počítáme-li souřadnice bodů A a B vzhledem k levému dolnímu rohu, máme $A = [2, 4]$, $B = [6, 3]$. Dokreslíme si jejich osové obrazy přes strany čtverce a označíme si důležité body podle obrázku.



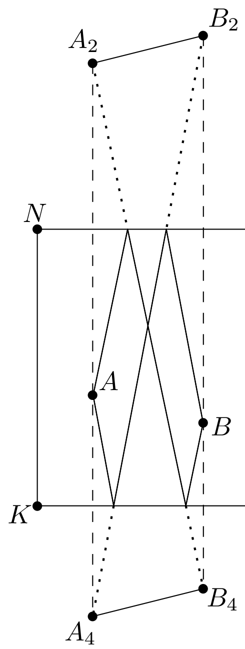
Uvažme trajektorii z A do B, kde dojde k odrazu od KN a poté od MN, a její úseky přiléhající k bodům A (resp. B) osově překlopme přes stranu KN (resp. MN). Díky pravidlu o odrazovém úhlu získáme přesně úsečku A_1B_2. Tuto operaci s trajektorií budeme dále nazývat *narovnání.* Všimněme si, že toto je jediná přípustná trajektorie, kde se koule odrazí právě od těchto dvou stran čtverce. Vskutku, narovnáním potenciální trajektorie $A \to MN \to KN \to B$ bychom dostali úsečku A_2B_1, která ale neprotíná čtverec $KLMN$. Při překlopení dvou bodů podle dvou kolmých os je totiž průsečík oněch os vždy středem rovnoběžníků s vrcholy ve všech čtyřech obrazech (v našem případě je N je společným středem úseček A_1A_2 a B_1B_2). Proto taková trajektorie není možná.

Podobně se všechny požadované trajektorie obsahující odrazy od dvou sousedních stran čtverce $KLMN$ narovnají na jednu ze stran čtyřúhelníku $A_1B_2A_3B_4$ nebo jeho posunuté kopie $B_1A_2B_3A_4$. Z každé dvojice odpovídajících shodných stran je vždy použita právě jedna z důvodů vysvětlených výše na případu stran KN a KM. Z toho plyne, že tyto trajektorie přispívají k cílovému součtu přesně součtem čtverců délek stran čtyřúhelníku $A_1B_2A_3B_4$. Protože jeho úhlopříčky jsou kolmé a protínají se v bodě $C = [6, 4]$, s pomocí Pythagorovy věty dostáváme

$$d_{\mathrm{sous}} = 2(8^2 + 13^2 + 12^2 + 7^2) = 852.$$



Zbývá uvážit trajektorie, při nichž se koule odrazí od dvou protilehlých stran čtverce $KLMN$. Dvě takové trajektorie jsou vyobrazené níže.



V tomto případě jsou možná obě pořadí odrazů, což vede k příspěvku rovnému součtu čtverců úhlopříček rovnoběžníků $A_2B_2B_4A_4$ a $A_1A_3B_3B_1$. Příspěvek těchto trajektorií za každý z rovnoběžníků spočteme například pomocí známého důsledku Pythagorovy věty – součet čtverců úhlopříček rovnoběžníku je roven součtu čtverců jeho stran – jako

$$d_{\text{prot}} = 2(20^2 + 1^2 + 4^2) = 834.$$

Celkový součet je pak $d_{\text{sous}} + d_{\text{prot}} = 852 + 2 \cdot 834 = 2520$.

Úloha 39. Nechť $x \parallel y$ značí spojení dvou kladných celých čísel, což je číslo vzniklé napsáním desítkových zápisů čísel x a y bezprostředně za sebe, a to zleva doprava. Například $3 \parallel 4 = 34$, $24 \parallel 5 = 245$ a $20 \parallel 24 = 2024$. Kladné celé číslo n nazveme *třídělitelné*, pokud existují tři navzájem různá kladná celá čísla (bez nul na počátku) a, b a c taková, že $n = a \parallel b \parallel c$, pro která platí, že a dělí b a zároveň b dělí c. Najděte největší pěticiferné třídělitelné číslo.

Výsledek. 94590

Řešení. Všimněme si, že z $a \neq b$ a $b \neq c$ díky podmínkám dělitelnosti plyne $2a \leq b$ a $2b \leq c$. Nechť $s(k)$ značí počet číslic k. Díky nerovnostem platí $s(a) \leq s(b) \leq s(c)$. Proto máme jen dva možné případy, přičemž v obou je zjevně klíčové zvolit co největší první číslici a:

1. Počty číslic splňují $s(a) = 1$, $s(b) = 1$ a $s(c) = 3$. Pak a je nejvýš $4 < \frac{9}{2}$. Proto k největšímu trídělitelnému číslu vedou v tomto případě volby $a = 4$, $b = 8$ a $c = 992$.

2. Počty číslic splňují $s(a) = 1$, $s(b) = 2$ a $s(c) = 2$. Pak b je nevýš $49 < \frac{99}{2}$. Pro největší $a \parallel b \parallel c$ chceme zvolit $a = 9$. Největší možná hodnota b pak je $b = 45$, a tedy $c = 90$. Jakékoliv menší a nás dovede k menšímu výsledku.

Největší možná hodnota je tedy 94590.

Úloha 40. Výrazem r_x myslíme číslo, jehož zápisem v soustavě o základu x je posloupnost cifer r. Najděte součet všech celých čísel $x > 5$, pro která je pravdivý výrok „15_x dělí 2024_x beze zbytku“. Příklad: $42_7 = (4 \cdot 7 + 2)_{10} = 30_{10}$.
Výsledek. 471
Řešení. Hledáme taková x, že zlomek $\frac{2x^3+2x+4}{x+5}$ je celé číslo. Jelikož

$$\frac{2x^3 + 2x + 4}{x + 5} = 2x^2 - 10x + 52 - \frac{256}{x + 5},$$

je tento požadavek ekvivalentní tomu, že $x + 5$ dělí $256 = 2^8$. Protože $x > 5$, hledáme dělitele větší než 10. Tito dělitelé jsou 16, 32, 64, 128 a 256. Z toho plyne, že řešením je součet

$$\sum_{i=4}^{8}(2^i - 5) = 2^9 - 2^4 - 25 = 512 - 16 - 25 = 471.$$

Úloha 41. Máme dvě krabice, první obsahuje pět spolehlivých žárovek a devět nespolehlivých, druhá krabice obsahuje devět spolehlivých a pět nespolehlivých. Spolehlivé žárovky fungují vždy, nespolehlivé fungují s pravděpodobností p (kde $0 < p < 1$) stejnou pro všechny nespolehlivé žárovky. Najděte hodnotu p, pro kterou jsou následující dva jevy stejně pravděpodobné.

1. Náhodně vybraná žárovka z první krabice funguje.

2. Dvě náhodně vybrané žárovky z druhé krabice obě fungují.

Výsledek. 7/20
Řešení. Pravděpodobnost prvního jevu je

$$P_1 = \frac{1}{14}(5 + 9p),$$

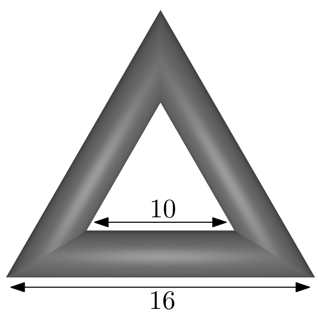
kdežto pravděpodobnost druhého jevu dostaneme jako

$$P_2 = \frac{1}{\binom{14}{2}}\left(\binom{9}{2} + 9 \cdot 5p + \binom{5}{2}p^2\right).$$

Hodnotu p chceme určit z rovnosti $P_1 = P_2$; to je kvadratická rovnice, kterou lze vyřešit běžným postupem. Můžeme si ale také uvědomit, že $p = 1$ je určitě řešením (pak totiž fungují všechny žárovky), a z Vièetových vzorců snadno určit druhý kořen. Kvadratická rovnice $a \cdot (p - r_1) \cdot (p - r_2) = 0$ má absolutní člen $a \cdot r_1 \cdot r_2$, kde r_1, r_2 jsou její kořeny a a je koeficient u kvadratického členu p^2. V našem případě je r_2 hledaná hodnota pravděpodobnosti, $r_1 = 1$ a $a = \binom{5}{2}/\binom{14}{2}$.
Řešení tak dostaneme jako

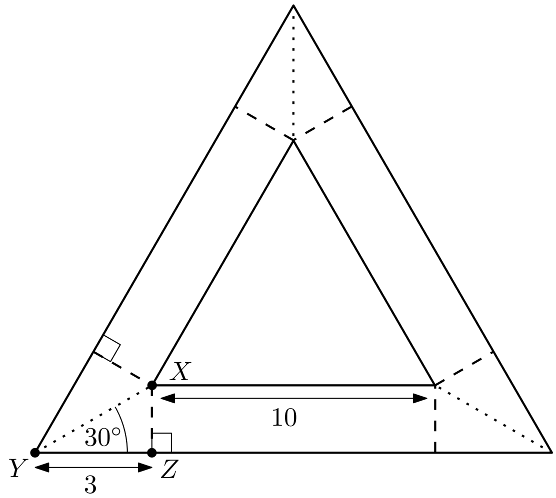
$$\frac{\frac{\binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} - \frac{5}{14}}{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}}} = \frac{\binom{9}{2} - \frac{5}{14}\binom{14}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{9 \cdot 8 - 5 \cdot 13}{5 \cdot 4} = \frac{7}{20}.$$

Úloha 42. Určete objem tělesa znázorněného na obrázku. Vzniklo ze tří plných válcových tyčí, které byly všechny stejným způsobem seříznuty a následně spojeny. Osy válců se protínají ve třech bodech a tvoří rovnostranný trojúhelník. Vnitřní i vnější obrysy tyčí tvoří také rovnostranné trojúhelníky; délky stran těchto trojúhelníků jsou zadány na obrázku.



Výsledek. $\frac{117\pi}{4}$

Řešení. Budeme pracovat s řezem v rovině, v níž leží zadané úsečky délky 10 a 16. Význačné body označíme X, Y, Z jako na obrázku.



Přímka XY tvoří osu úhlu v rovnostranném trojúhelníku, takže $|\sphericalangle ZYX| = 30°$; dále ze symetrie tělesa dostáváme $|YZ| = 3$. Pravoúhlý trojúhelník XYZ je polovinou rovnostranného trojúhelníka (YZ je jeho výška a XZ polovina jeho strany), takže $|XZ| = \sqrt{3}$.

Když rozkrájíme těleso řezy kolmými na rovinu XYZ naznačenými na obrázku tečkovanými a přerušovanými čarami, dostaneme tři válce o poloměru $\frac{|XZ|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a výšce 10 a k tomu šest kusů, z nichž můžeme složit tři další válce stejného poloměru o výšce 3. Hledaný objem tedy je

$$V = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot (3 \cdot 10 + 3 \cdot 3) = \frac{117\pi}{4}.$$

Úloha 43. Deset vzájemně různých kladných celých čísel je napsáno v řadě tak, že

- součet každých dvou po sobě jdoucích čísel je dělitelný 3,
- součet každých tří po sobě jdoucích čísel je dělitelný 2.

Jaký je nejmenší možný součet takových deseti čísel?

Výsledek. 78

Řešení. Optimálním řešením je například řada $2, 1, 5, 4, 11, 7, 8, 13, 17, 10$ se součtem 78. Ukážeme, že nižší hodnoty nelze dosáhnout.

Pokud je v řadě číslo dělitelné třemi, potom jsou nutně obě jeho sousední čísla dělitelná třemi, jejich sousední čísla také a všechna čísla v posloupnosti jsou tak dělitelná třemi. Nejmenší možný součet takových čísel je $3 \cdot (1+2+\cdots+10) = 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 165 > 78$, což nemůže být optimální. Proto mezi našimi čísly není žádné dělitelné třemi.

Jelikož jsou každá tři po sobě jdoucí čísla dělitelná dvěma, pro každou sousední trojici máme dvě možnosti: buď jsou všechna tři čísla sudá, nebo je jedno číslo sudé a zbylá dvě jsou lichá. Uvažme trojici x_i, x_{i+1}, x_{i+2} tvořenou třemi sudými čísly, potom trojice x_{i-1}, x_i, x_{i+1} nemůže obsahovat dvě lichá čísla a x_{i-1} je tak nutně také sudé. Potom jsou všechna čísla sudá. V tomto případě je nejmenší možná hodnota $2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 110 > 78$, což také nemůže být optimální.

Z toho plyne, že každá trojice obsahuje dvě lichá (L) čísla a jedno sudé (S). Máme tak tři možné konfigurace:

- LSLLSLLSLL – Sečtením 7 nejmenších lichých a 3 nejmenších sudých čísel, která nejsou dělitelná třemi, dostáváme nejmenší možný součet $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 2 + 4 + 8 = 87 > 78$, což také nemůže být optimální.
- LLSLLSLLSL – Tato konfigurace je symetrická k předchozí.
- SLLSLLSLLS – Sečtením 6 nejmenších lichých a 4 nejmenších sudých čísel, která nejsou dělitelná třemi, dostáváme nejmenší možný součet $1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 2 + 4 + 8 + 10 = 78$, což je požadovaný výsledek. Posloupnost uvedená na začátku řešení ukazuje, že tohoto výsledku skutečně lze dosáhnout.

Úloha 44. Hedvika si hraje se zlomky. Chtěla by najít kladná celá čísla a, b splňující

$$\frac{2020}{2024} < \frac{a^2}{b} < \frac{999}{1000}$$

taková, že součet $a+b$ je nejmenší možný. Pohrajte si stejně jako Hedvika a najděte minimální hodnotu $a+b$.

Výsledek. 553

Řešení. Daná nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$\frac{1000}{999} < \frac{b}{a^2} < \frac{2024}{2020}.$$

Z toho plyne, že Hedvika musí vybrat a jako nejmenší kladné celé číslo, pro které existuje b splňující

$$\frac{1000}{999} \cdot a^2 < b < \frac{2024}{2020} \cdot a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + \frac{1}{999} \cdot a^2 < b < a^2 + \frac{4}{2020} \cdot a^2.$$

Pro $a < 32$ Hedvika dostává $a^2 < a^2 + \frac{a^2}{999} < a^2 + 1$. Pokud existuje $a < 32$ splňující $\frac{4a^2}{2020} > 1$, může Hedvika uvážit nejmenší a splňující nerovnost. Platí

$$\frac{4 \cdot 22^2}{2020} = \frac{44^2}{2020} = \frac{1936}{2020} < 1 \quad \text{a} \quad \frac{4 \cdot 23^2}{2020} = \frac{46^2}{2020} = \frac{2116}{2020} > 1.$$

Z toho dostáváme $a = 23$ a $b = a^2 + 1 = 530$ splňující zadání, hledaná hodnota je $a + b = 23 + 530 = 553$.

Úloha 45. Podlaha stanu je tvaru trojúhelníka, jehož strany jsou dlouhé 1,3 m, 2 m a 2,1 m. Výrobce chce v reklamě zdůraznit, že si osoba o výšce h může lehnout ve stanu *libovolně* v tom smyslu, že každý bod podlahy náleží nějaké možné pozici spáče (tj. úsečce o délce nejméně h obsažené v trojúhelníku). Určete největší možnou hodnotu h v metrech.

Výsledek. $\frac{126}{65}$

Řešení. Ukážeme, že nejdelší úsečka, kterou lze pokrýt libovolný bod ostroúhlého trojúhelníku (což náš zřejmě je), je jeho nejdelší výška. Nakreslením úseček spojujících daný vrchol s body na protější straně pokryjeme celý trojúhelník a nejkratší úsečka, kterou jsme při tom použili, je právě příslušná výška (všechny výšky ostroúhlého trojúhelníku leží uvnitř něj). Zbývá ukázat, že žádná delší úsečka zadání nesplňuje. Pokud je příslušná strana kratší než výška, delší vyhovující úsečku nemusíme hledat (úsečky pokrývající patu výšky jsou nejvýše tak dlouhé jako daná výška nebo daná strana). Z klasického vzorce pro obsah trojúhelníku zjistíme, že nejdelší výška náleží nejkratší straně, v našem případě 1,3. Pokud je výška na tuto stranu delší než 1,3, jsme hotovi.

Máme několik možností, jak spočítat délku příslušné výšky. Jednou možností je použití Heronova vzorce pro obsah a následné podělení polovinou délky strany. Níže je ukázán jednodušší postup. Nejprve přenásobíme všechny hodnoty 10, tj. počítáme v decimetrech místo metrů. Označme x, $13 - x$ délky, ve kterých výška protnula stranu délky 13. Z Pythagorovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} 20^2 - x^2 &= 21^2 - (13 - x)^2, \\ 26x &= 128, \\ x &= \frac{64}{13}. \end{aligned}$$

Délka výšky je pak rovna

$$h = \sqrt{20^2 - \left(\frac{64}{13}\right)^2} = \frac{4}{13}\sqrt{25 \cdot 169 - 256} = \frac{4}{13}\sqrt{9 \cdot 9 \cdot 49} = \frac{252}{13}.$$

Protože $\frac{252}{13} > 13$, výška je delší než strana, jak jsme chtěli ukázat. Výsledek v metrech je tedy $\frac{252}{130} = \frac{126}{65}$.

Úloha 46. Najděte největší celé číslo q takové, že pro každé celé číslo $n \geq 55$ je součin

$$n(n+4)(n-23)(n-54)(n+63)$$

dělitelný q.

Výsledek. 40

Řešení. Součin označíme jako A. Modulo 5 mají jednotliví činitelé hodnotu n, $n+4$, $n+2$, $n+1$ a $n+3$. Zjevně dávají různé zbytky modulo 5, takže jedno z nich je určitě pěti dělitelné. Proto $5 \mid A$. Pokud je n sudé, pak má A tři sudé dělitele a $8 \mid A$. Pokud je n liché, má součin dva sudé dělitele $n - 23$ a $n + 63$, jejichž rozdíl je 86. Dále platí $86 \equiv 2 \pmod 4$, tedy právě jeden dělitel je násobkem 4, z čehož plyne $8 \mid A$. Dostáváme tak $40 \mid A$.

Pokud uvážíme například $n = 59$, dostáváme (díky $n \equiv 3 \pmod 8$ a $n \equiv 9 \pmod{25}$), že největší mocnina 2 dělící A je 8 a největší mocnina 5 dělící A je 5. Pro $n = 55$ dostáváme $3 \nmid A$. Pro každé prvočíslo $p > 5$ patří dělitelé A do nejvýše pěti, a tedy méně než p zbytkových tříd modulo p; proto je vždy možné vybrat takové n, aby $p \nmid A$.

Proto $q = 40$.

Úloha 47. Anička, Bára, Cecilka, David a E.T. chodí na dva předměty. Anička a Bára chodí jen na první z nich, Cecilka a E.T. jen na ten druhý, zatímco David chodí na oba. Kuba sice ví, že na každý z předmětů chodí právě tři studenti, ale neví, kteří. Proto požádá každého, aby náhodně ukázal prstem na někoho, s kým navštěvuje některý předmět (takže například David vybere každého z ostatních čtyř s pravděpodobností $\frac{1}{4}$). S jakou pravděpodobností bude Kuba schopný určit, že David je ten, kdo chodí na oba předměty?

Výsledek. $\frac{3}{4}$

Řešení. Kdykoli jeden student ukazuje na jiného, řekneme, že je mezi nimi *spojení*. Všimněme si, že z hlediska získané informace nehraje roli, kdo z nich ukazuje prstem. Ukážeme, že Kuba je schopen odhalit Davida jako nejpilnějšího studenta právě tehdy, když na obou předmětech je alespoň jeden student, s nímž má David spojení (tomu budeme říkat *podmínka P*).

Zaprvé, pokud má David dohromady spojení s více než dvěma studenty, tak podmínka P určitě platí; zároveň je v této situaci Kuba zjevně schopný záhadu vyřešit, protože vidí, že David má alespoň tři spolužáky, a musí tedy chodit na oba předměty.

Zadruhé, pokud podmínka P neplatí, můžeme díky symetrii bez újmy na obecnosti předpokládat, že David nemá spojení s Aničkou ani Bárou. Potom Kuba zjevně nedokáže rozhodnout, jestli na oba předměty chodí Cecilka, E.T., nebo David.

Zbývá probrat situaci, kdy je podmínka P splněna a David má právě jedno spojení s jedním i druhým předmětem. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že David má spojení s Aničkou a Cecilkou. Protože Bára nemá spojení s Davidem, ukazuje nutně na Aničku, a má s ní tedy spojení. Podobně má E.T. spojení s Cecilkou. Kuba proto vidí „cestu“ Bára – Anička – David – Cecilka – E.T.; a protože jediný způsob, jak utvořit cestu obsahující všechny studenty je dát doprostřed studenta navštěvujícího oba předměty, je Kuba schopen odhalit Davida a naše ekvivalence je dokázána.

Zbývá už jen spočítat pravděpodobnost, že při náhodném ukazování bude splněná podmínka P:

Ze symetrie je jasné, že to, na koho ukáže David, neovlivní pravděpodobnost splnění podmínky P. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že David ukazuje na Aničku nebo Báru. Potom je podmínka P splněna právě tehdy, když má David spojení s E.T.m nebo Cecilkou. To nastane právě tehdy, když na něj alespoň jeden z nich ukáže, což se zjevně stane s pravděpodobností 3/4.

Úloha 48. Funkce $f : \langle 0, \infty) \to \langle 0, \infty)$ splňuje

1. $f(x) = x^2$ pro každé $0 \le x < 1$,
2. $f(x+1) = f(x) + x + 1$ pro všechna nezáporná reálná čísla x.

Nalezněte všechna x splňující $f(x) = 482$.

Výsledek. $15 + 11\sqrt{2} = 15 + \sqrt{242}$

Řešení. Nechť $\{x\}$ značí zlomkovou část čísla x. Pak

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lfloor x \rfloor + \{x\}) \\ &= \lfloor x \rfloor + \{x\} + f(\lfloor x \rfloor - 1 + \{x\}) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + f(\{x\}) \\ &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2. \end{aligned}$$

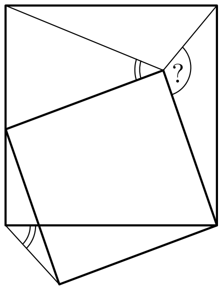
Všimněme si, že vzorec platí i v případě $\lfloor x \rfloor = 0$.

Ukážeme, že f je ostře rostoucí funkce. Pro $x, y \in \langle n, n+1)$, $x < y$, zřejmě platí $f(x) < f(y)$. Dále je pro všechna $x \in \langle n, n+1)$ splněno $f(x) < f(n+1)$, neboť

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 \\ &< \frac{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} + \lfloor x \rfloor + 1 \\ &= \frac{(\lfloor x \rfloor + 2) \cdot (\lfloor x \rfloor + 1)}{2} \\ &= \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2} \\ &= f(n+1). \end{aligned}$$

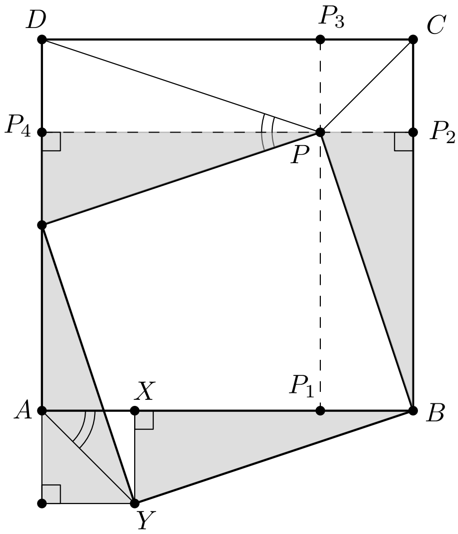
Proto existuje nejvýše jedno řešení. Nejprve nalezneme největší celé číslo splňující $f(n) \leq 482$. K tomu řešíme kvadratickou nerovnost $f(n) = \frac{n^2+n}{2} \leq 482$; ta povoluje nanejvýš $n = 30$. Proto $\lfloor x \rfloor = 30$. Tudíž $482 = f(x) = \frac{\lfloor x\rfloor\cdot(\lfloor x\rfloor+1)}{2} + \lfloor x\rfloor \cdot \{x\} + \{x\}^2 = 15\cdot 31 + 30\cdot\{x\} + \{x\}^2$; to je kvadratická rovnice pro $\{x\}$ s řešeními $-15 \pm \sqrt{242}$. Protože hledáme řešení z intervalu $\langle 0, 1)$, dostáváme $\{x\} = -15 + \sqrt{242}$. Jediným řešením tedy je $x = 30 - 15 + \sqrt{242} = 15 + 11\sqrt{2}$.

Úloha 49. Na obrázku jsou dva čtverce. Jsou vůči sobě natočené tak, že vyznačené dva úhly jsou shodné. Určete velikost úhlu označeného otazníkem (ve stupních).



Výsledek. 112,5

Řešení. Na strany velkého čtverce nakreslíme kolmé průměty vrcholů malého čtverce a body označíme podle obrázku níže.



Můžeme si všimnout, že čtyři šedé trojúhelníky jsou shodné. Všechny tyto trojúhelníky jsou totiž pravoúhlé, jejich přepona je stejně dlouhá jako strana menšího čtverce, a ve všech se vyskytuje úhel velikosti $\alpha = |\sphericalangle PBC|$, který závisí na tom, jak moc jsou oproti sobě původní čtverce pootočené. Obdélník P_4PP_3D je tvořen dvěma dalšími kopiemi šedých trojúhelníků a úhel označený dvojitou čarou tak má velikost 2α. Trojúhelníky AXY a PP_2C jsou pravoúhlé a rovnoramenné (díky shodnosti šedých trojúhelníků mají stejně dlouhé odvěsny), z toho plyne $2\alpha = 45°$ a velikost hledaného úhlu spočteme jako

$$90° - \alpha + 45° = 112{,}5°.$$

Úloha 50. Tobiáše přestaly bavit klasické operace jako sčítání a násobení, přišel tak se svou vlastní operací *hvězdičkování.* Používá pro ni značení $a \star b$, je definovaná na reálných číslech a má následující vlastnosti:

1. $(a + b) \star c = (a \star c) + (b \star c)$,
2. $a \star (b + c) = (a \star b) \star c$.

Pokud platí $3 \star 2 = 54$, určete hodnotu $5 \star 4$.

Výsledek. 1620

Řešení. Druhá vlastnost nám dává $5 \star 4 = (5 \star 2) \star 2$. Označíme-li $f(x) = x \star 2$, pak lze úlohu přeformulovat: Nalezněte $f(f(5))$, víte-li, že $f(3) = 54$.

První vlastnost hvězdičkování okamžitě dává $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Máme tedy $54 = f(3) = f(1) + f(2) = f(1) + f(1) + f(1)$ neboli $f(1) = 18$. Z toho indukcí snadno dostáváme $f(n) = 18n$ pro každé kladné celé n. Proto $f(5) = 18 \cdot 5$ a $f(f(5)) = 18^2 \cdot 5 = 1620$.

Poznámka: Jednou z možností, jak mohl Tobiáš hvězdičkování definovat, je předepsat $a \star b = a \cdot \sqrt{18}^b$ pro všechna reálná čísla a, b. Existuje nepřeberné množství jiných voleb, ale nejsou takto pěkně popsatelné. Jejich existence dokonce záleží na tzv. *axiomu výběru*. Není například těžké ukázat, že kdykoli je $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tzv. *aditivní funkce*, tj. funkce splňující rovnici $m(x + y) = m(x) + m(y)$, pak mohl Tobiáš definovat hvězdičkování pomocí ní jako $a \star b = a \cdot e^{m(b)}$. Požadavek $3 \star 2 = 54$ dává $m(2) = \ln 18$. Je známo (ale dalece to přesahuje rámec této úlohy i celé soutěže), že aditivních funkcí lze s pomocí axiomu výběru vytvořit přehršel – znalost hodnoty $m(2)$ sice určuje hodnotu $m(b)$ pro každé racionální b, ale ve volbě ostatních hodnot máme velkou volnost. Zájemci se mohou podívat například na `https://prase.cz/library/CauchyovaRovniceDS/CauchyovaRovniceDS.pdf` nebo na pokročilejší text `https://prase.cz/archive/35/serial.pdf`, který v kapitole *Netriviální řešení Cauchyho rovnice* (str. 43) pomocí Zornova lemmatu (trvzení ekvivalentního axiomu výběru) popisuje všechny aditivní funkce.

Úloha 51. Marian vybarvil políčka tabulky 10×11 černě a bíle tak, že žádné políčko nesousedí hranou s více než jedním políčkem stejné barvy. Kolika způsoby to mohl udělat? Obarvení tabulky, která jsou shodná až na otočení, považujeme za různá.

Výsledek. 464

Řešení. Pokud se někde nachází domino (obdélník 2×1) stejně barevných políček, pak je celý dvojřádek nebo dvojsloupec vysázen takovými dominy v alternujících barvách. Z toho dále není těžké odvodit, že všechna domina v tabulce jsou stejně orientovaná (buď vodorovně, nebo svisle). Připomeňme, že počet vydláždění tabulky $n \times 1$ dominy a čtverečky (bez ohledu na barvu) je roven n-tému členu (posunuté) Fibonacciho posloupnosti $f(n)$ s počátečními hodnotami $f(1) = 1$ a $f(2) = 2$. Tuto poměrně známou skutečnost není těžké případně dokázat indukcí.

Protože musejí být všechna domina v tabulce stejně orientovaná a následující řádky nebo sloupce jsou nutně vydlážděny čtverečky a dominy stejně jako první řádek nebo sloupec, existuje $f(10) + f(11) - 1$ možných vydláždění (odečítáme 1, abychom nepočítali vydláždění samými čtverečky dvakrát). Každého možného obarvení pak můžeme docílit tak, že určíme barvu levé horní dlaždice a zbylé dlaždice (čtverečky a domina) obarvíme střídavě černě a bíle.

Všech možných obarvení je tedy $2 \cdot (144 + 89 - 1) = 464$.

Úloha 52. Káťa se dozvěděla o klouzavých průměrech. Vzala tak svou oblíbenou Fibonacciho posloupnost $\{F_k\}_{k=0}^{\infty}$, která splňuje $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, přičemž $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$, a následně vytvořila posloupnost klouzavých průměrů $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ splňující $m_k = \frac{F_k+F_{k-1}+\cdots+F_{k-6}}{7}$. Kolik členů posloupnosti $\{m_k\}_{k=6}^{2024}$ jsou celá čísla?

Výsledek. 252

Řešení. Uvážíme fakt, že $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$. (Tento vztah lze dokázat indukcí. První krok je $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_2 - 1$, indukční krok $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = F_{k+1} + \sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} + F_{k+2} - 1 = F_{k+3} - 1$.) Z toho plyne

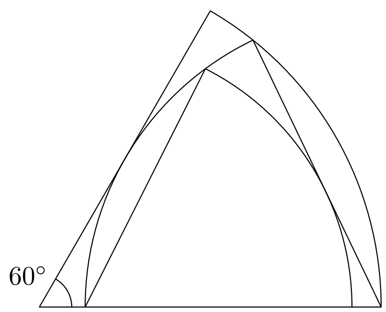
$$7 \cdot m_k = F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-6} = \sum_{i=0}^{k} F_i - \sum_{i=0}^{k-7} F_i = F_{k+2} - F_{k-5}.$$

Označme d_l jako zbytek F_l po dělení číslem 7. Celočíselnost m_k je zjevně ekvivalentní $7 \mid d_{k+2} - d_{k-5}$. Z definice je zřejmé, že $d_l \equiv d_{l-1} + d_{l-2} \pmod 7$, takže snadno spočítáme

$$\{d_l\}_{l=0}^{\infty} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \ldots$$

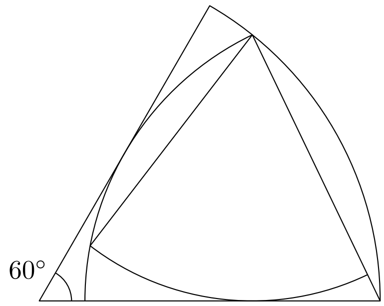
Z toho plyne, že d_l má periodu délky 16. Indexy l splňující $d_{l+2} \equiv d_{l-5} \pmod 7$ jsou právě $l \equiv 4, 12 \pmod{16}$. To jsou tedy indexy hledaných m_l. Jelikož $6 \le l \le 2024$ a $2024 = 126 \cdot 16 + 8$, máme řešení ve tvaru $l = 16 \cdot k + 4$ pro $1 \le k \le 126$ a také řešení ve tvaru $l = 16 \cdot k + 12$ pro $0 \le k \le 125$. Celkem existuje $2 \cdot 126 = 252$ řešení.

Úloha 53. Do kruhové výseče příslušné středovému úhlu o velikosti 60° je vepsaná další kruhová výseč, do které je vepsaná ještě další kruhová výseč jako na obrázku. Určete poměr poloměrů nejmenší a největší výseče.



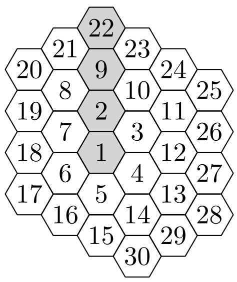
Výsledek. $\sqrt{39}/8$

Řešení. Nejmenší výseč otočíme jako na obrázku níže.



Nechť má střed první výseče souřadnice $(0,0)$ a pravý vrchol $(1,0)$. Protože má při této volbě největší výseč poloměr 1, výsledkem úlohy je poloměr nejmenší výseče. Díky tomu, že v bodu dotyku je tečna kolmá na poloměr, lze tento poloměr určit jednoduše jako y-ovou souřadnici průsečíku největšího a prostředního oblouku (a na nejmenší výseč úplně zapomenout). Největší kružnice má rovnici $x^2+y^2=1$ a prostřední $(x-1)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. Odečtením první rovnice od druhé dostáváme $1-2x=\frac{3}{4}-1$, odkud $x=\frac{5}{8}$. Z toho plyne $y=\pm\frac{\sqrt{39}}{8}$, a jelikož záporné řešení v tomto případě nemá smysl uvažovat, jediným řešením je $\frac{\sqrt{39}}{8}$.

Úloha 54. Ve včelím úlu je plástev s 2024 šestiúhelníkovými buňkami. V prostřední buňce je 1 ml medu a další čím dál plnější buňky jsou postupně zaplněny po spirále jako na obrázku až k poslední buňce, která obsahuje 2024 ml medu. Včelí královna Klárka se rozhodla, že ze středu vybuduje dálnici nahoru, v obrázku je vyznačena šedivě, a pilné včelky proto musejí z daných buněk odstranit všechen med. Kolik mililitrů medu se musí přemístit pro výstavbu dálnice?



Výsledek. 17928

Řešení. Označme M_n množství medu v n-té šedé buňce ve směru od středu plástve, tj. $M_1=2$, $M_2=9$ atd. Podívejme se na šestiúhelník tvořený buňkami ve vzdálenosti přesně n od středu. Na projití jedné jeho strany potřebujeme n kroků. Na spirále mezi buňkami s čísly M_n a M_{n+1} projdeme pět stran šestiúhelníku vzdáleného n od centra a jednu stranu šestiúhelníka vzdáleného $n+1$ od středu. Proto platí $M_{n+1}=M_n+5n+(n+1)=M_n+6n+1$. Posloupnost pak můžeme přepsat v uzavřeném tvaru

$$\begin{aligned}M_n &= 6(n-1)+1+M_{n-1}=\cdots\\ &= 6\cdot((n-1)+(n-2)+\cdots+1)+(n-1)+M_1\\ &= 6\cdot\frac{(n-1)n}{2}+n+1\\ &= 3n^2-2n+1.\end{aligned}$$

Označme dále N počet všech buněk na dálnici (mimo středovou). Plástev má 2024 šestiúhelníků, N je tedy největší celé číslo splňující $M_N \leq 2024$ neboli $3N^2-2N \leq 2023$, což je ekvivalentní podmínce

$$N^2-\frac{2}{3}N \leq 674+\frac{1}{3}.$$

Protože $27^2-\frac{2}{3}\cdot 27 > 729-27 > 675$, může být N nejvýše 26. A vskutku, $26^2-\frac{2}{3}\cdot 26 < 676-18 < 674$, takže $N=26$ je hledaný počet dálničních šestiúhelníků.

Nyní zbývá spočítat součet

$$\begin{aligned}
1+\sum_{k=1}^{N} M_k &= 1+3\sum_{k=1}^{N} k^2-2\sum_{k=1}^{N} k+\sum_{k=1}^{N} 1\\
&= 1+\frac{1}{2}N(N+1)(2N+1)-N(N+1)+N\\
&= 1+13\cdot 27\cdot 53-26\cdot 27+26\\
&= 17928.
\end{aligned}$$

Jinou možností, jak spočítat poslední součet, je přepsat si M_k pomocí kombinačních čísel jako

$$M_k = 6\cdot\frac{(k-1)k}{2}+k+1 = 6\binom{k}{2}+\binom{k+1}{1}$$

a použít následující identitu z Pascalova trojúhelníku (známou též jako hokejková identita)

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{n}{m}=\binom{n+1}{m+1}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}
1+\sum_{k=1}^{N} M_k &= 1+6\sum_{k=1}^{N}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{N}\binom{k+1}{1}\\
&= 1+6\binom{N+1}{3}+\left(\binom{N+2}{2}-1\right)\\
&= 27\cdot 26\cdot 25+14\cdot 27\\
&= 17928.
\end{aligned}$$

Úloha 55. Kolik různých celých čísel se vyskytuje v posloupnosti

$$\left\lfloor\frac{1^2}{2024}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{2^2}{2024}\right\rfloor, \ldots, \left\lfloor\frac{2024^2}{2024}\right\rfloor,$$

kde $\lfloor x\rfloor$ značí největší celé číslo menší nebo rovné x?

Výsledek. 1519

Řešení. Jelikož $(n+1)^2-n^2=2n+1$, pro $n\leq 1011$ platí $\frac{(n+1)^2}{2024}-\frac{n^2}{2024}=\frac{2n+1}{2024}\leq\frac{2023}{2024}<1$, a tedy $\left\lfloor\frac{(n+1)^2}{2024}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{n^2}{2024}\right\rfloor+1$. Z toho plyne, že posloupnost $\left\lfloor\frac{1^2}{2024}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{2^2}{2024}\right\rfloor, \ldots, \left\lfloor\frac{1012^2}{2024}\right\rfloor$ obsahuje všechna celá čísla od $\left\lfloor\frac{1^2}{2024}\right\rfloor=0$ do $\left\lfloor\frac{1012^2}{2024}\right\rfloor=506$, v prvních 1012 členech posloupnosti je tak 507 různých prvků.

Na druhou stranu, pro $n\geq 1012$ platí $\frac{(n+1)^2}{2024}-\frac{n^2}{2024}=\frac{2n+1}{2024}\geq\frac{2025}{2024}>1$, a tedy $\left\lfloor\frac{(n+1)^2}{2024}\right\rfloor>\left\lfloor\frac{n^2}{2024}\right\rfloor$. Z toho plyne, že každý prvek z $\left\lfloor\frac{1013^2}{2024}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{1014^2}{2024}\right\rfloor, \ldots, \left\lfloor\frac{2024^2}{2024}\right\rfloor$ je v posloupnosti nový (jelikož je ostře větší než předchozí člen posloupnosti), mezi posledními 1012 prvky je všech 1012 prvků různých (a jsou také různé od prvků v první polovině posloupnosti).

Celkem tak posloupnost obsahuje $507+1012=1519$ různých prvků.

Úloha 56. Kolik existuje uspořádaných čtveřic (a,b,c,d) s vzájemně různými prvky $a,b,c,d\in\{1,2,\ldots,17\}$ takových, že $a-b+c-d$ je dělitelné 17?

Výsledek. 3808

Řešení. Zkonstruujeme pravidelný 17úhelník s vrcholy $P_1,\ldots,P_{17}$. Jelikož $a-b\equiv d-c\pmod{17}$, vrcholy P_a,P_b,P_c,P_d tvoří rovnoramenný lichoběžník s rovnoběžnými základnami P_aP_c a P_bP_d. Po odebrání kteréhokoli vrcholu sedmnáctiúhelníka můžeme zbylých 16 vrcholů spárovat tak, že tvoří 8 rovnoběžných úseček a každá dvojice takových úseček definuje lichoběžník (a jemu odpovídající podmnožinu $\{a,b,c,d\}$). Existuje $17\cdot\binom{8}{2}=476$ takových podmnožin a každá podmnožina definuje osm uspořádaných čtveřic: vybereme, která základna je P_aP_c a která P_bP_d, následně můžeme prohodit a s c a b s d, čímž dostáváme $2\cdot 2\cdot 2=8$ možností. Celkem tak máme $8\cdot 476=3808$ uspořádaných čtveřic ze zadání.

Úloha 57. Mějme obdélník $ABCD$ a na straně CD bod E takový, že $2|DE| = |EC|$. Průsečík BD a AE označíme jako F. Platí-li $|\sphericalangle AFD| = 45°$, určete poměr $\frac{|AD|}{|AB|}$.

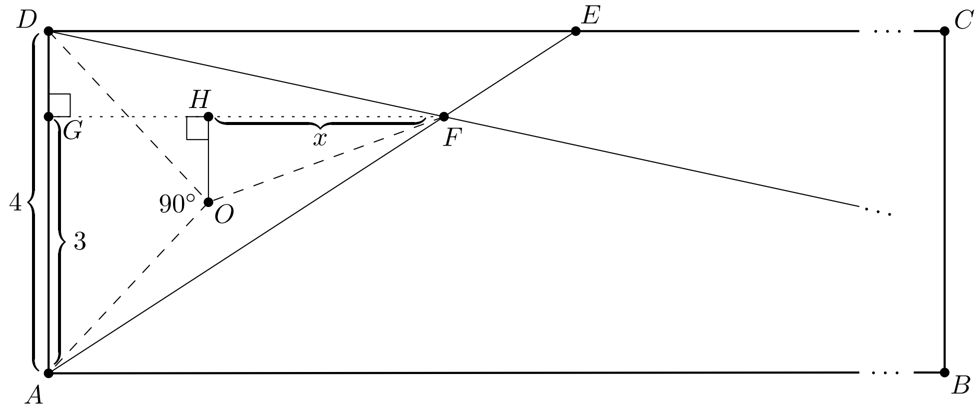
Výsledek. $\frac{\sqrt{7}-2}{3}$

Řešení. Konfigurace je invariantní vůči škálování; předpokládejme tedy pro jednoduchost $|AD| = 4$. Označíme kolmou projekci F na AD jako G, střed kružnice opsané trojúhelníku ADF jako O a kolmý průmět O na GF jako H. Trojúhelníky ABF a EDF jsou podobné s poměrem $|AB| : |ED| = 3 : 1$, z čehož plyne $|AG| = 3$. Potom $|\sphericalangle DOA| = 2|\sphericalangle DFA| = 90°$, což znamená, že AOD je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Vzdálenost bodu O od AB a AD je 2. Díky rovnoběžnosti OH a AG máme $|OH| = |AG| - 2 = 1$. Také platí $|HG| = 2$, protože tato délka je rovna vzdálenosti O od AD. Poslední neznámou délku strany v trojúhelníku HOF označíme jako $x = |HF|$. Podle Pythagorovy věty platí

$$x^2 + 1^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{7}.$$

Jelikož jsou trojúhelníky DGF a DAB podobné, hledaný poměr je

$$\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|DG|}{|GF|} = \frac{1}{2+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}.$$



Úloha 58. Mějme polynom $P(x)$ stupně 10 s celočíselnými koeficienty takový, že má pouze reálné kořeny a $P(x)$ dělí polynom $P\big(P(x) + 2x - 4\big)$. Určete hodnotu $\frac{P(2024)}{P(206)}$.

Poznámka: Pro polynomy s celočíselnými polynomy řekneme, že $P(x)$ dělí polynom $Q(x)$, jestliže existuje polynom $R(x)$ s celočíselnými koeficienty splňující $Q(x) = R(x) \cdot P(x)$.

Výsledek. $10^{10} = 10000000000$

Řešení. Pokud je r kořen $P(x)$, potom také $2r-4$, $2(2r-4)-4 = 4r-12$, $2(4r-12)-4 = 8r-28, \ldots, 2^n r - 2^{n+2} + 4$ musejí být kořeny $P(x)$. Jelikož má $P(x)$ nejvýše 10 reálných kořenů, existují $j > i$ taková, že $2^i r - 2^{i+2} + 4 = 2^j r - 2^{j+2} + 4$. Z toho plyne, že $2^i \cdot (r-4) = 2^j \cdot (r-4)$, tedy $r = 4$. Ukázali jsme tedy, že je-li r kořenem P, pak $r = 4$. Tudíž $P(x) = a \cdot (x-4)^{10}$, kde a je reálná konstanta. Dostáváme $\frac{P(2024)}{P(206)} = \left(\frac{2020}{202}\right)^{10} = 10^{10} = 10000000000$.

Úloha 59. José stojí v kroužku 2024 hráčů označených čísly $1, 2, \ldots, 2024$ po směru hodinových ručiček, kteří si mezi sebou hází frisbee diskem. Hráč na pozici 1 hodí disk hráči na pozici 3, ten hodí disk hráči na pozici 5 a tak dále. Každý tedy hází disk hráči vedle svého levého souseda (vynechá tak hráče vedle sebe). Každý přeskočený hráč se rozzlobí a kroužek opustí. To se opakuje, dokud nezůstanou poslední dva házející hráči. Pokud chce José zůstat jako jeden z posledních dvou, na kterou pozici si má na začátku stoupnout? Určete součet čísel označujících takové pozice.

Výsledek. 2978

Řešení. Pokud hrají poslední dva hráči, ten, který má disk, jej hází sám sobě, a je tak posledním v kroužku. Abychom našli původní pozici takového hráče, uvažujeme následující. Pokud je v kroužku 2^n hráčů, potom, co disk projde celým kroužkem, každý na sudé pozici kroužek opustí a budeme ve stejné situaci s 2^{n-1} hráči. Navíc hráč na pozici 1 bude mít opět disk. Z indukce plyne, že takový hráč zůstane jako poslední. Pokud je v kroužku $2^n + k$ hráčů, po k hodech bude hráč s diskem v podobné situaci v kroužku, kde zbývá 2^n hráčů. Takový hráč byl původně na pozici $2k+1$. Mezi $2024 = 1024 + 1000$ hráči bude na pozici 2001. Pro druhého hráče z posledních dvou a počet hráčů $2^n + 2^{n+1}$ bude předposlední hráč, který zůstane ve hře, původně na pozici 1. Snadno ověříme pro malá n. Pro 3, 6 nebo 12 hráčů bude předposlední hráč původně na pozici 1. Podobně dle indukce pro $2^{n+1} + 2^{n+2}$ hráčů zůstane po jednom kole házení v kolečku $2^n + 2^{n+1}$ hráčů a hráč na pozici 1 bude mít znovu disk. Pokud bude hráčů $2^n + 2^{n+1} + k$, po k hodech budeme znovu ve známé situaci, původní pozice předposledního bude opět $2k+1$. Jelikož $2024 = 1024 + 512 + 488$, pozice předposledního hráče bude 977. Odpověď je tak $2001 + 977 = 2978$.

Úloha 60. Ondra si hází diskem se třemi kamarády. Dodržují pravidlo, že nikdo nesmí vrátit disk tomu, kdo mu zrovna přihrál. Ondra začínal a po deseti hodech skončil disk zase u něj. Kolika různými způsoby k tomu mohlo dojít?

Výsledek. 414

Řešení. Spočtěme všechny možné posloupnosti přihrávek bez ohledu na podmínku, že Ondra musí být poslední. Na začátku má Ondra tři možnosti, komu disk hodit. Každý další člověk má dvě možnosti podle pravidla, které si určili. Pokud proběhlo n hodů, máme $3 \cdot 2^{n-1}$ možností.

Označme y_n počet všech možných posloupností n hodů s Ondrou na konci. V n-tém hodu je celkem $3 \cdot 2^{n-1}$ možností, některé posloupnosti lze protáhnout nahráním Ondrovi. Posloupnosti, u kterých to nejde, jsou přesně ty, kde má Ondra disk po n-tém nebo $(n-1)$. hodu, protože ho pak musí hodit někomu jinému. Těch je y_n, respektive $2y_{n-1}$. Proto platí $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$.

Je jednodušší přímo spočítat prvních deset členů posloupnosti než hledat explicitní vyjádření. Z $y_1 = 0$ a $y_2 = 0$ a rekurence $y_{n+1} = 3 \cdot 2^{n-1} - y_n - 2y_{n-1}$ dostáváme $y_3 = 3 \cdot 2^1 - 0 - 0 = 6$, $y_4 = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$, $y_5 = 3 \cdot 2^3 - 6 - 12 = 6$, $y_6 = 3 \cdot 2^4 - 6 - 12 = 30$, $y_7 = 3 \cdot 2^5 - 30 - 12 = 54$, $y_8 = 3 \cdot 2^6 - 54 - 60 = 78$, $y_9 = 3 \cdot 2^7 - 78 - 108 = 198$, $y_{10} = 3 \cdot 2^8 - 198 - 156 = 414$.

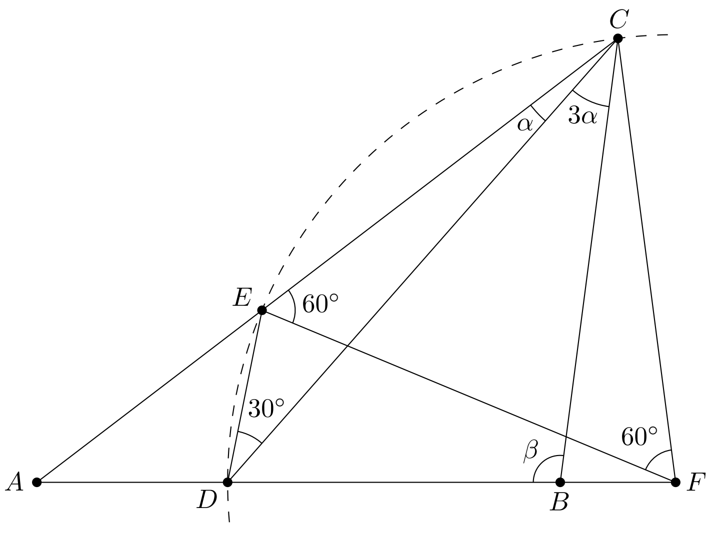
Alternativní řešení. Uvažujme posloupnost n hodů s Ondrou na začátku i na konci, ale nikde mezi tím. Pokud se to stane na začátku hry, Ondra může nahrát třem kamarádům, v dalším hodu jsou na výběr dva kamarádi a pak jsou přihrávky určené jednoznačně. Pokud taková situace nastane uprostřed hry, pak jeden z kamarádů nahraje Ondrovi a ten si může vybrat jen ze dvou možností, další v pořadí pak zase ze dvou možností.

Taková posloupnost n nahrávek nemůže být kratší než 3, proto stačí uvažovat všechny rozklady 10 na součet, kde jsou všechny sčítance větší než 2. To splňují následující možnosti 10, $3+7$, $7+3$, $6+4$, $4+6$, $5+5$, $3+3+4$, $3+4+3$ a $4+3+3$. Rozklad 10 dává 6 možností, rozklady s dvěma částmi dají $6 \cdot 4$ možností, tedy celkem $5 \cdot 6 \cdot 4$. Konečně je $6 \cdot 4 \cdot 4$ možností pro rozklady se třemi částmi, tedy $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4$ celkem. Dohromady je to $6 \cdot (1 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4) = 6 \cdot 69 = 414$ možností.

Úloha 61. Na straně AB trojúhelníka ABC leží bod D takový, že $|\sphericalangle ACD| = 11{,}3°$ a $|\sphericalangle DCB| = 33{,}9°$. Dále $|\sphericalangle CBA| = 97{,}4°$. Určete velikost $\sphericalangle AED$, kde E je bod na AC splňující $|EC| = |BC|$.

Výsledek. 41,3°

Řešení. Pro jednoduchost označme $\alpha = 11{,}3°$ a $\beta = 97{,}4°$, potom $|\sphericalangle DCB| = 3\alpha$. Dále nechť F je takový bod na přímce AB různý od B, že $|CB| = |CF|$.



Spočítáme $|\sphericalangle BCF|$, máme $|\sphericalangle FBC| = 180° - \beta$ a $\triangle BCF$ je rovnoramenný, z čehož plyne $|\sphericalangle BCF| = 180° - 2|\sphericalangle FBC| = 2\beta - 180°$. Zároveň

$$|\sphericalangle ECF| = \alpha + 3\alpha + 2\beta - 180° = 4 \cdot 11{,}3° + 2 \cdot 97{,}4° - 180° = 60°.$$

Jelikož $|CF| = |CB|$, což se rovná $|CE|$ ze zadání, $\triangle CEF$ je rovnostranný.

Dále ukážeme, že $|FC| = |FD|$. Jelikož $|\sphericalangle DCF| = 60° - \alpha$ a $|\sphericalangle CFD| = 180° - \beta$, dostáváme

$$|\sphericalangle FDC| = 180° - (60° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta - 60° = 48{,}7° = 60° - \alpha = |\sphericalangle DCF|,$$

z čehož plyne, že $\triangle CDF$ je rovnoramenný a $|FC| = |FD|$. Dohromady s faktem, že $\triangle CEF$ je rovnostranný, tak dostáváme, že $|FC| = |FE| = |FD|$; jinak řečeno body C, E a D leží na kružnici se středem F. Z toho plyne, že $|\sphericalangle CDE| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CFE| = 30°$ a $|\sphericalangle DEC| = 180° - \alpha - 30°$. Nakonec

$$|\sphericalangle AED| = 180° - |\sphericalangle DEC| = 30° + \alpha = 41{,}3°.$$

Úloha 62. Reálná čísla $a > b > 1$ splňují nerovnost

$$(ab+1)^2 + (a+b)^2 \leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1).$$

Určete nejmenší možnou hodnotu $\dfrac{\sqrt{a-b}}{b-1}$.

Výsledek. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Řešení. Zadanou nerovnost přeuspořádáme

$$\begin{aligned}(ab+1)^2 + (a+b)^2 &\leq 2(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 1),\\ 0 &\leq 2a^3 + 2b^3 - a^2b^2 - a^2 - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1,\\ 0 &\leq (a^2 - 2b + 1)(-b^2 + 2a - 1).\end{aligned}$$

Jelikož $a > b > 1$, platí $a^2 > b^2$ a dostáváme tak $a^2 - 2b + 1 > b^2 - 2b + 1 = (b-1)^2 > 0$. Z toho pro druhou závorku plyne

$$\begin{aligned}-b^2 + 2a - 1 &\geq 0,\\ 2a - 2b &\geq b^2 - 2b + 1,\\ 2(a-b) &\geq (b-1)^2,\\ \frac{\sqrt{a-b}}{b-1} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Dostáváme hodnotu $1/\sqrt{2}$. Ještě musíme ověřit, že této hodnoty lze dosáhnout vhodnou volbou a, b. Pokud chceme, aby v závěrečné nerovnosti nastala rovnost, musí platit $-b^2 + 2a - 1 \geq 0$ neboli $a = (b^2+1)/2$; jednou možnou volbou je tedy $a = 5/2$ a $b = 2$.

Úloha 63. Vzájemně různá nenulová celá čísla x, y, z splňují

$$\frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} = \frac{(x-1)^2}{y} + \frac{(y-1)^2}{z} + \frac{(z-1)^2}{x}.$$

Jaká je nejmenší možná hodnota $|64x + 19y + 4z|$?

Výsledek. 7

Řešení. Symbolem $\sum_{\text{cyc}} Q(x,y,z)$ budeme označovat sumu tří členů, z nichž druhý a třetí dostaneme jednou, resp. dvěma aplikacemi cyklické záměny $x \to y \to z \to x$; to znamená, že $\sum_{\text{cyc}} Q(x,y,z) = Q(x,y,z) + Q(y,z,x) + Q(z,x,y)$.

Když zadanou rovnici vynásobíme xyz a přeuspořádáme, dostáváme

$$P(x,y,z) = x(x-1)^2(y-z) + y(y-1)^2(z-x) + z(z-1)^2(x-y) = \sum_{\text{cyc}} x(x-1)^2(y-z) = 0.$$

Polynom P je nulový, platí-li $x = y$, $y = z$ nebo $z = x$, takže musí být dělitelný $(x-y)(y-z)(z-x) = \sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)$. Jelikož stupeň $P(x,y,z)$ je 4 a stupeň $\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)$ je 3, musí být zbývající činitel lineární:

$$P(x,y,z) = \Big(\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)\Big) \cdot (ax + by + cz + d)\,.$$

Ještě si upravíme levou stranu roznásobením a využitím rovnosti $\sum_{\text{cyc}} x(y-z) = xy - xz + yz - yx + zx - zy = 0$:

$$P(x,y,z) = \sum_{\text{cyc}} \big(x^3(y-z) - 2x^2(y-z) + x(y-z)\big) = \sum_{\text{cyc}} \big(x^3(y-z) - 2x^2(y-z)\big) + 0.$$

Proto musí platit

$$\sum_{\text{cyc}} \big(x^3(y-z) - 2x^2(y-z)\big) = \Big(\sum_{\text{cyc}} x^2(z-y)\Big) \cdot (ax + by + cz + d)\,.$$

Porovnáním členů obsahujících x^3 dostáváme $x^3(y-z) = x^2(z-y) \cdot ax$, takže $a = -1$; podobně také $b = c = -1$. Porovnáním dalších členů získáme $-2x^2(y-z) = x^2(z-y) \cdot d$ neboli $d = 2$. Tím dostáváme pro P výrazně jednodušší vyjádření:

$$P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)(2 - x - y - z) = 0.$$

Původní rovnost ze zadání je tedy ekvivalentní nulovosti jedné z těchto čtyř závorek. Jelikož ale předpokládáme, že x, y, z jsou vzájemně různá, dostáváme $x + y + z = 2$.

Nyní zbývá najít nejmenší hodnotu $|64x + 19y + 4z|$ za této podmínky. Odečtením $4(x + y + z) - 8 = 0$ dostáváme

$$|64x + 19y + 4z| = |15 \cdot (4x + y) + 8|.$$

Protože je $4x + y$ celé číslo, vidíme, že výraz nabývá minima pro $4x + y = -1$. (Toho lze dosáhnout například volbou $(x, y, z) = (-2, 7, -3)$.) Touto nejmenší možnou hodnotou je $|-15 + 8| = 7$.